Funktionaalianalyysi
Harjoitus 10/2009

Alla operaattoria T sanotaan *itse-adjungoiduksi* jos $T^* = T$ ja *käänteis-adjungoiduksi* jos $T^{-1} = T^*$.

1. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbert-avaruus ja $T \in B(\mathcal{H})$. Osoita, että

(a) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*T)$;

(b) $\overline{\mathrm{Im}(T^*)} = \overline{\mathrm{Im}(T^*T)}$.

(Vihje. Kohdassa (b) on tarkoitus yhdistää kohdan (a) sekä lemmojen 5.1.9 ja 5.10 tiedot.)

2. Ovatko Harjoitusten 9 tehtävien 5 ja 6 operaattorit normaaleja?

3. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbert-avaruus ja olkoon $T \in B(\mathcal{H})$ sellainen, että $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ kaikilla $x \in \mathcal{H}$. Osoita, että T on normaali operaattori.

(Vihje. Hyödynnä Lemmaa 5.2.15.)

4. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbert-avaruus ja olkoon $\mathcal{S} \subset B(\mathcal{H})$ kaikkien itse-adjungoitujen operaattoreiden joukko. Osoita, että $\mathcal{S}$ on suljettu avaruudessa $B(\mathcal{H})$.

5. Olkoon $c = (c_n) \in \ell^\infty$ ja määritellään $T_c \in B(\ell^2)$ asettamalla $T_c((x_n)) = (c_n x_n)$ kaikilla $(x_n) \in \ell^2$. Osoita:

(a) Jos $c_n \in \mathbf{R}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, niin T_c on itse-adjungoitu.

(b) Jos $|c_n| = 1$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, niin T_c on käänteis-adjungoitu.

6. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbert-avaruus. Osoita:

(a) Jos $S, T \in B(\mathcal{H})$ ovat itse-adjungoituja, niin T^*ST on itse-adjungoitu.

(b) Jos $T \in B(\mathcal{H})$ on itse-adjungoitu, niin T^{-1} on itse-adjungoitu.

7. Olkoon $c = (c_n) \in \ell^\infty$ siten, että $\inf\{\, |c_n| : n \in \mathbf{N}\,\} > 0$ ja määritellään T_c kuten tehtävässä 5. Perustele, miksi T_c on kääntyvä.