Funktionaalianalyysi
Harjoitus 7/2009

1. Osoita, että Lauseen 4.1.10 todistuksen kuvaus $T : \ell^\infty \to (\ell^1)'$,

$$T(c) = f_c,$$

on lineaarinen.

2. Määritellään avaruuden l^∞ lineaarinen alivaruus c_0 asettamalla

$$c_0 := \{ (x_n) \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}.$$

Edelleen kaikilla $a := (a_n) \in \ell^1$ määritellään lineaarinen operaattori $f_a : c_0 \to \mathbf{C}$ asettamalla

$$f_a((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Osoita, että kaikilla $f \in (c_0)'$ on olemassa $a \in \ell^1$ siten, että $f = f_a$ ja

$$\|a\|_1 \leq \|f\|.$$

(Vihje! Ota mallia Lauseen 4.1.10 todistusideasta.)

3. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, E tiheä avaruudessa X, ja $f, g : X \to Y$ jatkuvia siten, että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in E$. Osoita, että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in X$. (Vihje! Antiteesi.)

4. Olkoon $T \in B(\ell^2)$ operaattori

$$T((x_n)) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots).$$

Määrää T^2 ja $\|T^2\|$ sekä totea, että $\|T\|^2 \neq \|T^2\|$. (Vihje! Tarkoitus on käyttää hyväksi Harjoituksen 3, tehtävän 4 tietoja.)

5. Olkoon X normiavaruus ja olkoon $T \in B(X)$ kääntyvä. Osoita, että kaikilla $x \in X$ pätee

$$\|T(x)\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

6. Olkoon X Banach-avaruus ja olkoon (x_n) jono avaruudessa X. Osoita: Jos $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ suppenee, niin $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppenee.