**Funktionaalianalyysi**
**Harjoitus 4/2009**

**1.** Olkoon $X$ sisätuloavaruus ja $u, v \in X$. Osoita: Jos $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ kaikilla $x \in X$, niin $u = v$.

**2.** Olkoon $X$ sisätuloavaruus varustettuna indusoidulla normilla $\|\cdot\|$. Osoita, että kaikilla $u, v, x, y \in X$ pätee

(a) $\langle u+v, x+y\rangle - \langle u-v, x-y\rangle = 2\langle u, y\rangle + 2\langle v, x\rangle$;

(b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

**3.** Osoita, että avaruuden $\ell^1$ standardinormi ei ole sisätulon indusoima.

**4.** Olkoon $X$ sisätuloavaruus varustettuna indusoidulla normilla $\|\cdot\|$ ja olkoon $\{ x_1, \dots, x_k\} \subset X$ pareittain ortogonaalinen joukko. Osoita, että

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2.$$

**5.** Olkoon $X$ sisätuloavaruus. Osoita, että vektorit $x, y \in X$ ovat ortogonaaliset jos ja vain jos

$$\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$$

kaikilla $\alpha \in \mathbf{F}$.

**6.** Olkoon $X$ $k$-ulotteinen sisätuloavaruus, jolle $\{ e_1, \dots, e_k \}$ muodostaa ortonormaalin kannan. Osoita: Jos $A = \mathrm{Sp}\{ e_1, \dots, e_p \}$ jollekin $1 \le p < k$, niin

$$A^\perp = \mathrm{Sp}\{ e_{p+1}, \dots, e_k \}.$$