Argumentin periaate

Marko Lamminsalo

Itä-Suomen Yliopisto

8. huhtikuuta 2011

Kompleksiarvoinen käyrä

Määritelmä

Kompleksitason *jatkuva käyrä* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ määritellään parametrien avulla muodossa

$$\Gamma : z(t) = x(t) + iy(t), \quad (t \in [a, b], a < b)$$

missä x ja y ovat reaalimuuttujan t reaaliarvoisia jatkuvia funktioita. Pistettä $z(a)$ sanotaan *alkupisteeksi* ja pistettä $z(b)$ *loppupisteeksi*.

Nimityksiä

Käyrän Γ sanotaan olevan

- *suljettu*, mikäli alkupiste on sama kuin loppupiste, ts. $z(a) = z(b)$
- *yksinkertainen*, mikäli se ei leikkaa itseään, ts. $z(t_1) \neq z(t_2)$ aina kun $t_1 \neq t_2$, mutta hyväksytään kuitenkin mahdollisuus $z(a) = z(b)$
- *sileä*, jos funktio z on jatkuvasti derivoituva muuttujan $t \in [a, b]$ suhteen, ts. funktiot z ja z' ovat jatkuvia välillä $[a, b]$
- *polku*, jos se on paloittain sileä.

Yksinkertaista suljettua käyrää kutsutaan myös *Jordanin käyräksi* ja yksinkertaista, suljettua sekä paloittain sileää käyrää *ääriviivaksi*.

Määritelmä

Olkoon f kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäristössä. Funktio f on *analyyttinen* pisteessä a, jos se on derivoituva pisteessä a, ts. jos raja-arvo

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

on olemassa äärellisenä kompleksilukuna.

Määritelmä

Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on *eristetty erikoispiste*, jos funktio f on analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ jollekin $r > 0$, mutta ei ole analyyttinen pisteessä z_0.

Laurentin sarja

Lause

Olkoot $0 \leq a < b \leq \infty$ *ja olkoon funktio* f *analyyttinen ympyrärenkaassa* $A = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$, *missä* z_0 *on jokin kompleksitason kiinnitetty piste. Silloin funktiolla* f *on joukossa* A *yksikäsitteinen Laurentin sarjaesitys*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

kaikille $k \in \mathbb{Z}$. *Kertoimet* a_k *saadaan integraalista*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

missä $\Gamma \subset A$ *on mikä tahansa ääriviiva, jonka rajoittaman alueen sisällä piste* z_0 *on.*

Residylause

Lause

Jos Γ *on positiivisesti suunnistettu ääriviiva ja funktio* f *on analyyttinen ääriviivalla* Γ *ja sen sisällä lukuunottamatta pisteitä* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *niin*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f; z_j).$$

Nollakohdista ja navoista

Lemma

Olkoon Γ positiivisesti suunnistettu ääriviiva ja olkoon funktio f käyrällä Γ ja sen sisällä analyyttinen lukuunottamatta äärellistä määrää napoja käyrän Γ sisällä. Oletetaan lisäksi, että funktiolla f ei ole napoja tai nollakohtia käyrällä Γ. Tällöin

$$N_0(\Gamma) - N_\infty(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Kierrosluku

Lemma

Olkoon Γ *suljettu polku, joka ei kulje pisteen* z_0 *kautta. Tällöin integraalin*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

arvo on kokonaisluku, jota kutsutaan polun Γ *kierrosluvuksi pisteen* z_0 *suhteen ja merkitään* $n(\Gamma; z_0)$.

Kierrosluku

Lemma

Jos Γ *on suljettu polku ja pisteet* z_0 *ja* z_1 *ovat samassa polun* Γ *rajaamassa kompleksitason osassa* $\mathbb{C} \setminus \Gamma$*, niillä on sama kierrosluku, ts.*

$$n(\Gamma; z_0) = n(\Gamma; z_1).$$

Jos piste z_0 *on käyrän* Γ *rajaaman alueen ulkopuolella, niin* $n(\Gamma; z_0) = 0$*.*

Argumentin periaate

Lause

Olkoon Γ *positiivisesti suunnistettu ääriviiva ja olkoon* f *analyyttinen ja ei-vakio funktio ääriviivalla* Γ *ja sen rajaaman alueen sisällä lukuunottamatta äärellistä määrää napoja. Olkoon* $w_0 \notin f(\Gamma)$ *piste kuvatasossa. Tällöin*

$$N_{w_0}(\Gamma) - N_\infty(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = n(f(\Gamma); w_0).$$

Rouchén lause

Lause

Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon Γ alueen D Jordanin käyrä siten, että käyrän sisäosa kuuluu alueeseen D. Olkoon funktio f analyyttinen alueessa D sekä nollasta eroava käyrällä Γ ja olkoon funktio h analyyttinen alueessa D siten, että

$$|h(\xi)| < |f(\xi)| \quad \textit{kaikilla } \xi \in \Gamma.$$

Tällöin funktioilla f ja $F = f + h$ on yhtä monta nollakohtaa käyrän Γ sisällä.

Algebran peruslause

Lause

Muuttujan z n:nnen asteen polynomin $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ *ja* $a_n \neq 0$, *nollakohtien kertalukujen summa on n.*

Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\frac{P(z)}{a_n z^n} = 1 + \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right),$$

kun z on nollasta eroava. Ympyrällä $|z| = r > 1$ saadaan siten arvio

$$\begin{aligned}\left|\frac{P(z)}{a_n z^n} - 1\right| &= \frac{1}{|a_n|}\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{1}{|a_n|}\left(\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right) \\ &= \frac{1}{|a_n|}\left(\frac{|a_{n-1}|}{r} + \cdots + \frac{|a_0|}{r^n}\right) \leq \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_n| r} < 1,\end{aligned}$$

kun valitaan

$$r > \max\left\{\frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_n|}, 1\right\}.$$

Huomautus

Polynomin juurien moduleille saadaan yläraja polynomin kertoimien avulla, kaikki juuret nimittäin sijaitsevat kiekossa

$$|z| \leq \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{|a_n|} \quad (|z| > 1).$$