Funktionaalianalyysi
Harjoitus 11/2009

1. Olkoon $T \in B(\ell^2)$ operaattori

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, \ldots).$$

Määrää $\sigma(T^2)$ ja $\sigma(T)$.

2. Olkoon $T \in B(\ell^2)$ operaattori

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \ldots).$$

(a) Osoita, että 1 ja -1 ovat operaattorin T ominaisarvoja;

(b) Määrää $\sigma(T^2)$ ja osoita, että $\sigma(T) = \{ -1, 1 \}$.

3. Olkoon $S \in B(\ell^2)$ operaattori

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Määrää ominaisarvot operaattoreille S^*S ja SS^*.

4. Olkoon $T \in B(\ell^2)$ operaattori

$$T((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots).$$

Osoita, että jokainen $\mu \in \mathbf{C}$, $|\mu| < 4$, on operaattorin $(T^*)^2$ ominaisarvo.

(Vihje. T^* on määrätty harjoituksissa 9.)

5. Osoita, että tehtävän 4 operaattorille T pätee $\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 2 \}$.

(Vihje. Ks. Harjoitus 7, tehtävä 4.)

6. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbert-avaruus, $T \in B(\mathcal{H})$ ja $\mu, \lambda \in \mathbf{C}$. Osoita, että $T - \mu I$ ja $T - \lambda I$ ovat molemmat kääntyviä jos ja vain jos $(T - \mu I)(T - \lambda I)$ on kääntyvä.