**Funktionaalianalyysi**
**Harjoitus 8/2009**

**1.** Olkoon $X$ Banach-avaruus ja $(T_n)$ jono kääntyviä operaattoreita avaruudessa $B(X)$ siten, että $T_n \to T$ avaruudessa $B(X)$ ja että $\|T_n^{-1}\| < 1$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Osoita, että $T$ on kääntyvä. (Vihje! Osoita Lauseen 4.2.5 avulla, että $T_n^{-1}T$ on kääntyvä kun $n$ on riittävän suuri.)

**2.** Olkoon $(a_n)$ reaalilukujono siten, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < \infty$$

kaikille reaalilukujonoille $(x_n) \in \ell^1$. Osoita, että $(a_n) \in \ell^\infty$. (Vihje! Tarkastele operaattoreita $T_n : \ell^1 \to \mathbf{R}$, $T_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ Lauseen 4.3.4 avulla ja tutki jonoja $\tilde{e}_n$.)

**3.** Olkoot $X$ ja $Y$ normiavaruuksia ja $T : X \to Y$ lineaarikuvaus. Osoita, että

(a) $T(X)$ on $Y$:n lineaarinen aliavaruus;

(b) $T(X) = Y$ jos $T$ on avoin kuvaus.

**4.** Olkoot $X$ ja $Y$ Banach-avaruuksia ja olkoon $T \in B(X, Y)$ bijektio. Perustele luentojen tulosten avulla, miksi $T^{-1} \in B(Y, X)$.

**5.** Olkoon $X$ Banach-avaruus sekä normin $\|\cdot\|_1$ että normin $\|\cdot\|_2$ suhteen. Oletetaan lisäksi, että on olemassa $\alpha \in \mathbf{R}_+$ siten, että $\|x\|_1 \leq \alpha\|x_2\|$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentit, ts. on olemassa myös $\beta \in \mathbf{R}_+$ siten, että $\|x\|_1 \leq \alpha\|x_2\|$ kaikilla $x \in X$. (Vihje! Mitä tiedät oletusten ja tehtävän 4 perusteella identtisestä kuvauksesta?)

**6.** Olkoot $X$ ja $Y$ Banach-avaruuksia, joiden normit ovat $\|\cdot\|_X$ ja $\|\cdot\|_Y$. Osoita, että karteesinen tulo $X \times Y$ on Banach-avaruus, kun summa ja skalaarilla kertominen määritellään yhtälöillä

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad a(x_1, y_1) = (ax_1, ax_2),$$

ja normi yhtälöllä

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Huom! Pidetään tässä tunnettuna, että $X \times Y$ on vektoriavaruus.

**Huom!** (a) Välikoe maanantaina 16.11 alkaen klo 8.00 salissa M100. Koealue luvut 1-3 sekä 4.1 ja 4.2.