Funktionaalianalyysi
Harjoitus 9/2009

1. Olkoon $c = (c_n) \in \ell^\infty$ ja määritellään $T_c \in B(\ell^2)$ asettamalla $T_c((x_n)) = (c_n x_n)$ kaikilla $(x_n) \in \ell^2$. Osoita, että T_c ei ole kääntyvä, jos valitaan $c_n = \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

2. Olkoot $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{K}$ kompleksisia Hilbert-avaruuksia ja olkoon $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Lauseessa 5.1.1 osoitettiin, että on olemassa lineaarikuvaus $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ siten, että

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

kaikilla $x \in \mathcal{H}$ ja $y \in \mathcal{K}$. Osoita, että

(a) $T^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ja $\|T^*\| \leq \|T\|$;

(b) operaattori T^* on yksikäsitteinen.

(Vihje. Arvioi kohdassa (a) lukua $\|T^*(y)\|^2$ ylöspäin kun $y \in \mathcal{K}$.)

3. Olkoot $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{K}$ kompleksisia Hilbert-avaruuksia ja olkoon $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Osoita, että $(T^*)^* = T$.

4. Olkoot $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ ja $\mathcal{L}$ kompleksisia Hilbert-avaruuksia sekä $R, S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ja $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. Osoita, että

(a) $(\mu R + \lambda S)^* = \overline{\mu} R^* + \overline{\lambda} S^*$ kaikilla $\mu, \lambda \in \mathbf{C}$;

(b) $(TR)^* = R^* T^*$.

5. Olkoon $c = (c_n) \in \ell^\infty$. Etsi T_c^* operaattorille $T_c : \ell^2 \to \ell^2$,

$$T_c((x_n)) = (c_n x_n).$$

6. Etsi T^* operaattorille $T : \ell^2 \to \ell^2$,

$$T((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots).$$

7. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbert-avaruus ja olkoon $T \in B(\mathcal{H})$ kääntyvä. Osoita, että T^* on kääntyvä ja $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.