Funktionaalianalyysi
Harjoitus 2/2009

1. Olkoon (x_n) kompleksilukujono ja asetetaan

$$T((x_n)) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots).$$

Osoita, että T määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $\ell^2 \to \ell^2$.

2. Olkoon $\mathcal{P}$ avaruuden $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}[0,1]$ aliavaruus, joka koostuu kaikkien reaalisten polynomien rajoittumista välille $[0,1]$. Derivaatan lineaarisuudesta johtuen on selvää, että $T : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$,

$$T(p) = p'(1),$$

määrittelee lineaarikuvauksen. Osoita, että T ei ole jatkuva.

3. Määritellään

$$Tf(x) = \int_0^1 e^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt, \quad x \in [0,1],$$

kun $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Osoita, että T on hyvin määritelty lineaarikuvaus $\mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$.

4. Olkoot $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, ja olkoon $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva. Esimerkissä 2.1.7 osoitettiin, että yhtälö

$$Kf(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\,dt, \quad s \in [a,b],$$

määrittelee lineaarikuvauksen $K : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$. Osoita, että K on jatkuva. (Vihje! Tarvitset tulosta Rynne & Youngson, Theorem 1.35, p.17.)

5. Olkoon (x_n) kompleksilukujono ja asetetaan

$$T((x_n)) = (\frac{1}{n}x_n).$$

Osoita, että T on hyvin määritelty rajoitettu lineaarinen operaattori $\ell^2 \to \ell^1$. (Vihje! Hölder.)

6. Olkoot $(X, \|\cdot\|_X)$ ja $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normiavaruuksia ja olkoon $T : X \to Y$ lineaarinen. Olkoon edelleen

$$\|x\|_1 := \|x\|_X + \|T(x)\|_Y.$$

Osoita, että $\|\cdot\|_1$ on normi avaruudessa X.