Funktionaalianalyysi
Harjoitus 3/2009

1. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja $T \in B(X,Y)$. Osoita, että operaattorinormilla $\|T\|$ on esitys
$$\|T\| = \inf\{\, k \in \mathbf{R}_+ : \|T(x)\| \le k\|x\| \ \forall x \in X \,\}.$$
(Vihje! Tutki Huomautusta 2.2.1.)

2. Olkoon $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbf{R}$ rajoitettu lineaarinen operaattori
$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$
Osoita, että $\|T\| = 1$.

3. Olkoon $h \in L^\infty(\mathbf{R})$ ja olkoon $T : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ kuvaus
$$T(f) = hf.$$
Osoita, että T on hyvin määritelty lineaarikuvaus, jolle $\|T\| \le \|h\|_\infty$.

4. Olkoon $T : \ell^2 \to \ell^2$ Harjoituksen 2, tehtävä 1 operaattori
$$T((x_n)) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots).$$
Määrää $\|T\|$.

5. Osoita, että $\langle \cdot,\cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbf{C}$,
$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b}_n$$
määrittelee kompleksisen sisätulon avaruudessa ℓ^2. (Huom! Miksi hyvin määritelty?)

6. Olkoon X sisätuloavaruus, $x, y, z \in X$ ja $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$. Osoita, että

(a) $\langle 0_X, y \rangle = \langle x, 0_X \rangle = 0$;
(b) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha}\langle x, y \rangle + \overline{\beta}\langle x, z \rangle$;
(c) $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2\langle x, x \rangle + \alpha\overline{\beta}\langle x, y \rangle + \beta\overline{\alpha}\langle y, x \rangle + |\beta|^2\langle y, y \rangle$.