Funktionaalianalyysi
Harjoitus 12/2009

1. Todista Lauseen 5.3.12 kohta (d): Jos $\mathcal{H}$ on kompleksinen Hilbert-avaruus ja $S \in \mathcal{H}$ on itse-adjungoitu, niin

$$r_\sigma(S) = \sup\{\, |\tau| : \tau \in V(S) \,\} = \|S\|.$$

(Vihje. Hyödynnä Lauseen 5.3.12 kohtaa (c) ja Lemmaa 5.3.11.)

2. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbert-avaruus ja olkoon $S \in B(\mathcal{H})$ itse-adjungoitu operaattori, jolle $\sigma(S)$ sisältää täsmälleen yhden luvun $\lambda \in \mathbf{R}$. Osoita, että $S = \lambda I$.

   (Vihje! Sovella Lausetta 5.3.8 operaattoriin $S - \lambda I$.)

3. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja olkoon $T \in K(X,Y)$. Osoita, että $T \in B(X,Y)$.

   (Vihje. Tee antiteesi.)

4. Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbert-avaruus ja olkoon $y, z \in \mathcal{H}$. Määritellään $T \in B(\mathcal{H})$ asettamalla

$$T(x) = \langle x, y \rangle z.$$

Osoita, että T on kompakti.

5. Olkoot X, Y normiavaruuksia ja $T \in L(X,Y)$. Osoita, että T on kompakti jos ja vain jos kaikille jonoille $(x_n) \subset X$, joille $\sup\{\, \|x_n\| : n \in \mathbf{N} \,\} \leq 1$, jonolla $(T(x_n))$ on suppeneva osajono.

6. Olkoon $\mathcal{H}$ ääretön-ulotteinen Hilbert-avaruus, jossa on ortonormaali jono (e_n). Osoita, että $I \in B(\mathcal{H})$ ei ole kompakti.

Huom. Toinen välikoe pe 18.12 klo 8.00 salissa M100.