Joensuun yliopisto - Timo Erkama

180402

Sovellettu analyysi

LaTeX-käännös Tatu Sallinen

Sisältö

1 Fourier-sarjat ja integraalit

1.1 Jaksolliset funktiot

Sanomme, että funktio $f(x)$ on jaksollinen, jos on olemassa $T > 0$ siten, että

$$f(x+T) = f(x)\ \forall\ x. \tag{1}$$

Tällöin sanomme, että f:llä on jaksona T. Pienin luku $T > 0$ siten, että f:llä on jaksona T, on f:n perusjakso tai f:n jakso.

Esimerkki. Funktioiden $\sin x$ ja $\sin 2x$ perusjaksot ovat vastaavasti 2π ja π. Esim. $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

$$\sin 2(x+T) = \sin 2x\ \forall\ x$$

$$x = 0 \Rightarrow \sin 2T = \sin 0 = 0 \Rightarrow 2T = n\pi;\ T = \frac{n\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2T\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos 2T = 1 \Rightarrow 2T = k2\pi \Rightarrow T = \pi \text{ (pienin mahdollinen } T)$$

$$\sin 2(x+\pi) = \sin 2x$$

Jaksollisen funktion kuvaajan piirtämiseksi riittää tuntea sen kuvaaja jollakin T:n pituisella välillä. Yhtälöstä (1) seuraa, että jokaiselle kokonaisluvulle n $f(x+nT) = f(x)\ \forall\ x$ eli f:llä on jaksona nT. Edelleen, jos funktioilla $f(x)$ ja $g(x)$ on jaksona T, niin myös funktiolla $h(x) = af(x) + bg(x)$ (a, b vakioita) on jaksona T.

Huomautus. Vakiofunktiolla on jaksona jokainen positiivinen luku.

Trigonometrinen polynomi on muotoa $f(x) = \sum_{n=0}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$,

missä $L > 0$ ja a_n, b_n ovat vakioita.Tällaisella funktiolla on jaksona $2L$.

$$\cos\frac{n\pi(x+2L)}{L} = \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \cos\frac{n\pi x}{L}$$

Seuraavassa tutkimme kysymystä siitä, miten annettua jaksollista funktiota voidaan approksimoida trigonometrisillä polynomeilla. Tämä kysymys johtaa ns. Fourier-sarjojen teoriaan.

Lemma 1.

Jos välillä $[-L, L]$ integroituvalla funktiolla f on jaksona $2L$, niin

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{c}^{c+2L} f(x)dx \;\forall\; c \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Valitaan $\alpha = c$, $\gamma = c + 2L$, $\beta = -L$.

$$\int_{c}^{c+2L} f(x)dx = \int_{c}^{-L} f(x)dx + \int_{-L}^{c+2L} f(x)dx.$$

Valitaan $\alpha = -L$, $\gamma = L$, $\beta = c + 2L$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{c+2L} f(x)dx + \int_{c+2L}^{L} f(x)dx.$$

Vähentämällä puolittain

$$\int_{c}^{c+2L} f(x)dx - \int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{c}^{-L} f(x)dx - \int_{c+2L}^{L} f(x)dx \,(\leftarrow x = t + 2L)$$

$$= \int_{c}^{-L} f(x)dx - \int_{c}^{-L} f(t + 2L)dt = \int_{c}^{-L} \left[f(t) - f(t + 2L)\right] dt = 0.$$

1.2 Fourier-sarjat

Olkoon $f(x)$ määritelty ja integroituva välillä $(-L, L)$ ja tämän välin ulkopuolella siten, että $f(x+2L) = f(x)$. Oletamme siis, että f:llä on jaksona $2L$. Funktion f Fourier-sarja on

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \tag{1}$$

missä Fourier-kertoimet a_n, b_n määritellään yhtälöillä (2), $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \tag{2}$$

Koska f:llä on jaksona $2L$, niin kertoimet a_n ja b_n voidaan määritellä myös kaavoilla (3) (Lemma 1.):

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{3}$$

Kaavat (2) saadaan kaavoista (3) arvolla $c = -L$. Kaavasta (2) saadaan arvolla $n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx.$$

Fourier-sarjan (1) vakiotermi on siis

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \text{ funktion } f \text{ keskiarvo yhdellä jaksovälillä.}$$

Jos $L = \pi$, niin funktiolla f on jaksona 2π, Fourier-sarja (1) on tällöin

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

ja kertoimien lausekkeissa (2) ja (3) on $\cos\dfrac{n\pi x}{L} = \cos nx$ ja $\sin\dfrac{n\pi x}{L} = \sin nx$.

1.3 Dirichlet'n ehdot

Määritelmä. Funktio f on paloittain jatkuva välillä I, jos

(i) väli I voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin $I_1, I_2, \ldots, I_n$ siten, että f on jatkuva jokaisen osavälin jokaisessa sisäpisteessä

(ii) funktiolla f on osavälien $I_1, I_2, \ldots, I_n$ alku- ja loppupisteissä vastaavasti oikean- ja vasemmanpuoleiset äärelliset raja-arvot.

Funktio on paloittain jatkuva, jos sillä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia, joissa kussakin funktiolla on oikean- ja vasemmanpuoleiset äärelliset raja-arvot

$$f(x+) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f(x+\varepsilon)$$
$$f(x-) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f(x-\varepsilon).$$

Lause 1. Oletetaan, että

(1) $f(x)$ on määritelty ja derivoituva välillä $(-L, L)$ paitsi mahdollisesti äärellisen monessa pisteessä $x \in (-L, L)$

(2) $f(x)$ on määritelty välin $(-L, L)$ ulkopuolella siten, että f:llä on jaksona $2L$

(3) f:n derivaatta f' on paloittain jatkuva välillä $(-L, L)$.

Silloin funktion f Fourier-sarja suppenee kohti arvoa

(a) $f(x)$, jos f on jatkuva pisteessä x

(b) $[f(x+) + f(x-)]/2$, jos f on epäjatkuva pisteessä x.

Huomautus. Dirichlet'n ehdot (1), (2) ja (3) ovat riittäviä mutta eivät välttämättömiä Fourier-sarjan suppenemiselle. Esimerkiksi funktion f pelkästä jatkuvuudesta ei vielä seuraa Fourier-sarjan suppeneminen.

Esimerkki. Olkoon f funktio, jolla on jaksona 10 ja jolle

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad -5 < x < 0 \\ 3, & \text{kun} \quad 0 < x < 5 \end{cases}.$$

Funktio f toteuttaa Lauseen 1. ehdot välillä $(-5, 5)$. Siis f:n Fourier-sarja suppenee kohti arvoa $f(x)$, kun $-5 < x < 0$ tai $0 < x < 5$ ja kohti arvoa $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$, kun $x = \pm 5$ tai $x = 0$.

1.4 Parilliset ja parittomat funktiot

Määritelmä. Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)\ \forall\ x$.
Esimerkiksi $x^4, 2x^6 - 4x^2 + 5, \cos x, e^x + e^{-x}$ ovat parillisia funktioita.
Funktio f on pariton, jos $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x$.
Esimerkiksi $x^3, x^5 - 3x^3 + 2x, \sin x, \tan 3x$ ovat parittomia funktioita.

Lemma 2.

Jos f on välillä $[-L, L]$ integroituva pariton funktio, niin $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0.$

Todistus. Muuttujanvaihto $x = -u,\ dx = -du$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx =$$

$$\int_{L}^{0} f(-u)(-du) + \int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(-u)du + \int_{0}^{L} f(x)dx =$$

$$-\int_{0}^{L} f(u)du + \int_{0}^{L} f(x)dx = 0.$$

Vastaavasti parillisille funktioille: $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx.$

Seuraus. Parillisen funktion Fourier-sarjassa on vakion ohella vain kosinitermejä.

Todistus. Olkoon f parillinen. Riittää näyttää, että $b_n = 0$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \text{ Tässä } f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

on pariton funktio, koska f on parillinen. Lemman 2. mukaan

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0.$$

Vastaavasti parittoman funktion Fourier-sarjassa on vain sinitermejä.

Huomautus. Jokainen funktio voidaan esittää parillisen ja parittoman funktion summana.

1.5 Sini- ja kosinitermiset Fourier-sarjat

Sini- ja kosinitermiset Fourier-sarjat ovat sarjoja, joissa esiintyy vastaavasti vain sini- ja kosinitermejä. Jos $f(x)$ on määritelty välillä $(0, L)$, niin f:n siniterminen Fourier-sarja on sen parittoman funktion Fourier-sarja, jolla on jaksona $2L$ ja joka yhtyy funktioon f välillä $(0, L)$. Ko. sarjan kertoimille pätee

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Vastaavasti f:n kosiniterminen Fourier-sarja on sen parillisen funktion Fourier-sarja, jolla on jaksona $2L$ ja joka yhtyy funktioon f välillä $(0, L)$. Tällöin sarjan kertoimet ovat

$$b_n = 0, a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Esimerkki. Kehitetään funktio $f(x) = x$ välillä $0 < x < 2$ sinitermiseksi Fourier-sarjaksi. Muodostetaan funktion f pariton jatko, jolla on jaksona $2L = 4$. Koska $L = 2$, niin

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{L}dx =$$

$$\overset{2}{\underset{0}{/}}\left[x\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right] - \int_0^2\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)dx =$$

$$-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \overset{2}{\underset{0}{/}}\frac{4}{n^2pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2} = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n$$

$$a_n = 0$$

$$\text{Siis } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{2} =$$

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \ldots\right) = x$$

Määritelmä. Välillä $[-L, L]$ muodostettu trigonometrinen sarja on muotoa

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \tag{1}$$

missä A, α_n ja β_n ovat vakioita. Jos sarjat $\sum \alpha_n$ ja $\sum \beta_n$ suppenevat itseisesti, niin sarja (1) suppenee tasaisesti välillä $[-L, L]$.

$$\left(\left| \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |\alpha_n| \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| + |\beta_n| \left| \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| \right)$$

Lause 2.

Jos muotoa (1) oleva sarja suppenee kohti funktiota f tasaisesti välillä $[-L, L]$, niin (1) on funktion f Fourier-sarja, so. $\alpha_n = a_n, \beta_n = b_n, A = \frac{a_0}{2}$. Todistusta varten tarvitaan kaksi apulausetta.

Lemma 3.

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0, \text{ kun } k \in \mathbb{Z}_+, k \neq 0.$$

Todistus.

$$\text{Lemma 2.} \rightarrow \int_{-L}^{L} \sin \frac{k\pi x}{L} dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \Big/_{-L}^{L} \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{L} = \frac{L}{k\pi} \left(\sin k\pi - \sin(-k\pi) \right) = 0.$$

Lemma 4.

Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Silloin

(a) $$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & \text{jos } m \neq n \\ L, & \text{jos } m = n \end{cases}$$

(b) $$\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

Todistus.

(a) Käytetään kaavoja

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Jos $m \neq n$, niin Lemman 3. nojalla

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]dx = 0$$

Jos $m = n$, niin Lemman 3. nojalla

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot 2L + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{2n\pi x}{L}dx = L$$

Huomautus. Jos $m = n = 0$, niin yo. integraalien arvot ovat $2L$ ja 0.

(b) Seuraa Lemmasta 2., sillä $\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}$ on pariton.

Lauseen 2. todistus.

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow \tag{2}$$

$$f(x)\cos\frac{m\pi x}{L} = A\cos\frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\right) (3).$$

Merkitään $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ (sarjan (2) jäännöstermi.)

(2) suppenee $\Rightarrow R_N(x) \to 0,$ kun $N \to \infty$
(2) suppenee tasaisesti $\Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_N(x)| \to 0,$ kun $N \to \infty$.
Koska (2) suppenee tasaisesti, niin f on jatkuva ja $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_N(x)| \to 0$, kun $N \to \infty$. Sarjan (3) jäännöstermi on

$$\cos\frac{m\pi x}{L}R_N(x) \text{ ja } \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\cos\frac{m\pi x}{L}R_N(x)\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}}|R_N(x)| \to 0, \text{ kun } N \to \infty.$$

Siis myös sarja (3) suppenee tasaisesti, joten se voidaan integroida termeittäin. Jos $m > 0$, niin Lemmojen 3. ja 4. nojalla saadaan

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx =$$

$$A\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\beta_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right] =$$

$$\alpha_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \alpha_m L(\text{Lemma 4.})\ .$$

$$\text{Siis } \alpha_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = a_m\ (m = 1, 2, \dots).$$

Kerrotaan yhtälö (2) puolittain funktiolla $\sin\frac{m\pi x}{L}$, integroidaan yli välin $[-L, L]$ ja sovelletaan Lemmoja 3. ja 4. Saadaan

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx =$$

$$A\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\beta_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right] = \beta_m L.$$

$$\text{Siis } \beta_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = b_m\ (m = 1, 2, \dots).$$

Integroidaan yhtälö (2) puolittain yli välin $[-L, L]$ ja sovelletaan Lemmaa 3.

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2AL + 0, \text{ siis } \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}.$$

Seuraus. Jos

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{N} \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

on trigonometrinen polynomi, niin $f(x)$ on f:n Fourier-sarjan summa ja f:n kertoimet ovat

$$a_0 = 2A, \ a_n = \begin{cases} \alpha_n, & \text{kun } 1 \le n \le N \\ 0, & \text{kun } n > N \end{cases}, \ b_n = \begin{cases} \beta_n, & \text{kun } 1 \le n \le N \\ 0, & \text{kun } n > N \end{cases}.$$

Jokainen trigonometrinen polynomi on itsensä Fourier-sarja.

Lause 3.

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jolla on jaksona 2π. Silloin f:n Fourier-sarja suppenee tasaisesti.

Todistus. Osittaisintegrointi: Jos $n \ge 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx =$$

$$\Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(x) \cos nx}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx.$$

Tässä $\Big/_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx = \cos n\pi [f'(\pi) - f'(-\pi)] = 0$, koska f':lla on jaksona 2π.

$$(f(x + 2\pi) = f(x), \ f'(x + 2\pi) = f'(x))$$

Edelleen, koska f'' on jatkuva, se on rajoitettu välillä $[-\pi, \pi]$: $|f''(x)| \le M$ jollekin vakiolle M. Siten

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx \right| \le \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| |\cos nx| dx \le$$

$$\frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M |\cos nx| dx \le \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = \frac{2M}{n^2}.$$

Samalla tavalla nähdään, että myös $|b_n| \le \frac{2M}{n^2}$ $\forall \ n \ge 1$. f:n Fourier-sarjan

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

yleinen termi toteuttaa siis ehdon

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \frac{2M}{n^2}(|\cos nx| + |\sin nx|) \leq \frac{2M}{n^2}(1+1) = \frac{4M}{n^2} = M_n.$$

Koska sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4M}{n^2}$$

suppenee, niin Weierstrassin lauseen nojalla f:n Fourier-sarja suppenee tasaisesti.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ suppenee } \Leftrightarrow p > 1$$

1.6 Sovellusesimerkki

Jouseen ripustetun massan m liikettä kuvaa vaimennetun värähtelyliikkeen differentiaaliyhtälö

$$my'' + cy' + ky = 0, \tag{1}$$

missä c on vaimennuskerroin ja k jousivakio. Tapauksessa $c = 0$ yhtälön jokainen ratkaisu $y(t)$ lähestyy arvoa 0, kun $t \to \infty$. Jos massaan m vaikuttaa lisäksi y-akselin suuntainen ajasta riippuva ulkoinen voima $r(t)$, värähtelyä kuvaava differentiaaliyhtälö on

$$my'' + cy' + ky = r(t). \tag{2}$$

Tarkastellaan erikoistapausta, jossa $r(t)$ on jaksollinen s.e.

$$r(t) = F_0 \cos \omega t, \tag{3}$$

missä $F_0 > 0$ ja $\omega > 0$ ovat vakioita. Tällöin yhtälöllä (2) on muotoa

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \tag{4}$$

oleva yksityisratkaisu, missä vakiot a ja b voidaan etsiä määräämättömien kertoimien menetelmällä. Toisen kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teorian mukaan jokainen yhtälön (2) ratkaisu saadaan lisäämällä ratkaisuun (4) jokin homogeenisen yhtälön (1) ratkaisu $y_h(t)$.

Koska $\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0$, näemme, että jokainen yhtälön (2) ratkaisu lähestyy asymptoottisesti yksityisratkaisua (4), kun $t \to \infty$.

Jos ulkoinen voima $r(t)$ on jaksollinen, mutta ei sinimuotoinen, yhtälön (2) yksityisratkaisu voidaan löytää kehittämällä $r(t)$ Fourier-sarjaksi.

Esimerkki. Olkoon $r(t)$ funktio, jolla on jaksona 2π ja jolle

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2}, & \text{kun } -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2}, & \text{kun } 0 < t < \pi \end{cases} \quad (\cdot 10^{-5} \text{ N}).$$

Etsitään yhtälölle (2) yksityisratkaisu, kun $m = 1$ g, $c = 0,02$ g/s, $k = 25$ g/s^2. Funktion $r(t)$ kosiniterminen Fourier-sarja on

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \dots\right). \tag{5}$$

Tarkastellaan epähomogeenista yhtälöä

$$y'' + 0,02y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt, \tag{6}$$

missä oikealla puolella on Fourier-sarjan (5) n:s termi ($n = 1, 3, 5, \dots$). Oikea puoli on siis muotoa (3), missä $\omega = n$. Yhtälöllä (6) on näin ollen muotoa (4) oleva yksityisratkaisu $y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$. Vakiot A_n ja B_n voidaan määrätä sijoittamalla yhtälöön (6); tulos on

$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2\pi D},\ B_n = \frac{0,08}{n\pi D},\ \text{missä } D = (25 - n^2)^2 + (0,02n)^2.$$

Laskemalla puolittain yhteen yhtälöt

$$y_n'' + 0,02y_n' + 25y_n = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

eri n:n arvoilla nähdään, että summa

$$S_n = y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n+1}$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$S_n'' + 0,02S_n' + 25S_n = r_n(t),$$

missä $r_n(t)$ on Fourier-sarjan (5) osasumma

$$r_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{4}{(2\nu+1)^2\pi}\cos(2\nu+1)t.$$

Tarkempi analyysi osoittaa, että raja-arvo $y = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ on olemassa ja antaa etsityn yksityisratkaisun yhtälölle (2). Siis $y = y_1 + y_3 + y_5 + \dots$.

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt.$$

Tutkitaan ratkaisun luonnetta: lasketaan värähtelyjen y_n amplitudit

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n^2\pi\sqrt{D}}, \; D = (25 - n^2)^2 + (0,02n)^2$$

arvoilla $n = 1, \dots, 9$:

$$C_1 = 0,0530;\; C_3 = 0,0088;\; C_5 = 0,5100;\; C_7 = 0,0011;\; C_9 = 0,0003.$$

Huomataan, että amplitudi on suurimmillaan lähinnä systeemin luonnollista värähtelytaajuutta s.e. $y \approx y_5$. Kysymyksessä on siten lähes harmoninen värähtely, jonka taajuus on 5 kertaa ulkoisen voiman taajuus.

1.7 Pienimmän neliön approksimointi

Olkoon f välillä $[-\pi, \pi]$ määritelty paloittain jatkuva funktio, jota approksimoidaan trigonometrisellä polynomilla

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \tag{1}$$

missä A, α_n ja β_n ovat vakioita (vrt. Lause 2.). Mitataan approksimaation virhettä E pienimmän neliön normilla

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 \, dx. \tag{2}$$

Kiinnitetään N ja määrätään funktion (1) kertoimet siten, että E on mahdollisimman pieni. (2) voidaan kirjoittaa

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx. \tag{3}$$

Sijoitetaan (1) viimeiseen integraaliin ja integroidaan käyttämällä Lemmoja 3. ja 4. Saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = 2\pi A^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(\alpha_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx + \beta_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \right) =$$

$$\pi\left(2A^2+\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)\right).$$

Sijoitetaan (1) keskimmäiseen integraaliin kaavassa (3), saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF dx = A\int_{-\pi}^{\pi} f dx+\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx+\beta_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right)=$$

$$\pi\left(Aa_0+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)\right),$$

missä a_n, b_n ovat f:n Fourier-kertoimet. (3) tulee nyt muotoon $E =$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx-2\pi\left[Aa_0+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)\right]+\pi\left[2A^2+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right] \quad (4)$$

Jos F:n lausekkeessa (1) valitaan $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = b_n$ ja $A = \frac{a_0}{2}$, niin (4):n nojalla approksimaation virhe on

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx-\pi\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right). \quad (5)$$

Vähentämällä (5) puolittain (4):stä saadaan

$$E-E^* = \pi\left(2\left(A-\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{N}\left[(\alpha_n-a_n)^2+(\beta_n-b_n)^2\right]\right).$$

Koska oikea puoli on selvästi ei-negatiivinen, niin $E-E^* \geq 0$ eli $E \geq E^*$. Lisäksi $E = E^*$ jos ja vain jos $A = \frac{a_0}{2}$, $\alpha_n = a_n$ ja $\beta_n = b_n$. Tästä seuraa:

Lause 4.

Kun funktiota f approksimoidaan välillä $-\pi \leq x \leq \pi$ trigonometrisellä polynomilla (1), niin virhe pienimmän neliön normilla mitattuna ona mahdollisimman pieni täsmälleen silloin, kun F on funktion f Fourier-sarjan N:s osasumma. Virheen minimiarvolla on lauseke (5). Lausekkeen (5) arvo pienenee monotonisesti N:n kasvaessa. Siten Fourier-sarjan N:s osasumma antaa N:n kasvaessa yhä parempia approksimaatioita f:lle normin (2) suhteen. Koska (5) pätee kaikilla N:n arvoilla ja $E^* \geq 0$, saadaan ns. Besselin epäyhtälö

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{6}$$

Antamalla $N \to \infty$ saadaan

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Erikoisesti $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, kun $N \to \infty$. Itse asiassa on voimassa yhtäsuuruus:

Lause 5. (Parsevalin kaava)

Välillä $(-L, L)$ paloittain jatkuvan funktion f Fourier-kertoimille a_n, b_n pätee

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Todistus. Todistetaan lause tapauksessa, jossa f:n Fourier-sarja suppenee välillä $[-L, L]$ tasaisesti kohti funktiota f.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (-L \leq x \leq L)$$

$$\Rightarrow (f(x))^2 = \frac{a_0}{2}f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Koska sarja suppenee tasaisesti, se voidaan integroida termeittäin:

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right).$$ Tässä

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = La_0, \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = La_n, \int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = Lb_n. \tag{7}$$

$$\text{Siis } \int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2}L + L\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \text{ josta väite seuraa.}$$

1.8 Fourier-sarjojen derivointi ja integrointi

Voidaan soveltaa sarjojen derivointia ja integrointia koskevia yleisiä lauseita. Integroinnin suhteen pätee lisäksi

Lause 6. Jos $f(x)$ on paloittain jatkuvat $[-L, L]$ ja $a, x \in [-L, L]$, niin f:n Fourier-sarja voidaan integroida a:sta x:ään termeittäin ja integroimalla saatu sarja suppenee tällöin tasaisesti kohti funktiota

$$\int_a^x f(u)du.$$

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = x$ $(-2 < x < 2)$. §1.5:n esimerkissä on määrätty funktion f Fourier-sarja välillä $-2 < x < 2$:

$$f(x) = x = \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \dots\right).$$

Integroimalla 0:sta x:ään saadaan Lauseen 6. nojalla

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\int_0^x \sin\frac{\pi x}{2}dx - \frac{1}{2}\int_0^x \sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \dots\right) = \tag{1}$$

$$\frac{4}{\pi}\left(-\Big/_0^x \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\Big/_0^x \frac{2}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{2} - \frac{1}{3}\Big/_0^x \frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi x}{2} + \dots\right) =$$

$$\frac{8}{\pi^2}\left[\left(-\cos\frac{\pi x}{2} + 1\right) + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi x}{2} - 1\right) - \frac{1}{9}\left(\cos\frac{3\pi x}{2} - 1\right) + \dots\right] =$$

$$\frac{8}{\pi^2}\left(-\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \dots\right) + C,$$

$$\text{missä } C = \frac{8}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\right).$$

Vakio C voidaan määrätä myös toisella tavalla. Yhtälön (1) oikea puoli suppenee välillä $-2 < x < 2$ tasaisesti kohti funktiota $\frac{x^2}{2}$ ja on näin ollen (vrt. Lause 2.) funktion $\frac{x^2}{2}$ kosiniterminen Fourier-sarja välillä $-2 < x < 2$. Näin ollen

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\Big/_0^2 \frac{x^3}{6} = \frac{4}{6}.$$

Funktion x^2 Fourier-sarja välillä $-2 < x < 2$ on siis

$$x^2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \dots\right)$$

ja sarja suppenee tasaisesti välillä $-2 \leq x \leq 2$.

Huomautus. Koska

$$C = \frac{4}{6} = \frac{8}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\right), \text{ niin}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Esimerkki 2. Esimerkissä 1. ei funktion $f(x) = x$ Fourier-sarjaa voida derivoida termeittäin, sillä derivoimalla saatu sarja

$$2\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{2\pi x}{2} + \cos\frac{3\pi x}{2} - \dots\right)$$

ei suppene millään x:n arvolla (n:s termi $\nrightarrow 0$, kun $n \to \infty$).

1.9 Kompleksitermiset Fourier-sarjat

Kompleksiarvoinen funktio $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $f(x) = u(x) + iv(x)$, missä $u(x)$ ja $v(x)$ ovat $f(x)$:n reaali- ja imaginääriosat.

Määritelmä. f integroituva, jos u ja v integroituvia ja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots}_{\cos\theta} + i\left(\underbrace{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots}_{\sin\theta}\right)$$

$$\text{Eulerin kaava:} \quad \begin{array}{rcl} e^{i\theta} & = & \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} & = & \cos\theta - i\sin\theta \end{array}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Funktion $f(x)$ Fourier-sarjan N:s osasumma

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right)\right) =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}, \tag{2}$$

$$\text{missä } c_0 = \frac{a_0}{2} \text{ ja } c_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}, & \text{kun} \quad n \geq 1 \\ \frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i}, & \text{kun} \quad n \leq -1 \end{cases}.$$

Kun $n \geq 1$, niin

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx - i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right] =$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} - if(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} - i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx.$$

Kun $n \leq -1$, niin

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n}) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{-n\pi x}{L} + i\sin\frac{-n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx.$$

Siis

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx, \text{ kun } n \neq 0. \tag{3}$$

Kaava (3) pätee myös arvolla $n = 0$, sillä

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx.$$

Sarja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

on funktion f kompleksiterminen Fourier-sarja. Sen summalla tarkoitetaan raja-arvoa

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}.$$

Summa on sama kuin f:n Fourier-sarjan summa.

1.10 Ortogonaaliset funktiot

Olkoot $g_m(x)$ ja $g_n(x)$ välillä $a \leq x \leq b$ määriteltyjä reaaliarvoisia funktioita s.e. tulo $g_m(x)g_n(x)$ on integroituva ko. välillä. Merkitään

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)dx, \tag{1}$$

funktioiden g_m ja g_n sisätulo.

Sanomme, että funktiot g_m ja g_n ovat ortogonaaliset välillä $a \leq x \leq b$, jos integraali (1) saa arvon nolla, so.

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \ (m \neq n). \tag{2}$$

Joukko reaaliarvoisia funktioita $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots$ on ortogonaalinen joukko funktioita välillä $a \leq x \leq b$, jos kaikki integraalit (g_m, g_n) ovat olemassa ja $(g_m, g_n) = 0$ aina, kun $m \neq n$.

Funktion $g_m(x)$ normi $\|g_m\|$ määritellään yhtälöllä

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \left(\int_a^b g_m^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Seuraavassa oletetaan, että funktiot g_m ovat rajoitettuna ja niin säännöllisiä, että esiintyvät integraalit ovat olemassa ja funktioiden g_m normit ovat nollasta eroavia.

Jos välillä $a \leq x \leq b$ ortogonaalisen joukon $g_1, g_2, \ldots$ jokaisen funktion normi on 1, niin

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad m \neq n \quad m = 1, 2, \ldots \\ 1, & \text{kun} \quad m = n \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{4}$$

Sanotaan, että tällainen joukko on ortonormaali joukko funktioita välillä $a \leq x \leq b$. Jokaisesta ortogonaalisesta joukosta voidaan muodostaa ortonormaali joukko jakamalla kukin joukon funktioista omalla normillaan.

Esimerkki 1. Funktiot $g_m(x) = \sin mx$ $(m = 1, 2, \ldots)$ muodostavat ortogonaalisen joukon välillä $-\pi \leq x \leq \pi$, sillä

$$(g_m, g_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \ (m \neq n) \ (\text{Lemma 4.}). \tag{5}$$

Tällöin $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$, sillä (vrt. Lemma 4.)

$$\|g_m\|^2 = \int_a^b \sin^2 mx dx = \pi \ (m = 1, 2, \ldots).$$

Näin ollen vastaava ortonormaali joukko koostuu funktioista

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots$$

Esimerkki 2. Välillä $-\pi \leq x \leq \pi$ muodostetuissa Fourier-sarjoissa esiintyvät funktiot

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

muodostavat ortogonaalisen joukon. Tämä seuraa yhtälöistä (5), vastaavista yhtälöistä kosineille ja yhtälöstä

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \ (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Vastaava ortonormaali joukko on

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Kehitettäessä välillä $-\pi \leq x \leq \pi$ annettua funktiota $f(x)$ Fourier-sarjaksi, saadaan siis muotoa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots \tag{6}$$

oleva kehitelmä, missä $g_1(x), g_2(x), \ldots$ ovat Esimerkin 2. ortogonaalisia funktioita ja $c_1, c_2, \ldots$ niihin liittyviä Fourier-kertoimia (poikkeus: vakiotermi).

Yleisemmin voidaan kysyä, onko tällainen esitys mahdollinen, jos Esimerkin 2. funktioiden asemesta tarkastellaan jotakin muuta ortogonaalista funktiojoukkoa $g_1(x), g_2(x), \ldots$ Jos muotoa (6) oleva kehitelmä on tällöin olemassa, se on f:n yleistetty Fourier-sarja ja sen kertoimet ovat f:n yleistettyjä Fourier-kertoimia tarkasteltavan ortogonaalisen funktiojoukon suhteen. Nämä kertoimet voidaan määrätä kuten Lauseen 2. todistuksessa. Kerrotaan yhtälö (6) puolittain funktiolla $g_m(x)$ ja integroidaan yli sen välin $a \leq x \leq b$, jolla funktiot ovat ortogonaaliset.

$$f g_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n g_m.$$

Edellyttäen, että sarja voidaan integroida termeittäin, saadaan

$$\int_a^b f g_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m dx.$$

Ortogonaalisuuden perusteella oikeanpuoleiset integraalit ovat nollia paitsi arvolla $n = m$, jolloin integraali saa arvon $\|g_m\|^2$. Siis

$$\int_a^b f g_m dx = c_m \|g_m\|^2$$

ja Fourier-kertoimille saadaan lauseke

$$c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x) g_m(x) dx. \tag{7}$$

Esimerkin 2. funktioiden tapauksessa tämä kaava antaa lausekkeet tavanomaisille Fourier-kertoimille.

Ortonormaalin joukon tapauksessa voidaan aivan kuten §1.7:ssä johtaa myös yleistetyille Fourier-kertoimille Besselin epäyhtälö

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \cdots \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx. \tag{8}$$

Siten vasemmalla puolella esiintyvä sarja suppenee ja erityisesti $c_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

1.11 Fourier-integraalit

Jos Fourier-sarja suppenee, sen esittämä funktio on aina jaksollinen. Fourier-analyysiä voidaan kuitenkin soveltaa myös sellaisiin koko lukusuoralla määriteltyihin funktioihin, jotka eivät ole jaksollisia.

Esimerkki 1. Kanttiaalto. Tarkastellaan kanttiaaltofunktiota $f_L(x)$, jolla on jaksona $2L > 2$:

$$f_l(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad -L < x < -1 \\ 1, & \text{kun} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{kun} \quad 1 < x < L \end{cases} .$$

Antamalla $L \to 0$ saadaan funktio, joka ei ole enää jaksollinen:

$$f(x) = \lim_{L \to \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} .$$

Esimerkki 2. Eksponenttifunktio. Olkoon $f_L(x)$ funktio, jolla on jaksona $2L$ ja jolle pätee

$$f_L(x) = e^{-|x|},$$

kun $-L < x < L$. Antamalla $L \to \infty$ saadaan jälleen funktio, joka ei ole jaksollinen:

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = e^{-|x|}.$$

Yleisemmin jokainen funktio $f(x)$ voidaan esittää muodossa $f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$, missä funktioilla $f_L(x)$ on jaksona $2L$ ja $f_L(x) = f(x)$, kun $-L < x < L$.

Jos $f(x)$ on kyllin säännöllinen, jokainen funktioista $f_L(x)$ voidaan tällöin esittää Fourier-sarjana

$$f_L(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \text{ missä } w_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Sijoittamalla tähän Fourier-kertoimien lausekkeet saadaan $f_L(x) =$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv\right].$$

$$\int_0^{\infty} F(w)dw = \lim_{\substack{\Delta w\to 0\\ L\to\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} F(w_n)\Delta w$$

$$F(w) = \frac{1}{\pi}\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(w_n)\Delta w = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos w_n x)\Delta w \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos w_n v dv$$

$$\underset{L\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv\right] dw.$$

Rajaprosessin $L \to \infty$ tutkimista varten merkitään

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}, \text{ jolloin } \frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}, \text{ ja saamme}$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv + \right.$$
$$\left. +(\sin w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv\right]. \quad (1)$$

Jos integraali

$$\int_{-L}^{L} f_L(v)dv$$

pysyy rajoitettuna, kun $L \to \infty$, niin ensimmäinen termi kaavan (1) oikealla puolella lähestyy nollaa, kun $L \to \infty$. Näin on laita mm. aina silloin kun integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \quad (2)$$

suppenee. Jälkimmäisessä termissä $\Delta w = \frac{\pi}{L} \to 0$ ja $f_L(v) \to f(v)$, joten kyseinen termi saattaisi lähestyä integraalia

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv\right] dw. \quad (3)$$

Käyttämällä tässä merkintöjä

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv \quad (4)$$

rajaprosessi yhtälössä (1) johtaisi siten esitykseen

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\, dw, \quad (5)$$

jota kutsutaan Fourier-integraaliksi.

Yllä suoritettu päättely ei ole kaavan (5) todistus, sillä rajankäynti $L \to \infty$ yhtälössä (1) on vaikea tehtävä; ei ole itsestään selvää, että oikean puolen jälkimmäinen termi lähestyy integraalia (3), kun $\Delta w \to 0$. Tarkempi analyysi antaa seuraavan riittävän ehdon:

Lause 1. Oletetaan, että funktio f on derivaattoineen paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä $(-L, L)$ ja että integraali (2) suppenee. Silloin Fourier-integraaliesitys (5) on voimassa kaikissa sellaisissa pisteissä x, joissa f on jatkuva. Kaavan (5) oikealla puolella oleva integraali suppenee kaikilla x:n arvoilla ja sen arvo on

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Esimerkki 3. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{kun} \quad |x| > 1 \end{cases}.$$

Etsitään f:n Fourier-integraaliesitys. Kaavasta (4):

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos wv dv = \frac{1}{\pi} \Big/_{-1}^{1} \frac{\sin wv}{w} = \frac{2\sin w}{\pi w}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin wv dv = 0 \text{ (Lemma 2.)}.$$

Siis kaavasta (5) seuraa:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw, \tag{6}$$

jos f on jatkuva pisteessä x. Epäjatkuvuuskohdissa $x = \pm 1$ pätee

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2}, \text{ joten}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{kun} \quad 0 \le |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & \text{kun} \quad |x| = 1 \\ 0, & \text{kun} \quad |x| > 1 \end{cases}.$$

Erikoistapaus $x = 0$:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \frac{\sin w}{w} = 1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \cdots \Leftarrow \sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \ldots$$

Aikaisemmin olemme nähneet, miten funktiota voidaan approksimoida sen Fourier-sarjan osasummilla. Vastaavasti esimerkiksi yo. integraalia voidaan approksimoida muotoa

$$\int_{0}^{a} \frac{\cos wx \sin wx}{w} dw$$

olevilla funktioilla, missä $a > 0$.

Huomautus. Epäoleellisen integraalin määritelmän mukaan

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx \sin wx}{w} dw = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\cos wx \sin wx}{w} dw.$$

Kosini- ja sini-integraalit

Parillisten ja parittomien funktioiden Fourier-integraaliesitys on muita yksinkertaisempi. Jos nimittäin $f(x)$ on parillinen, niin (4):n perusteella $B(w) = 0$ ja

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv dv. \tag{10}$$

Todistus.

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \sin wv dv = \frac{1}{\pi} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^L f(v) \sin wv dv = 0$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos wv dv = \frac{1}{\pi} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^L f(v) \cos wv dv =$$

$$\frac{1}{\pi} \lim_{L\to\infty} 2 \int_0^L f(v) \cos wv dv = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv dv.$$

Tällöin Fourier-integraali (5) surkastuu ns. kosini-integraaliksi

$$f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx dw \ (f \text{ parillinen}). \tag{11}$$

Vastaavasti, jos f on pariton, niin (4):ssä $A(w) = 0$ ja

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \sin wv dv, \tag{12}$$

silloin (5) surkastuu ns. sini-integraaliksi

$$f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin wx dw \ (f \text{ pariton}). \tag{13}$$

Vertaa vastaaviin tuloksiin Fourier-sarjoille (§1.4, §1.5).

Esimerkki 4. Laplacen integraalit Etsitään Fourier'n kosini- ja sini-integraalit funktiolle

$$f(x) = e^{-kx} \ (x > 0, k > 0).$$

(a) Kosini-integraalissa on (10):n nojalla

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-kv} \cos wv dv.$$

Osittaisintegrointi:

$$\mathcal{I} = \int e^{-kv} \cos wv dv = e^{-kv} \frac{\sin wv}{w} + \int k e^{-kv} \frac{\sin wv}{w} dv =$$

$$e^{-kv} \frac{\sin wv}{w} + \left(-k e^{-kv} \frac{\cos wv}{w^2} - k^2 \int e^{-kv} \frac{\cos wv}{w^2} dv \right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{k^2}{w^2}\right) \mathcal{I} = e^{-kv} \left(\frac{\sin wv}{w} - \frac{k \cos wv}{w^2} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = \frac{-k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right).$$

Ylärajalla ($v \to \infty$) oikeanpuoleinen termi $\to 0$, joten

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \frac{k}{k^2 + w^2} e^0 \cos 0 = \frac{2k}{\pi(k^2 + w^2)}. \tag{14}$$

Sijoittamalla (11):een saadaan kosini-integraaliesitys

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} dw \ (x > 0, k > 0),$$

Tästä nähdään, että

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \ (x > 0, k > 0). \tag{15}$$

(b)

$$(12) \Rightarrow B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\sin wv dv.$$

Osittaisintegrointi:

$$\int e^{-kv}\sin wv dv = -\frac{w}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(\frac{k}{w}\sin wv + \cos wv\right).$$

Jälleen ylärajalla oikeanpuoleinen termi $\to 0$, ja saamme

$$B(w) = \frac{2w}{\pi(k^2+w^2)}. \tag{16}$$

Sini-integraaliesitys (13) on siis nyt

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw.$$

Näin ollen

$$\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \ (x>0, k>0). \tag{17}$$

(15) ja (17) ovat ns. Laplacen integraaleja.

2 Laplace-muunnos

2.1 Määritelmiä

Olkoon $f(t)$ arvoilla $t \geq 0$ määritelty reaaliarvoinen funktio. Funktio

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

on funktion $f(t)$ Laplace-muunnos, merkitään $\mathcal{L}(f)$. Siis

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, \tag{1}$$

mikäli integraali suppenee. Tällöin sanomme, että $f(t)$ on funktion $F(s) = \mathcal{L}(f)$ käänteinen Laplace-muunnos, merkitään $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

Esimerkki 1. Olkoon $f(t) = 1$, kun $t \geq 0$. Silloin

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \Big/_{0}^{\infty} - \frac{1}{s} e^{-st} = \frac{1}{s},$$

mikäli $s > 0$.

Huomautus. Epäoleellisen integraalin määritelmä:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Siten

$$\Big/_{0}^{\infty} - \frac{1}{s} e^{-st}$$

tarkoittaa oikeammin raja-arvoa

$$\lim_{T \to \infty} \Big/_{0}^{T} - \frac{1}{s} e^{-st} = \lim_{T \to \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} \ (s > 0).$$

Esimerkki 2. Olkoon a vakio ja $f(t) = e^{at}$, kun $t \geq 0$. Silloin

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \Big/_{0}^{\infty} \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} = \frac{1}{s-a}, \text{ mikäli } s - a > 0.$$

Lause 1. (Lineaarisuus) Laplace-muunnos on lineaarinen operaatio, so.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

aina, kun funktioiden f ja g Laplace-muunnokset ovat määriteltyjä ja a ja b ovat vakioita.

Todistus.

$$a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = a \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + b \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \left[af(t) + bg(t) \right] dt = \mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}.$$

Esimerkki 3. Olkoon

$$f(t) = \cosh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right),$$

missä a on vakio. Esimerkki 2. $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a} \text{ ja } \mathcal{L}\left(e^{-at}\right) = \frac{1}{s+a}, \text{ kun } s > |a|.$$

Lauseen 1. nojalla

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{at}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-at}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}, \text{ kun } s > |a|.$$

Käytännössä on usein olemassa $s_0 \in \mathbb{R}$ s.e. kaavan (1) integraali suppenee arvoilla $s > s_0$ ja hajaantuu, kun $s \leq s_0$. Tällöin joukko $\{s \in \mathbb{R} | s > s_0\}$ on Laplace-muunnoksen $\mathcal{L}\{f(t)\}$ suppenemisalue tai määritysalue. Kuitenkin esimerkiksi funktiolla e^{t^2} ei ole Laplace-muunnosta missään.

$$\left(\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}dt = \int_0^\infty e^{t(t-s)}dt \text{ ei suppene}\right)$$

2.2 Alkeisfunktioiden Laplace-muunnoksia

	$f(t)$		$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	
1.	1		$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2.	t^n	$n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3.	t^p	$p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
4.	e^{at}		$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
5.	$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
6.	$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
7.	$\cosh a$		$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
8.	$\sinh a$		$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$

Rivillä 3. esiintyy ns. Eulerin gammafunktio Γ, jolle määritelmän mukaan

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx \ (p > -1) \tag{1}$$

$$\left(e^x \text{ kasvaa nopeammin kuin } x^p \Rightarrow \frac{x^p}{e^x} \to 0 \text{ kun } x \to \infty \right)$$

Gammafunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1.$$

Näistä ensimmäinen on gammafunktion ns. palautuskaava. Soveltamalla sitä induktiivisesti tapaukseen $p = n$ on positiivinen kokonaisluku saadaan

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!.$$

Todistetaan gammafunktion palautuskaava. Jos $p > 0$, saadaan osittaisintegroinnilla

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx = \Big/_{0}^{\infty} x^p(-e^{-x}) - \int_0^\infty (px^{p-1})(-e^{-x}) dx =$$

$$p\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p).$$

Siis $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, kun $p > 0$ (vrt. riville 2.).

Todistetaan rivi 3.

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \text{ kun } s > 0 \text{ ja } p > -1.$$

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p dt,$$

integraali ei suppene, jos $s \leq 0$. Olkoon $s > 0$. Sijoitetaan $st = u$, $dt = \frac{du}{s}$.

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^p \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty u^p e^{-u} du = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}.$$

Rajoitus $p > -1$ johtuu siitä, että integraali (1) suppenee vain, jos $p > -1$.

Todistetaan rivi 5.

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

§1.11:n Esimerkissä 4. laskettiin

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-kv} \cos wv dv = \frac{2k}{\pi(k^2 + w^2)} \ (k > 0).$$

$$\text{Siis } \int_0^\infty e^{-kv} \cos wv dv = \frac{k}{k^2 + w^2}, \text{ joten}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0).$$

2.3 Laplace-muunnoksen olemassaolo

Määritelmä. Sanomme, että funktion f kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen, jos on olemassa vakiot M, α ja T s.e.

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \ \forall\ t \geq T. \tag{1}$$

Lause 2. Oletetaan, että funktion f kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen ja että f on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä $0 \leq t \leq T$. Silloin $\mathcal{L}\{f(t)\}$ on olemassa arvoilla $s > \alpha$ ja lisäksi

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että (1) pätee kaikilla $t \geq 0$

$$(\text{valitsemalla } M \geq \sup_{0\leq t\leq T} |f(t)|).$$

Silloin

$$|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t} \quad (t \geq 0).$$

Oikeanpuoleisen funktion integraali yli välin $0 \leq t < \infty$ suppenee, kun $s > \alpha$, sillä

$$\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \mathop{/}_0^\infty - \frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} = \frac{1}{s-\alpha}.$$

Majoranttiperiaatteen nojalla

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|dt \text{ suppenee } \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \text{ suppenee.}$$

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right| dt \leq \int_0^\infty Me^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{M}{s-\alpha},$$

kun $s > \alpha$. Tästä seuraa, että $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Huomautus. Lauseessa 2. esiintyvä riittävä ehto Laplace-muunnoksen olemassaololle ei ole välttämätön.

Esimerkki. $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$ on olemassa siitä huolimatta, että $t^{-1/2}$ ei ole paloittain jatkuva välillä $0 \leq t \leq T$.

2.4 Laplace-muunnoksen käänteismuunnos

Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, sanomme, että $f(t)$ on funktion $F(s)$ käänteinen Laplace-muunnos; merkitään $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Esimerkki 1. Koska $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, niin $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$.

Esimerkki 2. Jos funktiolla on Laplace-muunnos, se on yksikäsitteisesti määrätty. Sen sijaan käänteinen Laplace-muunnos ei ole yksikäsitteisesti määrätty. Jos esimerkiksi

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{kun} \quad t \neq 2 \\ 10, & \text{kun} \quad t = 2 \end{cases}, \text{ niin } \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}.$$

Siis funktiolla f on sama Laplace-muunnos kuin Esimerkin 1. funktiolla, vaikka ko. funktioilla on eri arvo pisteessä $t = 2$. Näin ollen $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$ voi tarkoittaa useampaa kuin yhtä funktiota.

Jos kahdella Lauseen 2. ehdot toteuttavalla funktiolla f ja g on sama Laplace-muunnos, niin $f(x) = g(x)$ kaikissa jatkuvuuspisteissä. Erikoisesti, jos jatkuvilla funktioilla f ja g on sama Laplace-muunnos, niin $f = g$. Näin ollen funktion käänteinen Laplace-muunnos on oleellisesti yksikäsitteinen.

Esimerkki 3. Etsitään $\mathcal{L}^{-1}(F)$, kun

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)},$$

missä a ja b ovat erisuuria vakioita. Jakamalla osamurtolukuihin saadaan

$$F(s) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right) = \frac{1}{a-b}\left(\mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{bt}\}\right).$$

Lauseen 1. perusteella oikea puoli on

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)\right\}.$$

Näin ollen

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}).$$

Laplace-muunnoksen käänteismuunnos $\mathcal{L}^{-1}$ on lineaarinen operaatio, so.

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\} = c_1f_1(t) + c_2f_2(t).$$

Esimerkki 4. Etsitään $\mathcal{L}^{-1}(F)$, kun

$$F(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)},$$

missä a ja b ovat erisuuria vakioita. Jaetaan osamurtolukuihin kuten Esimerkissä 3.; saadaan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)\right\} = \frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt}).$$

2.5 Derivaattojen Laplace-muunnokset

Lause 3. Olkoon f jatkuva funktio, jonka kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen ja jolla on paloittain jatkuva derivaatta jokaisella äärellisellä välillä $0 \leq t \leq T$. Silloin

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Todistus. Koska f' on paloittain jatkuva välillä $0 \leq t \leq T$, niin ko. väli voidaan jakaa osaväleihin

$$[0, T_1], [T_1, T_2], \ldots, [T_n, T]$$

s.e. f' on jatkuva jokaisen osavälin jokaisessa sisäpisteessä ja f':lla on kunkin osavälin alku- ja loppupisteessä vastaavasti oikean- ja vasemmanpuoleiset äärelliset raja-arvot. Silloin

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{T_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \int_{T_n}^{T} e^{-st} f'(t)dt.$$

Osittaisintegroinnilla oikea puoli voidaan kirjoittaa

$$\left[\Big/_{0}^{T_1} e^{-st} f(t) + \int_0^{T_1} se^{-st} f(t)dt\right] + \left[\Big/_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) + \int_{T_1}^{T_2} se^{-st} f(t)dt\right] + \ldots$$

$$\cdots + \left[\Big/_{T_n}^{T} e^{-st} f(t) + \int_{T_n}^{T} se^{-st} f(t)dt\right].$$

Koska f on jatkuva, sijoitukset pisteissä $T_1, T_2, \ldots, T_n$ kumoutuvat ja saadaan

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = \Big/_{0}^{T} e^{-st} f(t) + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt. \qquad (1)$$

Koska f:n kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen, niin
$$|f(T)| \leq Me^{\alpha T},$$
jos T on kyllin suuri. Tällaisilla T:n arvoilla
$|e^{-sT}f(T)| \leq e^{-sT}Me^{\alpha T} = Me^{-(s-\alpha)T}$, joten $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-sT}f(T) = 0$, kun $s > \alpha$.
Antamalla kaavassa (1) $T \to \infty$ nähdään, että funktiolla f' on arvoilla $s > \alpha$ Laplace-muunnos
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \lim_{T\to\infty} \Big/_0^\infty e^{-st}f(t) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}.$$
Lausetta 3. voidaan yleistää seuraavasti:

Lause 4. Olkoon f $n-1$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio siten, että funktioiden $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen ja funktiolla $f^{(n-1)}$ on paloittain jatkuva derivaatta $f^{(n)}$ jokaisella äärellisellä välillä $0 \leq t \leq T$. Silloin
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Todistus. Tapaus $n = 2$. Funktio $g(t) = f'(t)$ toteuttaa Lauseen 3. ehdot, joten
$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0).$$
Lauseen 3. nojalla $\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$. Siis
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\left(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right) - g(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

Esimerkki. Ratkaistaan alkuarvotehtävä
$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Vaihe 1. Olkoon $y(t)$ alkuarvotehtävän ratkaisu ja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ sen Laplace-muunnos. Lauseet 3. ja 4. $\Rightarrow$
$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) = sY(s) - 3$$
$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 3s - 1$$
Muodostetaan annetun differentiaaliyhtälön Laplace-muunnos; saadaan
$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 3y\} = \mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} =$$
$$s^2Y - 3s - 1 + 4(sY - 3) + 3Y = s^2Y + 4sY + 3Y - 3s - 13 = 0.$$

Vaihe 2. Ratkaistaan Y:n suhteen viimeksi saatu yhtälö

$$s^2Y + 4sY + 3Y = 3s + 13; \text{ saadaan } Y = \frac{3s+13}{s^2+4s+3}.$$

Hajottamalla osamurtolukuihin saadaan

$$Y(s) = \frac{3s+13}{(s+3)(s+1)} = -\frac{2}{(s+3)} + \frac{5}{s+1}.$$

Vaihe 3. Taulukosta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}.$$

Lineaarisuuden perusteella

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = -2e^{-3t} + 5e^{-t}.$$

2.6 Porrasfunktio

Porrasfunktio määritellään siten, että

$$U(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t < a \\ 1, & \text{kun} \quad t > a \end{cases}$$

Sen avulla voidaan esittää erilaisia epäjatkuvia funktioita. Jos esimerkiksi

$$f(t) = \begin{cases} 8, & \text{kun} \quad t < 2 \\ 6, & \text{kun} \quad t > 2 \end{cases}, \text{ niin } f(t) = 8 - 2U(t-2).$$

Porrasfunktion Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \text{ kun } a > 0 \text{ ja } s > 0.$$

$$\text{Siis } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = U(t-a).$$

2.7 Lauseita Laplace-muunnoksista

Kaikissa seuraavissa lauseissa oletetaan, että funktio $f(t)$ toteuttaa Lauseen 2. ehdot.

Lause 5. Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, niin

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a).$$

Vastaavasti, jos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, niin

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).$$

Todistus.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

Lause 6. Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ja $a \geq 0$, niin

$$\mathcal{L}\{U(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Vastaavasti, jos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ja $a \geq 0$, niin

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = U(t-a)f(t-a).$$

Todistus.

$$\text{Koska } U(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t < a \\ 1, & \text{kun} \quad t > a \end{cases}, \text{ niin}$$

$$\mathcal{L}\{U(t-a)f(t-a)\} =$$

$$\int_0^\infty e^{-st}U(t-a)f(t-a)dt = \int_0^a e^{-st}\cdot 0dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \quad (a \geq 0)$$

$$\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \left(\text{muuttujanvaihto } \begin{cases} v &= t-a \\ dv &= dt \end{cases}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(v+a)}f(v)dv = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv = e^{-as}F(s).$$

Jos valitaan $f \equiv 1$, niin $\mathcal{L}\{U(t-a)\cdot 1\} = e^{-as}\cdot\frac{1}{s}$.

Esimerkki. $\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\} = ?$

$$\text{Koska } \mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2!}{s^3}, \text{ niin Lauseen 5. nojalla } \mathcal{L}\left\{t^2e^{-2t}\right\} = \frac{2!}{(s+2)^3}.$$

Esimerkki.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+16}\right\} = ?$$

$$\text{Koska } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t, \text{ niin Lauseen 6. nojalla}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+16}\right\} = U(t-a)f(t-a) = U(t-2)\cos 4(t-2) =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t<2 \\ \cos 4(t-2), & \text{kun} \quad t>2 \end{cases}.$$

Lause 7. Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ja $a > 0$, niin

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Vastaavasti, jos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ja $a > 0$, niin

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = af(at).$$

Todistus. Sijoittamalla $t = \frac{v}{a}$ saadaan

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt = \int_0^\infty e^{-s\frac{v}{a}}f(v)\frac{dv}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{af(at)\} = a\mathcal{L}\{f(at)\} = F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Lause 8. Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ja n on positiivinen kokonaisluku, niin

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF}{ds^n} = (-1)^nF^{(n)}(s).$$

Vastaavasti, jos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, niin

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t).$$

Todistus. Tapaus $n = 1$. Derivoidaan yhtälö

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \text{ } s\text{:n suhteen.}$$

$$\frac{dF}{ds} = F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt =$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st} f(t)\right] dt = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)dt = -\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\}.$$

Yleinen tapaus induktiolla.

Esimerkki. $\mathcal{L}\{t\sin 2t\} =?$

$$\text{Koska } \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \text{ niin Lauseen 8. nojalla}$$

$$\mathcal{L}\{t\sin 2t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}.$$

Lause 9. (Jaksolliset funktiot). Jos funktiolla f on jaksona $P > 0$, so. jos $f(t+P) = f(t)\ \forall\ t$, niin

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sP}}.$$

Todistus.

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^P e^{-st} f(t)dt + \int_P^\infty e^{-st} f(t)dt = \left(\text{muuttujanvaihto } \begin{array}{ccc} t & = & v+P \\ dt & = & dv \end{array}\right)$$

$$\int_0^P e^{-st} f(t)dt + \int_0^\infty \underbrace{e^{-s(v+P)}}_{e^{-sv}e^{-sP}} \underbrace{f(v+P)}_{f(v)} dv \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^P e^{-st} f(t)dt + e^{-sP}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sP}}.$$

Lause 10. (Integrointi). Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, niin

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Vastaavasti, jos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. niin

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du.$$

Todistus. Merkitään

$$G(t) = \int_0^t f(u)du.$$

Silloin $G'(t) = f(t)$ ja $G(0) = 0$. Näytetään, että G:n kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen.

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \text{ kun } t \geq T.$$

Valitsemalla M kyllin suureksi voidaan olettaa, että $T = 0$ ja $\alpha > 0$.

$$|G(t)| = \left|\int_0^t f(u)du\right| \leq \int_0^t |f(u)|du \leq \int_0^t Me^{\alpha u}du = \Big/_{0}^{t} \frac{M}{\alpha}e^{\alpha u} = \frac{M}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right) \leq \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t}.$$

Siis G:n kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen, joten G:hen voidaan soveltaa Lausetta 3.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\mathcal{L}\{G(t)\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}.$$

$$\text{Vastaavasti } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du.$$

Esimerkki. RC-piirin virranvoimakkuus $i(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t), \tag{1}$$

missä $q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau$ ja $v(t)$ on sähkömotorinen voima. Oletetaan, että hetkellä $t = 0$ pätee $i(0) = q(0) = 0$ ja että

$$v(t) = \begin{cases} V_0, & a < t < b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritetään piirin virranvoimakkuus hetkellä t. Sähkömotorinen voima voidaan esittää porrasfunktioiden avulla muodossa

$$v(t) = V_0 \left[U(t-a) - U(t-b)\right].$$

Muodostamalla differentiaaliyhtälön (1) Laplace-muunnos saadaan siten (merkitään $I(s) = \mathcal{L}\left\{i(t)\right\}$)

$$RI(s) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left\{q(t)\right\} = V_0 \left[U(t-a) - U(t-b)\right].$$

Tässä $\mathcal{L}\left\{U(t-a)\right\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$, $\mathcal{L}\left\{U(t-b)\right\} = \dfrac{e^{-bs}}{s}$ ja Lauseen 10. perusteella

$$\mathcal{L}\left\{q(t)\right\} = \frac{I(s)}{s}.$$

Näin ollen $RI(s) + \dfrac{I(s)}{sC} = \dfrac{V_0}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$, josta seuraa

$$I(s) = F(s)\left(e^{-as} - e^{-bs}\right), \text{ missä } F(s) = \frac{V_0}{R}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Taulukosta $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \dfrac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.

Lauseen 6. perusteella $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-bs}F(s)\right\} =$

$$U(t-a)\frac{V_0}{R}e^{-\frac{(t-a)}{RC}} - U(t-b)\frac{V_0}{R}e^{-\frac{(t-b)}{RC}}.$$

Siis $i(t) = 0$, kun $t < a$ ja $i(t) = \begin{cases} K_1 e^{-\frac{t}{RC}}, & \text{kun} \quad a < t < b \\ (K_1 - K_2)e^{-\frac{t}{RC}}, & \text{kun} \quad t > b \end{cases}$,

missä $K_1 = \dfrac{V_0}{R}e^{\frac{a}{RC}}$ ja $K_2 = \dfrac{V_0}{R}e^{\frac{b}{RC}}$.

Esimerkki.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\}=?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^k}\right\}=\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}.\text{ Arvolla } k=\frac{1}{2}\text{ saadaan } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

Lauseen 5. nojalla on siis $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right\}=\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$. Lauseen 10. nojalla saadaan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\}=\int_0^t\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}du.\text{ Sijoitetaan } \left\{\begin{array}{lcl} u & = & \frac{v^2}{2} \\ du & = & vdv \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\}=\int_0^{\sqrt{2t}}\frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{\pi}v}\sqrt{2}vdv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2t}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv.$$

Lause 11.

$$\text{Jos } \lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}\text{ on olemassa ja } \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s),\text{ niin}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(u)du.$$

Todistus. Koska oletamme, että $f(t)$ toteuttaa Lauseen 2. ehdot ja et-tä mainittu raja-arvo on olemassa, niin myös funktio $g(t)=\frac{f(t)}{t}$ toteuttaa Lauseen 2. ehdot. Siis $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$ on olemassa, merkitään $G(s)=\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$. Lauseen 8. perusteella

$$\mathcal{L}\left\{tg(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=-\frac{dG(s)}{ds}.$$

$$\text{Siis } G'(s)=-\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=-F(s),\text{ joten}$$

$$G(s)-G(s_0)=-\int_{s_0}^s F(u)du. \tag{1}$$

Koska $g(t)$ toteuttaa Lauseen 2. ehdot, niin Lauseen 2. nojalla $\lim_{s\to\infty}G(s)=0$.

Antamalla $s\to\infty$ yhtälössä (1) saadaan

$$-G(s_0)=-\int_{s_0}^\infty F(u)du,\text{ joten}$$

$$G(s) = G(s_0) - \int_{s_0}^{s} F(u)du = \int_{s_0}^{\infty} F(u)du - \int_{s_0}^{s} F(u)du = \int_{s}^{\infty} F(u)du.$$

Määritelmä. Funktioiden f ja g konvoluutio $f * g$ määritellään yhtälöllä

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Konvoluutio on

- vaihdannainen: $f * g = g * f$
- liitännäinen: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- distributiivinen: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Lause 12. (Konvoluutiolause) Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ja $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, niin

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)G(s).$$

Vastaavasti, jos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ja $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, niin

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = (f * g)(t).$$

Todistus. Koska $F(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du$ ja $G(s) = \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv$, niin

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv\right) =$$

$$\int_{v=0}^\infty e^{-sv} g(v)dv \left(\int_{u=0}^\infty e^{-su} f(u)du\right) dv = \int_{v=0}^\infty \left(\int_{u=0}^\infty e^{-sv} g(v) e^{-su} f(u)du\right) dv =$$

$$\int_{v=0}^\infty \left(\int_{u=0}^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)du\right) dv = \int_{v=0}^\infty \int_{u=0}^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv.$$

Suoritetaan muuttujanvaihto $\begin{cases} u &= u \\ v &= t-u \end{cases}$

jolloin (u, v)-tason aluetta $\{(u, v)|u > 0 \text{ ja } v > 0\}$ vastaa (u, t)-tason alue $\{(u, t)|u > 0 \text{ ja } t > u\} = \{(u, t)|0 < u < t \text{ ja } t > 0\}$.

Koska kuvauksen $(u, t) \mapsto (u, v) = (u, t-u)$ Jacobin determinantti $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$,

$$\text{niin } F(s)G(s) = \int_{t=0}^{\infty} \left(\int_{u=0}^{t} e^{-st} f(u)g(t-u)du \right) dt =$$

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \left(\int_{u=0}^{t} f(u)g(t-u)du \right) dt = \mathcal{L}\left\{ \int_{0}^{t} f(u)g(t-u)du \right\}.$$

Esimerkki. Ratkaistaan integraaliyhtälö

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(u)\sin(t-u)du.$$

Oletetaan, että $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Konvoluutiolauseen perusteella

$$Y(s) = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\left\{ \int_0^t y(u)\sin(t-u)du \right\} = \frac{1}{s} + \mathcal{L}\{y(t) * \sin t\} =$$

$$\frac{1}{s} + Y(s)\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s} + \frac{Y(s)}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \Rightarrow$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \right\} = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

Sijoittamalla voidaan todentaa, että tämä on annetun yhtälön ratkaisu.

Esimerkki. Tarkastellaan jouseen ripustetun massan värähtelyä ulkoisen voiman ollessa $r(t) = K_0 \sin pt$. Jos jousen vaimennuskerroin oletetaan nollaksi, systeemiä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$my'' + ky = K_0 \sin pt \tag{1}$$

(vrt. §1.6). Ratkaistaan alkuarvotehtävä $y(0) = y'(0) = 0$. Merkitsemällä

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ja } K = \frac{K_0}{m}$$

yhtälö (1) saadaan muotoon

$$y'' + \omega^2 y = K \sin pt.$$

Otetaan Laplace-muunnos:

$$s^2 Y + \omega_0^2 Y = K\frac{p}{s^2+p^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{Kp}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+p^2)}.$$

Merkitään

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right\} = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+p^2}\right\} = \frac{1}{p}\sin pt.$$

$$\text{Konvoluutiolause } \Rightarrow y(t) = Kp(f*g)(t) =$$

$$\frac{K}{\omega_0}\int_0^t \sin\omega_0 u \sin p(t-u) du = \frac{K}{2\omega_0}\int_0^t \{\cos[\omega_0 u - p(t-u)] - \cos[\omega_0 u + p(t-u)]\}\, du.$$

Tapaus $p^2 \neq \omega_0^2$:

$$y(t) = \frac{K}{2\omega_0} \Big/_0^t \left\{\frac{\sin[\omega_0 u - p(t-u)]}{\omega_0+p} - \frac{\sin[\omega_0 u + p(t-u)]}{\omega_0 - p}\right\} =$$

$$\frac{K}{2\omega_0}\left\{\frac{\sin\omega_0 t + \sin pt}{\omega_0+p} - \frac{\sin\omega_0 t - \sin pt}{\omega_0 - p}\right\} = \frac{K}{p^2-\omega_0^2}\left\{\frac{p}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \sin pt\right\}.$$

Ratkaisu on siten superpositio kahdestta sinimuotoisesta värähtelystä, joista toisella on ulkoisen voiman taajuus ja toisella jousen luonnollinen värähtelytaajuus.

Tapaus $p = \omega_0$ (resonanssi): Tässä tapauksessa

$$y(t) = \frac{K}{2\omega_0}\int_t^0 \{\cos[\omega_0 u - \omega_0(t-u)] - \cos[\omega_0 u + \omega_0(t-u)]\}\, du =$$

$$\frac{K}{2\omega_0}\int_0^t \{\cos[2\omega_0 u - \omega_0 t] - \cos\omega_0 t\} du =$$

$$\frac{K}{2\omega_0}\Big/_0^t \left\{\frac{\sin[2\omega_0 u - \omega_0 t]}{2\omega_0} - u\cos\omega_0 t\right\} =$$

$$\frac{K}{2\omega_0}\left\{\frac{\sin\omega_0 t - \sin(-\omega_0 t)}{2\omega_0} - t\cos\omega_0 t\right\} =$$

$$\frac{K}{2\omega_0}(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t).$$

Kun $t \to \infty$, värähtelyjen amplitudi kasvaa rajatta (rikkoutumisvaara).

2.8 Osamurtokehitelmät

Käytännössä joudutaan usein määräämään

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\},$$

missä $P(s)$ ja $Q(s)$ ovat polynomeja ja $\deg P(s) \leq \deg Q(s)$. Tällöin voidaan käyttää hyväksi rationaalifunktion $\frac{P(s)}{Q(s)}$ osamurtokehitelmää.

Esimerkki.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = ?$$

Kirjoitetaan

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \tag{1}$$

$$\Rightarrow 3s+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1).$$

Sijoittamalla $s = 1$ saadaan $4 = 2A \Rightarrow A = 2$.
Sijoittamalla $s = 0$ saadaan $1 = 2 - C \Rightarrow C = 1$.
Sijoittamalla jokin muu s:n arvo, esimerkiksi $s = -1$ saadaan
$-2 = 2A - 2(C - B) = 4 - 2 + 2B = 2 + 2B$, joten $B = -2$. Siis

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+1}{s^2+1}\right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = 2e^t - 2\cos t + \sin t.$$

Toinen tapa: Kun A on määrätty ($A = 2$), kerrotaan (1) puolittain s:llä ja annetaan $s \to \infty$; saadaan $0 = A + B$, siis $B = -A = -2$.

Huomautus. Jos $Q(s)$ sisältää jaottoman toisen asteen tekijän s^2+ps+q, niin sitä vastaavan osamurtoluvun

$$\frac{As+B}{s^2+ps+q}$$

käänteinen Laplace-muunnos löydetään kirjoittamalla

$$\frac{As+B}{s^2+ps+q} = \frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

missä α ja β ovat polynomin s^2+ps+q nollakohdan reaali- ja imaginaariosat. Tällöin

$$\frac{As+B}{s^2+ps+q}=\frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=A\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\alpha A+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

ja käänteinen Laplace-muunnos on Lauseen 5. perusteella

$$e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t+\frac{\alpha A+B}{\beta}\sin\beta t\right).$$

2.9 Diracin δ-funktio

Diracin δ-funktiota käytetään mallinnettaessa hetkellistä impulssia tai esimerkiksi yhteen pisteeseen keskittynyttä massaa. Kysymyksessä ei ole oikeastaan "funktio" vaan ns. yleistetty funktio, jota voidaan ajatella rajatapauksena tavallisesta funktiosta esimerkiksi seuraavasti:

Määritellään jokaista $\varepsilon>0$ kohden suorakaiteen muotoinen pulssifunktio

$$\Delta_\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, & \text{kun } \ |t-t_0|<\varepsilon\\ 0, & \text{kun } \ |t-t_0|>\varepsilon\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$$

Sanomme, että t_0 on pulssin $\Delta_\varepsilon(t-t_0)$ keskipiste. Pulssin korkeus kasvaa, kun $\varepsilon\to 0$, mutta aina

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_\varepsilon(t-t_0)dt=1. \tag{1}$$

Sopimuksen mukaan pisteeseen t_0 kuuluva Diracin δ-funktio on

$$\delta(t-t_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_\varepsilon(t-t_0). \tag{2}$$

Tavallisessa mielessä tätä raja-arvoa ei ole olemassa eikä $\delta(t-t_0)$ ole myöskään mikään funktio vaan ns. distribuutio, jota voidaan integroida ja muutenkin kohdella tavallisten funktioiden tapaan. Sen perusominaisuudet ovat

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \delta(t-t_0)=0,\ \text{kun } t\neq t_0\\ &\text{(ii)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1\end{aligned} \tag{3}$$

Molempia ominaisuuksia voidaan perustella "määritelmän" (2) avulla. Esimerkiksi antamalla $\varepsilon \to 0$ kaavassa (1) vasemmalla puolella on raja-arvona 1; näin ollen on luonnollista vaatia, että (ii) pätee. Yleisemmin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{4}$$

aina kun $f(t)$ on määritelty ja jatkuva jossakin t_0:n ympäristössä. Kun $\varepsilon > 0$ on kyllin pieni, väli $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ sisältyy nimittäin tällaiseen ympäristöön.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\frac{dt}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)dt = \frac{1}{2\varepsilon} f(\xi)2\varepsilon = f(\xi),$$

missä $t_0-\varepsilon < \xi < t_0+\varepsilon$ (integraalilaskennan väliarvolause). Antamalla $\varepsilon \to 0$ oikea puoli lähestyy arvoa $f(t_0)$. Näin ollen on luonnollista vaatia, että (4) pätee.

Samankaltaisin argumentein kuin yllä voidaan "osoittaa", että δ-funktion "integraalifunktio" on porrasfunktio $U(t-t_0)$, sillä

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-t_0)d\tau = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t < t_0 \\ 1, & \text{kun} \quad t > t_0 \end{cases} = U(t-t_0).$$

Vaikka $U(t-t_0)$ ei ole tavallisessa mielessä derivoituva pisteessä $t = t_0$, sillä on kuitenkin yleistettyjen funktioiden (distribuutioiden) joukossa "derivaatta"

$$\frac{d}{dt}U(t-t_0) = \delta(t-t_0).$$

δ-funktiolla on myös Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\left\{\Delta_\varepsilon(t-t_0)\right\} \quad (t_0 > 0).$$

Oikeanpuoleinen raja-arvo voidaan laskea:

$$\mathcal{L}\left\{\Delta_\varepsilon(t-t_0)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\left[U(t-(t_0-\varepsilon)) - U(t-(t_0+\varepsilon))\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left[\mathcal{L}\left\{U(t-(t_0-\varepsilon))\right\} - \mathcal{L}\left\{U(t-(t_0+\varepsilon))\right\}\right] =$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{e^{-(t_0-\varepsilon)s}}{s}-\frac{e^{-(t_0+\varepsilon)s}}{s}\right]=e^{-t_0 s}\frac{e^{\varepsilon s}-e^{-\varepsilon s}}{2\varepsilon s}.$$

Tässä $\dfrac{e^{\varepsilon s}-e^{-\varepsilon s}}{2\varepsilon s}=\dfrac{\sinh\varepsilon s}{\varepsilon s}=\dfrac{\sinh\varepsilon s-\sinh 0}{\varepsilon s-0}\to\cosh 0=1,$ kun $\varepsilon\to 0$.

Siis

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\{\Delta_\varepsilon(t-t_0)\}=e^{-t_0 s}\quad (t_0>0).$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)dt=e^{-st_0}\quad \text{(kaavasta (4))}.$$

Esimerkki. Tarkastellaan jousessa riippuvan massan pakotettua värähtelyä, jota kuvaa differentiaaliyhtälö

$$x''+4x=\sin t+2\delta(t-3).$$

Tässä jousen vaimennuskerroin on oletettu nollaksi ja massaan vaikuttaa ulkopuolisen voiman $\sin t$ ohella äkillinen impulssi hetkellä $t=3$. Alkuarvoiksi oletetaan $x(0)=x'(0)=0$.

Muodostetaan differentiaaliyhtälön Laplace-muunnos ja merkitään $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$; saadaan

$$\left[s^2X-sx(0)-x'(0)\right]+4X=\frac{1}{s^2+1}+2e^{-3s}.$$

Alkuehdot huomioiden tästä seuraa

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}+\frac{2e^{-3s}}{s^2+4}.$$

Osamurtokehitelmä:

$$X(s)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2+4}+\frac{2e^{-3s}}{s^2+4}.$$

Etsitään käänteinen Laplace-muunnos; saadaan ratkaisu

$$x(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t+U(t-3)\sin 2(t-3)\quad (t\geq 0).$$

Ratkaisun ensimmäinen ja toinen termi aiheutuvat voimasta $F(t)=\sin t$, joka synnyttää jousen luonnollisella ja voiman $F(t)$ taajuudella tapahtuvaa värähtelyä. Siihen yhdistyy hetkellä $t=0$ viimeinen, impulssin aiheuttama termi.

3 Fourier-muunnokset

3.1 Fourier'n sini- ja kosinimuunnos

Fourier'n kosinimuunnos

Parillisen funktion $f(x)$ Fourier-integraali on kosini-integraali (vrt. §1.11:n kaavat (10) ja (11))

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx dw, \text{ missä} \\ &\text{(b)} \quad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv dv. \end{aligned} \tag{1}$$

Asettamalla

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A(w)$$

saadaan kaavasta (1b)

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx dx \tag{2}$$

ja kaavasta (1a)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(w) \cos wx dw \tag{3}$$

Huomautus. Kaavassa (2) integroidaan x:n ja kaavassa (3) w:n suhteen. Kaavan (2) määrittelemä funktio $\hat{f}_c(w)$ on funktion $f(x)$ Fourier'n kosinimuunnos. Muodostamalla siitä uudelleen kosinimuunnos saadaan kaavan (3) perusteella funktio $f(x)$.

Fourier'n sinimuunnos

Parittoman funktion $f(x)$ Fourier-integraali on sini-integraali (vrt. §1.11:n kaavat (12) ja (13)):

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin wx dw, \text{ missä} \\ &\text{(b)} \quad B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \sin wv dv \end{aligned} \tag{4}$$

Asettamalla

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} B(w)$$

saadaan kaavasta (4b)

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx dx \tag{5}$$

ja kaavasta (4a)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(w) \sin wx dw. \tag{6}$$

Sanomme, että $\hat{f}_s(w)$ on funktion $f(x)$ Fourier'n sinimuunnos. Muodostamalla siitä sinimuunnoksen käänteismuunnos kaavan (6) mukaisesti saadaan alkuperäinen funktio $f(x)$.

Kosini- ja sinimuunnoksille käytetään myös merkintöjä

$$\mathcal{F}_c(f) = \hat{f}_c, \quad \mathcal{F}_s(f) = \hat{f}_s$$

ja käänteismuunnoksia merkitään vastaavasti $\mathcal{F}_c^{-1}$ ja $\mathcal{F}_s^{-1}$.

Esimerkki 1. Etsitään Fourier'n kosini- ja sinimuunnokset funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{kun} \quad 0 < x < a \\ 0, & \text{kun} \quad x > a \end{cases}$$

Määritelmien (2) ja (3) mukaisesti

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a k \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\sin aw}{w}$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a k \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{1 - \cos aw}{w}.$$

Lineaarisuus

Fourier'n kosini- ja sinimuunnokset ovat olemassa, jos $f(x)$ on paloittain jatkuva jokaisella x-akselin äärellisellä välillä ja jos integraali $\int_0^\infty |f(x)|dx$ suppenee. Edelleen, jos a ja b ovat vakioita, niin

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathcal{F}_c(af+bg) = a\mathcal{F}_c(f) + b\mathcal{F}_c(g) \\ &\text{(b)} \quad \mathcal{F}_s(af+bg) = a\mathcal{F}_s(f) + b\mathcal{F}_s(g) \end{aligned} \tag{7}$$

(mikäli myös $\mathcal{F}_c(g)$ ja $\mathcal{F}_s(g)$ ovat olemassa). Toisin sanoen Fourier'n kosini- ja sinimuunnokset ovat lineaarisia operaatioita.

Todistus.

$$a\mathcal{F}_c(f) + b\mathcal{F}_c(g) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx + b\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(x)\cos wx dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (af(x)\cos wx + bg(x)\cos wx)dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [af(x)+bg(x)]\cos wx dx = \mathcal{F}_c(af+bg).$$

Kuten Laplace-muunnos, myös Fourier'n sini- ja kosinimuunnokset muuntavat derivoinnin algebralliseksi operaatioksi.

Lause 1. Oletetaan, että $f(x)$ on arvoilla $x \geq 0$ jatkuva funktio s.e.

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$$

ja f' on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä $[0, T]$. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Silloin

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathcal{F}_c\{f'(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) \\ &\text{(b)} \quad \mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Todistus. Osittaisintegroinnilla nähdään, että

$$\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos wx dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\Big/_0^\infty f(x)\cos wx + \int_0^\infty f(x)w\sin wx dx\right\} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + w\mathcal{F}_s\{f(x)\}.$$

$$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\sin wx dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\Big/_0^\infty f(x)\sin wx - \int_0^\infty f(x)w\cos wx dx\right\} = -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}.$$

Vastaavat tulokset toisille derivaatoille saadaan soveltamalla kaavoja (8) funktioon $f'(x)$:

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0).$$

Siis

$$\text{(a)}\quad \mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$$

$$\text{(b)}\quad \mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0) \qquad (9)$$

edellyttäen, että myös f' toteuttaa Lauseen 1. ehdot.

Esimerkki. Etsitään $\mathcal{F}_c\{f(x)\}$, kun $f(x) = e^{-ax}$ ja $a > 0$. Derivoimalla nähdään, että $f''(x) = a^2 f(x)$. Siis

$$(*)\quad \mathcal{F}_c\{f''(x)\} = a^2\mathcal{F}_c\{f(x)\}.$$

Kaava (9a) $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0).$$

Tässä $f'(0) = -a$, joten sijoittamalla yhtälöön (*) saamme

$$-w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}a = a^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2} \quad (a>0).$$

3.2 Fourier-muunnos

Fourier-integraalin kompleksinen muoto

(Reaalinen) Fourier-integraali on (vrt §1.11:n kaavat (4) ja (5))

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw, \text{ missä}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin wv dv.$$

$$A(w)\cos wx + B(w)\sin wx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)[\underbrace{\cos wv\cos wx + \sin wv\sin wx}_{\cos(wx-wv)}]dv.$$

Fourier-integraaliesitys on siis

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(w)dw, \text{ missä } F(w) = \int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx-wv)dv. \tag{1}$$

$F(w)$ on w:n parillinen funktio, koska kosini on parillinen. Näin ollen (vrt. Harjoitus 2., tehtävä 2.)

$$\int_{-\infty}^\infty F(w)dw = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^M F(w)dw = \lim_{M\to\infty} 2\int_0^M F(w)dw = 2\int_0^\infty F(w)dw,$$

joten (1):stä seuraa

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(w)dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(w)dw \text{ eli} \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx-wv)dv\right]dw. \tag{3}$$

Vastaavasti nähdään, että

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wx - wv)dv.$$

$G(w)$ on w:n pariton funktio, joten

$$\int_{-M}^{M} G(w)dw = 0 \ \forall \ M \geq 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\int_{-M}^{M} F(w)dw = \int_{-M}^{M} (F(w) + iG(w))dw =$$

$$\int_{-M}^{M} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(v)[\cos(wx - wv) + i\sin(wx - wv)]dv \right\} dw =$$

$$\int_{-M}^{M} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i(wx-wv)}dv \right] dw.$$

Antamalla $M \to \infty$ saadaan (2):n perusteella

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)dw = \frac{1}{2\pi}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} F(w)dw =$$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i(wx-wv)}dv \right] dw =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i(wx-wv)}dv \right] dw.$$

Näin saatu esitys

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{iw(x-v)}dvdw \tag{4}$$

on kompleksinen Fourier-integraali.

Kompleksifunktioiden integrointi noudattaa lähes samoja sääntöjä, kuin reaalifunktioiden integrointi. Jos $f = u + iv$ on kompleksinen, pätee esimerkiksi

$$\int_a^b f'(x)dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} f(x) = f(b) - f(a),$$

kun määritellään

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Edelleen

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \text{ kun } \alpha \in \mathbb{C} \text{ on vakio.}$$

Tulon derivoimiskaavasta

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$$

seuraa osittaisintegroinnin kaava

$$\int_a^b fg'dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} fg - \int_a^b f'gdx$$

myös kompleksiarvoisille funktioille.

Esimerkki. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{iax}\right) = \frac{d}{dx}(\cos ax + i \sin ax) =$$

$$-a \sin ax + ia \cos ax = ia(\cos ax + i \sin ax) = iae^{iax}.$$

Fourier-muunnos

Nähdään helposti, että kaavassa (4) esiintyvälle eksponenttilausekkeelle pätee

$$e^{iw(x-v)} = e^{iwx}e^{-iwv}.$$

$$e^{i(a+b)} =$$

$$\cos(a + b) + i \sin(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i \sin a \cos b + i \cos a \sin b$$

$$e^{ia}e^{ib} =$$

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i \sin a \cos b + i \cos a \sin b$$

Kaavasta (4) seuraa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iwx} e^{-iwv} dv \right] dw =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iwv} dv \right] dw \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iwv} dv \right] e^{iwx} dw. \tag{5}$$

Hakasulkulausekkeen määrittelemä w:n kompleksiarvoinen funktio on f:n Fourier-muunnos; merkitään $\hat{f}(w)$, siis

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx. \tag{6}$$

Kaavan (5) mukaisesti

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw. \tag{7}$$

Sanomme, että $f(x)$ on $\hat{f}(w)$:n käänteinen Fourier-muunnos. Vaihtoehtoinen merkintä: $\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$ ja käänteismuunnos $\mathcal{F}^{-1}$.

Jos §1.11:n Lauseen 1. ehdot on täytetty, niin f:n Fourier-muunnos (6) on olemassa ja (7) pätee kaikissa f:n jatkuvuuspisteissä.

Esimerkki 1. Olkoon

$$f(x) \begin{cases} k, & \text{kun} \quad 0 < x < a \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

(6)$\Rightarrow$ f:n Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a k e^{-iwx} dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \Big/_0^a \frac{e^{-iwx}}{-iw} =$$

$$\frac{ik}{\sqrt{2\pi} w} \Big/_0^a e^{-iwx} = \frac{ik}{\sqrt{2\pi} w} \left(e^{-iaw} - 1 \right).$$

Huomautus. Jos f on parillinen, niin

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos wx - i \sin wx] dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx}_{=0} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos wx dx = \mathcal{F}_c\{f\}.$$

Esimerkki 2. Lasketaan funktion $f(x) = e^{-ax^2}$ Fourier-muunnos, kun $a > 0$. Koska f on parillinen, niin

$$\mathcal{F}\{f\} = \mathcal{F}_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos wx dx = I(a, w).$$

Integraalin $I(a, w)$ laskemiseksi derivoidaan w:n suhteen

$$\frac{\partial I}{\partial w} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} -xe^{-ax^2} \sin wx dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \Big/_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax^2}}{2a} \sin wx - \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax^2}}{2a} w \cos wx dx \right\} = -\frac{w}{2a} I(a, w).$$

$$\text{Siis } \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial w} = -\frac{w}{2a} \text{ eli } \frac{\partial}{\partial w} \ln |I| = -\frac{w}{2a}.$$

Integroidaaan w:n suhteen:

$$\ln |I| = -\frac{w^2}{4a} + C_1(a)$$

$$I = I(a, w) = C(a) e^{-\frac{w^2}{4a}}$$

(sisältää myös triviaaliratkaisun). Alkuehdosta

$$I(a, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} dx =$$

(sijoitetaan $p = ax^2 \Rightarrow dp = 2axdx$)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-p}}{2ax} dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-p} \frac{dp}{2a\sqrt{\frac{p}{a}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^\infty p^{-\frac{1}{2}} e^{-p} dp = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Sijoitetaan $I(a,0) = C(a) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, joten

$$\mathcal{F}\{f\} = I(a,w) = \frac{1}{\sqrt{2a} e^{-\frac{w^2}{4a}}}.$$

Lause 1. Fourier-muunnos on lineaarinen operaatio so.

$$\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}$$

aina, kun a ja b ovat vakioita ja funktioiden f ja g Fourier-muunnokset ovat olemassa.

Todistus. Lause seuraa siitä, että integrointi on lineaarinen operaatio, jolloin (6)$\Rightarrow$

$$a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\} =$$

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-iwx} dx + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(x) e^{-iwx} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty [af(x) + bg(x)] e^{-iwx} dx = \mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\}.$$

Fourier-muunnoksen käyttö differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa perustuu seuraavaan lauseeseen.

Lause 2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ §1.11:n Lauseen 1. ehdot toteuttava jatkuva funktio s.e.

$$\int_{-\infty}^\infty |f'(x)| dx < \infty \text{ ja } f(x) \to 0, \text{ kun } x \to \pm\infty.$$

Silloin

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}. \tag{9}$$

Huomautus. Kaava (9) on yksinkertaisempi kuin vastaavat kaavat kosini-, sini- ja Laplace-muunnokselle.

Todistus. Osittaisintegrointi:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M}^{M} f'(x)e^{-iwx}dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ \Big/_{-M}^{M} f(x)e^{-iwx} - (-iw)\int_{-M}^{M} f(x)e^{-iwx}dx \right\} \to 0+iw\mathcal{F}\{f(x)\}, \text{ kun } M \to \infty.$$

$$\begin{pmatrix} e^{-iwx} & = & \cos wx - i\sin wx \\ |e^{-iwx}| & = & (\cos^2 wx + \sin^2 wx)^{1/2} = \sqrt{1} = 1 \end{pmatrix}$$

Soveltamalla kaavaa (9) kahdesti peräkkäin saadaan

$$\mathcal{F}\{f''\} = iw\mathcal{F}\{f'\} = (iw)^2\mathcal{F}\{f\}. \text{ Siis}$$

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}. \tag{10}$$

Esimerkki 3. Tarkastellaan x-akselilla sijaitsevaa äärettömän pitkää homogeenista kaapelia, jonka pinta on eristetty ja jonka lämpötila kohdassa x hetkellä t on $u(x,t)$. Oletetaan, että

$$u(x,0) = f(x) \tag{11}$$

ja että kaikilla t:n arvoilla

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = 0, \tag{12}$$

missä $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.
Määritetään kaapelin lämpötila kohdassa x hetkellä t. Funktio $u(x,t)$ toteuttaa ns. 1-ulotteisen lämpöyhtälön

$$u_t = c^2 u_{xx}, \tag{13}$$

missä c on vakio ja $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
Kiinnitetään t ja muodostetaan yhtälön (13) vasemman ja oikean puolen määrittelemien x:n funktioiden Fourier-muunnokset; käyttämällä kaavaa (10) saadaan tällöin

$$\mathcal{F}\{u_t\} = c^2\mathcal{F}\{u_{xx}\} = c^2(-w^2)\mathcal{F}\{u\}.$$

Vasemmalla puolella

$$\mathcal{F}\{u_t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}\{u\},$$

mikäli derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto on sallittua. Funktiolle $\hat{u} = \mathcal{F}\{u\}$ saadaan näin ollen differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2 w^2 \hat{u}.$$

Jokaisella kiinteällä w:n arvolla tämä yhtälö voidaan ratkaista erottamalla muuttujat; tulos on

$$\hat{u}(w,t) = C(w) e^{-c^2 w^2 t}, \tag{14}$$

missä integroimisvakio $C(w)$ riippuu tarkasteltavasta w:n arvosta. Alkuehdosta (11) seuraa muodostamalla puolittain Fourier-muunnokset

$$\hat{u}(w,0) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(w),$$

joten sijoittamalla yhtälössä (14) $t = 0$ saamme

$$\hat{u}(w,0) = C(w) = \hat{f}(w).$$

$$\text{Siis } \hat{u}(w,t) = \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t}.$$

Pitämällä edelleen t kiinteänä tästä saadaan käänteinen Fourier-muunnos (kaava (7))

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw. \tag{15}$$

Konvoluutio

Funktioiden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvoluutio $f * g$ määritellään yhtälöllä

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x-p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) g(p) dp. \tag{16}$$

Määritelmä yhtyy aikaisemmin Laplace-muunnosten yhteydessä esitettyyn konvoluution määritelmään, mikäli $f(x) = g(x) = 0$ kaikilla $x < 0$.

Lause 3. (Konvoluutiolause) Oletetaan, että f ja g ovat paloittain jatkuvia ja rajoitettuja ja että $|f|$ ja $|g|$ ovat integroituvia. Silloin

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}. \tag{17}$$

Todistus.

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp\right)e^{-iwx}dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-iwx}dpdx.$$

Suoritetaan pintaintegraaliin muuttujanvaihto $x - p = q$. Saadaan (vrt. vastaava lasku Laplace-muunnokselle)

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-iw(p+q)}dpdq =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-iwp}g(q)e^{-iwq}dpdq =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-iwp}dp\int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-iwq}dq = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}.$$

Konvoluutio voidaan lausua myös Fourier-muunnosten $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ ja $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$ avulla. Muodostetaan yhtälön (17) molempien puolien käänteiset Fourier-muunnokset; saadaan

$$f * g = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\hat{g}\} \text{ eli}$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}dw. \tag{18}$$

Esimerkki 4. Esimerkin 3. lämmönjohtoprobleeman ratkaisu voidaan esittää toisessa muodossa. Kaavan (15) lauseke on nimittäin muotoa (18), missä

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-c^2w^2t}.$$

Näin ollen

$$u(x,t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp, \tag{19}$$

missä g on funktion $\hat{g}$ käänteinen Fourier-muunnos. Tämä saadaan selville Esimerkin 2. avulla, jossa osoitettiin, että

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}, \text{ kun } a > 0.$$

Valitsemalla $a = \frac{1}{4c^2t}$ nähdään lineaarisuutta käyttäen, että

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}(w)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-c^2w^2t}\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-w^2/4a}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2a}e^{-ax^2} = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4c^2t}.$$

Sijoittamalla lopuksi kaavaan (19) saamme

$$u(x,t)(f * g)(x) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-(x-p)^2/4c^2t}dp.$$

Apulause. Olkoon $\alpha = c + id$. Väite:

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}.$$

Todistus.

$$e^{\alpha x} = e^{cx+idx} = e^{cx}e^{idx} = e^{cx}(\cos dx + i\sin dx) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \frac{d}{dx}\left(e^{cx}\cos dx\right) + i\frac{d}{dx}\left(e^{cx}\sin dx\right) =$$

$$e^{cx}(c\cos dx - d\sin dx) + ie^{cx}(c\sin dx + d\cos dx) =$$

$$c(e^{cx}\cos dx + ie^{cx}\sin dx) + id(e^{cx}\cos dx + ie^{cx}\sin dx) =$$

$$(c + id)e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}.$$

4 z-muunnos

4.1 z-muunnos

Laplace-muunnoksen diskreetti (epäjatkuva) vastine on z-muunnos. Funktion $f(t)$ asemesta tarkastellaan lukujonoa $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, jolloin luvut u_n voivat olla esimerkiksi jonkin jatkuvan funktion $u(t)$ arvoja pisteissä $t = nT$, missä $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Esimerkki 1. Digitaalinen signaalinkäsittely: Ajasta riippuva (jatkuva) signaali $t \mapsto u(t)$ digitalisoidaan rekisteröimällä signaalin voimakkuus hetkinä $0, T, 2T, \ldots$; saadaan lukujono $u_n = u(nT)$.

Esimerkki 2. Liikennelaskenta: u_n on tarkkailupisteen sivuuttavien ajoneuvojen lukumäärä aikavälillä $[nT, (n+1)T]$.

Esimerkki 3. Differenssiyhtälöt: ratkaistava esimerkiksi yhtälö

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

kun u_0 ja u_1 ovat annettuja.

Digitalisoitu signaali $u_n = u(nT)$ määrittelee alkuperäistä funktiota $t \mapsto u(t)$ approksimoivan porrasfunktion $t \mapsto u_a(t)$ s.e.

$$u_a(t) = u(nT) \quad (nT < t < (n+1)T;\ n \geq 0) \tag{1}$$

Kyseisen porrasfunktion Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} u(nT) dt =$$

$$\sum_{n=0}^\infty u(nT) \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} dt = \sum_{n=0}^\infty u(nT) \mathop{/}_{nT}^{(n+1)T} \frac{-e^{-st}}{s} =$$

$$\sum_{n=0}^\infty u(nT) \frac{e^{-snT} - e^{-s(n+1)T}}{s} = \sum_{n=0}^\infty u(nT) \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) e^{-snT} =$$

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{n=0}^\infty u(nT) e^{-nsT}$$

edellyttäen, että porrasfunktion kasvu on korkeintaan eksponentiaalinen. Tällöin sarja

$$\sum_{n=0}^\infty u(nT) e^{-nsT}$$

suppenee. Sen määrittelemä s:n funktio on jonon

$$\{u(nT)\}_{n=0}^\infty$$

diskreetti Laplace-muunnos. Merkitsemällä $z = e^{sT}$ saadaan funktion $t \mapsto u(t)$ z-muunnos

$$Z\{u(t)\} = U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) z^{-n},$$

joka riippuu vain u:n arvoista pisteissä nT.

Jokaiseen lukujonoon $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ voidaan liittää porrasfunktio $u(t)$ s.e.

$$u(t) = u_n, \text{ kun } nT \leq t < (n+1)T \quad (n \geq 0).$$

Lukujonon $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ z-muunnos on sama kuin siihen liittyvän porrasfunktion $u(t)$ z-muunnos:

$$Z\left\{\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n}$$

edellyttäen, että sarja suppenee jollakin z:n arvolla.

Esimerkki 1.

(i) Diracin δ-funktion $\delta(t)$ $(= \delta(t-0))$ diskreetti vastine on yksikköpulssi

$$\Delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad n = 0 \\ 0, & \text{kun} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Sen z-muunnos on

$$Z\{\Delta(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) z^{-n} = z^{-0} = 1 \text{ (vakio)}.$$

(ii) δ-funktion $\delta(t-a)$ diskreetti vastine on viivästynyt yksikköpulssi

$$\Delta(n-k) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad n = k \\ 0, & \text{kun} \quad n \neq k \end{cases},$$

missä $k \geq 1$ on kokonaisluku. Vastaava z-muunnos on

$$Z\{\Delta(n-k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n-k) z^{-n} = z^{-k} \quad (z \neq 0).$$

(iii) Geometrinen pulssijono $u_n = a^n$ syntyy eksponenttifunktion $u(t) = a^{t/T}$ arvoista pisteissä $t = nT$. Sen z-muunnos on

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} = 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \dots$$

Kyseisen geometrisen sarjan summa on

$$U(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}, \text{ kun } \left|\frac{z}{a}\right| > 1.$$

(iv) Porrasfunktioon $U(t-0) = U(t)$ liittyy lukujono $U(nT) = 1$ $(= 0, 1, 2, \dots)$. z-muunnos on

$$Z\{U(nT)\} = U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{z}{z-1},$$

kun $|z| > 1$ (vrt. (iii)).

Kuten tavallinen Laplace-muunnos, myös z-muunnos on lineaarinen operaatio:

Lause 1. Oletetaan, että funktioilla $u(t)$ ja $v(t)$ on z-muunnokset $U(z) = Z\{u(t)\}$ ja $V(z) = Z\{v(t)\}$. Silloin

$$Z\{\alpha u(t) + \beta v(t)\} = \alpha Z\{u(t)\} + \beta Z\{v(t)\}$$

aina, kun α ja β ovat vakioita.

Todistus. z-muunnoksen määritelmän nojalla

$$\alpha Z\{u(t)\} + \beta Z\{v(t)\} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v(nT) z^{-n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\alpha u(nT) + \beta v(nT)\} z^{-n} = Z\{\alpha u(t) + \beta v(t)\}.$$

Jos $U(z) = Z\{u(nT)\}$, sanomme, että lukujono $\{u(nT)\}_{n=0}^{\infty}$ on funktion $U(z)$ käänteinen z-muunnos; merkitään $Z^{-1}\{U(z)\}$. Siis

$$\{u(nT)\}_{n=0}^{\infty} = Z^{-1}\{U(z)\}.$$

Käänteinen z-muunnos on aina lukujono, eikä sen avulla saada selville sitä funktiota $u(t)$, jonka arvoista lukujono $\{u(nT)\}_{n=0}^{\infty}$ alunperin mahdollisesti muodostettiin. $Z^{-1}\{U(z)\}$ määrää vain funktion $u(t)$ arvot pisteissä nT.

Taulukko Laplace- ja z-muunnoksista

	$u(t)$	$u_n = u(nT)$	$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$	$U(z) = Z\{u(t)\}$
1	$\delta(t)$	$\Delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	1	1
2	$\delta(t - kT)$	$\Delta(n-k) = \begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases}$	e^{-ksT}	z^{-k}
3	$U(t)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
4	$a^{t/T}$	a^n	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$ $(a > 0)$	$\frac{z}{z-a}$
5	t	nT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
6	t^2	n^2T^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
7	$ta^{(t/T-1)}$	nTa^{n-1}	$\frac{1}{(s-(1/T)\ln a)^2}$ $(a > 0)$	$\frac{Tz}{(z-a)^2}$
8	e^{-at}	e^{-naT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	te^{-at}	nTe^{-naT}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	t^2e^{-at}	$n^2T^2e^{-naT}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2z(z+e^{-aT})e^{-aT}}{(z-e^{aT})^3}$
11	$\sin kt$	$\sin knT$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\frac{z\sin kT}{z^2-2z\cos kT+1}$
12	$\cos kt$	$\cos knT$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\frac{z(z-\cos kT)}{z^2-2z\cos kT+1}$
13	$e^{-at}\sin kt$	$e^{-naT}\sin knT$	$\frac{k}{(s+a)^2+k^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin kT}{z^2-2ze^{-aT}\cos kT+e^{-2aT}}$
14	$e^{-at}\cos kt$	$e^{-naT}\cos knT$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+k^2}$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos kT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos kT+e^{-2aT}}$
15	$\sinh kt$	$\sinh nkT$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$\frac{z\sinh kT}{z^2-2z\cosh kT+1}$
16	$\cosh kt$	$\cosh nkT$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\frac{z(z-\cosh kT)}{z^2-2z\cosh kT+1}$

Huomautus. Taulukon lukujonot ja z-muunnokset riippuvat yleensä otosvälin pituudesta T.

Esimerkki 2. Funktion $u(t) = (2+5t)e^{-3t}$ z-muunnos saadaan selville lineaarisuuden perusteella; käytetään taulukon rivejä 8 ja 9:

$$Z\{u(t)\} = 2Z\{e^{-3t}\} + 5Z\{te^{-3t}\} = \frac{2z}{z-e^{-3T}} + \frac{5Tze^{-3T}}{(z-e^{-3T})^2} =$$

$$\frac{2z^2 + z(5T-2)e^{-3T}}{(z-e^{-3T})^2}$$

Jos funktion Laplace-muunnos tunnetaan, sen avulla voidaan usein muodostaa myös saman funktion z-muunnos:

Esimerkki 3.

(i) Oletetaan, että

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{s^3+3s^2+12}{s^2(s^2+4)}.$$

Osamurtokehitelmä:

$$U(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}\{u_1(t)\} + \mathcal{L}\{u_2(t)\}.$$

Taulukon riveiltä 5 ja 12 nähdään, että

$$Z\{u_1(t)\} = \frac{3Tz}{(z-1)^2} \text{ ja } Z\{u_2(t)\} = \frac{z(z-\cos 2T)}{z^2-2z\cos 2T+1}.$$

Siis $Z\{u(t)\} = Z\{u_1(t)\} + Z\{u_2(t)\} = \dfrac{3Tz}{(z-1)^2} + \dfrac{z(z-\cos 2T)}{z^2-2z\cos 2T+1}$.

(ii)

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+ik} + \frac{1}{s-ik}\right).$$

Taulukon rivin 8 mukaisesti tästä hajotelmasta voidaan lukea

$$Z\{\cos kt\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{-ikT}} + \frac{z}{z-e^{ikT}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{z^2-e^{ikT}z+z^2-e^{-ikT}}{z^2-(e^{ikT}+e^{-ikT})z+1} = \frac{z(z-\cos kT)}{z^2-2z\cos kT+1}.$$

Huomautus. Vakio a taulukon 8. rivillä voi siis olla myös kompleksinen (tässä esimerkissä $a = \pm ik$).

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan eri keinoja käänteisen z-muunnoksen määrittämiseksi.

Esimerkki 4.

(i) Olkoon

$$U(z) = \frac{6z}{2z-1}.$$

Kirjoittamalla

$$U(z) = 3\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right)$$

nähdään suoraan taulukosta (rivi 4), että

$$Z^{-1}\{U(z)\} = 3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Siis $u(nT) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$, kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ riippumatta otosvälin pituudesta T.

(ii) Olkoon

$$U(z) = \frac{z}{6z^2-5z+1}.$$

Osamurtokehitelmä:

$$U(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{3}}.$$

Taulukosta (rivi 4):

$$Z^{-1}\{U(z)\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty} - \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Siis $u(nT) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ riippumatta T:stä.

(iii) Olkoon

$$U(z) = \frac{1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}.$$

Tavanomainen osamurtokehitelmä

$$U(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-\frac{1}{2}}$$

ei tällä kertaa auta löytämään ratkaisua, sillä taulukon viimeisen sarakkeen rationaalisissa lausekkeissa on säännöllisesti jokin z:n potenssi myös osoittajassa. Tällainen z:n potenssi saadaan osoittajaan helposti hajottamalla osamurtolukuihin $U(z)$:n asemesta lauseke $\frac{U(z)}{z}$.

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{z} + \frac{2}{z-1} - \frac{4}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow U(z) = 2 + \frac{2z}{z-1} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}}.$$

Taulukon riveiltä 1 ja 4 nähdään nyt, että

$$Z^{-1}\{U(z)\} = 2\Delta(n) + 2\{1^n\}_{n=0}^{\infty} - 4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

$$\text{Siis } u(nT) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad n \le 1 \\ 2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{kun} \quad n \ge 2 \end{cases} \text{ riippumatta } T\text{:stä.}$$

Lause 2. Jos $Z\{u(t)\} = U(z)$ ja K on positiivinen kokonaisluku, niin

$$Z\{u(t+KT)\} = z^K U(z) - z^K u(0) - z^{K-1}u(T) - z^{K-2}u(2T) - \cdots - zu[(K-1)T].$$

Huomautus. Vastaava tulos lukujonon z-muunnoksille saadaan korvaamalla $u(t)$ lukujonoon liittyvällä porrasfunktiolla.

Erikoistapauksissa $K = 1, 2, 3$ Lauseen 2. väitös on

$$\begin{aligned} Z\{u(t+T)\} &= zU(z) - zu(0) \\ Z\{u(t+2T)\} &= z^2U(z) - z^2u(0) - zu(T) \\ Z\{u(t+3T)\} &= z^3U(z) - z^3u(0) - z^2u(T) - zu(2T) \end{aligned}$$

Vrt.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Todistus. Määritelmän mukaan

$$Z\{u(t+KT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u[(n+K)T]}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u[(n+K)T]}{z^{n+K}} z^K =$$

$$z^K \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(nT)}{z^n} - \sum_{n=0}^{K-1} \frac{u(nT)}{z^n} \right] = z^K U(z) - \sum_{n=0}^{K-1} \frac{u(nT)}{z^n}$$

Esimerkki 5. Määrätään $Z\{u(t+3T)\}$, kun $u(t) = te^{-2t}$. Lauseen 2. nojalla

$$Z\{u(t+3T)\} = z^3 U(z) - z^3 u(0) - z^2 u(T) - zu(2T).$$

Tässä

$$u(0) = 0$$
$$u(T) = Te^{-2T}$$
$$u(2T) = 2Te^{-4T}$$

$U(z)$ saadaan taulukosta riviltä 9. Siten

$$Z\{u(t+3T)\} = \frac{Tz^4 e^{-2T}}{(z-e^{-2T})^2} - z^2 Te^{-2T} - 2zTe^{-4T}.$$

Esimerkki 6. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \tag{1}$$

kun $u_0 = u_1 = 1$.

Huomautus. Yhtälöstä (1) seuraa arvoilla $n = 0, 1, 2, 3$, että

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2$$
$$u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$$
$$u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$$
$$u_5 = u_4 + u_3 = 5 + 3 = 8$$

Funktion $n \mapsto u_n$ lausumiseksi alkeisfunktioiden avulla merkitään

$$U(z) = Z\left\{\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\right\}$$

ja muodostetaan yhtälön (1) vasemman ja oikean puolen z-muunnokset. Lauseen 2. avulla saadaan

$$\underbrace{z^2U - z^2u_0 - zu_1}_{Z\left\{\{u_{n+2}\}_{n=0}^{\infty}\right\}} = \underbrace{zU - zu_0}_{Z\left\{\{u_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}\right\}} + \underbrace{U}_{Z\left\{\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\right\}}$$

Sijoitetaan tähän alkuehdot $u_0 = u_1 = 1$ ja ratkaistaan $U(z)$:

$$U(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Nimittäjän nollakohdat ovat $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$ ja funktion $\frac{U(z)}{z}$ hajotelma osamurtolukuihin on

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{A}{z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}},$$

$$\text{missä } A = \frac{1}{10}\left(5 + \sqrt{5}\right) \text{ ja } B = \frac{1}{10}\left(5 - \sqrt{5}\right).$$

Kertomalla puolittain z:lla saamme

$$U(z) = \frac{Az}{z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{Bz}{z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}},$$

josta taulukon avulla voidaan lukea käänteinen z-muunnos:

$$u_n = A\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Sijoitetaan tähän A:n ja B:n lausekkeet ja sievennetään:

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right].$$

Tämän jonon lukuja kutsutaan Fibonaccin luvuiksi. Jonon ensimmäiset jäsenet ovat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Lause 3. Jos $Z\{u(t)\} = U(z)$, niin $Z\{e^{-at}u(t)\} = U\left(ze^{aT}\right)$.

$$\left(z = e^{sT} \Rightarrow ze^{aT} = e^{(s+a)T}\right)$$

Todistus. Määritelmän mukaan

$$Z\{e^{-at}u(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-naT}u(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\left(ze^{aT}\right)^{-n}.$$

Esimerkki 7. Etsitään $Z\{t^2e^{-at}\}$, kun tiedetään, että (taulukon rivi 6)

$$Z\{t^2\} = \frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Valitsemalla $u(t) = t^2$ Lauseessa 3. saamme

$$Z\{t^2e^{-at}\} = \frac{T^2ze^{aT}\left(ze^{aT}+1\right)}{\left(ze^{aT}-1\right)^3} = \frac{T^2z\left(z+e^{-aT}\right)e^{aT}}{\left(z-e^{aT}\right)^3}$$

(vrt. taulukon rivi 10.)

Lause 4. Jos $Z\{u(t)\} = U(z)$, niin

$$Z\{tu(t)\} = -zT\frac{d}{dz}U(z)$$

$$(\text{vrt. } \mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s))$$

$$\left(\frac{d}{ds} = \frac{dz}{ds}\frac{d}{dz} = zT\frac{d}{dz}\right)$$

Todistus.

$$\text{Koska } U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)z^{-n}, \text{ niin}$$

$$-zT\frac{d}{dz}U(z) = -zT\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)z^{-n} =$$

$$-zT\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\frac{(-n)}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[nTu(nT)z^{-n}\right] = Z\{tu(t)\},$$

sillä myös negatiivisten z:n potenssien mukaan etenevien suppenevien potenssisarjojen derivointi termeittäin on sallittua.

Esimerkki 8. Etsitään $Z\{t \sin kt\}$, kun tiedetään, että (taulukon rivi 11)

$$Z\{\sin kT\} = \frac{z \sin kT}{z^2 - 2z\cos kT + 1} = U(z).$$

Valitsemalla $u(t) = \sin kt$ Lauseessa 4. saamme

$$Z\{t \sin kt\} = -zT \frac{d}{dz} U(z) =$$

$$-zT \frac{\sin kT\,[z^2 - 2z\cos kT + 1] - z \sin kT\,[2z - 2\cos kT]}{(z^2 - 2z\cos kT + 1)^2} =$$

$$\frac{Tz(z^2-1)\sin kT}{(z^2 - 2z\cos kT + 1)^2}.$$

Esimerkki 9. Ratkaistaan differenssiyhtälö

$$u_{n+2} - 2tu_{n+1} + u_n = 0, \tag{1}$$

missä t on reaalinen parametri. Merkitään

$$U(z) = Z\left\{\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\right\}$$

ja muodostetaan yhtälön (1) z-muunnos Lauseen 2. avulla; saadaan

$$z^2U - z^2u_0 - zu_1 - 2t(zU - zu_0) + U = 0 \Rightarrow$$

$$U = \frac{z^2u_0 + zu_1 - 2tzu_0}{z^2 - 2tz + 1}.$$

Oletetaan alkuehdot $u_0 = 1$, $u_1 = t$. Silloin

$$U = \frac{z^2 - tz}{z^2 - 2tz + 1}.$$

Oletetaan lisäksi, että $|t| \leq 1$. Silloin $\exists\ k$ s.e. $t = \cos k$ ja saamme

$$U(z) = \frac{z(z - \cos k)}{z^2 - 2z\cos k + 1}.$$

Taulukon riviltä 12 löytyy käänteinen z-muunnos ($T = 1$)

$$u_n = \cos kn = \cos(n \arccos t).$$

Yhtälöstä (1) nähdään induktiolla, että u_n on astetta n oleva muuttujan t polynomi. Se on ns. Tšebysevin polynomi, jota merkitään $T_n(t)$. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} T_2(t) &= 2t^2 - 1 \\ T_3(t) &= 4t3 - 3t \\ &\text{jne.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \arccos t \\ u_n = \cos nx &= T_n(t) = T_n(\cos x) \\ \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

4.2 Diskreetti Fourier-muunnos

Jos Dirichlet'n ehdot ovat voimassa, funktion $f(x)$ Fourier-sarja suppenee ja esittää funktiota $f(x)$ kokonaisella välillä. Tätä esitystä vastaava diskreetti probleema voitaisiin formuloida seuraavasti:

Etsi trigonometrinen polynomi, joka saa annetut arvot äärellisen monessa annetussa pisteessä.

Esimerkki. Etsitään muotoa

$$c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix}$$

oleva trigonometrinen polynomi, joka saa pisteissä $x = 0, \pi/2, \pi$ ja $3\pi/2$ vastaavasti arvot 2,4,6 ja 8. Sijoittamalla annetut x:n arvot saadaan neljä yhtälöä:

$$\begin{array}{ccccccccc} c_0 & + & c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 2 \\ c_0 & + & ic_1 & - & c_2 & - & ic_3 & = & 4 \\ c_0 & - & c_1 & + & c_2 & - & c_3 & = & 6 \\ c_0 & - & ic_1 & - & c_2 & + & ic_3 & = & 8 \end{array} \tag{1}$$

Laskemalla yhtälön yhteen saadaan $4c_0 = 20$. Vakiotermi $c_0 = 5$ on siis annettujen funktion arvojen 2,4,6 ja 8 keskiarvo aivan kuten jatkuvassa tapauksessa. Muiden kertoimien määräämiseksi kirjoitetaan systeemin (1) kerroinmatriisi muotoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix}$$

A:n käänteismatriisi löytyy helposti tarkastelemalla A:n kompleksikonjugaattia $\overline{A}$, joka saadaan konjugoimalla kaikki A:n alkiot.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (-i) & (-i)^2 & (-i)^3 \\ 1 & (-i)^2 & (-i)^4 & (-i)^6 \\ 1 & (-i)^3 & (-i)^6 & (-i)^9 \end{pmatrix}$$

Osoittautuu nimittäin, että $\overline{A}A = 4I$, josta seuraa

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\overline{A}.$$

Systeemi (1) voidaan esittää muodossa $Ac = f$, missä

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ ja } f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu saadaan kertomalla vasemmalta A^{-1}:llä:

$$c = A^{-1}f = \frac{1}{4}\overline{A}f.$$

Siten

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{4}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = 5 \text{ (kuten edellä)} \\ c_1 &= \frac{1}{4}(f_0 - if_1 + (-i)^2 f_2 + (-i)^3 f_3) = -1 + i \\ c_2 &= \frac{1}{4}(f_0 - f_1 0 f_2 - f_3) = -1 \\ c_3 &= \frac{1}{4}(f_0 + (-i)^3 f_1 + (-i)^6 f_2 + (-i)^9 f_3) = -1 - i \end{aligned}$$

Tämän esimerkin mukainen trigonometrinen interpolointitehtävä voidaan ratkaista samaan tapaan myös tilanteessa, jossa solmupisteitä ja tuntemattomia polynomin kertoimia on n kappaletta. Tällöin etsitään muotoa

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}$$

olevaa trigonometristä polynomia, joka saa solmupisteissä $\frac{2\pi j}{n}$ annetut arvot f_j, missä $0 \leq j \leq n-1$. Ratkaistavana on siis yhtälöryhmä

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{2\pi ijk/n} = f_j \ (0 \leq j \leq n-1).$$

Sijoittamalla $w = e^{2\pi i/n}$ tämä yhtälöryhmä saa muodon

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{jk} = f_j \ (0 \leq j \leq n-1).$$

Sen kerroinmatriisi F_n on tyyppiä $n \times n$ ja F_n:n jk:s alkio on

$$w^{(j-1)(k-1)}.$$

Käänteismatriisi on jälleen helppo löytää; se on

$$F_n^{-1} = \frac{1}{n}\overline{F_n} \quad (\overline{F_n}F_n = nI), \tag{2}$$

missä $\overline{F_n}$:n jk:s alkio on

$$\overline{w}^{(j-1)(k-1)}.$$

Systeemin $F_n c = f$ ratkaisu on siis

$$c = F_n^{-1} f = \frac{1}{n}\overline{F_n} f. \tag{3}$$

Tämä on jonon $f = (f_1, f_1, \dots, f_{n-1})$ diskreetti Fourier-muunnos.

Todistetaan (2): matriisin $\overline{F_n}F_n$ jk:s alkio on

$$\sum_{\nu=1}^{n} \overline{w}^{(j-1)(\nu-1)} w^{(\nu-1)(k-1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \left[\overline{w}^{(j-1)} w^{(k-1)}\right]^{(\nu-1)} =$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} r^{\nu-1}, \text{ missä } r = \overline{w}^{(j-1)} w^{(k-1)}.$$

Jos $j = k$, niin

$$r = (\overline{w}w)^{j-1} = |w|^{2(j-1)} = 1 \ (|w| = 1) \text{ ja } \sum_{\nu=1}^{n} r^{\nu-1} = n.$$

Jos $j \neq k$, niin

$$\sum_{\nu=1}^{n} r^{\nu-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} \text{ ja } r \neq 1 \text{ (ilman tod.)}.$$

Tässä

$$r^n = \overline{w}^{n(j-1)} w^{n(k-1)} = 1,$$

sillä $w^n = \overline{w}^n = 1$. Näin ollen matriisin $\overline{F_n} F_n$ jk:s alkio on 0, jos $j \neq k$. Tästä seuraa (2). Komponenteittain kirjoitettuna (2) on

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \overline{w}^{jk} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi ijk/n}. \tag{4}$$

Tämä vastaa jatkuvan funktion Fourier-sarjan kerrointa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \text{ (vrt. §1.9)}.$$

Kaavassa (4) on oikeastaan vastaavan integraalin likiarvo laskettuna puolisuunnikassäännöllä.

Vektorin c laskeminen kaavasta (3) vaatii noin n^2 yhteen- ja kertolaskutoimitusta. Matriisin F_n erikoisen muodon ansiosta on voitu kehittää algoritmi, jonka avulla c:n laskemiseen tarvittavien laskutoimitusten määrä supistuu oleellisesti pienemmäksi ja tulee olemaan kertalukua $n \log_2 n$. Tällä ns. nopealla Fourier-muunnoksella (FFT) on monia sovelluksia.

Vektorien $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ ja $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$ konvoluutio on vektori $f * g =$

$$(f_0 g_0 + f_1 g_{n-1} + f_2 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_1, \ldots, f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + f_2 g_{n-3} + \cdots + f_{n-1} g_0).$$

Konvoluution jokainen komponentti on n:n muotoa $f_j g_k$ olevan termin summa. Ensimmäisessä komponentissa $j + k = 0$ tai $j + k = n$. l:s komponentti sisältää ne termit, joissa joko $j + k = l$ tai $j + k = l + n$ $(1 \leq l \leq n - 1)$.

Esimerkki. Vektorien $(1,2,3)$ ja $(4,5,6)$ konvoluutio on

$$(1\cdot 4+2\cdot 6+3\cdot 5, 1\cdot 5+2\cdot 4+3\cdot 6, 1\cdot 6+2\cdot 5+3\cdot 4) = (31,31,28).$$

Diskreetti konvoluutiolause Konvoluution $f*g$ diskreetti Fourier-muunnos on n kertaa f:n ja g:n diskreettien Fourier-muunnosten $c = F^{-1}f$ ja $d = F^{-1}g$ komponenteittain laskettu tulo:

$$F^{-1}(f*g) = n(F^{-1}f)(F^{-1}g) = n(cd). \tag{5}$$

$$(\text{Vrt. } \mathcal{F}\{f*g\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\})$$

Konvoluutiolause tarjoaa vaihtoehtoisen keinon konvoluution laskemiseen. Kertomalla (5) vasemmalta F:llä saadaan

$$f*g = nF(cd). \tag{6}$$

$$\left(\text{Vrt. } f*g = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\hat{g}\}\right)$$

Siis $f*g$ saadaan kertomalla komponenteittain Fourier-muunnokset $c = F^{-1}f$ ja $d = F^{-1}g$ ja muodostamalla tulon cd käänteinen Fourier-muunnos. Nopeaa Fourier-muunnosta käyttämällä tarvittavien aritmeettisten operaatioiden määrä on yhteensä kertalukua $n\log_2 n$ ja suurilla n:n arvoilla ratkaisevasti pienempi kuin konvoluution laskemiseen määritelmän perusteella tarvittava työmäärä.
Konvoluutiota voidaan käyttää polynomien kertolaskussa. Esimerkiksi

$$(1+w+w^2)(1+w+w^2) = 1+2w+3w^2+2w^3+w^4. \tag{7}$$

Polynomien kerroinvektorit ovat $f = (1,1,1)$ ja $g = (1,1,1)$. Oikealla puolella esimerkiksi toisen asteen kerroin on konvoluution $f*g$ kolmas komponentti $f_0g_2+f_1g_1+f_2g_0$. Kaikkia oikean puolen kertoimia ei kuitenkaan saada tällä tavoin paitsi jos $w^3 = 1$ kuten oli asianlaita edellä matriisissa F_n tapauksessa $n = 3$. Tällöin $w^4 = w$ ja kaavan (7) oikea puoli on $3+3w+3w^2$; sen kertoimet ovat täsmälleen samat kuin konvoluution $f*g = (3,3,3)$ komponentit. Polynomin kerroinvektorien $f = g = (1,1,1)$ Fourier-muunnokset ovat $c = d = (1,0,0)$, jolloin myös $cd = (1,0,0)$. Käänteismuunnoksen avulla laskettu konvoluutio on ($n = 3$ Lauseessa 6.)

$$f*g = 3F_3(cd) = (3,3,3)^T, \text{ kuten edellä.}$$

Esimerkki. Polynomien kertolasku. Polynomien

$$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \text{ ja } g_0 + g_1 x + g_2 x^2$$

tulo on polynomi, jolla on samat kertoimet kuin vektorien

$$f = (f_0, f_1, f_2, 0, 0) \text{ ja } g = (g_0, g_1, g_2, 0, 0)$$

diskreetillä konvoluutiolla

$$f * g = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0, f_1 g_2 + f_2 g_1, f_2 g_2).$$

Esimerkki.

$$303 \cdot 222 = 67266$$
$$303 = 3 + 0 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2$$
$$(3, 0, 3, 0, 0) * (2, 2, 2, 0, 0) = (6, 6, 12, 6, 6)$$

Jos vektorin f diskreettiä Fourier-muunnosta merkitään $\mathcal{F}(f) = F_n^{-1} f$, konvoluutiolause voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{F}(f * g) = n\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

Esimerkki. Tapauksessa $n = 2$ $w = e^{2\pi i/n} = e^{\pi i} = -1$,

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ja } F_2^{-1} = \frac{1}{2}\overline{F_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jos $f = (4, 2)$ ja $g = (8, 2)$, niin $\mathcal{F}(f) = F_2^{-1} f = (3, 1)$ ja $\mathcal{F}(g) = (5, 3)$. Edelleen $f * g = (4 \cdot 8 + 2 \cdot 2, 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8) = (36, 24)$, joten

$$\mathcal{F}(f * g) = F_2^{-1} \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = (30, 6) = 2\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

4.3 Nopea Fourier-muunnos (FFT)

Fourier-muunnosta (3) laskettaessa on matriisi $\overline{F_n}$ kerrottava vektorilla f. Jos $n = 2m$ on parillinen, päästään tulokseen nopeammin palauttamalla lasku m-ulotteiseen tapaukseen. Yksinkertaisuuden vuoksi esitämme algoritmin vektorin $F_n x$ laskemiseksi; Fourier-muunnos saadaan tästä konjugoimalla. Arvoilla $n = 1, 2$ ja 4 matriisi F_n on:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix}$$

Yleisesti F_n:n jk:s alkio on

$$w_n^{(j-1)(k-1)}, \text{ missä } w_n = e^{2\pi i/n}.$$

Jos $n = 2m$, pätee selvästi

$$w_n^2 = w_m, \tag{1}$$

sillä $w_n^2 = e^{4\pi i/n} = e^{2\pi i/m} = w_m$.

Muodostetaan n-vektorista $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ aluksi kaksi m-vektoria

$$\begin{aligned} x' &= (x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}) \\ x'' &= (x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

joista x' sisältää ne x:n komponentit, joiden indeksi on parillinen. Väitämme, että vektorin $y = F_n x$ komponentit voidaan lausua vektorien

$$y' = F_n x' \text{ ja } y'' = F_m x''$$

avulla kaavoilla

$$\begin{aligned} y_j &= y'_j + w_n^j y''_j \quad (0 \le j \le m-1) \\ y_{j+m} &= y'_j - w_n^j y''_j \quad (0 \le j \le m-1) \end{aligned} \tag{2}$$

Todistusta varten hajotetaan summa

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kj} x_k$$

kahteen osaan, joista toinen sisältää parilliset ja toinen parittomat indeksit:

$$y_j = \sum_{k=0}^{m-1} w_n^{2kj} x_{2k} + \sum_{k=0}^{m-1} w_n^{(2k+1)j} x_{2k+1}$$

Ensimmäisessä summassa on x':n ja toisessa x'':n komponentit:

$$y_j = \sum_{k=0}^{m-1} w_n^{2kj} x'_k 0 \sum_{k=0}^{m-1} w_n^{(2k+1)j} x''_k.$$

Koska $w_n^2 = w_m$, tästä seuraa

$$y_j = \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{kj} x'_k + w_n^j \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{kj} x''_k = y'_j + w_n^j y''_j. \tag{3}$$

Arvoilla $0 \leq j \leq m-1$ saadaan näin ensimmäinen kaavoista (2). Jälkimmäinen seuraa ottamalla huomioon, että

$$\begin{gathered} w_m^{k(j+m)} = w_m^{kj} \left(w_m^m\right)^k = w_m^{kj}, \text{ sillä } w_m^m = 1 \\ w_n^{j+m} = w_n^j w_n^m = -w_n^j, \text{ sillä } w_n^m = w_{2m}^m = e^{\pi i} = -1 \end{gathered}$$

Silloin (3) $\Rightarrow$

$$\begin{gathered} y_{j+m} = \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{k(j+m)} x'_k + w_n^{j+m} \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{k(j+m)} x''_k = \\ \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{kj} x'_k - w_n^j \sum_{k=0}^{m-1} w_m^{kj} x''_k = y'_j - w_n^j y''_j \\ (0 \leq j \leq m-1) \end{gathered}$$