Funktionaalianalyysi
Harjoitus 5/2009

1. Olkoon X sisätuloavaruus ja $A, B \subset X$. Osoita, että

(i) $A \subset (A^{\perp})^{\perp} =: A^{\perp\perp}$;

(ii) $B^{\perp} \subset A^{\perp}$ aina kun $A \subset B$.

2. Olkoon X sisätuloavaruus ja $A \subset X$ sellainen, että A sisältää avoimen pallon

$$B(y, r) = \{ x \in X : \|x - y\| < r \}$$

jollekin $y \in X$ ja $r > 0$. Osoita, että tällöin $A^{\perp} = \{0_X\}$.

3. Olkoon X sisätuloavaruus ja $A \subset X$. Osoita, että $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$. (Vihje! Lemma 3.2.8.)

4. Olkoon $A = \{ (x_n) \in \ell^2 : x_{2n} = 0 \; \forall n \in \mathbf{N} \}$. Määrää $A^{\perp}$.

5. Olkoon (e_n) ortonormaali jono Hilbert-avaruudessa $\mathcal{H}$ ja olkoon (α_n) skalaarijono, ts. $\alpha_n \in \mathbf{F}$. Osoita: Jos $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ suppenee, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. (Vihje! Osoita Lemman 3.2.8 avulla, että kaikilla $m \in \mathbf{N}$ pätee $\langle x, e_m \rangle = \alpha_m$, kun $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.)

6. Olkoon (e_n) ortonormaali jono Hilbert-avaruudessa $\mathcal{H}$. Tutki, suppenevatko seuraavat sarjat avaruudessa $\mathcal{H}$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_n$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} e_n$.

7. Olkoon (e_n) ortonormaali kanta Hilbert-avaruudessa $\mathcal{H}$. Osoita, että kaikilla $x, y \in \mathcal{H}$ pätee

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle.$$

Ko. yhtälöä kutsutaan *Parsevalin kaavaksi.*