**Funktionaalianalyysi**
**Harjoitus 6/2009**

**1.** Olkoon $X$ äärellisulotteinen reaalikertoiminen normiavaruus, jolla on kanta $\{ e_1, \dots, e_k \}$. Osoita, että joukko

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n : \alpha_n \in \mathbf{Q} \right\}$$

on tiheä avaruudessa $X$.

**2.** Olkoon $\mathcal{H}$ ääretön-ulotteinen Hilbertin avaruus, jolla on ortonormaali kanta $(e_n)$. Määritellään kuvaus $T : \mathcal{H} \to \ell^2$ yhtälöllä

$$T(x) = (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Perustele, miksi $T$ on bijektiivinen isometria.

**3.** Olkoon $\mathcal{H}$ $\mathbf{F}$-kertoiminen Hilbertin avaruus ja $y, z \in \mathcal{H}$. Osoita, että kuvaus $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$T(x) = \langle x, y \rangle z,$$

määrittelee rajoitetun lineaarisen operaattorin. Osoita edelleen, että $\|T\| \le \|y\| \|z\|$.

**4.** Olkoon $\mathcal{H}$ $\mathbf{F}$-kertoiminen Hilbertin avaruus ja $y \in \mathcal{H}$. Osoita, että kuvaus $T : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$,

$$T(x) = \langle x, y \rangle,$$

määrittelee rajoitetun lineaarisen operaattorin. Osoita edelleen, että $\|T\| = \|y\|$.

**5.** Olkoot $X$, $Y$ ja $Z$ normiavaruuksia sekä $T \in B(X, Y)$ ja $S \in B(Y, Z)$. Osoita, että $S \circ T \in B(X, Z)$ ja

$$\|S \circ T\| \le \|S\| \|T\|.$$

**6.** Olkoon $X$ normiavaruus ja $(T_n)$ ja $(S_n)$ jonoja avaruudessa $B(X) := B(X, X)$ siten, että $\lim_{n \to \infty} T_n = T$ ja $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} S_n T_n = ST.$$

(Vihje! Kirjoita $S_n T_n - ST = S_n T_n - ST_n + ST_n - ST$ ja hyödynnä tehtävää 5.)