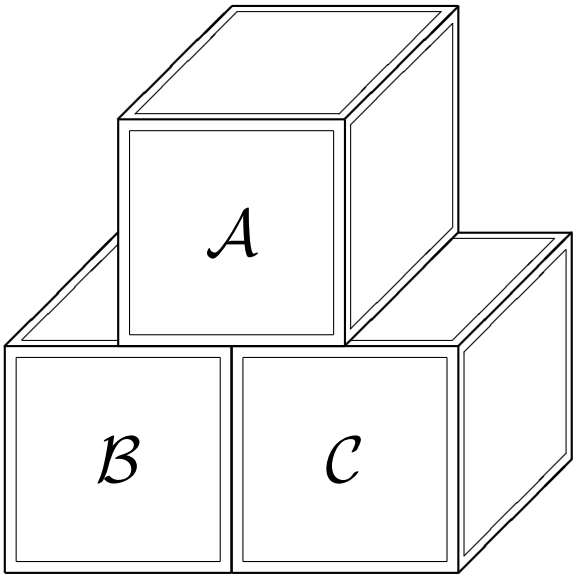
Abc-konjektuuri



Pro gradu -tutkielma
Marko Lamminsalo
180897
Itä-Suomen yliopisto
24. marraskuuta 2013

Sisältö

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

– Pierre Fermat [1]

[1] Fermat'n alkuperäinen huomautus Diophantoksen Aritmetican marginaalissa [67]

1 Johdanto

Lukuteorialle tyypillisiä ovat ongelmat, jotka ovat helposti esittävissä mutta vaikeasti ratkaistavissa. Ongelmista kaikkein kuuluisin lienee edellisellä sivullakin esitetty 1600-luvulta [15, s. 2] peräisin oleva Fermat'n suuri lause, joka modernimmin voidaan ilmaista seuraavasti: yhtälöllä

$$x^n + y^n = z^n \tag{1.1}$$

ei ole ratkaisua nollasta eroavilla kokonaisluvuilla x, y, z ja $n \geq 3$. Fermat ei kuitenkaan esittänyt väittämälleen todistusta, koska se "ei mahtunut kirjan marginaaliin". Helpon näköinen ratkaisematon ongelma innosti monia nimekkäitäkin matemaatikoita (mm. Euler, Dirichlet ja Cauchy) sekä uuden lukuteorian kehitystä [15], kunnes viimein vuonna 1995 väitteelle lopullisen, varsin epätriviaalin, todistuksen esitti Andrew Wiles [67]. Eräs Fermat'n suuren lauseen todistamiseksi tarkoitettu propositio on tämän tutkielman aiheena oleva *Abc*-konjektuuri [4, s. 442].

Joseph Oesterlén ja David Masserin vuonna 1985 formuloiman *Abc*-konjektuurin suuria innoittajia ovat mm. Szpiron vuonna 1983 elliptisille käyrille esittämä heikko konjektuuri [47, s. 167] sekä Stothersin (1981) ja Masonin (1983) todistama polynomilause [35, s. 165–170]. Molemmissa väittämissä oleellisena asiana on yhteys alkioiden yhteenlaskun ja kertolaskun välillä. Szpiron heikon konjektuurin mukaan on olemassa reaaliluvut $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että jokaiselle puolivakaalle rationaaliselle elliptiselle käyrälle E pätee epäyhtälö

$$|\Delta_E| \leq \alpha N_E^{\beta}, \tag{1.2}$$

missä Δ_E on käyrän E minimaalidiskriminantti ja $N_E = \operatorname{rad}(\Delta_E)$ johtaja. Varsinainen yhteys yhteenlaskun ja kertolaskun kanssa käy selkeämmin ilmi ns. Freyn käyriä käsittelevästä Lemmasta 2.6.13 sekä alaluvusta 3.8. Stothers-Masonin lauseessa puolestaan tarkastellaan kolmea keskenään jaotonta kompleksikertoimista polynomia f, g ja h, joista ainakin yksi on vakiosta poikkeava ja jotka toteuttavat yhtälön $f + g = h$. Polynomien asteille on tällöin voimassa epäyhtälö

$$\max\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} \leq \mathrm{n}_0(fgh) - 1, \tag{1.3}$$

missä $\mathrm{n}_0(fgh)$ ilmoittaa tulopolynomin fgh eri nollakohtien lukumäärän. Lausetta tarkastellaan lähemmin alaluvussa 5.3. Varsinainen kokonaislukuja koskeva *Abc*-konjektuuri ei siis ole irrallinen väittämä vaan tiiviisti yhteydessä Diophantoksen yhtälöihin, elliptisiin käyriin sekä polynomeihin.

Abc-konjektuurilla on tarkastelutyylistä riippuen useita formulaatioita, joista seuraavassa esitetään viisi. Alkuperäinen formulaatio on seuraavan muotoinen [35, s. 171]: Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla nollasta eroavilla suhteellisilla alkuluvuilla a, b ja c, joilla pätee $a + b = c$, on voimassa epäyhtälö

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}, \tag{1.4}$$

missä $\operatorname{rad}(abc)$ on tulon abc alkutekijöiden tulo. Tavallisesti määritellään konjektuurin oletukset toteuttavat luvut a, b, c siten, että $0 < a < b < c$, jolloin puhutaan *abc-summasta* tai

abc-kolmikosta (a, b, c). Näin ollen epäyhtälö (1.4) sievenee muotoon

$$c \leq C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}. \tag{1.5}$$

Ekvivalentisti *Abc*-konjektuuri voidaan esittää myös seuraavasti: Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa korkeintaan äärellinen määrä *abc*-kolmikoita (a, b, c) siten, että on voimassa epäyhtälö

$$c > \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}. \tag{1.6}$$

Kolmas ekvivalentti tapa esittää *Abc*-konjektuuri perustuu ns. *L-arvoon*, joka määritellään *abc*-kolmikon (a, b, c) avulla asettamalla $c = \mathrm{rad}(abc)^{L(a,b,c)}$, toisin sanoen

$$L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \mathrm{rad}(abc)}. \tag{1.7}$$

Tällöin konjektuuri saa muodon: Jokaista $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ sitten, että kaikilla *abc*-kolmikoilla (a, b, c) on voimassa epäyhtälö

$$L(a, b, c) \leq 1 + \varepsilon + \frac{\log(C(\varepsilon))}{\log \mathrm{rad}(abc)}. \tag{1.8}$$

Sama voidaan esittää myös seuraavasti: Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa korkeintaan äärellisen monta *abc*-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joiden L-arvolle pätee

$$L(a, b, c) > 1 + \varepsilon. \tag{1.9}$$

L-arvoihin liittyvä tarkastelu voidaan viedä vielä pidemmälle ja osoittaa, että *Abc*-konjektuuri on voimassa jos ja vain jos

$$\limsup\{L(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathbb{N}^3,\ \mathrm{syt}(a, b) = 1,\ a + b = c\ \} = 1, \tag{1.10}$$

toisin sanoen L-arvojen joukon kasaantumispisteiden supremum on 1 [8]. Siirtämällä *Abc*-konjektuurin tarkastelu L-arvoihin saadaan väitteelle erilainen näkökulma ja käyttöön kasaantumispisteisiin liittyviä menetelmiä, joita ei kokonaisluvuille voida soveltaa.

Abc-konjektuurilla on valtavasti seurauksia, joista kohtalainen lista löytyy Abderrahmane Nitaj'n kotisivuilta [46]. Sovelluksia on moniin kuuluisiinkin tuloksiin (mm. Catalanin, Szpiron ja Mordellin konjektuurit, Rothin lause) mutta erityisesti sovelluksia löytyy seuraavilta aloilta [8]:

a) Diophantoksen yhtälöt ja epäyhtälöt

b) Elliptiset käyrät

c) Polynomit

Vaikkei *Abc*-konjektuurin avulla pystytä todistamaan itse Fermat'n suurta lausetta vaan pelkästään sen asymptoottinen versio, konjektuuri on silti voimakas Diophantoksen yhtälöitä yhdistävä tekijä. Vuonna 1970 Matiyasevich osoitti, ettei mielivaltaiselle Diophantoksen yhtälölle ole olemassa yleistä ratkaisumenetelmää [22]. Käytännössä tämä tarkoittaa siis suurta työmäärää, sillä jokainen yhtälö on ratkaistava erikseen. *Abc*-konjektuurin avulla

pystytään kuitenkin osoittamaan monen Diophantoksen yhtälön tapauksessa vain äärellisen ratkaisujoukon olemassaolo.

Abc-konjektuurilla on myös monia yleistyksiä [46]. Luonnollisen muuttujien määrään liittyvän yleistyksen, ns. n-konjektuurin [6], lisäksi *Abc*-konjektuuri voidaan esittää kongruenssimuodossa [16] tai helpohkosti modifioida yleisille lukukunnille sopivaksi [56, s. 260–261]. Baker ja Granville ovat esittäneet myös ehdotuksia alkuperäisen konjektuurin tarkentamiseksi [2]. Oman lisänsä tuo Stothers-Masonin "polynomien *Abc*-konjektuuri", jota Hu ja Yang [29] ovat kehitelleet edelleen ei-Arkhimedisille meromorfisille funktiokunnille. Tietyillä oletuksilla kunnan suhteen kokonaisille funktioille a, b ja c, joista ainakin yksi on vakiosta eroava, joilla ei ole yhteisiä nollakohtia ja joilla $a + b = c$, voidaan osoittaa epäyhtälö

$$\max\{T(r,a), T(r,b), T(r,c)\} \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{abc}\right) - \log r + \mathcal{O}(1), \tag{1.11}$$

missä T ja $\overline{N}$ ovat Nevanlinnan arvojenjakautumisteoriaan liittyviä funktioita. Tällöin Stothers-Masonin lause on itse asiassa seuraus yleisemmästä tapauksesta. Hu ja Yang ovat esittäneet myös luonnollisen funktioiden lukumäärään liittyvän yleistyksen tulokselleen [29, s. 287–288].

Yleisesti uskotaan *Abc*-konjektuurin olevan totta arvolla $\varepsilon = 1$, vaikkei sen todenperäisyydestä olekaan vielä varmaa tietoa [23]. Hyvin monipuolisena ja käyttökelpoisena tuloksena todistuksen voisi olettaa olevan varsin epätriviaali, mutta on kuitenkin muistettava, että *Abc*-konjektuurin funktiokunta-analogi on suhteellisen helposti todistettavissa [4, s. 401]. Uusimman ratkaisuehdotuksen on esittänyt Shinichi Mochizuki 500-sivuisella neljän artikkelin sarjalla vuoden 2012 syyskuussa [3]. Nähtäväksi jää onko Mochizukin todistus aukoton, ja jos on, niin onko olemassa alkeellisempaa todistusta.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan *Abc*-konjektuuria lukuteorian kannalta. Tarkoituksena on tuoda esille taustalla olevaa teoriaa sekä valaista *Abc*-konjektuurin väitettä ja sen yhteyksiä muihin teorioihin. Fermat'n suurta lausetta tarkastellaan esimerkinomaisesti sen yksinkertaisuuden sekä historiallisen tärkeyden takia. Tutkielma jakautuu kuuteen lukuun. Tässä luvussa esitetään teorian aikaraami sekä yleisiä asioita teoriasta. Luvussa 2 käydään läpi tärkeimmät jatkossa tarvittavat aputulokset. Luku 3 on tutkielman pääluku ja siinä tarkastellaan *Abc*-konjektuuria ja siihen liittyviä tuloksia. Luvussa 4 osoitetaan monia *Abc*-konjektuurin lukuteoreettisia seurauksia pääpainona erilaiset historialliset Diophantoksen yhtälöt. Luvussa 5 esitellään muutamia *Abc*-konjektuurin yleistyksiä ja luvussa 6 esitetään yhteenveto tutkielman aiheista. Lisäksi liitteissä on esitetty konjektuuriin liittyviä numeerisia taulukoita.

Tutkielmassa käytetty *Abc*-konjektuuriin liittyvä kirjallisuus on melko hajanaista. Yleisten suuntaviivojen saamiseksi on käytetty Joseph Oesterlén artikkelia [47], Abderrahmane Nitaj'n teoksia [44], [45] [46], Kalle Saaren tutkielmaa [53] sekä artikkeleita [8], [34] ja [23]. *Abc*-kolmikoihin liittyviä tuloksia löytyy parhaiten lähteistä [21], [13]. Luvun 2 alalukujen yhteydessä on mainittu teokset, joihon teoria perustuu, ja lukujen 3,4 ja 5 alalukujen yhteydessä on mainittu mahdollisimman tarkkaan esityksessä käytetyt alkuperäiset lähteet.

1.1 Merkinnöistä

Tässä tutkielmassa käytetään seuraavia merkintöjä:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{N}_{\geq k} &= \{k, k+1, k+2, \ldots\}, \text{ missä } k \in \mathbb{N} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Z}_{\geq 0} &= \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \text{ missä } a, b \in \mathbb{R} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \text{ missä } a, b \in \mathbb{R} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \text{ missä } a, b \in \mathbb{R} \\
\mathbb{R}_{>0} &= \mathbb{R} \cap (0, \infty) \\
\log x &\quad \text{luvun } x \text{ luonnollinen } (e\text{-kantainen}) \text{ logaritmi} \\
|G| &\quad \text{joukon } G \text{ alkioiden lukumäärä}
\end{aligned}
$$

Lisäksi Diophantoksen yhtälöllä tai epäyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä tai epäyhtälöä, jolle etsitään vain kokonaislukuratkaisuja [1, s. 5].

2 Peruskäsitteitä

Abc-konjektuurin sekä siihen liittyvien tulosten ymmärtämiseksi täytyy tuntea taustalla olevaa teoriaa, jota tässä luvussa pyritään tiivistetysti eri aihepiireihin jaoteltuna esittämään. Kattavamman käsityksen aihepiireistä saa alaluvuissa mainittuihin lähteisiin perehtymällä.

2.1 Jaollisuudesta ja kongruensseista

Lukuteoriassa tutkitaan yleisesti lukuja ja niiden ominaisuuksia. Tässä tutkielmassa kuitenkin rajoitutaan pääosin kokonaislukuihin, joihin liittyvää teoriaa on ilman todistuksia esitetty seuraavassa lähteisiin [36] ja [51] perustuen. Jatkossa tunnettuina pidetään mm. kokonaislukujen algebrallisia perusominaisuuksia sekä yksikäsitteistä jakoyhtälöä. Esimerkkien avulla on pyritty havainnollistamaan myöhemmin tarvittavia aputuloksia.

Aloitetaan tarkastelu jaollisuudesta sekä suurimmasta yhteisestä tekijästä.

Määritelmä 2.1.1. Luku $a \in \mathbb{Z}$ on luvun $b \in \mathbb{Z}$ tekijä, jos $b = ak$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin merkitään $a \mid b$ ja sanotaan, että luku b on *jaollinen* luvulla a.

Huomautus 2.1.2. (i) Kaikilla $a \in \mathbb{Z}$ pätee $a \mid 0$, sillä $0 = a \cdot 0$.
(ii) Jos $b \neq 0$ ja $a \mid b$, niin $|a| \leq |b|$. Kaikilla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nimittäin $|b| = |ak| = |a||k| \geq |a|$.
(iii) Jos $a \mid b$, niin $a^n \mid b^n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Sillä jos $b = ak$, niin $b^n = a^n k^n$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.
(iv) Jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid (b \pm c)$ sillä $b \pm c = a(k_b \pm k_c)$ joillakin $k_b, k_c \in \mathbb{Z}$.

Havainnollistetaan jaollisuutta seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 2.1.3. Osoitetaan induktiolla, että $8 \mid 9^n - 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
1°) Väite pätee arvolla $n = 1$, sillä $9^1 - 1 = 8$.
2°) Oletetaan, että väite pätee arvolla $n = k \geq 1$. Tällöin arvolla $n = k + 1$ saadaan

$$9^{k+1} - 1 = 9^k 9 - 9 + 8 = 9(9^k - 1) - 8 = 9 \cdot 8j - 8 = 8(9j - 1),$$

sillä induktio-oletuksen nojalla $9^k - 1 = 8j$ jollekin $j \in \mathbb{N}$. Kohtien 1°) ja 2°) sekä induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 2.1.4. Lukujen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, joista ainakin yksi on nollasta eroava, suurin yhteinen tekijä $\text{syt}(a_1, \ldots, a_n)$ on luku

$$\text{syt}(a_1, \ldots, a_n) = \max\{k \in \mathbb{N} : k \mid a_i \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n\}.$$

Lause 2.1.5. *Olkoot $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ siten, että $a_{i_0} \neq 0$ jollekin $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin*

$$\text{syt}(a_1, \ldots, a_n) = \min\big(\mathbb{N} \cap \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n : x_i \in \mathbb{Z}\}\big).$$

Esimerkki 2.1.6. (i) Jos $n \in \mathbb{N}$, niin $\text{syt}(n, n+1) = 1$. Väite seuraa lineaarikombinaatiosta

$$1 = n + 1 - n = 1 \cdot (n + 1) + (-1) \cdot n$$

ja Lauseesta 2.1.5.
(ii) Jos $a, b \in \mathbb{N}$ siten, että $\text{syt}(a, b) = 1$, niin $\text{syt}(a + b, a - b) \leq 2$. Oletuksen $\text{syt}(a, b) = 1$ nojalla nimittäin on olemassa vakiot $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ siten, että $x_1 a + x_2 b = 1$. Tällöin

$$(x_1 + x_2)(a + b) + (x_1 - x_2)(a - b) = 2x_1 a + 2x_2 b = 2,$$

jolloin väite seuraa Lauseesta 2.1.5.

Edellisen esimerkin tuloksia pidetään jatkossa tunnettuina ilman erillistä mainintaa. Seuraava tulos on oleellinen myöhemmin esiintyvien *abc*-kolmikoiden suurimman yhteisen tekijän määrittämisen kannalta.

Lemma 2.1.7. *Jos* $a, b \in \mathbb{N}$ *ja* $c \in \mathbb{Z}$*, niin* $\operatorname{syt}(a + cb, b) = \operatorname{syt}(a, b)$.

Jaollisuustarkastelu johtaa lopulta huomioon kahdenlaisista luvuista.

Määritelmä 2.1.8. Luku $a > 1$ on *alkuluku*, mikäli sillä on vain triviaalit tekijät ± 1 ja $\pm a$, muulloin luku a on *yhdistetty*.

Määritelmä 2.1.9. Olkoon $\operatorname{syt}(a_1, ..., a_n) = 1$. Tällöin sanotaan, että luvut $a_1, ..., a_n$ ovat *suhteellisia alkulukuja* (*keskenään jaottomia*).

Tarkasteltavien lukujen ei siis tarvitse olla alkulukuja ollakseen keskenään jaottomia. Luvuista voidaan myös tehdä suhteellisia alkulukuja ja osoittaa joitain suurimpaan yhteiseen tekijään liittyviä tuloksia.

Lemma 2.1.10. *Olkoot* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ *siten, että* $a_{i_0} \neq 0$ *jollekin* $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *ja olkoon* $d = \operatorname{syt}(a_1, \ldots, a_n)$*. Tällöin*

$$\operatorname{syt}\left(\frac{a_1}{d}, \ldots, \frac{a_n}{d}\right) = 1.$$

Lemma 2.1.11. *Olkoot* $a, b, c \in \mathbb{N}$.

(i) *Jos* $a \mid c$ *ja* $b \mid c$ *siten, että* $\operatorname{syt}(a, b) = 1$*, niin* $ab \mid c$.

(ii) *Jos* $\operatorname{syt}(a, c) = \operatorname{syt}(b, c) = 1$*, niin* $\operatorname{syt}(ab, c) = 1$.

(iii) *Jos* $\operatorname{syt}(a, b) = 1$*, niin* $\operatorname{syt}(a^k, b^m) = 1$ *kaikilla* $k, m \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.1.12 (Eukleides)**.** *Jos* $a \mid bc$ *ja* $\operatorname{syt}(a, b) = 1$*, niin* $a \mid c$.

Eukleiden lemma johtaa seuraavaan tulokseen ja lopulta Aritmetiikan peruslauseeseen.

Lemma 2.1.13. *Luku* $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *on alkuluku, jos ja vain jos kaikilla* $a, b \in \mathbb{N}$ *on voimassa implikaatio*

$$p \mid ab \quad \Longrightarrow \quad p \mid a \text{ tai } p \mid b.$$

Lause 2.1.14 (Aritmetiikan peruslause)**.** *Jokainen luonnollinen luku* $n \geq 2$ *voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisellä tavalla tulona*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}, \tag{2.1}$$

missä p_i*:t ovat eri alkulukuja ja* $a_i \in \mathbb{N}$.

Tuloa (2.1) kutsutaan luvun n *kanoniseksi esitykseksi* tai *alkutekijäesitykseksi* ja lukuja p_i luvun n *alkutekijöiksi*.

Huomautus 2.1.15. Aritmetiikan peruslause voidaan yleistää myös negatiivisia kokonaislukuja koskevaksi yhtälön (2.1) oikeaa puolta modifioimalla. Kokonaisluku $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ voidaan tällöin esittää kanonisessa muodossa

$$n = (-1)^{a_0} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n},$$

missä p_i:t ovat eri alkulukuja, $a_0 \in \{0, 1\}$ ja $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 2.1.16. Lukujen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ *pienin yhteinen monikerta* $\operatorname{pym}(a_1, \ldots, a_n)$ on luku $d \in \mathbb{N}$, jolle on voimassa seuraavat ehdot:

(i) $a_i \mid d$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$;

(ii) Jos $c \in \mathbb{N}$ ja $a_i \mid c$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, niin $d \mid c$.

Jaollisuutta voidaan merkitä myös käyttämällä kongruenssia, jonka Gauss toi lukuteoriaan julkaisussaan *Disquisitiones Arithmeticae* vuonna 1801.

Määritelmä 2.1.17. Olkoon $m \in \mathbb{N}$ ja olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Mikäli $m \mid (a - b)$, luku a on *kongruentti luvun b kanssa modulo m* ja sitä merkitään

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Jos $m \nmid (a - b)$, merkitään $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Lemma 2.1.18. *Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ja olkoon $m \in \mathbb{N}$.*

(i) *Jos $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$, niin $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.*

(ii) *Jos $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$, niin $ac \equiv bd \pmod{m}$.*

Lemma 2.1.19. *Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ja olkoon $m \in \mathbb{N}$. Tällöin*

(i) $a \equiv a \pmod{m}$ *(refleksiivisyys)*

(ii) *Jos $a \equiv b \pmod{m}$, niin $b \equiv a \pmod{m}$. (symmetrisyys)*

(iii) *Jos $a \equiv b \pmod{m}$ ja $b \equiv c \pmod{m}$, niin $a \equiv c \pmod{m}$ (transitiivisuus)*

Kongruenssia voidaan soveltaa jaollisuuden tarkastelussa seuraavien esimerkkien tapaan.

Esimerkki 2.1.20. Osoitetaan induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $2^n \mid (3^{2^n} - 1)$.
1°) Tapauksessa $n = 1$ saadaan $3^2 - 1 = 8 = 2 \cdot 4$.
2°) Oletetaan, että väite pätee arvolla $n = k \geq 1$. Tällöin arvolla $n = k + 1$

$$3^{2^{k+1}} - 1 = 3^{2^k 2} - 1 = (3^{2^k})^2 - 1^2 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1),$$

jolloin induktio-oletuksen ja tiedon $3^{2^k} \equiv 1^{2^k} \equiv 1 \pmod{2}$ nojalla $2^{k+1} \mid (3^{2^{k+1}} - 1)$. Näin ollen kohtien 1°) ja 2°) sekä induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Huomautus 2.1.21. Esimerkin 2.1.20 päättelyä imitoimalla voidaan itse asiassa osoittaa, että $2^{n+2} \mid (3^{2^n} - 1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 2.1.22. Osoitetaan induktiolla, että $2^{n+3}5^2 \mid 7^{2^n} - 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
1°) Tapauksessa $n = 2$ saadaan $7^{2^2} - 1 = 2400 = 2^5 3 \cdot 5^2$.
2°) Oletetaan, että väite pätee arvolla $n = k \geq 2$. Tällöin arvolla $n = k + 1$

$$7^{2^{k+1}} - 1 = 7^{2^k 2} - 1 = (7^{2^k})^2 - 1^2 = (7^{2^k} - 1)(7^{2^k} + 1),$$

jolloin induktio-oletuksesta ja kongruensseista

$$7^{2^k} \equiv 1^{2^k} \equiv 1 \equiv -1 \pmod{2}$$
$$7^{2^k} = 7^{2 \cdot 2^{k-1}} = 49^{2^{k-1}} \equiv (-1)^{2^{k-1}} \equiv 1 \pmod{25}$$

seuraa kongruenssin transitiivisuuden nojalla $2^{(k+1)+3}5^2 \mid 7^{2^{k+1}} - 1$. Näin ollen induktioväite pätee kohtien 1°) ja 2°) sekä induktioperiaatteen nojalla.

Kongruenssien sieventäminen ei täysin mukaile tavallisen yhtälön aritmetiikkaa.

Lause 2.1.23 (Tulon supistusääntö)**.** *Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ja olkoon $m \in \mathbb{N}$ siten, että $ac \equiv bc \pmod{m}$. Tällöin*

$$a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{\operatorname{syt}(m, c)} \right).$$

Lause 2.1.24. *Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $k, m_i \in \mathbb{N}$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Jos $a \equiv b \pmod{m_i}$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$ ja $\operatorname{syt}(m_i, m_j) = 1$ kaikilla $i \neq j$, niin tällöin*

$$a \equiv b \pmod{m_1 m_2 \cdots m_k}.$$

Lineaarisen kongruenssin ratkaisujen olemassaololle voidaan osoittaa seuraava tulos.

Lause 2.1.25. *Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja olkoon $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\operatorname{syt}(a, m) = d$. Tällöin jos*

(i) *$d \nmid b$, niin kongruenssilla $ax \equiv b \pmod{m}$ ei ole ratkaisua.*

(ii) *$d \mid b$, niin kongruenssilla $ax \equiv b \pmod{m}$ on täsmälleen d ei-kongruenttia ratkaisua modulo m.*

Tarkastellaan vielä lopuksi eksponentiaalisia kongruensseja. Fermat esitti ensimmäisenä alkioiden kertalukuihin liittyvän tuloksensa, jonka Euler myöhemmin yleisti käyttämällä lukuteorian kannalta oleelliseksi havaittua funktiota ϕ.

Lause 2.1.26 (Fermat'n pieni lause)**.** *Olkoon p alkuluku ja olkoon $a \in \mathbb{Z}$ siten, että $p \nmid a$. Tällöin*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Määritelmä 2.1.27. *Eulerin funktioksi* kutsutaan kuvausta $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jonka arvo $\phi(n)$ ilmoittaa niiden lukujen $a \in \{1, \ldots, n\}$ lukumäärän, joille $\operatorname{syt}(a, n) = 1$.

Huomautus 2.1.28. Koska $\operatorname{syt}(n, n) > 1$ ja $\operatorname{syt}(1, n) = \operatorname{syt}(n-1, n) = 1$, kaikilla $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ pätee

$$2 \leq \phi(n) \leq n - 1.$$

Seuraavien tulosten perusteella itse asiassa vielä nähdään, että funktion ϕ arvo on parillinen kaikilla $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

Lemma 2.1.29. *Olkoon p alkuluku ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.*

Lause 2.1.30. *Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ suhteellisia alkulukuja. Tällöin $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.*

Lause 2.1.31 (Eulerin lause)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $a \in \mathbb{Z}$ siten, että $\operatorname{syt}(a, n) = 1$. Tällöin*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Määritelmä 2.1.32. *Luvun a kertaluvuksi modulo m* sanotaan lukua

$$\operatorname{ord}_m a = \min\{k \in \mathbb{N} : a^k \equiv 1 \pmod{m}\}.$$

Lemma 2.1.33. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$ ja $a \in \mathbb{Z}$ siten, että $\operatorname{syt}(a, m) = 1$. Tällöin luvulle $x \in \mathbb{N}$ pätee $a^x \equiv 1 \pmod{m}$ jos ja vain jos $\operatorname{ord}_m a \mid x$.*

Seuraus 2.1.34. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$ ja $a \in \mathbb{Z}$ siten, että $\operatorname{syt}(a, m) = 1$. Tällöin $\operatorname{ord}_m a \mid \phi(m)$.*

2.2 Binomilauseen sovelluksia

Eräs kombinatoriikan käyttökelpoisimmista tuloksista on binomilause, jonka avulla voidaan helposti laskea binomien ei-negatiiviset potenssit. Tarkastellaan seuraavaksi binomilauseen avulla saatavia jatkon kannalta tarpeellisia tuloksia kirjojen [51, s. 8–15] ja [52, s. 5-24] sekä kirjoittajan oman pohdinnan perusteella.

Aloitetaan kertomasta, jonka avulla voidaan määritellä binomikerroin.

Määritelmä 2.2.1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Lukua $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ kutsutaan *luvun n kertomaksi*. Lisäksi asetetaan $0! = 1$.

Määritelmä 2.2.2. Olkoot $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ siten, että $k \leq n$. Tällöin lukua

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kutsutaan *binomikertoimeksi*.

Huomautus 2.2.3. Binomikerroin voidaan tulkita siten, että se kertoo kuinka monta erilaista k alkioista osajoukkoa voidaan ottaa n alkioisesta joukosta, kun alkioiden ottojärjestyksellä ei ole merkitystä [52, s. 6]. Näin ollen kaikki binomikerrointen arvot ovat positiivisia kokonaislukuja.

Seuraava aputulos osoittaa binomikerrointen arvoilla olevan tiettyä symmetriaa.

Lemma 2.2.4. *Olkoot $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ siten, että $k \leq n$. Tällöin*

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \textit{sekä} \qquad \binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

Todistus. Binomikertoimen määritelmästä saadaan suoraan yhtäsuuruudet

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!(2n+1-n)!} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!\big(2n+1-(n+1)\big)!} = \binom{2n+1}{n+1}$$

joista väite seuraa. □

Huomautus 2.2.5. Luvuilla $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, on voimassa myös yhtälö

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

jonka avulla voidaan konstruoida binomikerrointen arvoja kuvaava ns. *Pascalin kolmio*.

Binomikertoimilla ja summien potensseilla on seuraavanlainen yhteys:

Lause 2.2.6 (Binomilause)**.** *Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Huomautus 2.2.7. Huomautuksen 2.2.3 ja binomilauseen avulla voidaan osoittaa, että jokaisella n-alkioisella joukolla, $n \in \mathbb{N}$, on 2^n erilaista osajoukkoa. Summaamalla nimittäin yli kaikkien erilaisten k:n alkion osajoukkojen saadaan binomilausetta hyödyntämällä

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Binomilauseen avulla saadaan eräs yläraja binomikerrointen arvoille.

Esimerkki 2.2.8. Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan binomikerrointa

$$M = \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(2m+1-m)!} = \frac{(2m+1)2m(2m-1)\cdots(m+2)}{m!},$$

joka Huomautuksen 2.2.3 nojalla on positiivinen kokonaisluku. Lemman 2.2.4 ja binomilauseen nojalla saadaan näin ollen ylöspäin arvioimalla

$$M = \frac{1}{2}\left[\binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1}\right] < \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}\right] = \frac{1}{2}(1+1)^{2m+1} = 4^m.$$

Binomilauseen avulla binomikertoimien neliöiden summa voidaan yksinkertaisemmin esittää yhden binomikertoimen avulla.

Lemma 2.2.9. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Todistus. Soveltamalla binomilausetta yhtälöön $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ saadaan

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^{2n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\right).$$

Kun nyt tarkastellaan termin x^n kertoimia saadaan vasemmalta puolelta arvoksi suoraan $\binom{2n}{n}$ ja oikelta puolelta suorittamalla kertolasku ja Lemmaa 2.2.4 soveltamalla

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2,$$

mistä väite yhtäsuuruuden nojalla seuraa. □

Osoitetaan lopuksi kaksi myöhemmin tarvittavaa jaollisuuteen liittyvää tulosta, joista ensimmäinen on yksinkertaisempi esittää ilman binomilausetta.

Lemma 2.2.10. *Olkoot $a, b, n \in \mathbb{N}$ siten, että $a < b$ ja n on parillinen. Tällöin*

$$(b+a)^n - (b-a)^n = 4ab\left((b+a)^{n-2} + (b+a)^{n-4}(b-a)^2 + \cdots + (b-a)^{n-2}\right).$$

Todistus. Merkitään $x = b + a$ ja $y = b - a$ sekä $n = 2m$ jollekin $m \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right) \\ &= (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right), \end{aligned}$$

mikä nähdään kertomalla auki yhtälön oikea puoli. Koska $n = 2m$, saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k &= (x+y)\left(\sum_{j=0}^{m-1} x^{2m-2-2j}y^{2j}\right) \\ &= (x+y)\left(x^{n-2} + x^{n-4}y^2 + \cdots + x^2y^{n-4} + y^{n-2}\right), \end{aligned}$$

mikä jälleen nähdään kertomalla auki yhtälön oikea puoli. Väite seuraa yhdistämällä edellä olevat yhtälöt. □

Lemma 2.2.11. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään luvut x_n ja y_n yhtälöllä*

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n. \tag{2.2}$$

(i) *Tällöin luvut toteuttavat myös yhtälön $x_n - y_n\sqrt{2} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n$.*

(ii) *Jos $n = 2^m$, niin $2^{m+1} \mid y_n$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.*

Todistus. (i) Binomilausetta soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (2\sqrt{2})^{n-k} \\ \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-2\sqrt{2})^{n-k} \end{aligned}$$

Verrataan yhtälöiden oikeita puolia. Kun $n-k$ on parillinen, summan termi on molemmissa yhtälöissä sama kokonaisluku. Vastaavasti, kun $n-k$ on pariton, saadaan kokonaislukukertoiminen $\sqrt{2}$-termi, jonka etumerkki ylemmässä summassa on positiivinen ja alemmassa negatiivinen. Soveltamalla päättelyä summien jokaiseen termiin saadaan väite.

(ii) Osoitetaan kohta todistuksen [53, s. 4] ajatusta mukaillen. Kirjoittamalla $n = 2^m$, missä $m \in \mathbb{N}$, ja soveltamalla yhtälöä (2.2) saadaan

$$x_{2^{m+1}} + y_{2^{m+1}}\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2^{m+1}} = \left(x_{2^m} + y_{2^m}\sqrt{2}\right)^2 = x_{2^m}^2 + 2y_{2^m}^2 + 2x_{2^m}y_{2^m}\sqrt{2}.$$

Yhtälöstä nähdään, että $y_{2^{m+1}} = 2x_{2^m}y_{2^m}$. Osoitetaan väite induktiolla käyttäen hyväksi tätä tulosta.

1°) Tapauksessa $m = 1$ saadaan $n = 2$, jolloin $x_n + y_n\sqrt{2} = 17 + 12\sqrt{2}$. Näin ollen väite pätee arvolla $m = 1$, sillä $4 \mid 12$ eli $2^{m+1} \mid y_n$.

2°) Oletetaan, että väite pätee arvolla $m = k \geq 1$. Tällöin arvolla $m = k + 1$ saadaan yllä olevan tuloksen ja induktio-oletuksen nojalla

$$y_{2^{k+1}} = 2x_{2^k}y_{2^k} = 2x_{2^k}2^{k+1}j = 2^{k+2}x_{2^k}j,$$

missä $j \in \mathbb{N}$. Siis $2^{k+2} \mid y_{2^{k+1}}$, ja väite pätee myös arvolla $k + 1$. Kohtien 1°) ja 2°) sekä induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

□

2.3 Hiloista

Hiloihin liittyvä teoria (engl. Geometry of Numbers) perustuu Minkowskin huomioon, jonka mukaan jotkin lukuteoreettiset tulokset voivat olla hyvin intuitiivisesti selviä, kun niitä tarkastellaan n-ulotteisessa Euklidisessa avaruudessa [9, s. 1]. Seuraavassa esitetään Minkowskin konveksin kappaleen lauseen ymmärtämiseksi tarvittavaa teoriaa rajoittuen tarkastelussa avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Erään näkökulman hilojen soveltamisesta lukuteoriassa saa nopeasti kirjasta [31, s. 206–215], syvällisemmin aihetta on käsitelty kirjasssa [9], johon tämä alaluku havainnollistavia esimerkkejä lukuunottamatta pääosin perustuu.

Aloitetaan määrittelemällä täysiasteinen hila.

Määritelmä 2.3.1. Olkoon joukko $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ jokin kanta. Tällöin joukkoa

$$\Lambda = \left\{ \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \in \mathbb{R}^n : u_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *E-kantaiseksi hilaksi.*

Huomautus 2.3.2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta E määrittää yksikäsitteisen hilan, mutta hila ei määritä yksikäsitteistä kantaa. Hilan kantojen välillä on kuitenkin yhteys: mikäli E ja E', $E \neq E'$, ovat hilan Λ kantoja, pätee niille yhtälö

$$\det(E) = \pm \det(E'). \tag{2.3}$$

Esimerkki 2.3.3. Tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^2$ ja hilaa $\Lambda = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Kannat E ja E',

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ja} \quad E' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

määrittävät nyt selvästi saman hilan Λ. Kantojen vektoreista muodostetuille matriiseille pätee

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\det(E').$$

Vaihtamalla vektorien järjestystä matriiseja muodostettaessa saadaan determinanteista vastalukuja, mikä ei kuitenkaan vaikuta lopputulokseen; yhtälö (2.3) on joka tapauksessa voimassa.

Yllä olevan nojalla jokaiseen hilaan voidaan liittää yksikäsitteinen luku, determinantti.

Määritelmä 2.3.4. Olkoon $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ hila, jonka muodostaa jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Hilan Λ *determinantti* on luku

$$\det(\Lambda) = |\det(E)| = |\det(e_1, \ldots, e_n)|.$$

Huomautus 2.3.5. Determinantille pätee aina $\det(\Lambda) > 0$, sillä määritelmän mukaan kannan E muodostavat vektorit $e_1, \ldots, e_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Esitetään seuraavaksi yleistetty versio Minkowskin konveksin kappaleen lauseesta, jonka avulla voidaan muodostaa yhteys joukon konveksisuuden, symmetrisyyden ja tilavuuden sekä hilapisteiden lukumäärän välille. Sitä ennen tarvitaan kuitenkin vielä seuraava määritelmä.

Määritelmä 2.3.6. Olkoon V avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä osajoukko. Joukko V on

(i) *konveksi*, mikäli kaikilla $x, y \in V$ pätee $\lambda x + (1-\lambda)y \in V$, missä $0 \leq \lambda \leq 1$.

(ii) *origon suhteen symmetrinen*, mikäli kaikilla $x \in V$ pätee $-x \in V$.

Lause 2.3.7 (Minkowskin konveksin kappaleen lause)**.** *Olkoon $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ hila, jota määrittää jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta E, ja olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ konveksi ja origon suhteen symmetrinen epätyhjä joukko. Jos joukon V tilavuudelle* $\mathrm{vol}(V)$ *on voimassa epäyhtälö*

$$\mathrm{vol}(V) > m2^n \det(\Lambda) \tag{2.4}$$

jollakin $m \in \mathbb{N}$, niin joukko V sisältää ainakin m erilaista nollasta eroavaa hilapisteparia $\pm v_i \in \Lambda$, $i = 1, \ldots, m$.

Huomautus 2.3.8. Lauseessa 2.3.7 tilavuudella $\mathrm{vol}(V)$ tarkoitetaan joukon V Lebesguemittaa. Usein tarkasteltavat joukot ovat kuitenkin niin "yksinkertaisia", että tarkempaa mitallisuustarkastelua ei tarvitse suorittaa vaan tilavuus saadaan selville helpommilla keinoilla.

Jatkoa varten valitaan Lauseessa 2.3.7 käytetty joukko V siten, että sen tilavuus tunnetaan. Tämä onnistuu (skalaarimonikertaa vaille) yksikäsitteisesti seuraavan lemman avulla [13, s. 1866–1867].

Lemma 2.3.9. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{\substack{i=1 \\ x_i>0}}^{n} x_i \leq 1 \text{ ja } \sum_{\substack{i=1 \\ x_i<0}}^{n} |x_i| \leq 1 \right\}.$$

Tällöin

$$\mathrm{vol}(V) = \frac{(2n)!}{n!^3}.$$

Todistus. Olkoon $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ siten, että $0 \leq p \leq n$. Määritellään lukua p vastaava joukko

$$K_p = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i \geq 0 \text{ kaikilla } i \leq p \text{ ja } x_i \leq 0 \text{ kaikilla } i > p \right\},$$

missä p on viimeinen indeksi, jolla luku x_i on ei-negatiivinen.

Lasketaan tilavuus kappaleen V sille osalle, joka kuuluu joukkoon K_p. Määritellään ensin m-ulotteinen hyperpyramidi

$$Y_m = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; x_1, \ldots, x_m \geq 0 \text{ ja } \sum_{i=1}^{m} x_i \leq 1 \right\},$$

jonka tilavuus on $\frac{1}{m!}$. Samaistamalla avaruus $\mathbb{R}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ kanssa saadaan

$$K_p \cap V = Y_p \times (-Y_{n-p}).$$

Näin ollen

$$\mathrm{vol}_n(K_p \cap V) = \mathrm{vol}_p(Y_p) \cdot \mathrm{vol}_{n-p}(Y_{n-p}) = \frac{1}{p!} \cdot \frac{1}{(n-p)!}.$$

Olkoon sitten $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Määritellään

$$K_I := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; x_i \geq 0 \text{ kaikille } i \in I \text{ ja } x_i \leq 0 \text{ kaikille } i \notin I\}.$$

Koska n alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa (Huomautus 2.2.7), kappaleen V tilavuus saadaan summaamalla yli kaikkien 2^n mahdollisen joukon I, joilla K_I sisältää joukon V pisteitä. Tässä on huomattava, että $K_p = K_{\{1,2,\ldots,p\}}$. Jos I sisältää p alkiota, niin symmetrian nojalla

$$\mathrm{vol}_n(K_I \cap V) = \frac{1}{p!(n-p)!}.$$

Edelleen, jos I sisältää p alkiota, joukolle I on $\binom{n}{p}$ mahdollisuutta. Summaamalla yli kaikkien mahdollisten joukkojen I saadaan

$$\mathrm{vol}(V) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{1}{p!(n-p)!} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{1}{p!(n-p)!} \cdot \frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$$

Lemman 2.2.9 nojalla $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, joten saadaan

$$\mathrm{vol}(V) = \frac{1}{n!}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!^3}.$$

□

Huomautus 2.3.10. Skalaarilla $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ skaalatessa joukko V saa muodon

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{\substack{i=1 \\ x_i > 0}}^{n} x_i \leq \alpha \text{ ja } \sum_{\substack{i=1 \\ x_i < 0}}^{n} |x_i| \leq \alpha \right\}.$$

Tällöin

$$\mathrm{vol}(V) = \frac{(2n)!\alpha^n}{n!^3}.$$

Havainnollistetaan Lemman 2.3.9 tulosta esimerkillä.

Esimerkki 2.3.11. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ hilaa Λ,

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \log 3 \\ a_2 \log 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \right\},$$

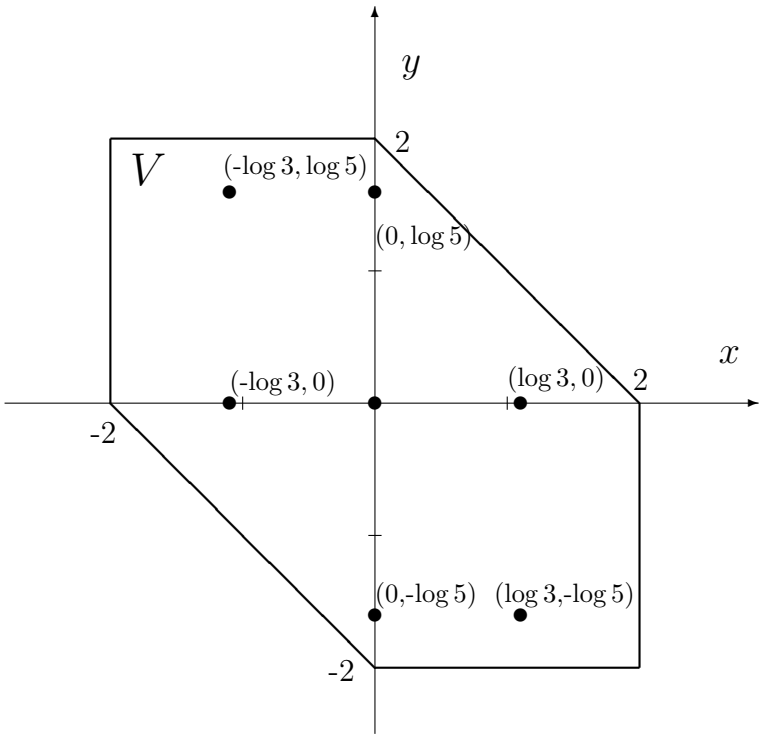
jonka (eräs) kanta on E,

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \log 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \log 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Näin ollen $\det(\Lambda) = \log 3 \log 5 \approx 1,768$. Valitaan Lemman 2.3.9 mukainen joukko $V \subset \mathbb{R}^2$ ja skaalataan luvulla 2, jolloin Huomautuksen 2.3.10 mukaisesti $\mathrm{vol}(V) = \frac{(2\cdot 2)!2^2}{2!^3} = 12$. Lauseen 2.3.7 epäyhtälö (2.4) saa nyt muodon

$$12 > m4 \log 3 \log 5.$$

Epäyhtälö toteutuu arvolla $m = 1$ muttei enää arvolla $m = 2$. Joukko V sisältää siis ainakin yhden nollasta eroavan hilapisteparin $\pm v \in \Lambda$. Itse asiassa joukko V sisältää kolme tällaista paria (kuva 1). Lause 2.3.7 antaa siis kovin "varovaisen" arvion tilanteesta.



Kuva 1: Konveksin joukon V sisään jäävä osa eräästä avaruuden $\mathbb{R}^2$ hilasta.

Esimerkki 2.3.12. Esimerkki 2.3.11 voidaan helposti yleistää avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Merkitään luvuilla $p_1, \ldots, p_n$ n:ää ensimmäistä paritonta alkulukua. Tällöin joukko $\Lambda_n \subset \mathbb{R}^n$,

$$\Lambda_n = \left\{(a_1 \log p_1, \ldots, a_n \log p_n) \in \mathbb{R}^n : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\right\}$$

muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ hilan, jonka determinatti on

$$\det(\Lambda_n) = \log p_1 \log p_2 \cdots \log p_n = \prod_{i=1}^{n} \log p_i.$$

Määritellään lopuksi vielä alihila ja siihen liittyvä indeksi.

Määritelmä 2.3.13. Hila $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ on hilan $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *alihila*, jos kaikilla $x \in \Lambda$ pätee $x \in \Delta$. Hiloihin Λ ja Δ liittyvää lukua D,

$$D = \frac{\det(\Lambda)}{\det(\Delta)},$$

kutsutaan *hilan* Λ *indeksiksi hilassa* Δ.

2.4 Ryhmistä ja niiden välisistä kuvauksista

Tarkastellaan seuraavaksi ryhmiä ja niiden ominaisuuksia. Alaluvun päätarkoituksena on selkiyttää alla olevan *abc*-osumien alarajafunktiota koskevan Lauseen 3.6.9 todistuksen ryhmäteoriaan nojaavaa osaa, joten tarkastelu keskittyy multiplikatiivisten kokonaislukujen ryhmään sekä homomorfismeihin. Yleisemmän käsityksen ryhmäteoriasta ja algebrasta saa lähteinä käytetyistä kirjoista [18, s. 11–144] ja [31, s. 1–117], joiden tuloksia ja määritelmiä on pyritty havainnollistamaan jatkon kannalta oleellisin esimerkein.

Aloitetaan aiheen käsittely laskutoimituksen ja ryhmän määrittelyllä.

Määritelmä 2.4.1. Joukossa G määritelty laskutoimitus $\circ$ on funktio $G \times G \to G$. Merkitään näin saatavaa joukon G alkiota $\circ(a, b) = a \circ b$, missä $(a, b) \in G \times G$.

Määritelmä 2.4.2. Paria $(G, \circ)$ kutsutaan *ryhmäksi*, jos laskutoimitus $\circ$ on suljettu joukossa G ja seuraavat kolme kohtaa ovat voimassa:

(i) kaikilla $a, b, c \in G$ pätee $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (liitännäisyys)

(ii) on olemassa $e \in G$ siten, että kaikilla $x \in G$ $e \circ x = x \circ e = x$ (neutraalialkio)

(iii) jokaista $a \in G$ kohti on olemassa $a' \in G$ siten, että $a \circ a' = a' \circ a = e$ (käänteisalkio).

Paria $(G, \circ)$ kutsutaan *Abelin ryhmäksi*, mikäli lisäksi on voimassa

(iv) kaikilla $a, b \in G$ pätee $a \circ b = b \circ a$ (vaihdannaisuus).

Esimerkki 2.4.3. (i) Olkoot $p_1, \ldots, p_n$ n ensimmäistä paritonta alkulukua ja olkoon $\mathcal{Q}_n$,

$$\mathcal{Q}_n = \left\{ p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n} \;\middle|\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pari $(\mathcal{Q}_n, *)$, missä $*$ on tavallinen kertolasku, on Abelin ryhmä.
(ii) Olkoon $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ hila. Tällöin Λ muodostaa ryhmän tavallisen yhteenlaskun suhteen.

Määritelmä 2.4.4. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Joukkoa $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ kutsutaan nimellä *kokonaisluvut modulo n*, ja siinä määritellään modulaariset laskutoimitukset $+_n$ ja $*_n$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}$ asettamalla

$$a +_n b = (a + b) \pmod{n} \qquad \text{ja} \qquad a *_n b = (ab) \pmod{n}.$$

Huomautus 2.4.5. Yllä olevassa määritelmässä sekä jatkossa samaistetaan yksinkertaisuuden vuoksi kongruenssiluokat $[k]$ ja luvut k kaikilla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Määritelmä 2.4.6. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Joukkoa $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n : \operatorname{syt}(x, n) = 1\}$ kutsutaan nimellä *multiplikatiiviset kokonaisluvut modulo n* ja siitä muodostetusta ryhmästä (engl. multiplicative group of integers modulo n) käytetään merkintää $(\mathbb{Z}_n^*, *_n)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ tai U_n (group of units).

Huomautus 2.4.7. Pari $(\mathbb{Z}_n^*, *_n)$ on Abelin ryhmä kaikilla $n \in \mathbb{N}$ [31, s. 98].

Esimerkki 2.4.8. Arvoilla $n = 2, 3, 4, 8$ ja 16 saadaan joukot

$$\mathbb{Z}_2^* = \{1\}, \quad \mathbb{Z}_3^* = \{1, 2\}, \quad \mathbb{Z}_4^* = \{1, 3\}, \quad \mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}, \quad \mathbb{Z}_{16}^* = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi ryhmän alkion potensseja sekä ryhmän virittämistä.

Määritelmä 2.4.9. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $n \in \mathbb{N}$. Alkion $g \in G$ *n:näs potenssi* määritellään induktiivisesti asettamalla

$$\begin{cases} g^0 &= e \\ g^n &= g \circ g^{n-1} \\ g^{-n} &= (g^{-1})^n = g^{-1} \circ g^{-n+1} \end{cases}$$

missä e on ryhmän G neutraalialkio ja g^{-1} alkion g käänteisalkio.

Määritelmä 2.4.10. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $H \subseteq G$ sekä $g \in G$. Jos pari $(H, \circ)$ on ryhmä, niin sitä kutsutaan ryhmän G *aliryhmäksi*. Jos edelleen

$$H = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

niin tällöin aliryhmää H kutsutaan *alkion g virittämäksi ryhmän G sykliseksi aliryhmäksi* ja käytetään merkintää $H = \langle g \rangle$.

Huomautus 2.4.11. Jos on olemassa koko ryhmän G virittävä alkio $g \in G$, toisin sanoen $\langle g \rangle = G$, niin tällöin alkiota g kutsutaan ryhmän G *virittäjäksi* ja ryhmää G *sykliseksi*.

Esimerkki 2.4.12. Ryhmät $(\mathbb{Z}_2^*, *_2)$ ja $(\mathbb{Z}_4^*, *_4)$ ovat syklisiä, sillä $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_2^*$ ja $\langle 3 \rangle = \mathbb{Z}_4^*$.

Kaikki ryhmät $(\mathbb{Z}_n^*, *_n)$ eivät kuitenkaan ole syklisiä [31, s. 106].

Lause 2.4.13. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Ryhmä $(\mathbb{Z}_{2^m}^*, *_{2^m})$ on syklinen jos ja vain jos $m = 1$ tai $m = 2$.*

Todistus. Esimerkin 2.4.12 nojalla riittää osoittaa että $(\mathbb{Z}_{2^m}^*, *_{2^m})$ ei ole syklinen, kun $m \geq 3$. Osoitetaan tämä induktiolla luvun m suhteen näyttämällä, että ryhmässä $(\mathbb{Z}_{2^m}^*, *_{2^m})$ ei ole kertalukua $\phi(2^m) = 2^{m-1}$ olevaa alkiota vaan

$$a^{2^{m-2}} \equiv 1 \pmod{2^m} \tag{2.5}$$

kaikilla parittomilla luvuilla $a \in \mathbb{Z}$.
1°) Koska $a = 2b + 1$ jollekin $b \in \mathbb{Z}$, saadaan arvolla $m = 3$

$$a^2 = 4b(b+1) + 1 \equiv 1 \pmod{8},$$

sillä toinen luvuista b ja $b + 1$ on parillinen. Kongruenssi (2.5) on siis voimassa arvolla $m = 3$.
2°) Oletetaan, että väite pätee arvolla $m = k \geq 1$. Tällöin kaikilla parittomilla luvuilla $a \in \mathbb{Z}$ on voimassa yhtälö

$$a^{2^{k-2}} = 1 + h2^k$$

jollakin $h \in \mathbb{Z}$. Korottamalla yhtälö puolittain toiseen potenssiin saadaan

$$a^{2^{(k+1)-2}} = (1 + h2^k)^2 = 1 + h2^{k+1} + h^2 2^{2k} = 1 + 2^{k+1}(h + h^2 2^{k-1}) \equiv 1 \pmod{2^{k+1}},$$

joten väite on voimassa myös arvolla $m = k+1$. Kohtien 1°) ja 2°) sekä induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $m \geq 3$. □

Seuraava tulos perustuu kirjaan [31, s. 107–108].

Lemma 2.4.14. *Olkoon $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Tällöin $\mathbb{Z}_{2^m}^* = \{\pm 3^i : 0 \leq i < 2^{m-2}\}$.*

Todistus. Olkoon k alkion 3 kertaluku joukossa $\mathbb{Z}_{2^m}^*$. Eulerin lauseen nojalla k jakaa luvun $\phi(2^m) = 2^{m-1}$, ts. $k = 2^j$ jollekin $j \leq m-1$. Lauseen 2.4.13 nojalla joukossa $\mathbb{Z}_{2^m}^*$ ei ole kertalukua 2^{m-1} olevaa alkiota, joten $j \leq m-2$. Huomautusta 2.1.21 arvolla $n = m-3$ soveltamalla saadaan

$$2^{m-3} \mid 3^{2^{m-3}} - 1,$$

toisin sanoen $3^{2^{m-3}} \not\equiv 1 \pmod{2^m}$, jolloin $j > m-3$. Siispä $j = 2^{m-2}$. Näin ollen alkiolla 3 on 2^{m-2} toisistaan eroavaa potenssia 3^i $(0 \leq i < 2^{m-2})$ joukossa $\mathbb{Z}_{2^m}^*$. Potenssit 3^i antavat kaikki joukon $\mathbb{Z}_{2^m}^*$ lukujen 1 tai 3 kanssa kongruentit alkiot modulo 8, kun taas potenssit -3^i antavat joukon $\mathbb{Z}_{2^m}^*$ lukujen -1 ja -3 kanssa kongruentit alkiot modulo 8. Näin ollen kaikilla joukon $\mathbb{Z}_{2^m}^*$ alkioilla on esitysmuoto $\pm 3^i$ jollekin $i = 0, 1, \ldots, 2^{m-2} - 1$. □

Huomautus 2.4.15. Vastaavanlaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että kaikilla $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ pätee $\mathbb{Z}_{2^m}^* = \{\pm 5^i : 0 \leq i < 2^{m-2}\}$ [31, s. 107–108]. Tällöin potenssit 5^i antavat kaikki joukon $\mathbb{Z}_{2^m}^*$ luvun 1 kanssa kongruentit alkiot modulo 4 ja potenssit -5^i antavat joukon $\mathbb{Z}_{2^m}^*$ luvun -1 kanssa kongruentit alkiot modulo 4.

Koska $3 \equiv -1 \pmod 4$, Lemman 2.4.14 ja Huomautuksen 2.4.15 nojalla saadaan:

Lause 2.4.16. *Olkoon $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Tällöin $\mathbb{Z}_{2^m}^* = \{3^i 5^j : 0 \leq i, j < 2^{m-2}\}$.*

Havainnollistetaan tilannetta esimerkillä.

Esimerkki 2.4.17. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{2^4}^*, *_{2^4})$, jolloin $\mathbb{Z}_{2^4}^* = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. Luvut saadaan edellisen lauseen nojalla tulon $3^i 5^j$ moduloista seuraavasti:

$$\begin{aligned}
3^4 * 5^0 &= 81 \equiv 1 \pmod{16} \\
3^1 * 5^0 &\equiv 3 \pmod{16} \\
3^0 * 5^1 &\equiv 5 \pmod{16} \\
3^1 * 5^3 &= 375 \equiv 7 \pmod{16} \\
3^2 * 5^0 &\equiv 9 \pmod{16} \\
3^3 * 5^0 &= 27 \equiv 11 \pmod{16} \\
3^0 * 5^3 &= 125 \equiv 13 \pmod{16} \\
3^1 * 5^1 &\equiv 15 \pmod{16}
\end{aligned}$$

Siirrytään sitten tarkastelemaan kahden ryhmän välisiä kuvauksia.

Määritelmä 2.4.18. Olkoot $(G, \circ)$ ja $(G', \bullet)$ ryhmiä. Funktiota $f : G \to G'$ kutsutaan *homomorfismiksi* tai *ryhmähomomorfismiksi*, mikäli kaikilla $a, b \in G$ pätee

$$f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b).$$

Seuraavasta tuloksesta nähdään, että homomorfismi säilyttää joitain ryhmän rakenteellisia ominaisuuksia [18, s. 128–129]

Lause 2.4.19. *Olkoon $f : G \to G'$ homomorfismi.*

(i) *Jos e on ryhmän G neutraalialkio, niin $f(e) = e'$ on ryhmän G' neutraalialkio.*

(ii) *Jos $a \in G$, niin $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.*

(iii) *Jos H on ryhmän G aliryhmä, niin $f(H)$ on ryhmän G' aliryhmä.*

(iv) *Jos K' on ryhmän G' aliryhmä, niin $f^{-1}(K')$ on ryhmän G aliryhmä.*

Esimerkki 2.4.20. (i) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin funktio $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, joka kuvaa luvun sen jakojäännökselle modulo n, on homomorfismi [18, s. 127–128].
(ii) Esimerkissä 2.4.3 mainitulta n:stä ensimmäisestä parittomasta alkuluvusta muodostetulta ryhmältä $(\mathcal{Q}_n, *)$ voidaan muodostaa homomorfismi ryhmälle $(\mathbb{R}^n, +)$ asettamalla $\varphi_n : \mathcal{Q}_n \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_n(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}) = (a_1 \log p_1, \ldots, a_n \log p_n).$$

Näin muodostettu homomorfismi φ_n on *injektiivinen*.
(iii) Olkoot $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Kuvaus g ryhmältä $(\mathcal{Q}_n, *)$ ryhmälle $(\mathbb{Z}_{2^m}, *_{2^m})$ on homomorfismi, kun tulkitaan $q \in \mathcal{Q}_n$ osamääränä $q = \frac{b}{c},\ \mathrm{syt}(b, c) = 1$, ja asetetaan

$$g(q) = b *_{2^m} c = (bc) \pmod{2^m}.$$

Lauseen 2.4.16 nojalla näin muodostettu homomorfismi g on *surjektiivinen*.

Määritelmä 2.4.21. Jos kahden ryhmän G ja G' välinen funktio $h : G \to G'$ on homomorfismi ja bijektio, sitä sanotaan *isomorfismiksi*. Mikäli tällainen isomorfismi on olemassa, ryhmiä G ja G' sanotaan *isomorfisiksi*.

Jokaisen homomorfismin kautta saadaan neutraalialkiolle kuvautuva ydin.

Määritelmä 2.4.22. Olkoon $f : G \to G'$ homomorfismi ryhmältä $(G, \circ)$ ryhmälle $(G', \bullet)$ ja olkoon e' ryhmän G' neutraalialkio. Joukkoa

$$\ker f = f^{-1}(\{e'\}) = \{x \in G : f(x) = e'\}$$

kutsutaan homomorfismin f *ytimeksi* (engl. *kernel*).

Aliryhmiin liittyvillä sivuluokkilla on yhteys homomorfismeihin.

Määritelmä 2.4.23. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä, $(H, \circ)$ sen aliryhmä ja $g \in G$. Joukkoa

$$H \circ g = \{h \circ g : h \in H\}$$

sanotaan *alkion g määräämäksi oikeanpuoleiseksi sivuluokaksi* (tai jäännösluokaksi) modulo H (engl. *right coset*). Vastaavasti, joukkoa

$$g \circ H = \{g \circ h : h \in H\}$$

sanotaan *alkion g määrämäksi vasemmanpuoleiseksi sivuluokaksi modulo H* (engl. *left coset*). Ryhmän $(G, \circ)$ ollessa vaihdannainen (Abelin ryhmä) puhutaan vain *alkion g määräämästä sivuluokasta modulo H*.

Huomautus 2.4.24. Sivuluokat voidaan määritellä myös kongruenssirelaation avulla:

$$a \equiv b \pmod{H}, \text{ jos ja vain jos } a \circ b^{-1} \in H.$$

Näin myös nimitykset "jäännösluokka" ja "modulo H" ovat perusteltuja. Tässä ekvivalenssiluokat ovat edellä määritellyt sivuluokat.

Esimerkki 2.4.25. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{2^3}, *_{2^3})$ ja sen triviaalia aliryhmää $(\{1\}, *_{2^3})$. Löydetään neljä sivuluokkaa:

$$\begin{aligned} \{1\} &= \{1\} \\ 3 *_{2^3} \{1\} &= \{3\} \\ 5 *_{2^3} \{1\} &= \{5\} \\ 7 *_{2^3} \{1\} &= \{7\} \end{aligned}$$

Koska $(\mathbb{Z}_{2^3}, *_{2^3})$ on Abelin ryhmä, vasemman- ja oikeanpuoleiset sivuluokat ovat samat. Lisäksi koska sivuluokkien yhdisteenä saadaan $\mathbb{Z}_{2^3}^*$, yllä on esitetty kaikki mahdolliset *sivuluokat modulo* $\{1\}$.

Määritelmä 2.4.26. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja ryhmä $(N, \circ)$ sen aliryhmä. Ryhmä $(N, \circ)$ on *normaali aliryhmä*, mikäli kaikilla $g \in G$ pätee

$$N \circ g = g \circ N.$$

Huomautus 2.4.27. Kaikki Abelin ryhmät ovat normaaleja [18, s. 132]. Lisäksi joukkohomomorfismin $f : G \to G'$ muodostama aliryhmä $\ker f \subseteq G$ on normaali.

Määritelmä 2.4.28. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $(N, \circ)$ sen normaali aliryhmä. Sivuluokkaryhmää G/N kutsutaan tällöin *aliryhmän* $(N, \circ)$ *määräämäksi ryhmän* $(G, \circ)$ *tekijäryhmäksi* (engl. *factor group* tai *quotient group*).

Esimerkki 2.4.29. Esimerkin 2.4.25 tapauksessa muodostettiin aliryhmän $(\{1\}, *_{2^3})$ määräämä ryhmän $(\mathbb{Z}_{2^3}^*, *_{2^3})$ tekijäryhmä

$$(\mathbb{Z}_{2^3}^*/\{1\}, *_{2^3}) = \big\{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}\big\}.$$

Homomorfismeista voidaan muodostaa tekijäryhmiä seuraavasti [18, s. 137].

Lause 2.4.30. *Olkoon $f : G \to G'$ homomorfismi ytimenään $\ker f = H$. Ryhmän H sivuluokat muodostavat* tekijäryhmän G/H*, missä*

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

kaikilla $a, b \in G$. Lisäksi kuvaus $\mu : G/H \to f(G)$ on isomorfismi.

Esimerkki 2.4.31. Tarkastellaan vielä Esimerkin 2.4.20 kohdassa (iii) ryhmältä $(\mathcal{Q}_n, *)$ ryhmälle $(\mathbb{Z}_{2^m}, *_{2^m})$ muodostettua homomorfismia g. Homomorfismin ytimeksi saadaan

$$\ker g = \big\{ \tfrac{b}{c} \in \mathcal{Q}_n \;\big|\; bc \equiv 1 \pmod{2^m}, \operatorname{syt}(b, c) = 1 \big\},$$

toisin sanoen kaikki sellaiset alkiot, jotka ovat suhteellisia alkulukuja ja toistensa käänteisalkioita modulo 2^m. Tarkastelemalla tilannetta sivuluokkien kannalta ja Huomautusta 2.4.24 soveltamalla voidaan homomorfismin ytimelle käyttää merkintää

$$\ker g = \mathcal{Q}_{n,m} = \left\{ \tfrac{b}{c} \in \mathcal{Q}_n \;\middle|\; b \equiv c \pmod{2^m},\ \mathrm{syt}(b,c) = 1 \right\}.$$

Lisäksi koska $g(\mathcal{Q}_n) = \mathbb{Z}_{2^m}$ Lauseen 2.4.16 nojalla, Lauseen 2.4.30 mukaan on siten olemassa isomorfismi

$$\mu : (\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n,m}, *) \to (\mathbb{Z}_{2^m}, *_{2^m}).$$

Tarkastellaan lopuksi ryhmän alkioiden lukumäärään liittyviä tuloksia.

Määritelmä 2.4.32. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä. Ryhmän *kertaluvulla* $|G|$ tarkoitetaan ryhmän $(G, \circ)$ alkioiden lukumäärää.

Esimerkki 2.4.33. Ryhmän $(\mathbb{Z}_n^*, *_n)$ kertaluku saadaan suoraan Eulerin funktion arvona. Tapauksessa $n = 2^m$ saadaan siten

$$|\mathbb{Z}_{2^m}^*| = \phi(2^m) = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}.$$

Esimerkin 2.4.31 nojalla ryhmien $(\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n,m}, *)$ ja $(\mathbb{Z}_{2^m}, *_{2^m})$ välillä on olemassa bijektio, joten näin ollen

$$|\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n,m}| = |\mathbb{Z}_{2^m}^*| = 2^{m-1}.$$

Lause 2.4.34 (Lagrange)**.** *Olkoon G äärellinen ryhmä ja H sen aliryhmä. Tällöin ryhmän H kertaluku jakaa ryhmän G kertaluvun.*

Määritelmä 2.4.35. Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Ryhmän H vasemmanpuoleisten sivuluokkien lukumäärää ryhmässä G kutsutaan *ryhmän H indeksiksi ryhmässä G* ja merkitään $(G : H)$.

Huomautus 2.4.36. Tarkasteltava ryhmä G voi olla äärellinen tai ääretön. Jos G on äärellinen, niin silloin myös $(G : H)$ on äärellinen ja Lagrangen lauseen nojalla

$$(G : H) = \frac{|G|}{|H|}.$$

Jos taas G on ääretön, niin $(G : H)$ joko on äärellinen tai päädytään vertailemaan kardinaliteettteja.

Huomautus 2.4.37. Jos H on ryhmän G normaali aliryhmä, niin tällöin $|G/H| = (G : H)$.

Esimerkki 2.4.38. Tarkastellaan indeksiä vielä hilojen tapauksessa. Olkoon $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ hilan $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ alihila. Määritelmän 2.3.13 nojalla hiloille pätee

$$(\Delta : \Lambda) = \frac{\det(\Lambda)}{\det(\Delta)}.$$

Jos Λ muodostaa ryhmän Δ normaalin aliryhmän, niin tällöin Huomautuksen 2.4.37 nojalla

$$|\Delta/\Lambda| = \frac{\det(\Lambda)}{\det(\Delta)}.$$

2.5 Polynomeista

Abc-konjektuurin polynomivastineen ymmärtämiseksi palautetaan mieleen muutamia polynomeihin liittyviä tuloksia. Seuraavassa esityksessä on nähtävissä jo polynomien ja kokonaislukujen välistä yhteyttä, mitä *Abc*-konjektuurikin havainnollistaa.

Aloitetaan polynomien algebrallisesta määritelmästä [18, s. 199].

Määritelmä 2.5.1. Olkoon R rengas. Ääretöntä summaa f,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots , \tag{2.6}$$

missä $a_i \in R$ ja $a_i \neq 0$ vain äärellisellä määrällä indeksejä i, kutsutaan *polynomiksi f, jonka kertoimet kuuluvat renkaaseen R*. Lukuja a_i kutsutaan polynomin f *kertoimiksi*. Suurinta lukua i, jolla $a_i \neq 0$, kutsutaan *polynomin f asteeksi* $\deg f$.

Huomautus 2.5.2. Mikäli $a_i = 0$ kaikilla $i > n$, summalle (2.6) käytetään yksinkertaisempaa esitystä

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Yleisesti yhden muuttujan x polynomien renkaasta käytetään merkintää $R[x]$,

$$R[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n \mid n \geq 0, a_i \in R \text{ kaikilla } i = 0, \ldots, n\}.$$

Tyypillisesti tarkastelu rajoittuu renkaaseen $\mathbb{C}[x]$ tai $\mathbb{Z}[x]$.

Lemma 2.5.3. *Olkoot $f, g \in \mathbb{C}[x]$ nollasta eroavia polynomeja. Tällöin niiden asteille on voimassa*

$$\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\},$$
$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

Polynomien tarkastelussa keskitytään usein nollakohtiin [35, s. 111].

Määritelmä 2.5.4. Olkoon $f \in \mathbb{C}[x]$ polynomi. Lukua $\alpha \in \mathbb{C}$ kutsutaan polynomin f *juureksi*, mikäli $f(\alpha) = 0$.

Juurten avulla polynomi voidaan esittää tekijämuodossa [35, s. 165]. Pidetään tässä tunnettuna Algebran peruslausetta, jonka mukaan n-asteisen polynomin $f \in \mathbb{C}[x]$ juurten lukumäärä on monikerrat mukaanlukien sama kuin polynomin aste.

Lause 2.5.5. *Olkoon $f \in \mathbb{C}[x]$ nollasta poikkeava polynomi. Tällöin f voidaan esittää muodossa*

$$f(x) = c \prod_{j=1}^{r} (x - \alpha_j)^{m_j} = c(x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r},$$

missä $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja α_j ovat toisistaan eroavia polynomin f juuria moninkertoinaan m_j kaikilla $j = 1, \ldots, r$. Erityisesti, jos $f(\alpha) = 0$, niin f voidaan esittää muodossa

$$f(x) = (x - \alpha)^{m(\alpha)} g(x),$$

missä $g(\alpha) \neq 0$ ja $m(\alpha)$ on juuren α moninkerta.

Huomautus 2.5.6. Jos $m(\alpha) = 1$, puhutaan polynomin f *yksinkertaisesta juuresta.* Jos taas $m(\alpha) \geq 2$, on kyseessä polynomin f *moninkertainen juuri.*

Lause 2.5.5 perustuu jakoyhtälön soveltamiseen renkaassa $\mathbb{C}[x]$. Jos nimittäin polynomeille $f, g \in \mathbb{C}[x]$ pätee $f \mid g$, niin tällöin on olemassa vakiosta eroava $h \in \mathbb{C}[x]$ siten, että

$$g = fh.$$

Koska ensimmäisen asteen polynomit ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{C}[x]$, voidaan Lauseen 2.5.5 antamaa faktorointia hyödyntää seuraavassa määritelmässä [35, s. 119].

Määritelmä 2.5.7. Olkoot $f, g \in \mathbb{C}[x]$ nollasta poikkeavia polynomeja. Polynomien f ja g suurimmalla yhteisellä tekijällä $\mathrm{syt}(f, g)$ tarkoitetaan polynomia h, jolle pätee $h \mid f$ ja $h \mid g$.

Huomautus 2.5.8. Jos on olemassa $h_1 \in \mathbb{C}[x]$ siten, että $h_1 \mid f$ ja $h_1 \mid g$, niin tällöin $h_1 \mid h$.

Tarkastellaan lopuksi vielä syklotomista teoriaa pohjautuen kirjaan [62, s. 82 – 91].

Määritelmä 2.5.9. Lukua $\zeta \in \mathbb{C}$ kutsutaan *n:neksi ykkösen juureksi* (engl. n-th root of unity), mikäli luvulle $n \in \mathbb{N}$ pätee $\zeta^n = 1$. Mikäli n on pienin sellainen luku, jolle $\zeta^n = 1$, lukua $\zeta \in \mathbb{C}$ kutsutaan *primitiiviseksi n:neksi ykkösen juureksi*

Huomautus 2.5.10. Kaikkien n:nsien ykkösen juurten joukko μ_n koostuu pisteistä

$$\mu_n = \Big\{ e^{\frac{2\pi i j}{n}} = \cos\frac{2\pi j}{n} + i \sin\frac{2\pi j}{n} : j = 0, 1, \ldots n-1 \Big\}.$$

Primitiivisten n:nsien ykkösen juurten tapauksessa lisätään vielä oletus $\mathrm{syt}(j, n) = 1$. Koska pisteet jakavat kompleksitason yksikköympyrän n:ään yhtä suureen osaan, kutsutaan ykkösen juurten teoriaa ympyrän jakamista tarkoittavaksi *syklotomiseksi* teoriaksi.

Primitiivisten ykkösen juurten avulla määritellään syklotomiset polynomit.

Määritelmä 2.5.11. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin n:s *syklotominen polynomi* $\Phi_n \in \mathbb{C}[x]$ määritellään induktiivisesti asettamalla $\Phi_1(x) = x - 1$ ja arvoilla $n \geq 2$

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n} \Phi_d(x)},$$

missä d käy läpi kaikki luvun n tekijät poislukien luvun $d = n$.

Voidaan osoittaa, että polynomin Φ_n kertoimet ovat kokonaislukuja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Mikäli jätetään pois primitiivisyysehto, Huomatukseen 2.5.10 perustuen voidaan osoittaa seuraava myöhemmin tarvittava tulos:

Lemma 2.5.12. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ pariton. Tällöin polynomi*

$$x^n - 1 = \prod_{\zeta \in \{\mu_0, \ldots, \mu_n\}} (x - \zeta)$$

voidaan esittää muodossa

$$x^n - 1 = (x-1) \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \Big(x^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi j}{n}\Big) x + 1 \Big).$$

2.6 Elliptisistä käyristä

Elliptisiin käyriin liittyvä teoria on hyvin laaja. Tässä alaluvussa käydään läpi vain jatkossa esitettävän Szpiron konjektuurin kannalta oleellisia tuloksia, mistä johtuen kerroinkuntana toimii rationaaliluvut $\mathbb{Q}$. Syvällisemmän käsityksen aiheesta saa kirjasta [56], johon alaluku pohjautuu.

Määritelmä 2.6.1. Olkoot $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in \mathbb{Q}$. Weierstrassin yhtälön

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \tag{2.7}$$

avulla määriteltyä käyrää E kutsutaan *elliptiseksi käyräksi.*

Määritelmä 2.6.2. Elliptisen käyrän *diskriminantti* on luku

$$\Delta = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6,$$

missä luvut b_2, b_4, b_6 ja b_8 saadaan yhtälöistä

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\ b_4 &= a_1a_3 + 2a_4 \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\ b_8 &= a_1^2a_6 - a_1a_3a_4 + 4a_2a_6 + a_2a_3^2 - a_4^2. \end{aligned}$$

Huomautus 2.6.3. Käyttämällä lisäksi merkintöjä

$$c_4 = b_2^2 - 24b_4 \quad \text{ja} \quad c_6 = -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6,$$

voidaan kuvata elliptisen käyrän geometrista luonnetta. Nimittäin

(i) $\Delta \neq 0$, jos ja vain jos käyrällä ei ole singulaarisia pisteitä.

(ii) $\Delta = 0$ ja $c_4 \neq 0$, jos ja vain jos käyrällä on singulaarinen piste, jossa käyrälle voidaan piirtää kaksi toisistaan eroavaa tangenttia (engl. node).

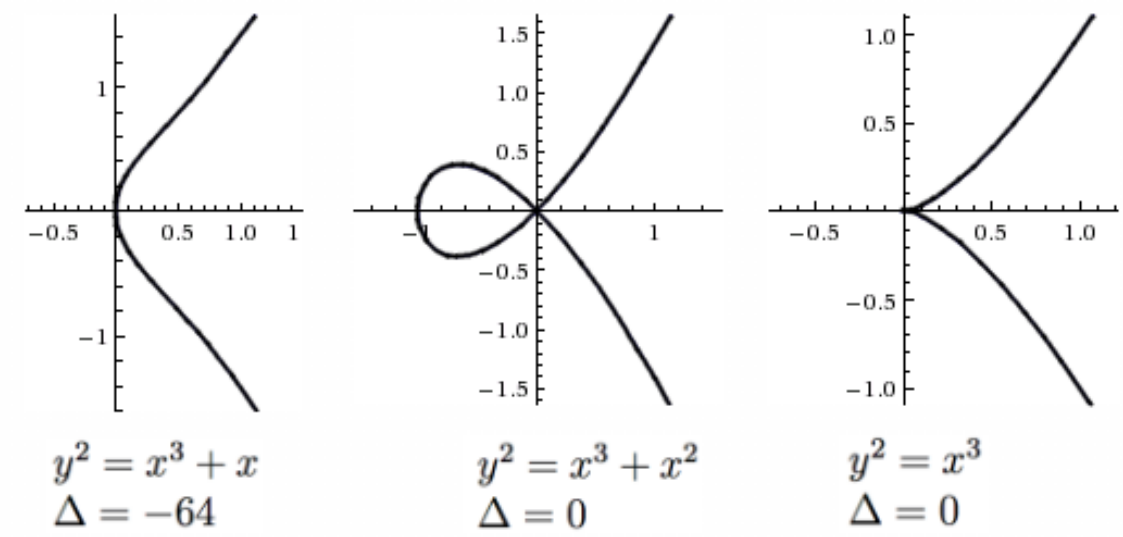
(iii) $\Delta = c_4 = 0$, jos ja vain jos kayrällä on singulaarinen piste, jossa käyrälle voidaan piirtää vain yksi tangentti (engl. cusp).

Tapauksissa (ii) ja (iii) käyrällä on vain yksi singulaarinen piste. Tässä tapauksessa singulaarisella pisteellä tarkoitetaan intuitiivisesti pistettä, jossa käyrällä on solmukohta tai jossa käyrä ei ole sileä, ks. Kuva 2. Vain ehdon (i) toteuttavista ei-singulaarisista yhtälön (2.7) avulla määritellyistä käyristä käytetään nimitystä elliptinen käyrä.

Huomautus 2.6.4. Mikäli kerroinkunnan karakteristika on erisuuri kuin 2 tai 3, kuten joukon $\mathbb{Q}$ tapauksessa, yhtälön (2.7) avulla määritetty elliptinen käyrä voidaan muuttujanvaihtojen avulla esittää muodossa

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B,$$

johon monissa sovelluksissa implisiittisesti viitataan. Tällöin $\Delta = -16(4A^3 + 27B^2)$.



Kuva 2: Elliptinen käyrä ja kaksi singulaarista käyrää.

Elliptisiin käyriin liittyvillä luvuilla on seuraavanlainen yhteys.

Lemma 2.6.5. *Edellä olevilla merkinnöillä pätee*

(i) $4b_8 = b_2b_6 - b_4^2$

(ii) $1728 \cdot \Delta = c_4^3 - c_6^2$.

Todistus. Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned} b_2b_6 - b_4^2 &= a_1^2a_3^2 + 4a_1^2a_6 + 4a_2a_3^2 + 16a_2a_6 - \big(a_1^2a_3^2 + 4a_1a_3a_4 + 4a_4^2\big) \\ &= 4a_1^2a_6 - 4a_1a_3a_4 + 16a_2a_6 + 4a_2a_3^2 - 4a_4^2 = 4b_8. \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} c_4^3 - c_6^2 &= \big(b_2^6 - 72b_2^4b_4 + 1728b_2^2b_4^2 - 13824b_4^3\big) \\ &\quad - \big(b_2^6 - 72b_2^4b_4 + 432b_2^3b_6 + 1296b_2^2b_4^2 - 15552b_2b_4b_6 + 46656b_6^2\big) \\ &= 432b_2^2b_4^2 - 432b_2^3b_6 - 13824b_4^3 + 15552b_2b_4b_6 - 46656b_6^2 \\ &= 432\big(-b_2^2(b_2b_6 - b_4^2)\big) - 1728(8b_4^3) + 1728(9b_2b_4b_6) - 1728(27b_6^2), \end{aligned}$$

mistä väite seuraa edellisen yhtäsuuruusketjun nojalla. □

Havainnollistetaan tilannetta esimerkillä.

Esimerkki 2.6.6. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $abc \neq 0$. Muodostetaan elliptinen käyrä E yhtälöllä

$$E : y^2 = x(x-a)(x+b) = x^3 + (b-a)x^2 - abx.$$

Tällöin edellisillä merkinnöillä

$$b_2 = 4(b-a), \quad b_4 = -2ab, \quad b_6 = 0, \quad b_8 = -(ab)^2,$$

jolloin diskriminantiksi saadaan

$$\begin{aligned}\Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 = 16(a^2-2ab+b^2)a^2b^2 + 64a^3b^3\\ &= 16(a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4 + 4a^3b^3) = 16(a^4b^2 + 2a^3b^3 + a^2b^4)\\ &= 16\big(ab(a+b)\big)^2\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}c_4 &= b_2^2 - 24b_4 = 16(a^2-2ab+b^2) + 16(3ab)\\ &= 16(a^2+ab+b^2),\\ c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 = -64(b-a)(a^2-2ab+b^2) - 288(b-a)(ab)\\ &= -32(b-a)(2a^2-4ab+2b^2+9ab) = -32(b-a)(2a^2+5ab+2b^2)\\ &= -32(b-a)(a+2b)(2a+b).\end{aligned}$$

Määritelmä 2.6.7. Elliptisen käyrän E yhtälöä (2.7) kutsutaan *minimaalimalliksi*, mikäli $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in \mathbb{Z}$ ja $|\Delta|$ on minimaalinen. Tällöin diskriminanttia Δ kutsutaan käyrän E *minimaalidiskriminantiksi*.

Minimaalimallin tapauksessa siis $c_4, c_6, \Delta \in \mathbb{Z}$. Jokaisella elliptisellä käyrällä on minimaalimalli [56, s. 186]. Minimaalimallin muodostamista helpottaa seuraava tulos [44, s. 7]:

Lemma 2.6.8. *Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ siten, että ne toteuttavat ehdot*

$$a+b+c = 0, \quad a \equiv -1 \pmod 4, \quad 16 \mid b.$$

Tällöin niiden avulla voidaan muodostaa minimaalimalli E_{abc} asettamalla

$$E_{abc}: \; y^2 + xy = x^3 + \frac{b-a-1}{4}x^2 - \frac{ab}{16}x.$$

Huomautus 2.6.9. Lemman 2.6.8 tapauksessa $b_2 = b-a$, $b_4 = -\frac{ab}{8}$, $b_6 = 0$ ja $b_8 = -(\frac{ab}{16})^2$, jolloin

$$\begin{aligned}\Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 = (b-a)^2\Big(\frac{ab}{16}\Big)^2 + \Big(\frac{a^3b^3}{64}\Big)\\ &= \Big(\frac{ab}{16}\Big)^2\big(b^2 - 2ab + a^2 + 4ab\big) = \Big(\frac{ab}{16}\Big)^2\big(b+a\big)^2 = \Big(\frac{ab(b+a)}{16}\Big)^2 = \Big(\frac{abc}{16}\Big)^2\end{aligned}$$

ja

$$c_4 = b_2^2 - 24b_4 = (b-a)^2 + 3ab = b^2 + ab + a^2 = (b+a)^2 - ab = c^2 - ab.$$

Määritelmä 2.6.10. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ alkuluku ja olkoon E yhtälön (2.7) määräämä elliptinen käyrä. Mikäli kertoimista a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 otetaan jakojäännös modulo p, saadaan käyrä

$$\tilde{E}: y^2 + \tilde{a_1}xy + \tilde{a_3}y = x^3 + \tilde{a_2}x^2 + \tilde{a_4}x + \tilde{a_6}$$

jota kutsutaan *reduktioksi* mod p .

Reduktion avulla voidaan luokitella elliptisiä käyriä. Olkoon E elliptinen käyrä ja $\tilde{E}$ sen minimaalimallista muodostettu reduktio modulo p. Merkitään $\tilde{\Delta}$ ja $\tilde{c_4}$ käyrään $\tilde{E}$ liittyviä lukuja. Reduktion $\tilde{E}$ sanotaan olevan

(i) *hyvä* (vakaa), mikäli $\tilde{\Delta} \neq 0$.

(ii) *multiplikatiivinen* (puolivakaa), mikäli $\tilde{\Delta} = 0$ ja $\tilde{c_4} \neq 0$.

(iii) *additiivinen* (epävakaa), mikäli $\tilde{\Delta} = \tilde{c_4} = 0$.

Elliptistä käyrää sanotaan *puolivakaaksi*, mikäli sen kaikki redukiot modulo p ovat joko hyviä tai multiplikatiivisia. Itse asiassa voidaan osoittaa [56, s. 196], että elliptinen käyrä E on puolivakaa, jos ja vain jos sen minimaalimallista lasketuille luvuille Δ ja c_4 pätee joko $p \nmid \Delta$ tai $p \mid \Delta$ ja $p \nmid c_4$.

Esitetään vielä lopuksi yksi elliptisiin käyriin liittyvä luku, johtaja (engl. conductor).

Määritelmä 2.6.11. Olkoon p alkuluku ja olkoon E elliptinen käyrä, jonka minimaalidiskriminantti on Δ ja $\tilde{E}$ reduktio modulo p. Käyrän E *johtaja* on luku

$$N_E = \prod_{p|\Delta} p^{m_p},$$

missä

$$m_p = \begin{cases} 1, \text{ jos käyrä } \tilde{E} \text{ on multiplikatiivinen} \\ 2, \text{ jos käyrä } \tilde{E} \text{ on additiivinen ja } p \neq 2, 3 \\ 2 + \varepsilon_p, \text{ jos käyrä } \tilde{E} \text{ on additiivinen ja } p = 2, 3 \text{ sekä } 0 \leq \varepsilon_p \leq 3. \end{cases}$$

Huomautus 2.6.12. Määritelmässä 2.6.11 olevaa modulolukuun p liittyvää lukua ε_p ei tässä yhteydessä määritellä tarkemmin mutta voidaan kuitenkin todeta sen liittyvän arvioihin $m_3 \leq 3$ ja $m_2 \leq 5$ [56, s. 256]. Jatkossa tarkastellaan pelkästään puolivakaita elliptisiä käyriä, jolloin käyrän johtajan määritelmä sievenee muotoon

$$N_E = \prod_{p|\Delta} p = \text{ rad}(\Delta),$$

missä olevaa radikaalifunktiota rad tarkastellaan myöhemmin alaluvussa 3.1.

Seuraavan aputuloksen avulla näytetään vielä alaluvun lopuksi elliptisten käyrien sekä Diofantoksen yhtälöiden välinen yhteys.

Lemma 2.6.13. *Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ siten, että $a + b = c$ ja $\text{syt}(a, b, c) = 1$, ja olkoon E elliptinen käyrä, joka määritellään yhtälöllä*

$$E : y^2 = x(x + a)(x - b).$$

(i) *Käyrän E minimaalidiskriminantti Δ on joko*

$$|\Delta| = 2^4|abc|^2 \quad tai \quad |\Delta| = 2^{-8}|abc|^2.$$

(ii) *Käyrällä E on multiplikatiivinen reduktio modulo p kaikilla parittomilla alkuluvuilla p, jotka jakavat tulon abc.*

Huomautus 2.6.14. Lemman 2.6.13 elliptistä käyrää kutsutaan löytäjänsä mukaan *Freyn käyräksi* ja siihen liittyviä suureita on laskettu Esimerkissä 2.6.6.

2.7 Analyysin perustuloksia

Matematiikan osa-aluetta, jossa reaali- ja kompleksianalyysin ideoita ja menetelmiä käytetään kokonaislukuja koskevissa ongelmissa, kutsutaan *analyyttiseksi lukuteoriaksi* [1, s. 7]. Tämän alaluvun tarkoituksena on perehtyä tutkielmassa tarvittaviin analyyttisen lukuteorian tuloksiin hyödyntämällä muutamia analyysin tuloksia.

Aloitetaan raja-arvon määritelmästä [63, s. 34].

Määritelmä 2.7.1. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Funktiolla $f : (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ on pisteessä x_0 *raja-arvo* $L \in \mathbb{R}$, jota merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Erityisesti jatkossa tarvitaan raja-arvoa äärettömyydessä [63, s. 43].

Määritelmä 2.7.2. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Funktio $f : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ *kasvaa rajatta* kun $x \to +\infty$, mitä merkitään

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty,$$

jos jokaista lukua $M > 0$ vastaa luku $x_M > 0$ siten, että

$$x > x_M \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M.$$

Pidetään tunnettuna yleisimmät raja-arvoon liittyvät laskusäännöt. Epämääräisissä raja-arvotilanteissa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ tarvitaan kuitenkin seuraavaa L'Hospitalin lausetta [63, s. 88–89]:

Lause 2.7.3 (L'Hospital)**.** *Olkoot f ja g avoimella välillä $(a, b) \subset \mathbb{R}$ derivoituvia funktioita siten, että funktiolla g' ei ole nollakohtia välillä (a, b). Oletetaan lisäksi, että joko*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0 \qquad \textit{tai} \qquad \lim_{x \to b-} f(x) = \pm\infty \quad \textit{ja} \quad \lim_{x \to b-} g(x) = \pm\infty,$$

ja että on olemassa luku $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ siten, että

$$\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Tällöin

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Huomautus 2.7.4. L'Hospitalin lause on voimassa myös raja-arvoilla $x \to a+$, $x \to \pm\infty$ ja $x \to c$ jollekin $c \in (a, b)$, mikäli lauseen oletukset vain muuten ovat voimassa [63, s. 91]. Tarvittaessa L'Hospitalin lausetta voidaan myös soveltaa useamman kerran edellyttäen että vaaditut oletukset pysyvät voimassa.

Havainnollistetaan L'Hospitalin lausetta esimerkillä.

Esimerkki 2.7.5. (i) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että $\frac{x}{\log^n x} \to \infty$, kun $x \to \infty$. L'Hospitalin lausetta toistuvasti n kertaa soveltamalla saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log^n x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n(\log^{n-1} x)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{n\log^{n-1} x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{n!} = \infty.$$

Tulos voidaan tulkita myös siten, että funktio x kasvaa funktiota $\log^n x$ nopeammin kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Vertailtaessa vielä keskenään funktioita $\log^n x$ nähdään jo sieventämällä, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log^m x}}{\frac{x}{\log^n x}} = \lim_{x\to\infty} \log^{n-m} x = \infty$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $m < n$.
(ii) Funktio $\frac{x}{\log^3 x}$ kasvaa funktiota $\log\log x$ nopeammin, kun $x \to \infty$. Tämä nähdään neljä kertaa L'Hospitalin lausetta soveltamalla:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log^3 x}}{\log\log x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log^3 x \log\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3\log^2 x \log\log x + \log^2 x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{6\log x \log\log x + 3\log x + 2\log x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{6\log\log x + 6 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\log x}{6} = \infty.\end{aligned}$$

Polynomien arvoja on helppo laskea, joten niiden avulla voidaan approksimoida monimutkaisempia funktiota tietyin ehdoin esimerkiksi seuraavasti [63, s. 98–99].

Määritelmä 2.7.6. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja olkoon funktio f n kertaa derivoituva jossakin pisteen x_0 ympäristössä $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$. Tällöin polynomia $T_n(x; x_0)$,

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

missä $n \in \mathbb{N}$, sanotaan *funktion f astetta n olevaksi Taylorin polynomiksi pisteessä x_0*.

Antamalla $n \to \infty$ saadaan päättymätön Taylorin sarja [63, s. 265].

Määritelmä 2.7.7. Olkoon funktio f äärettömästi derivoituva avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$ ja olkoon $x_0 \in I$. Sarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

sanotaan *funktion f Taylorin sarjaksi pisteessä x_0*.

Taylorin sarja on yksikäsitteinen; jos funktiolla f on potenssisarja jollakin avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$, niin kyseinen sarja on tällöin funktion f Taylorin sarja [63, s. 265]. Seuraavan esimerkin avulla nähdään kuinka Taylorin sarjojen konstruoimiseen voidaan käyttää aiemmin määritettyä Taylorin sarjaa.

Esimerkki 2.7.8. (a) Määritetään Taylorin sarja funktiolle $f(t) = \log(1+t)$ pisteessä $t_0 = 0$. Välillä $(-1, 1)$ funktio f on äärettömästi derivoituva, joten Määritelmän 2.7.7 mukaan saadaan

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k}, \quad \text{kun } -1 < t < 1.$$

Sarjan suppeneminen nähdään suoraan geometrisen sarjan suppenemisen perusteella.
(b) Määritetään (a)-kohdan avulla Taylorin sarja funktiolle $g(x) = \log(1 - \frac{1}{\log x})$. Sijoittamalla $t = -\frac{1}{\log x}$ yllä olevaan lausekkeeseen saadaan

$$\log\Big(1 - \frac{1}{\log x}\Big) = -\frac{1}{\log x} - \frac{1}{2\log^2 x} - \frac{1}{3\log^3 x} - \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log x)^k}.$$

Tässä tapauksessa suppenemisväliksi saadaan $-1 < -\frac{1}{\log x} < 1$, toisin sanoen $|\log x| > 1$.

Asymptoottista tarkaskastelua varten otetaan käyttöön seuraava merkintä [1, s. 53].

Merkintä 2.7.9. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Jos on olemassa vakio $C > 0$ siten, että funktioille f ja $g > 0$ pätee epäyhtälö

$$|f(x)| \leq Cg(x) \tag{2.8}$$

kaikilla $x \geq a$, niin tällöin merkitään

$$f = \mathcal{O}(g) \qquad \text{tai} \qquad f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big).$$

Huomautus 2.7.10. Epäyhtälön (2.8) nojalla jos $f = \mathcal{O}(g)$, niin myös $-f = \mathcal{O}(g)$. Näin ollen siis $\mathcal{O}(g) = -\mathcal{O}(g)$, joten jatkossa voidaan rajoittua positiiviseen merkintään $\mathcal{O}(g)$.

Kerätään merkintään liittyvät tulokset omaksi lemmakseen.

Lemma 2.7.11. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$, ja olkoon $g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ siten, että $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.*

(i) *Kaikilla $k \in \mathbb{R}$ pätee $k = \mathcal{O}(g)$.*

(ii) *Kaikilla $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pätee $\mathcal{O}(kg) = \mathcal{O}(g)$.*

(iii) *Jos $f = \mathcal{O}(g)$, niin $kf = \mathcal{O}(g)$ kaikilla $k \in \mathbb{R}$.*

(iv) *Olkoon $f : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ funktio. Tällöin $f \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(fg)$.*

(v) *Jos $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ ja $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, niin $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$*

(vi) *Jos $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ ja $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, niin $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(|g_1| + |g_2|)$. Erityisesti, jos $g_1 = g_2$, niin $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g_1)$.*

Huomautus 2.7.12. Lemman tulokset perustuvat oleellisesti epäyhtälön (2.8) ja itseisarvon arviointiin sekä äärettömän raja-arvon määritelmään (Määritelmä 2.7.2). Erityisesti L'Hospitalin lausetta hyödyntämällä rajatta kasvavien funktioiden f ja g tapauksessa saadaan, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big).$$

Lisäksi seuraavaa aputulosta tarvitaan [41, s. 215], [53, s. 25–26].

Lemma 2.7.13. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.*

Todistus. Väite on selvästi voimassa arvolla $n = 1$. Koska logaritmi on aidosti kasvava ja Riemann-integroituva jokaisella välillä $[1, b]$, $b > 1$, saadaan kaikilla $n \geq 2$ arvio

$$\int_{n-1}^{n} \log x \, dx \leq \int_{n-1}^{n} \log n \, dx = \log n.$$

Ottamalla nyt logaritmi kertomasta ja käyttämällä yllä olevaa tietoa saadaan

$$\begin{aligned}
\log n! = \sum_{k=2}^{n} \log k &\geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \log x \, dx = \int_{1}^{n} \log x \, dx = \Big|_{1}^{n} x \log x - x \\
&= n \log n - n - (1 \cdot \log 1 - 1) = n \log n - n + 1 \\
&> n \log n - n,
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

Yllä olevaa ajatusta jatkamalla saadaan seuraava approksimaatio.

Lause 2.7.14 (Stirlingin kaava)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin suurilla muuttujan n arvoilla*

$$\log n! = n \log n - n + \mathcal{O}(\log n).$$

Huomautus 2.7.15. Lauseen 2.7.14 tulosta voidaan perustella Lemman 2.7.13 todistuksessa puolisuunnikassäännön avulla saatavalla arviolla

$$\log n! \approx \int_{1}^{n} \log x \, dx = n \log n - n + 1.$$

Lemman 2.7.11 nojalla nimittäin $1 = \mathcal{O}(\log n)$. Lauseen analyyttisempi todistus löytyy lähteistä [1, s. 68] tai [41, s. 208].

Sovelletaan Stirlingin kaavaa seuraavassa myöhemmin tarvittavassa aputuloksessa.

Lemma 2.7.16. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin suurilla muuttujan n arvoilla pätee*

$$\log\left(\frac{(2n)!}{(n!)^3 2^n}\right) = n \log\left(\frac{2e}{n}\right) + \mathcal{O}(\log n).$$

Todistus. Lausetta 2.7.14 sekä logaritmin laskusääntöjä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{(2n)!}{(n!)^3 2^n}\right) &= \log(2n)! - 3\log n! - n \log 2 \\
&= 2n \log(2n) - 2n + \mathcal{O}(\log 2n) - 3n \log n + 3n - 3\mathcal{O}(\log n) - n \log 2 \\
&= (2n - n) \log 2 + (2n - 3n) \log n + n + \mathcal{O}(\log n) \\
&= n \log 2 - n \log n + n \log e + \mathcal{O}(\log n) \\
&= n \log\left(\frac{2e}{n}\right) + \mathcal{O}(\log n)
\end{aligned}$$

□

2.8 Alkulukuihin liittyviä tuloksia

Klassinen ongelma lukuteoriassa on alkulukujen jakautuminen. Vaikka tiedetäänkin alkulukuja olevan äärettömästi, niiden lukumäärää pystytään approksimoimaan vain asymptoottisesti funktiolla $\frac{x}{\log x}$. Tässä alaluvussa tarkastellaan alkulukuihin liittyviä erilaisia arvioita keskittyen kuitenkin Lauseen 3.6.9 todistuksessa tarvittavien aputuloksien käsittelyyn.

Lähdetään liikkeelle arviosta, joka on hyvin oleellinen sovellettaessa *Abc*-konjektuuria erilaisiin Diophantoksen yhtälöihin ja epäyhtälöihin [41, s. 269-270].

Lemma 2.8.1. *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja alkuluvuilla p pätee*

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n.$$

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla.
1°) Tapauksissa $n = 1$ ja $n = 2$ saadaan $1 < 4^1$ ja $2 < 4^2$, joten väite on voimassa.
2°) Oletetaan, että väite pätee arvolla $n = k \geq 2$. Jos k on pariton, niin arvolla $n = k + 1$

$$\prod_{p \leq k+1} p = \prod_{p \leq k} p < 4^k < 4^{k+1}$$

induktio-oletuksen nojalla.

Jos taas k on parillinen, niin $n = k + 1 = 2m + 1$ jollekin $m \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\prod_{p \leq k+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p.$$

Tarkastellaan sitten binomikerrointa M,

$$M = \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)2m(2m-1)\cdots(m+2)}{m!}.$$

Esimerkin 2.2.8 nojalla M on kokonaisluku ja sille pätee arvio

$$M < 4^m.$$

Olkoon sitten p alkuluku väliltä $m + 2 \leq p \leq 2m + 1$. Tällöin p jakaa tulon

$$(2m+1)2m(2m-1)\cdots(m+2)$$

mutta ei kertomaa $m!$, sillä $m < p$. Näin ollen $p \mid M$ ja siten myös $(\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p) \mid M$. Näin ollen pätee

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p \leq M < 4^m \tag{2.9}$$

Nyt induktio-oletuksen nojalla väite pätee arvolla $m + 1 < k$, toisin sanoen

$$\prod_{p \leq m+1} < 4^{m+1}, \tag{2.10}$$

jolloin epäyhtälöistä (2.9) ja (2.10) seuraa

$$\prod_{p \leq k+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p < 4^{m+1}4^m = 4^{k+1}.$$

Väite seuraa kohdista 1°) ja 2°) sekä induktioperiaatteesta. □

Huomautus 2.8.2. Lemmalla 2.8.1 on läheinen yhteys ns. Chebyshevin funktioon ϑ,

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = \log \prod_{p \leq x} p.$$

Lemma 2.8.1 voidaankin esittää ekvivalentisti muodossa: kaikilla reaaliluvuilla $x \geq 1$

$$\vartheta(x) < x \log 4.$$

Funktioidensa ϑ ja ψ avulla Chebyshev tarkasteli alkulukujen lukumääräfunktion π kasvunopeutta [41, s. 267–268].

Määritelmä 2.8.3. Funktiota $\pi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\pi(x) = \text{lukumäärä alkuluvuille, jotka ovat} \leq x$$

kutsutaan *alkulukujen lukumääräfunktioksi.*

Alkulukujen lukumääräfunktion asymptoottista kasvunopeutta kuvaavan lauseen alkulukutaulukoiden perusteella totesivat itsenäisesti Gauss (1792) ja Legendre (1798) mutteivat pystyneet sitä todistamaan [1, s. 8–9]. Varsinaisen todistuksen tulokselle esittivät Hadamard ja de la Vallee-Poussin vasta vuonna 1896.

Lause 2.8.4 (Alkulukulause)**.** *Olkoon π alkulukujen lukumääräfunktio. Tällöin*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Huomautus 2.8.5. Alkulukulauseen mukaan funktio π käyttäytyy asymptoottisesti samalla tavalla kuin funktio $\frac{x}{\log x}$, mikä ei kuitenkaan tarkoita niiden erotusten olevan lähellä nollaa. Funktio π virhetermeineen [30, s. 65] voidaan esittää muodossa

$$\pi(x) = x \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(k-1)!}{\log^k x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^{k+1} x} \right) \right).$$

Arvolla $k = 3$ saadaan

$$\pi(x) = x \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log^2 x} + \frac{2}{\log^3 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^4 x} \right) \right), \tag{2.11}$$

mikä on tarvittava tarkkuus Lemman 2.8.8 todistuksessa.

Lemman 2.8.8 todistuksessa tarvitaan myös seuraavaa Abelin summakaavaa [1, s.77].

Lause 2.8.6 (Abel)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon funktio $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ avulla siten, että*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n),$$

missä $A(x) = 0$, jos $x < 1$. Oletetaan, että funktiolla f on jatkuva derivaatta välillä $[y, x]$, missä $0 < y < x$. Tällöin

$$\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt.$$

Avataan Lemmassa 2.8.8 tarvittavaa Abelin lauseen sovellusta esimerkin avulla.

Esimerkki 2.8.7. Määritellään funktio $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$a(n) = \begin{cases} 1, \text{ jos } n \text{ on alkuluku} \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{1 < n \leq x} a(n),$$

joten Lausetta 2.8.6 arvolla $y = 2$ sovellettaessa saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i) = f(x)\pi(x) - f(2) - \int_2^x f'(t)\pi(t)dt.$$

Asettamalla edelleen $f(x) = \log x$ ja $f(x) = \log\log x$ saadaan vastaavasti

$$\sum_{i=1}^{n} \log p_i = \pi(x)\log x - \log 2 - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log\log p_i = \pi(x)\log\log x - \log\log 2 - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t\log t}dt. \tag{2.13}$$

Osoitetaan seuraavaksi alaluvun päätulos [13, s. 1867–1869].

Lemma 2.8.8. *Olkoon $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Merkitään lukua x pienempien tai yhtäsuurten parittomien alkulukujen lukumäärää luvulla $n = \pi(x) - 1$ ja olkoot $p_1, \ldots, p_n$ n ensimmäistä paritonta alkulukua. Tällöin*

$$\sum_{i=1}^{n} \log p_i = n\log\left(\frac{x}{e}\right) - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log\log p_i = n\log\left(\frac{x}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

Todistus. Todistuksen ajatus perustuu Abelin kaavan soveltamiseen Esimerkin 2.8.7 mukaisesti. Tarkastellaan aluksi Lemman ensimmäistä väitettä ja yhtälöä (2.12). Arviota (2.11) soveltamalla saadaan

$$\pi(x)\log x - \log 2 = x\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right) \tag{2.14}$$

ja

$$\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = \int_2^x \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 t}\right)\right)dt, \tag{2.15}$$

kun käytetään arvioita $\log 2 = \mathcal{O}(\frac{x}{\log^3 x})$ ja $\frac{2x}{\log^3 x} + \mathcal{O}(\frac{x}{\log^4 x}) = \mathcal{O}(\frac{x}{\log^3 x})$ (Lemma 2.7.11).

Osittaisintegroinnin mukaan kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 1$ pätee

$$\int_a^b \frac{1}{\log^m t} dt = \Big/_a^b \frac{t}{\log^m t} + m \int_a^b \frac{1}{\log^{m+1} t} dt. \tag{2.16}$$

Yhtälön (2.16) nojalla saadaan yhtälöstä (2.15) siten edelleen

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt &= \int_2^x \frac{1}{\log t} dt + \int_2^x \frac{1}{\log^2 t} dt + \int_2^x \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 t}\right) dt \\
&= \Big/_2^x \frac{t}{\log t} + \int_2^x \frac{1}{\log^2 t} dt + \Big/_2^x \frac{t}{\log^2 t} + 2\int_2^x \frac{1}{\log^3 t} dt + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= \Big/_2^x \frac{t}{\log t} + \Big/_2^x \frac{t}{\log^2 t} + \int_2^x \frac{1}{\log^3 t} dt + \Big/_2^x \frac{t}{\log^2 t} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= \frac{x}{\log x} + \frac{2x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),
\end{aligned}$$

sillä kaikille vakioille $c \in \mathbb{R}$ pätee $c = \mathcal{O}(\frac{x}{\log^3 x})$ Lemman 2.7.11 mukaan. Sijoittamalla nyt yllä oleva sekä yhtälö (2.14) alkuperäiseen yhtälöön (2.12) saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \log p_i = x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right). \tag{2.17}$$

Alussa asetettiin $n = \pi(x) - 1$. Kirjoittamalla (2.11) uudelleen käyttämällä geometrista sarjaa saadaan

$$\begin{aligned}
n &= \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right) - 1 \\
&= \frac{x}{\log x}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\log x}\right)^i + \frac{1}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right) \\
&= \frac{x}{\log x}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\log x}} + \frac{1}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right) \\
&= x\left(\frac{1}{\log x - 1} + \frac{1}{\log^3 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^4 x}\right)\right),
\end{aligned}$$

missä $-1 = \mathcal{O}(\frac{x}{\log^4 x})$. Kertomalla saatu yhtälö puolittain luvulla $\log x - 1$ saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
n(\log x - 1) &= x\left(1 + \frac{\log x}{\log^3 x} - \frac{1}{\log^3 x} + (\log x - 1)\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^4 x}\right)\right) \\
&= x + \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

josta edelleen termejä siirtämällä sekä huomiota

$$\log x - 1 = \log x - \log e = \log\left(\frac{x}{e}\right)$$

soveltamalla saadaan lopulta

$$x = n \log\left(\frac{x}{e}\right) - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right). \tag{2.19}$$

Lemman ensimmäinen väite seuraa yhdistämällä yhtälöt (2.17) ja (2.19).

Tarkastellaan sitten Lemman toista väitettä ja yhtälöä (2.13). Aiemmin asetetun nojalla $\pi(x) = n + 1$, jolloin huomioita $\log\log x = \mathcal{O}(\log\log x)$ ja $\log\log 2 = \mathcal{O}(\log\log x)$ soveltamalla saadaan

$$\pi(x)\log\log x - \log\log 2 = n\log\log x + \mathcal{O}(\log\log x). \tag{2.20}$$

Vastaavasti yhtälöä (2.11) käyttämällä sekä yhtälön (2.16) mukaan osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{\pi(t)}{t\log t}dt &= \int_2^x \frac{1}{t\log t}\cdot t\left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t} + \frac{2}{\log^3 t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^4 t}\right)\right)dt \\
&= \int_2^x \left(\frac{1}{\log^2 t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 t}\right)\right)dt \\
&= \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Sijoittamalla tulokset (2.20) ja (2.21) alkuperäiseen yhtälöön (2.13) saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \log\log p_i = n\log\log x - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right), \tag{2.22}$$

sillä $\log\log x = \mathcal{O}(\frac{x}{\log^3 x})$.

Toisaalta, koska $\log x - 1 = \log x(1 - \frac{1}{\log x})$, saadaan

$$\begin{aligned}
n\log(\log x - 1) &= n\left(\log\log x + \log\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)\right) \\
&= n\left(\log\log x - \left[\frac{1}{\log x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)\right]\right) \\
&= n\log\log x - \big(\pi(x) - 1\big)\left[\frac{1}{\log x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)\right] \\
&= n\log\log x - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)
\end{aligned}$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa Taylorin sarjakehitelmästä (Esimerkki 2.7.8) ja neljäs arviosta (2.11) sekä huomiosta $\frac{1}{\log x} = \mathcal{O}(\frac{x}{\log^3 x})$. Näin ollen yhtälö (2.22) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i=1}^{n} \log\log p_i = n\log(\log x - 1) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

josta lopulta saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log\log p_i &= n\log\left(\frac{n(\log x - 1)}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= n\log\left(\frac{x(1+\mathcal{O}(\frac{1}{\log^2 x}))}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= n\left(\log\left(\frac{x}{n}\right) + \log\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)\right]\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= n\log\left(\frac{x}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right)\cdot\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^2 x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= n\log\left(\frac{x}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),
\end{aligned}$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa yhtälöstä (2.18) ja neljäs yhtälöstä (2.11) saatavasta arviosta $\pi(x) - 1 = \mathcal{O}(\frac{x}{\log x})$ sekä arviosta $\log\left(1+\mathcal{O}(\frac{1}{\log^2 x})\right) = \mathcal{O}(\frac{1}{\log^2 x})$, sillä $\log 1 = 0$. Lemman toinen väite seuraa. □

Huomautus 2.8.9. Lemma 2.8.8 antaa tarkasteltaville parittomien alkulukujen tuloista otetuille logaritmisille summille oleellisesti asymptoottisen arvion, mikä käy ilmi todistuksessa käytetyistä $\mathcal{O}$-merkinnöistä. Merkintään $\mathcal{O}$ liittyviä tuloksia käsitellään tarkemmin Lemmassa 2.7.11.

Sovelletaan näin saatua tulosta vielä kolmeen myöhemmin tarvittavaan aputulokseen. Lemmoissa esiintyvä funktio B määritellään myöhemmin Lauseen 3.6.9 todistuksessa.

Lemma 2.8.10. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot $p_1, \ldots, p_n$ n ensimmäistä alkulukua sekä $B : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ jokin funktio. Tällöin*

$$\log\left(\frac{(2n)!}{(n!)^3 2^n} B(x)^n\right) - \sum_{i=1}^{n} \log\log p_i = n\log\left(\frac{2eB(x)}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

Todistus. Lemmoja 2.7.16 ja 2.8.8 sekä logaritmin laskusääntöjä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\log\left(\frac{(2n)!}{(n!)^3 2^n} B(x)^n\right) - \sum_{i=1}^{n} \log\log p_i \\
&= n\log\left(\frac{2e}{n}\right) + \mathcal{O}(\log n) + n\log B(x) - n\log\left(\frac{x}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= n\left(\log\left(\frac{2e}{n}\right) + \log B(x) + \log\left(\frac{n}{x}\right)\right) + \mathcal{O}(\log n) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\
&= n\log\left(\frac{2eB(x)}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),
\end{aligned}$$

missä $\mathcal{O}(\log n) = \mathcal{O}(\frac{x}{\log^3 x})$, sllä n on vakio. □

Lemma 2.8.11. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$ siten, että Lemman 2.8.10 merkinnöillä pätee*

$$2^m \geq \exp\left[n \log\left(\frac{2eB(x)}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right]. \tag{2.23}$$

Tällöin

$$\left(\frac{1}{2^m}\right)^\alpha \prod_{i=1}^{n} p_i \leq \exp\left(n \log\left(\frac{x}{e}\left(\frac{x}{2eB(x)}\right)^\alpha\right) - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right).$$

Todistus. Lemmaa 2.8.8 sekä epäyhtälöä (2.23) soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2^m}\right)^\alpha \prod_{i=1}^{n} p_i &= \exp\left(\log\left[\left(\frac{1}{2^m}\right)^\alpha \prod_{i=1}^{n} p_i\right]\right) \\
&\leq \exp\left(\log\left[\exp\left[n \log\left(\frac{2eB(x)}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right]\right]^{-\alpha} + \log\left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]\right) \\
&= \exp\left(-\alpha n \log\left(\frac{2eB(x)}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log p_i\right) \\
&= \exp\left(n \log\left(\frac{x}{2eB(x)}\right)^\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) + n \log\left(\frac{x}{e}\right) - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) \\
&= \exp\left(n \log\left(\frac{x}{e}\left(\frac{x}{2eB(x)}\right)^\alpha\right) - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.8.12. *Oletetaan, että Lemman 2.8.11 oletusten lisäksi pätee*

$$\frac{2eB(x)}{x} = \left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mikäli määritellään luku n alkulukufunktion π avulla siten, että $n = \pi(x) - 1$, saadaan

$$2^m \geq \exp\left(\frac{x}{\alpha}\left[1 + \frac{1}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right]\right).$$

Todistus. Koska $\log(\frac{x}{e}) = \log x - 1$, saadaan oletusten sekä arvion (2.11) nojalla

$$\begin{aligned}
2^m &\geq \exp\left[n \log\left(\frac{2eB(x)}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right] = \exp\left(\frac{n}{\alpha} \log\left(\frac{x}{e}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{\alpha}\left[\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log^2 x} + \frac{2}{\log^3 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^4 x}\right)\right](\log x - 1)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{\alpha}\left[1 + \frac{1}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right]\right).
\end{aligned}$$

□

3 Abc-konjektuuri ja siihen liittyviä tuloksia

Abc-konjektuuri voidaan esittää monessa muodossa käyttötarkoituksesta riippuen. Tässä luvussa tarkastellaan alkuperäistä *Abc*-konjektuuria, sen eri formulaatioita sekä tyypillisimpiä tapoja lähestyä konjektuuria. Lopuksi tarkastellaan *Abc*-konjektuurin yhteyttä sen innoittajina toimineisiin Szpiron konjektuureihin sekä Fermat'n suureen lauseeseen.

3.1 Abc-kolmikot ja radikaali

Abc-konjektuurin esittämiseksi sekä merkintöjen yksinkertaistamiseksi määritellään aluksi *abc*-summa ja -kolmikko lähteitä [13] ja [44, s. 2] soveltaen.

Määritelmä 3.1.1. Luvut $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ muodostavat *abc-summan*, mikäli $a + b = c$ ja $\text{syt}(a, b) = 1$. *Abc*-summan muodostavaa kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ kutsutaan *abc-kolmikoksi*.

Huomautus 3.1.2. (i) Jatkossa oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $0 < a < b < c$ ellei muuta mainita. Kyseinen tilanne saadaan nimittäin aina aikaan *abc*-summan termejä siirtämällä ja valitsemalla tarvittaessa uudelleen luvut a, b ja c.
(ii) Oletuksesta $\text{syt}(a, b) = 1$ seuraa $\text{syt}(a, b, c) = 1$. Soveltamalla Lemmaa 2.1.7 kaksi kertaa saadaan

$$\text{syt}(a, c) = \text{syt}(a, a + b) = \text{syt}(a, b) = 1 = \text{syt}(b, a) = \text{syt}(b, a + b) = \text{syt}(b, c).$$

Lauseen 2.1.5 nojalla siten $\text{syt}(a, b) = \text{syt}(a, c) = \text{syt}(b, c) = 1$, jolloin myös $\text{syt}(a, b, c) = 1$.

Esimerkki 3.1.3. Lukuteoriassa esiintyy paljon *abc*-kolmikoita [44, s. 2–3]:

(i) Pythagoraan kolmikot $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, jotka ovat muotoa

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2 \\ y &= 2mn \\ z &= m^2 + n^2, \end{aligned}$$

missä $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, $\text{syt}(m, n) = 1$, ja toinen luvuista m ja n on pariton ja toinen parillinen [51, s. 394-395].

(ii) Fermat'n luvuista $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, muodostetut kolmikot $(1, 2^{2^n}, F_n)$.

(iii) Mersennen alkuluvuista $M_p = 2^p - 1$, p alkuluku, muodostetut kolmikot $(1, M_p, 2^p)$.

Tulkitsemalla kongruenssiyhtälöitä yhtälöiksi saadaan *abc*-kolmikoita myös

(iv) Fermat'n pienestä lauseesta, jonka mukaan jokaiselle alkuluvulle p pätee $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ aina, kun $a \in \mathbb{Z}$ ja $\text{syt}(p, a) = 1$.

(v) Fermat'n pienen lauseen yleistyksestä Eulerin lauseesta, jonka mukaan $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, missä $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ siten, että $\text{syt}(a, n) = 1$, ja ϕ on Eulerin funktio.

(vi) Wilsonin lauseesta, jonka mukaan jokainen alkuluku p toteuttaa kongruenssin $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. *Abc*-kolmikoita saadaan myös Wilsonin alkuluvuista p, jotka toteuttavat kongruenssin $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^2}$.

(vii) Wieferichin alkuluvuista p, jotka toteuttavat kongruenssin $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

(viii) Carmichaelin luvuista, toisin sanoen yhdistetyille luvuille $n \in \mathbb{N}$, joille on voimassa kongruenssi $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ kaikilla $b \in \mathbb{N}$, joille $\operatorname{syt}(n, b) = 1$.

Abc-konjektuurin kannalta oleellinen on myös radikaalin käsite [41, s. 172], [44, s. 3].

Määritelmä 3.1.4. Olkoon $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Luvun n *radikaali* määritellään alkutekijöiden tulona

$$\operatorname{rad}(n) = \prod_{p \mid n} p,$$

missä p on alkuluku. Lisäksi asetetaan $\operatorname{rad}(1) = \operatorname{rad}(-1) = 1$.

Huomautus 3.1.5. Radikaalin määritelmästä nähdään suoraan, että $\operatorname{rad}(n) \mid n$. Radikaalin voikin tulkita annetun luvun suurimmaksi neliövapaaksi tekijäksi [22]. Toisin sanoen, $k^2 \nmid \operatorname{rad}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ja $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Havainnollistetaan määritelmää seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 3.1.6. Olkoon $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Tällöin luvulla n on yleistetty kanoninen esitys (Lause 2.1.14 ja Huomautus 2.1.15)

$$n = (-1)^{a_0} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n},$$

missä luvut $p_1, \ldots, p_n$ ovat eri alkulukuja, $a_0 \in \{0, 1\}$ ja $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Luvun n radikaali on siten

$$\operatorname{rad}(n) = \operatorname{rad}\big((-1)^{a_0} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}\big) = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Seuraavaan aputulokseen on kerätty jatkon kannalta oleelliset radikaalin ominaisuudet.

Lemma 3.1.7. *Olkoot $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

(i) $\operatorname{rad}(a) \leq a$.

(ii) $\operatorname{rad}(ab) \leq \operatorname{rad}(a) \operatorname{rad}(b)$, *missä pätee yhtäsuuruus jos vain jos* $\operatorname{syt}(a, b) = 1$.

(iii) $\operatorname{rad}(a^m b^n) \leq \operatorname{rad}(a) \operatorname{rad}(b)$.

Todistus. Oletetaan, että $a, b, m, n \geq 2$, sillä muuten väitteet pätevät triviaalisti. Luvuilla on Aritmetiikan peruslauseen (Lause 2.1.14) nojalla kanoniset esitykset $a = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n}$ ja $b = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \cdots q_m^{s_m}$, missä p_i ja q_j ovat eri alkulukuja ja $t_i, s_j \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\operatorname{rad}(a) = \operatorname{rad}(p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n}) = p_1 p_2 \cdots p_n \leq p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n} = a$$

kaikilla $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, mistä väite (i) seuraa. Edelleen

$$\begin{aligned} \operatorname{rad}(ab) &= \operatorname{rad}(p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n} \cdot q_1^{s_1} q_2^{s_2} \cdots q_m^{s_m}) \\ &\leq p_1 p_2 \cdots p_n \cdot q_1 q_2 \cdots q_m \\ &= \operatorname{rad}(p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n}) \operatorname{rad}(q_1^{s_1} q_2^{s_2} \cdots q_m^{s_m}) = \operatorname{rad}(a) \operatorname{rad}(b), \end{aligned}$$

missä epäyhtälö mikä osoittaa väitteen (ii). Väite (iii) saadaan soveltamalla väitettä (ii) ja radikaalin määritelmää. □

Huomautus 3.1.8. Kohdan (ii) nojalla radikaalifunktio on multiplikatiivinen.

Osoitetaan vielä työhön [53, s. 9–10] perustuen, että *abc*-kolmikon lukujen tulon radikaali voi saada mielivaltaisen suuria arvoja.

Merkintä 3.1.9. Olkoot $P, s \in \mathbb{N}$ siten, että $P \geq 3$ ja $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_s \leq P$, missä $p_1, \ldots, p_s$ ovat alkulukuja. Käytetään merkintää S_P joukolle

$$S_P = \left\{(-1)^{a_0} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s} : a_0 \in \{0,1\} \text{ ja } a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Lemma 3.1.10. *Olkoot $x, y \in S_P$ siten, että $\operatorname{syt}(x,y) = 1$, $|x| < |y|$ ja $|y| \geq 3$. Tällöin*

$$\operatorname{rad}(x+y) \geq C\sqrt{\frac{\log|y|}{\log\log|y|}}$$

missä $C > 0$ on vain luvusta P riippuva efektiivisesti laskettavissa oleva vakio.

Todistus. Koska luvun $x+y$ radikaali on vähintään yhtä suuri kuin sen suurin alkutekijä, väite seuraa tuloksesta [55, Corollary 1.2, ss. 41–45]. □

Lemman suorana seurauksena saadaan

Lemma 3.1.11. *Olkoot $x, y, z \in S$ siten, että $\operatorname{syt}(x,y) = 1$, $|x| < |y|$, $|y| \geq 3$ ja $x + y = z$. Tällöin luku $\max(|x|, |y|, |z|)$ on rajoitettu kaikilla x, y, z.*

Todistus. Koska Lemman 3.1.10 oletukset sisältyvät väitteen oletuksiin, saadaan edellisen Lemman nojalla

$$\sqrt{\frac{\log|y|}{\log\log|y|}} \leq \frac{1}{C}\operatorname{rad}(x+y) = \frac{1}{C}\operatorname{rad}(z) \leq \frac{1}{C}p_1 p_2 \cdots p_s,$$

missä C on vain luvusta P riippuva vakio. Yllä olevan nojalla luku $|y|$ on rajoitettu ja oletuksen mukaan $|x|$ on rajoitettu, jolloin myös luku $|z|$ on rajoitettu. Näin ollen myös maksimi luvuista $|x|, |y|$ ja $|z|$ on rajoitettu. □

Huomautus 3.1.12. Lemma 3.1.11 osoittaa itse asiassa, että joukko

$$\left\{(x,y,z) \in S_P^3 : \operatorname{syt}(x,y) = 1, |x| < |y|, x + y = z\right\}$$

on äärellinen.

Saatua tulosta voidaan nyt soveltaa *abc*-kolmikon radikaaliin.

Lause 3.1.13. *Olkoon $P \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On vain äärellisesti abc-kolmikoita $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, joille $\operatorname{rad}(abc) \in S_P$.*

Todistus. Jos $\operatorname{rad}(abc) \in S_P$, niin tällöin lukujen a, b ja c alkutekijät kuuluvat joukkoon S_P. Valitsemalla tarvittaessa uudelleen luvut a, b ja c siten, että $|a| < |b|$, väite seuraa Lemmasta 3.1.11 ja Huomautuksesta 3.1.12. □

Koska avaruus $\mathbb{N}^3$ on numeroituva, myös *abc*-kolmikoiden muodostama joukko on sen osajoukkona numeroituva. Näin ollen saadaan seuraava tulos.

Lause 3.1.14. *Olkoon jono $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jokin abc-kolmikoiden järjestys. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{rad}(a_n b_n c_n) = \infty.$$

Todistus. Olkoon $P \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Nyt edellisen lauseen nojalla on olemassa luku n_0 siten, että $\operatorname{rad}(a_n b_n c_n) > P$ aina kun $n \geq n_0$. Väite seuraa. □

3.2 Abc-konjektuuri

Oesterlé ja Masser esittivät *Abc*-konjektuurin vuonna 1985 yrityksenä ymmärtää paremmin Fermat'n suurta lausetta [45, s. 3-4], [47]. Heillä oli kuitenkin hieman erilainen näkemys konjektuurin formuloinnista: Masserin versio ammensi Stothers-Masonin lauseesta kun taas Oesterlé pohjasi näkemyksensä Szpiron elliptisiä käyriä koskeviin konjektuureihin [2].

Tässä alaluvussa tarkastellaan *Abc*-konjektuuria ja sen tyypillisimpiä esitysmuotoja soveltamalla edellisessä alaluvussa määriteltyä *abc*-kolmikon käsitettä. Aloitetaan tarkastelu esittämällä Masserin mukainen formulaatio *Abc*-konjektuurista [2], [44, s. 8–9].

Konjektuuri 3.2.1 (Abc, versio I)**.** *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla abc-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ on voimassa epäyhtälö*

$$c \leq C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Konjektuuri voidaan esittää yleisemmässä muodossa hieman oletuksia muuttamalla.

Konjektuuri 3.2.2. *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa reaaliluku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla abc-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, on voimassa epäyhtälö*

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Huomautus 3.2.3. Edellä esitetyt *Abc*-konjektuurit ovat ns. vahvassa muodossa, sillä lukua $\varepsilon > 0$ ei ole kiinnitetty eikä lukua $C(\varepsilon)$ siten ole tarkemmin määritetty. Heikosta muodosta puhutaan, mikäli oletetaan konjektuurin olevan totta vain jollekin kiinnitetylle luvulle $\varepsilon > 0$, esimerkiksi arvolle $\varepsilon = 1$. [4, s. 403]

Konjektuuri voidaan esittää myös hieman eri tavalla:

Konjektuuri 3.2.4 (Abc, versio II)**.** *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa korkeintaan äärellisen monta abc-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joille pätee*

$$c > \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Osoitetaan, että konjektuurit ovat ekvivalentteja.

Lause 3.2.5. *Konjektuuri 3.2.1 on voimassa, jos ja vain jos Konjektuuri 3.2.4 on voimassa.*

Todistus. Oletetaan ensin, että Konjektuuri 3.2.1 on voimassa. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen mutta kiinnitetty. Mikäli $0 < C(\varepsilon) \leq 1$, niin yksikään *abc*-kolmikko ei toteuta epäyhtälöä (3.2) ja väite on selvä. Jos $C(\varepsilon) > 1$, niin oletetaan vastoin väitettä, että on äärettömästi epäyhtälön (3.2) toteuttavia *abc*-kolmikoita (a, b, c). Nämä kolmikot toteuttavat epäyhtälöketjun

$$\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon} < c < C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$$

ja lisäksi kolmikoiden luku c voi saada mielivaltaisen suuria arvoja. Tästä johtuen Konjektuuria 3.2.1 arvolla $\frac{\varepsilon}{2}$ sovellettaessa saadaan ristiriita oletuksen kanssa, sillä ei ole olemassa sellaista vakioa $C(\frac{\varepsilon}{2})$, että epäyhtälö

$$c \leq C\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\,\mathrm{rad}(abc)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

toteutuu kaikilla *abc*-kolmikoilla. Näin ollen epäyhtälön (3.2) toteuttavia *abc*-kolmikoita on korkeintaan äärellinen määrä.

Oletetaan sitten kääntäen, että Konjektuuri 3.2.4 on voimassa. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen mutta kiinnitetty. Valitaan nyt

$$C(\varepsilon) = \max\left\{1, \sup \frac{c}{\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}}\right\},$$

missä supremum otetaan yli kaikkien epäyhtälön (3.2) toteuttavien *abc*-kolmikoiden. Näin ollen epäyhtälö (3.1) pätee kaikilla *abc*-kolmikoilla. □

Esitetään vielä yksi edellisten kanssa samantapainen *Abc*-konjektuurin muoto [44, s. 9].

Konjektuuri 3.2.6. *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla abc-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, on voimassa epäyhtälö*

$$\mathrm{rad}(abc) \geq C(\varepsilon)\big(\max(|a|, |b|, |c|)\big)^{1-\varepsilon}.$$

Lause 3.2.7. *Konjektuuri 3.2.2 ja Konjektuuri 3.2.6 ovat yhtäpitäviä.*

Todistus. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$. Tällöin epäyhtälö

$$A \leq C(\varepsilon)B^{1+\varepsilon}$$

on ekvivalentti epäyhtälön

$$B \geq \left(\frac{A}{C(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} = \left(\frac{A}{C(\varepsilon)}\right)^{\frac{1+\varepsilon-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = C_1(\varepsilon')A^{1-\varepsilon'}$$

kanssa, kun valitaan $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ja $C_1(\varepsilon') = C(\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'})^{\varepsilon'-1}$. Väite seuraa. □

Abc-konjektuurille voidaan esittää seuraava tulkinta: *abc*-kolmikosta muodostetun tulon *abc* kanonisessa esityksessä monet alkutekijät esiintyvät vain kerran ja jos jotkin alkutekijät esiintyvät useammin, niitä kompensoidaan joko suurilla alkutekijöillä tai monilla kerran esiintyvillä alkutekijöillä [34, s. 40]. Tulkintaa havainnollistaa seuraava taulukko, jossa tarkastellaan *abc*-kolmikon

$$a_n = 1, \quad b_n = 7^{2^n} - 1, \quad c_n = 7^{2^n}$$

kanonisia esityksiä arvoilla $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (Taulukko 1).

n	a	b	c
2	1	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$	7^4
3	1	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 1201$	7^8
4	1	$2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 1201 \cdot 169553$	7^{16}
5	1	$2^8 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 353 \cdot 1201 \cdot 169553 \cdot 47072139617$	7^{32}
6	1	$(7^{32} - 1)$:n alkutekijät $\cdot\, 2 \cdot 7699649 \cdot 134818753 \cdot 531968664833$	7^{64}

Taulukko 1: Maplella laskettuja luvun $7^{2^n} - 1$ kanonisia esityksiä.

Myös kirjan [50, s. 399–428] taulukot suhteellisten alkulukujen $a^n \pm b^m$ kanonisista esityksistä tukevat edellä esitettyä tulkintaa.

Tarkastellaan sitten lähemmin *Abc*-konjektuuria. Seuraavasta lauseesta nähdään, että *abc*-kolmikon muodostavien lukujen täytyy olla suhteellisia alkulukuja.

Lause 3.2.8. *Konjektuuri 3.2.4 ei ole voimassa, mikäli* $\operatorname{syt}(a,b,c) > 1$.

Todistus. Valitaan $\varepsilon = 1$ sekä luvut

$$a_n = 3^n, \quad b_n = 2 \cdot 3^n \quad \text{ja} \quad c_n = 3^{n+1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin selvästi $a_n + b_n = c_n$, ja edelleen

$$\operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^2 = (2 \cdot 3)^2 = 36 < 3^{n+1}$$

kaikilla $n > 2$. On siis äärettömän monta kolmikkoa (a_n, b_n, c_n), joille $c_n > \operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^{1+\varepsilon}$, joten Konjektuuri 3.2.4 ei ole voimassa. □

Abc-konjektuurissa luku $C(\varepsilon) > 0$ on luvusta $\varepsilon > 0$ riippuva mutta muuten sitä ei määritellä mitenkään tarkemmin. Eräs konjektuuriin liittyvä ongelma onkin kyseisten lukujen riippuvuussuhteen tarkempi määritteleminen. Artikkelissa [2] A. Baker ehdottaakin ongelman kiertämistä modifioimalla *Abc*-konjektuuria yhdenmukaisemmaksi logaritmisten muotojen kanssa seuraavasti.

Konjektuuri 3.2.9 (Abc, Bakerin versio I)**.** *Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa luvusta ε riippumaton vakio $C > 0$ siten, että kaikille abc-kolmikoille $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, pätee epäyhtälö*

$$\max(|a|,|b|,|c|) \leq C \left(\varepsilon^{-\omega} \operatorname{rad}(abc)\right)^{1+\varepsilon},$$

missä ω on tulon abc eri alkutukijöiden lukumäärä.

Hän ehdottaa myös seuraavaa muotoa.

Konjektuuri 3.2.10 (Abc, Bakerin versio II)**.** *Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa luvusta ε riippumattomat vakiot $C > 0$ ja $\kappa > 0$ siten, että kaikille abc-kolmikoille $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, pätee epäyhtälö*

$$\max(|a|,|b|,|c|) \leq C \varepsilon^{-\kappa\omega(ab)} \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon},$$

missä $\omega(ab)$ on tulon ab eri alkutukijöiden lukumäärä.

Mainitaan tässä yhteydessä vielä seuraava edellisten kanssa samankaltainen modifikaatio, joka on peräisin A. Granvillen kommenteista koskien A. Bakerin esityksiä [2].

Konjektuuri 3.2.11 (Abc, Granville)**.** *Olkoon $\lambda > 0$ absoluuttinen vakio. Tällöin olemassa vakio $C > 0$ siten, että kaikille abc-kolmikoille $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, pätee epäyhtälö*

$$\max(|a|,|b|,|c|) \leq C \lambda^{\Omega(abc)} \operatorname{rad}(abc),$$

missä $\Omega(abc)$ on tulon abc alkutekijöiden lukumäärä.

Määrittelemisongelmista huolimatta voidaan osoittaa, että luvun $C(\varepsilon)$ suuruus riippuu jossain määrin käänteisesti luvun ε valinnasta. Tämän osoittamiseksi määritellään luku $C(\varepsilon)$ tutkielman [53, s. 4] mukaisesti yhtälöllä

$$C(\varepsilon) = \sup \frac{c}{\operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}},$$

missä supremum otetaan yli kaikkien *abc*-kolmikoiden. Näin luku $C(\varepsilon)$ on yksikäsitteinen positiivinen reaaliluku tai ääretön kaikilla luvun $\varepsilon > 0$ arvoilla. Itse asiassa, jos *Abc*-konjektuuri on totta, niin luku $C(\varepsilon)$ on tällöin äärellinen (Huomautus 3.2.14). Seuraava tulos osoittaa luvun $C(\varepsilon)$ kasvavan rajatta, kun luku ε lähenee nollaa [44, s. 10].

Lause 3.2.12. *Jos Konjektuuri 3.2.1 on voimassa, niin*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C(\varepsilon) = +\infty.$$

Todistus. Valitaan jokaista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohti kokonaisluvut x_n ja y_n siten, että

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n.$$

Lemman 2.2.11 nojalla luvut x_n ja y_n toteuttavat tällöin myös yhtälön $x_n - y_n\sqrt{2} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n$, jolloin yhtälöt puolittain kertomalla saadaan

$$x_n^2 - 2y_n^2 = 1.$$

Valitaan nyt $n = 2^m$, jolloin Lemman 2.2.11 nojalla pätee $2^{m+1} \mid y_n$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

Oletetaan sitten, että Konjektuuri 3.2.1 on totta ja sovelletaan sitä *abc*-summaan

$$x_n^2 = 1 + 2y_n^2.$$

Ylöspäin arvioimalla saadaan

$$x_n^2 \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(2x_n y_n)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(\frac{x_n y_n}{2^m}\right)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(\frac{x_n^2}{2^m}\right)^{1+\varepsilon} = C(\varepsilon) \frac{x_n^{2(1+\varepsilon)}}{2^{m(1+\varepsilon)}},$$

josta edelleen

$$\frac{2^{m(1+\varepsilon)}}{x_n^{2\varepsilon}} \leq C(\varepsilon).$$

Antamalla nyt $\varepsilon \to 0$ saadaan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C(\varepsilon) \geq 2^m,$$

mikä pätee kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Väite seuraa. □

Tarkastellaan sitten konjektuurissa esiintyvää lukua $\varepsilon > 0$, joka on havaittavin ero *Abc*-konjektuurin kokonaisluku- ja polynomiversion (Stothers-Masonin lause) välillä. Osoitetaan W. Jastrzebowskin ja D. Spielmanin artikkelissa [34, s. 40–41] antamaa vastaesimerkkiä käyttämällä, että luvun ε olemassaolo on perusteltua.

Lause 3.2.13. *Konjektuuri 3.2.1 ei pidä paikkaansa, jos asetetaan* $\varepsilon = 0$.

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa vakio $K > 0$ siten, että kaikilla *abc*-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ pätee epäyhtälö

$$c \leq K \operatorname{rad}(abc). \tag{3.3}$$

Asetetaan jokaisella $n \in \mathbb{N}$ *abc*-kolmikko (a, b, c) siten, että

$$a_n = 1, \qquad b_n = 3^{2^n} - 1 \quad \text{ja} \quad c_n = 3^{2^n}.$$

Esimerkin 2.1.20 nojalla kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $2^n \mid (3^{2^n} - 1)$, joten Lemmaa 3.1.7 soveltamalla saadaan tulon $a_n b_n c_n$ radikaalille arvio

$$\begin{aligned} \operatorname{rad}(a_n b_n c_n) &= \operatorname{rad}(1 \cdot [3^{2^n} - 1] \cdot 3^{2^n}) = 3 \operatorname{rad}(3^{2^n} - 1) \\ &= 3 \operatorname{rad}\left(2^n \cdot \frac{3^{2^n} - 1}{2^n}\right) \leq 3 \cdot 2 \left(\frac{3^{2^n} - 1}{2^n}\right) = 6 \left(\frac{3^{2^n} - 1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Epäyhtälön (3.3) nojalla siten

$$3^{2^n} \leq 6K \left(\frac{3^{2^n} - 1}{2^n}\right),$$

josta saadaan edelleen

$$2^n \leq 6K \frac{3^{2^n} - 1}{3^{2^n}} = 6K \left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

Antamalla muuttujan n kasvaa rajatta saadaan haettu ristiriita. □

Huomautus 3.2.14. Lauseen 3.2.13 mukaan ei siis ole olemassa sellaista vakioa $K > 0$, että kaikilla *abc*-kolmikoilla epäyhtälö (3.3) olisi voimassa. Esittämällä epäyhtälö (3.3) muodossa

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\operatorname{rad}(abc)}{c}$$

saadaan tulkinta, jonka mukaan suhde $\frac{\operatorname{rad}(abc)}{c}$ voidaan saada mielivaltaisen pieneksi. Tämä ei kuitenkaan enää onnistu, mikäli luku $\operatorname{rad}(abc)$ korvataan luvulla $\operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$, missä $\varepsilon > 0$. Konjektuurin 3.2.1 mukaan nimittäin on olemassa jokin luvusta ε riippuva alaraja (luku $\frac{1}{C(\varepsilon)}$), jota pienemmäksi osamäärää

$$\frac{\operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}}{c}$$

ei saada, vaikka käydään läpi kaikki *abc*-kolmikot [22]. Erityisesti tämä tarkoittaa sitä, että luku $C(\varepsilon)$ on äärellinen.

Esitetään vielä lopuksi Oesterlén lähestymistapa *Abc*-konjektuuriin [2], [44, s. 9]. Hän tarkasteli *abc*-kolmikon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ laatua kuvaavaa L-arvoa, joka saadaan yhtälöstä

$$c = \operatorname{rad}(abc)^{L(a,b,c)}. \tag{3.4}$$

Yhtälöstä (3.4) saadaan L-arvolle seuraava määritelmä [8, s. 77].

Määritelmä 3.2.15. *Abc*-kolmikon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ *L-arvo* määritellään lukuna

$$L = L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \text{ rad}(abc)}.$$

Huomautus 3.2.16. Määritelmä 3.2.15 voidaan esittää yleisemmässä muodossa tarkastelemalla *abc*-kolmikoita $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$, $abc \neq 0$. Tällöin L-arvo määritellään lukuna

$$L = L(a, b, c) = \frac{\log \max(|a|, |b|, |c|)}{\log \text{ rad}(abc)},$$

missä luku $\log \max(|a|, |b|, |c|)$ on *abc*-kolmikon *korkeus* [19].

Tyypillisesti L-arvo on välillä $[\frac{1}{3}, 1]$. *Abc*-konjektuurin kannalta mielenkiintoisia ovat kuitenkin L-arvot, jotka ovat suurempia kuin yksi. *Abc*-kolmikko on laadultaan *hyvä*, mikäli sen L-arvo on suurempi kuin $1,4$ [45, s. 18]. Tällaisia kolmikoita tunnetaan tällä hetkellä 234 ja ne on esitetty laadun mukaan laskevassa järjestyksessä lähteessä [58]. Alla on taulukoitu kaikki tunnetut *abc*-kolmikot, joilla $L > 1,55$ (Taulukko 2). Laajempi esitys hyvistä *abc*-kolmikoista löytyy liitteestä A.

No.	L(a,b,c)	a	b	c	löytövuosi
1	1.6299	2	$3^{10}109$	23^5	1987
2	1.6260	11^2	$3^2 5^6 7^3$	$2^{21}23$	1985
3	1.6235	$19 \cdot 1307$	$7 \cdot 29^2 31^8$	$2^8 3^{22} 5^4$	1994
4	1.5808	283	$5^{11}13^2$	$2^8 3^8 17^3$	1993
5	1.5679	1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 7$	1988

Taulukko 2: Viisi suurimman L-arvon antavaa *abc*-kolmikkoa.

Oesterlén esitti kysymyksen, onko L-arvojen joukko rajoitettu [6]. Tätä kysymystä tarkastellaan lähemmin alaluvussa 3.4. Konjektuurit 3.2.1 ja 3.2.4 voidaan kirjoittaa L-arvoa käyttämällä seuraavissa ekvivalenteissa muodoissa.

Konjektuuri 3.2.17 (Abc, versio III)**.** *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että että kaikilla abc-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ on voimassa epäyhtälö*

$$L(a, b, c) \leq (1 + \varepsilon) + \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \text{ rad}(abc)}.$$

Konjektuuri 3.2.18 (Abc, versio IV)**.** *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa korkeintaan äärellisen monta abc-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joiden L-arvolle pätee*

$$L(a, b, c) > 1 + \varepsilon.$$

Huomautus 3.2.19. Konjektuurin 3.2.17 epäyhtälölle on voimassa radikaalista riippumaton yläraja

$$L(a, b, c) \leq 1 + \varepsilon + \frac{\log C(\varepsilon)}{\log 2},$$

sillä $\text{rad}(abc) \geq 2$ kaikilla *abc*-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ [42].

3.3 Abc-konjektuuriin liittyviä tuloksia

Abc-konjektuurin nojalla *abc*-kolmikon suurimmalla luvulla on kolmikon radikaalista riippuva polynomiaalinen yläraja. Tarkastellaan seuraavaksi *abc*-kolmikon suurimman luvun eksponentiaaliseen ylärajaan sekä lukujen $C(\varepsilon)$ ja ε väliseen suhteeseen liittyviä tuloksia, joita on pystytty osoittamaan ilman oletuksia *Abc*-konjektuurin todenperäisyydestä.

Ensimmäisen eksponentiaaliseen ylärajaan liittyvän tuloksen osoittivat Stewart ja Tijdeman vuonna 1986 [61].

Lause 3.3.1 (Stewart, Tijdeman)**.** *Kaikilla abc-kolmikoilla pätee epäyhtälö*

$$c < \exp\left(D \operatorname{rad}(abc)^{15}\right),$$

missä D on efektiivisesti laskettavissa oleva vakio.

Stewart ja Yu paransivat tulosta logaritmin lineaarimuotojen p-adisten arvioiden avulla vuonna 1991 [59].

Lause 3.3.2. *On olemassa efektiivisesti laskettavissa oleva vakio K siten, että kaikille abc-kolmikoille on voimassa epäyhtälö*

$$c < \exp\left(\operatorname{rad}(abc)^{\frac{2}{3}+\frac{K}{\log\log \operatorname{rad}(abc)}}\right).$$

Erityisesti jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa efektiivisesti laskettavissa oleva vakio $K(\varepsilon)$ siten, että kaikille abc-kolmikoille pätee

$$c < \exp\left(K(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right).$$

Vuonna 2001 Stewart ja Yu paransivat edelleen tulostaan [60].

Lause 3.3.3. *On olemassa efektiivisesti laskettavissa oleva vakio K siten, että kaikille abc-kolmikoille on voimassa epäyhtälö*

$$c < \exp\left(K \operatorname{rad}(abc)^{\frac{1}{3}} (\log \operatorname{rad}(abc))^3\right).$$

He osoittivat myös seuraavan Lauseen 3.3.3 heikomman version:

Lause 3.3.4. *Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa efektiivisesti laskettavissa oleva vakio $K(\varepsilon)$ siten, että kaikille abc-kolmikoille pätee*

$$c < \exp\left(K(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Huomautus 3.3.5. Vaikka edellä olevat tulokset ovatkin *Abc*-konjektuurin väittämää heikompia antaen luvulle c vain eksponentiaalisen ylärajan, niissä esiintyvät vakiot ovat kuitenkin efektiivisesti laskettavissa riippuen pelkästään luvusta ε.

Stewart ja Tijdeman osoittivat vuonna 1986 myös seuraavan tuloksen, jonka mukaan *Abc*-konjektuurin väittämä on "lähellä parasta mahdollista" [61].

Lause 3.3.6. *Jokaista $\delta > 0$ kohti on olemassa äärettömästi abc-kolmikoita, joille pätee*

$$c > \operatorname{rad}(abc) \exp\left((4-\delta)\frac{\sqrt{\log \operatorname{rad}(abc)}}{\log\log \operatorname{rad}(abc)}\right).$$

Lauseen 3.3.6 avulla Nitaj osoitti seuraavan tuloksen vuonna 1996 [45, s. 19–20].

Lause 3.3.7. *Kaikilla $k > 0$ ja $k_1 > 0$ on olemassa abc-kolmikko $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, jolle*

$$c > k \operatorname{rad}(abc)(\log \operatorname{rad}(abc))^{k_1}.$$

Todistus. Olkoot $k, k_1 > 0$ ja olkoon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ *abc*-summa siten, että $0 < a < b < c$ ja luvut toteuttavat yhtälön

$$c \leq k \operatorname{rad}(abc)(\log \operatorname{rad}(abc))^{k_1}.$$

Olettamalla kolmikon (a, b, c) toteuttavan myös Lauseen 3.3.6 epäyhtälön saadaan

$$\operatorname{rad}(abc) \exp\left((4-\delta)\frac{\sqrt{\log \operatorname{rad}(abc)}}{\log\log \operatorname{rad}(abc)}\right) < c \leq k \operatorname{rad}(abc)(\log \operatorname{rad}(abc))^{k_1}$$

jollekin $\delta > 0$. Tarkastellaan sitten reunimmaisia epäyhtälöitä. Jakamalla puolittain luvulla $\operatorname{rad}(abc)$ ja ottamalla puolittain logaritmi saadaan

$$(4-\delta)\frac{\sqrt{\log \operatorname{rad}(abc)}}{\log\log \operatorname{rad}(abc)} < \log\left(k(\log \operatorname{rad}(abc))^{k_1}\right),$$

josta edelleen

$$(4-\delta)\sqrt{\log \operatorname{rad}(abc)} < (\log k + k_1 \log\log \operatorname{rad}(abc)) \log\log \operatorname{rad}(abc).$$

Näin ollen luku $\operatorname{rad}(abc)$ on rajoitettu mikä johtaa ristiriitaan Lauseen 3.1.14 kanssa. □

Tuloksen avulla saadaan kielteinen vastaus kysymykseen, voidaanko *Abc*-konjektuurissa vakio $C(\varepsilon)$ valita jonkinlaisena luvun $\varepsilon > 0$ potenssin käänteislukuna [45, s. 20].

Lause 3.3.8. *Kaikilla $k > 0$ on olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja abc-kolmikko $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ siten, että*

$$c > \frac{1}{\varepsilon^k} \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Todistus. Olkoon $k > 0$. Oletetaan vastoin väitettä, että kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla *abc*-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ pätee epäyhtälö

$$c \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Valitsemalla näin ollen $\varepsilon = \frac{k}{\log \operatorname{rad}(abc)}$ ja soveltamalla tietoa $\operatorname{rad}(abc)^{\frac{1}{\log \operatorname{rad}(abc)}} = e$ epäyhtälö saa muodon

$$c \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k \operatorname{rad}(abc)(\log \operatorname{rad}(abc))^k$$

ollen voimassa kaikilla *abc*-kolmikoilla. Tämä on ristiriita Lauseen 3.3.7 kanssa. □

3.4 L-arvojen joukosta ja sen kasautumispisteistä

Abc-kolmikon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ L-arvo [8, s. 77] määriteltiin osamääränä

$$L = L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \operatorname{rad}(abc)}.$$

Käytetään kaikkien L-arvojen joukolle merkintää $\mathcal{L}$, toisin sanoen

$$\mathcal{L} = \big\{L(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathbb{N}^3,\ \operatorname{syt}(a, b) = 1,\ a + b = c\big\}.$$

Tässä alaluvussa tarkastellaan lähemmin joukkoon $\mathcal{L}$ liittyviä tuloksia. Luvun lopussa tarkastellaan joukon $\mathcal{L}$ kasaantumispisteitä sekä esitetään kasaantumispisteiden supremumin avulla *Abc*-kojektuurille ekvivalentti esitysmuoto.

Aloitetaan osoittamalla, että ainoastaan *abc*-kolmikolla $(1, 1, 2)$ L-arvo on rationaaliluku.

Lemma 3.4.1. *Olkoon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{1, 1, 2\}$ mielivaltainen abc-kolmikko. Tällöin*

$$L(a, b, c) \notin \mathbb{Q}.$$

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa ehdot totettava *abc*-kolmikko, jolle

$$L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \operatorname{rad}(abc)} = \frac{m}{n}, \tag{3.5}$$

missä $m, n \in \mathbb{N}$. Yhtälö (3.5) voidaan esittää ekvivalentissa muodossa

$$c^n = \operatorname{rad}(abc)^m, \tag{3.6}$$

josta nähdään, että luvulla c ja tulolla abc täytyy olla samat alkutekijät. Huomautauksen 3.1.2 nojalla kuitenkin $\operatorname{syt}(a, b) = \operatorname{syt}(b, c) = \operatorname{syt}(a, c) = 1$, joten yhtälö (3.6) voi toteutua vain jos $a = b = 1$. Siis $(a, b, c) = (1, 1, 2)$, mikä on ristiriita. □

Osoitetaan sitten, että on korkeintaan äärellinen määrä tietyn L-arvon antavia *abc*-kolmikoita [42, s. 3]. Sitä varten tarvitsemme kuitenkin seuraavaa aputulosta [66, s. 51].

Lemma 3.4.2. *Jos luvut $l_1, l_2, l_3, l_1', l_2', l_3'$ ovat nollasta eroavia algebrallisten lukujen logaritmeja ja*

$$\frac{l_1}{l_1'} = \frac{l_2}{l_2'} = \frac{l_3}{l_3'} \notin \mathbb{Q},$$

niin luvut l_1, l_2, l_3 ovat $\mathbb{Q}$-lineaarisesti riippuvia, ts. lineaarisesti riippuvia joukossa $\mathbb{Q}$.

Huomautus 3.4.3. Lemmassa 3.4.2 myös luvut l_1', l_2', l_3' ovat $\mathbb{Q}$-lineaarisesti riippuvia, mikä nähdään vaihtamalla lukujen l_i ja l_i', $i = 1, 2, 3$, roolit.

Lause 3.4.4. *Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Tällöin on olemassa korkeintaan äärellisen monta abc-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joiden L-arvolle pätee $L(a, b, c) = \lambda$.*

Todistus. Olkoot $(a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{1,1,2\}$, $i = 1,2,3$, eri abc-kolmikoita, joilla on sama L-arvo λ. Merkitään kunkin kolmikon radikaalia $r_i = \operatorname{rad}(a_i b_i c_i)$ kaikilla $i = 1,2,3$. Tällöin Lemman 3.4.1 nojalla

$$\frac{\log c_1}{\log r_1} = \frac{\log c_2}{\log r_2} = \frac{\log c_3}{\log r_3} = \lambda \notin \mathbb{Q},$$

joten Lemman 3.4.2 ja Huomautuksen 3.4.3 mukaan luvut $\log r_1$, $\log r_2$ ja $\log r_3$ ovat $\mathbb{Q}$-lineaarisesti riippuvia. Tällöin on olemassa luvut $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, joille $\operatorname{syt}(k_1, k_2, k_3) = 1$, siten, että

$$k_3 \log r_3 = k_1 \log r_1 + k_2 \log r_2,$$

joka edelleen voidaan esittää muodossa

$$r_3^{k_3} = r_1^{k_1} r_2^{k_2}.$$

Koska radikaali on aina neliövapaa, saadaan kaksi eri tapausta.

- Jos $\operatorname{syt}(r_1, r_2) = 1$, niin tällöin $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ja $r_3 = r_1 r_2$.
- Jos $\operatorname{syt}(r_1, r_2) \neq 1$, niin tällöin joko $k_3 = k_1 = 1$ ja $k_2 = 0$, jolloin $r_3 = r_1$, tai $k_3 = k_2 = 1$ ja $k_1 = 0$, jolloin $r_3 = r_2$

Tapauksista nähdään, että on korkeintaan kolme sellaista radikaalia $\operatorname{rad}(abc)$, joita vastaavien abc-kolmikoiden L-arvo on λ. Lauseen 3.1.13 nojalla on vain äärellisen monta sellaista abc-kolmikkoa, joilla on sama radikaali. Väite seuraa. □

Määritellään sitten L-arvojen jonolle reaalilukujen tapaan kasaantumispiste sallien myös tilanne, jossa kasaantumispiste on ääretön [63, s. 197].

Määritelmä 3.4.5. Piste $\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ on joukon $\mathcal{L}$ *kasaantumispiste*, jos on olemassa sellainen L-arvojen jono $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolla $L_n \neq \lambda$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lambda. \tag{3.7}$$

Huomautus 3.4.6. Jos jonolla $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on raja-arvo (3.7), niin myös sen kaikilla osajonoilla on sama raja-arvo [63, s. 196].

Edellistä tulosta soveltamalla voidaan edelleen osoittaa seuraavat tulokset [53, s. 11–12].

Lause 3.4.7. *Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Luku λ on joukon $\mathcal{L}$ kasaantumispiste, jos ja vain jos on olemassa eri abc-kolmikoista muodostuva jono $\big((a_n, b_n, c_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle*

$$\lim_{n\to\infty} L(a_n, b_n, c_n) = \lambda.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että luku λ on joukon $\mathcal{L}$ kasaantumispiste. Määritelmän 3.4.5 nojalla on siten olemassa L-arvojen jono $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle $L_n \neq \lambda$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lambda.$$

Koska jokainen luku L_n on jonkin abc-kolmikon L-arvo, lauseen väite seuraa.

Oletetaan kääntäen, että on olemassa sellainen eri *abc*-kolmikoista muodostuva jono $\big((a_n, b_n, c_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle pätee

$$\lim_{n\to\infty} L(a_n, b_n, c_n) = \lambda.$$

Lauseen 3.4.4 nojalla voidaan nyt muodostaa sellainen L-arvojen osajono $\big(L(a_k, b_k, c_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$, jolle $L(a_k, b_k, c_k) \neq \lambda$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Huomautuksen 3.4.6 nojalla näin muodostetulla osajonolla on sama raja-arvo alkuperäisen jonon kanssa, joten se täyttää Määritelmän 3.4.5 oletukset. Piste λ on siis joukon $\mathcal{L}$ kasaantumispiste. □

Lause 3.4.8. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Jos on olemassa äärettömän monta eri abc-kolmikkoa, joille*

$$L(a, b, c) \geq \alpha,$$

niin joukolla $\mathcal{L}$ on kasaantumispiste, joka on vähintään α.

Todistus. Oletuksen toteuttavien *abc*-kolmikoiden joukosta voidaan muodostaa L-arvojen jono, joka suppenee kohti jotain pistettä $\lambda \in [\alpha, \infty[$. Lauseen 3.4.4 nojalla voidaan nyt muodostaa sellainen L-arvojen osajono $\big(L(a_k, b_k, c_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$, jolle $L(a_k, b_k, c_k) \neq \lambda$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Huomautuksen 3.4.6 nojalla edelleen osajonon raja-arvo on sama kuin alkuperäisen jonon, jolloin väite seuraa Lauseesta 3.4.7. □

Huomautus 3.4.9. Koska kaikkien *abc*-kolmikoiden $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ L-arvo on suurempi kuin nolla, Lauseen 3.4.8 nojalla joukolla $\mathcal{L}$ on ainakin yksi kasaantumispiste. Joukon $\mathcal{L}$ kasaantumispisteiden joukko on siis epätyhjä.

Pienimmälle kasaantumispisteelle saadaan itse asiassa seuraava helppo arvio [8, s. 95].

Lause 3.4.10. *Joukon $\mathcal{L}$ jokainen kasautumispiste on vähintään $\frac{1}{3}$.*

Todistus. Koska jokaisen *abc*-kolmikon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ radikaalille pätee epäyhtälö

$$\operatorname{rad}(abc) \leq abc < c^3,$$

saadaan L-arvolle alaraja

$$L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \operatorname{rad}(abc)} > \frac{\log c}{\log c^3} = \frac{1}{3}.$$

Väite seuraa Lauseesta 3.4.8. □

Otetaan käyttöön seuraava merkintä [7, s. 66].

Merkintä 3.4.11. Käytetään joukon $\mathcal{L}$ kasautumispisteille merkintää $\mathcal{L}'$.

Huomautus 3.4.12. Lauseen 3.4.10 tulos voidaan tulkita siten, että $\mathcal{L}' \subset [\frac{1}{3}, \infty]$.

Tarkastellaan seuraavaksi joukkoon $\mathcal{L}'$ liittyviä tuloksia. Vuonna 2000 J. Browkin [8, s. 95] osoitti, että

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subset \mathcal{L}'.$$

Tulos oli yksinkertaistus J. Browkinin, M. Filasetan, G. Greavesin ja A. Schinzelin vuonna 1997 julkaisemasta teoreemasta [7], jossa oleellisesti samoilla menetelmillä osoitettiin

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{15}{16}\right] \subset \mathcal{L}'.$$

G. Greaves ja A. Nitaj pystyivät vielä parantamaan tulosta vuonna 1999 [25].

Lause 3.4.13 (Greaves, Nitaj)**.**

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{36}{37}\right] \subset \mathcal{L}'.$$

Vuonna 1998 M. Filaseta ja S. Konyagin osoittivat edellisten tulosten inspiroimana, että joukolla $\mathcal{L}$ on kasaantumispiste puoliavoimella välillä $[1, \frac{3}{2})$ [17].

Lause 3.4.14 (Filaseta, Konyagin)**.**

$$\mathcal{L}' \cap \left[1, \tfrac{3}{2}\right) \neq \emptyset.$$

Huomautus 3.4.15. Lauseen 3.4.14 tarkasteluväliä voidaan itse asiassa siirtää vasemmalle hieman todistusta muuttamalla [17, s. 267–268]. Toisin sanoen, voidaan osoittaa, että

$$\mathcal{L}' \cap \left[\frac{3}{3+\varepsilon}, \frac{3}{2+\varepsilon}\right] \neq \emptyset$$

kaikilla $\varepsilon \in (0, 1)$.

Aiemmat tulokset saatiin olettamatta mitään *Abc*-konjektuurin todenperäisyydestä. Osoitetaan sitten, että jos *Abc*-konjektuuri on voimassa, niin $\mathcal{L}' \subset [\frac{1}{3}, 1]$. Tarvitaan seuraavaa määritelmää [8, s. 95].

Määritelmä 3.4.16. Määritellään joukon $\mathcal{L}'$ suurin kasautumispiste lukuna

$$\limsup \mathcal{L} = \sup \mathcal{L}' = \sup\{x \in \mathbb{R} : x \text{ on joukon } \mathcal{L} \text{ kasautumispiste}\}.$$

Huomautus 3.4.17. Supremumin määritelmän perusteella

(i) $x \leq \sup \mathcal{L}'$ kaikilla $x \in \mathcal{L}'$ [63, s. 4],

(ii) L-arvojen jonolle $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on olemassa yksikäsitteinen luku $\limsup \mathcal{L} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$L_n < \limsup \mathcal{L} + \varepsilon$$

lähtien jostain indeksistä $n \geq k$, $k \in \mathbb{N}$, sekä

$$L_n > \limsup \mathcal{L} - \varepsilon$$

äärettömän monelle indeksille n [63, s. 187–188].

Seuraava esitys perustuu lähteisiin [53, s. 12] ja [68, s. 25–27].

Lause 3.4.18. *Konjektuuri 3.2.1 on totta, jos ja vain jos* $\limsup \mathcal{L} = 1$.

Todistus. Oletetaan ensin, että Konjektuuri 3.2.1 on totta. Tarkastellaan nyt *abc*-kolmikoiden jonoa $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $c_n \leq c_{n+1}$. L-arvolle saadaan nyt oletuksen nojalla lauseke

$$\begin{aligned} L(a_n, b_n, c_n) &= \frac{\log c_n}{\log \operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^{1+\varepsilon}} \\ &\leq \frac{\log\big(C(\varepsilon)\operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^{1+\varepsilon}\big)}{\log \operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^{1+\varepsilon}} \\ &= \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^{1+\varepsilon}} + 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Lauseen 3.1.14 nojalla $\operatorname{rad}(a_n b_n c_n)$ kasvaa rajatta, kun $n \to \infty$. Näin ollen Huomautuksen 3.4.17 kohtaa (ii) soveltamalla saadaan $\limsup \mathcal{L} \leq 1$.

Muodostetaan sitten ääretön jono *abc*-kolmikoita asettamalla kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 1, \quad b_n = 2^n - 1 \quad \text{ja} \quad c_n = 2^n.$$

Radikaalille saadaan siten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ arvio

$$\operatorname{rad}\big(2^n(2^n-1)\big) = 2\operatorname{rad}(2^n - 1) \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

jota edelleen L-arvoon soveltamalla saadaan

$$L(a_n, b_n, c_n) = \frac{\log 2^n}{\log \operatorname{rad}\big(2^n(2^n-1)\big)} \geq \frac{n \log 2}{(n+1)\log 2} = \frac{n}{n+1} \to 1,$$

kun $n \to \infty$. Lauseen 3.4.8 nojalla joukolla $\mathcal{L}$ on kasaantumispiste, joka on vähintään yksi. Huomautuksen 3.4.17 (i)-kohdan nojalla siten $\limsup \mathcal{L} \geq 1$. Yhdistämällä epäyhtälöt saadaan $\limsup \mathcal{L} = 1$.

Oletetaan kääntäen, että $\limsup \mathcal{L} = 1$. Tällöin Huomautuksen 3.4.17 (ii)-kohdan nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$L(a_n, b_n, c_n) = \frac{\log c_n}{\log \operatorname{rad}(a_n b_n c_n)} \leq 1 + \varepsilon$$

aina kun $n \geq k$ jollekin $k \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen, kaikilla $n \geq k$ pätee

$$c_n \leq \operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^{1+\varepsilon}.$$

Valitaan sitten vakiot $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon), \ldots, C_{k-1}(\varepsilon)$ siten, että epäyhtälö

$$c_i \leq C_i(\varepsilon)\operatorname{rad}(a_i b_i c_i)^{1+\varepsilon}$$

toteutuu kaikilla $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Määritellään

$$C(\varepsilon) = \max_{1\leq i\leq k-1} \big\{C_i(\varepsilon), 1\big\},$$

jolloin epäyhtälö

$$c_n \leq C(\varepsilon)\operatorname{rad}(a_n b_n c_n)^{1+\varepsilon}$$

on voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Väite seuraa. □

Paras joukkoon $\mathcal{L}'$ liittyvä tulos on siten seuraava [7]:

Lause 3.4.19. *Konjektuuri 3.2.1 on totta, jos ja vain jos*

$$\mathcal{L}' = \left[\frac{1}{3}, 1\right].$$

3.5 Abc-konjektuurin efektiivisestä muodosta

Lauseessa 3.4.18 todettiin *Abc*-konjektuurin olevan yhtäpitävää sen kanssa, että L-arvojen joukon kasaantumispisteiden supremum on yksi. Herääkin kysymys, onko myös L-arvojen joukolla ylärajaa. Toisin sanoen, onko olemassa *abc*-kolmikko, joka antaa maksimaalisen L-arvon ja onko se jo löydetty? Tällä hetkellä korkein tunnettu L-arvo ([58], Liite A) on edelleenkin Eric Reyssatin vuonna 1987 löytämällä kolmikolla

$$(a, b, c) = (2,\ 3^{10}109,\ 23^5),$$

jonka $L(a, b, c) = 1.6299117$. Maksimaaliselle L-arvolle saadaan *Abc*-konjektuurin avulla seuraava A. Nitaj'n vuonna 1996 osoittama ehdollinen tulos [45, s. 17].

Lause 3.5.1. *Jos Konjektuurin 3.2.1 on totta, niin on olemassa maksimaalisen L-arvon antava abc-kolmikko $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.*

Todistus. Oletetaan, että Konjektuuri on totta. Oletetaan vastoin väitettä, että ei ole olemassa sellaista *abc*-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joka antaa maksimaalisen L-arvon. Olkoon $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{N}^3$ *abc*-kolmikko, jolle $L(a_0, b_0, c_0) > 1$. Konstruoidaan ääretön eri *abc*-kolmikoista muodostuva jono $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

$$L(a_n, b_n, c_n) > L(a_{n-1}, b_{n-1,}c_{n-1})$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Konjektuurin nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa vakio $C(\varepsilon) > 0$ siten, että epäyhtälö

$$L(a_n, b_n, c_n) \leq 1 + \varepsilon + \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \operatorname{rad}(a_n b_n c_n)}.$$

toteutuu kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Valitaan luku ε siten, että $1 + \varepsilon < L(a_0, b_0, c_0)$. Lauseen 3.1.14 nojalla radikaali $\operatorname{rad}(a_n b_n c_n)$ kasvaa rajatta, kun $n \to \infty$. Näin ollen saadaan

$$\lim_{n\to\infty} L(a_n, b_n, c_n) \leq 1 + \varepsilon < L(a_0, b_0, c_0),$$

mikä on ristiriita. □

Lauseen 3.5.1 tulosta *Abc*-konjektuuriin soveltamalla pystytään ohittamaan vaikeasti määritettävä vakio $C(\varepsilon)$ ja saadaan efektiiviset tulokset mahdollistava muoto otaksumasta. Monien mielestä seuraava heikko konjektuuri pitää paikkansa [4, s. 403].

Konjektuuri 3.5.2. *Kaikilla abc-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ pätee epäyhtälö*

$$c < \operatorname{rad}(abc)^2.$$

E. Reyssatin löytämän *abc*-kolmikon sekä muiden laskettujen L-arvojen perusteella A. Nitaj esitti vuonna 1996 seuraavan vieläkin tarkemman heikon konjektuurin [45, s. 19].

Konjektuuri 3.5.3. *Kaikilla abc-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ pätee epäyhtälö*

$$c < \operatorname{rad}(abc)^{1.63}.$$

3.6 Abc-osumien lukumäärästä

Abc-konjektuuri voidaan esittää muodossa, jonka mukaan jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa korkeintaan äärellisen monta epäyhtälön

$$c > \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}. \tag{3.8}$$

toteuttavaa *abc*-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ (Konjektuuri 3.2.4). Tässä alaluvussa tarkastellaan yhtälön (3.8) arvolla $\varepsilon = 0$ toteuttavia *abc*-kolmikoita sekä niiden lukumäärää. Tällaisia *abc*-kolmikoita kutsutaan *abc*-osumiksi [13, s. 1864].

Määritelmä 3.6.1. *Abc*-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ kutsutaan *abc-osumaksi*, jos $\operatorname{rad}(abc) < c$.

Huomautus 3.6.2. Määritelmän 3.6.1 mukaan kaikkien *abc*-osumien L-arvolle pätee

$$L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \operatorname{rad}(abc)} > 1.$$

Suurin osa *abc*-kolmikoista ei ole *abc*-osumia. Esimerkiksi 14 pienimmän *abc*-kolmikon joukosta ainoastaan yksi, $(1, 8, 9)$, on *abc*-osuma (Taulukko 3). Kyseisen kolmikon ajatusta yleistämällä voidaan kuitenkin helposti osoittaa, että *abc*-osumia on äärettömästi.

No.	a	b	c	$\operatorname{rad}(abc)$
1	1	1	2	2
2	1	2	3	6
3	1	3	4	6
4	1	4	5	10
5	2	3	5	30
6	1	5	6	30
7	1	6	7	42
8	2	5	7	70
9	3	4	7	42
10	1	7	8	14
11	3	5	8	30
12	1	8	9	6
13	2	7	9	42
14	4	5	9	30

Taulukko 3: Kolmikot $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joille $a + b = c$, $\operatorname{syt}(a, b, c) = 1$ ja $a \leq b < c < 10$.

Lause 3.6.3. *Abc-osumia on äärettömästi.*

Todistus. Konsturoidaan ääretön jono *abc*-kolmikoita (a_n, b_n, c_n) asettamalla

$$a_n = 1, \quad b_n = 9^n - 1 \quad \text{ja} \quad c_n = 9^n$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että kyseiset kolmikot ovat *abc*-osumia.

Esimerkin 2.1.3 nojalla luku b_n voidaan kirjoittaa muodossa $b_n = 2^3 j$, jolloin edelleen $\mathrm{rad}(b_n) \leq 2j$ jollekin $j \in \mathbb{N}$. Koska tulolla $a_n c_n$ on vain alkutekijä 3, saadaan

$$\mathrm{rad}(a_n b_n c_n) \leq 2j \cdot 3 = 6j < 8j + 1 = c_n.$$

Näin ollen kolmikko (a_n, b_n, c_n) on *abc*-osuma kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Huomautus 3.6.4. Lause 3.6.3 vahvistaa vielä sen, mitä jo Lauseen 3.2.13 nojalla tiedetään: *Abc*-konjektuuri ei ole voimassa ilman lukua $\varepsilon > 0$. Tämä voidaan tulkita myös siten, että on olemassa äärettömästi *abc*-kolmikoita, joiden L-arvo on suurempi kuin yksi.

Lauseen 3.6.3 todistuksessa nähdään eräs keino konstruoida äärettömästi *abc*-osumia. S. Dahmen esittää artikkelissaan [13, s. 1865] seuraavan yleisemmän menetelmän.

Lemma 3.6.5. *Olkoot $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ja p alkuluku siten, että $p \nmid s$. Tällöin kolmikot*

$$(a_n, b_n, c_n) = \left(1, s^{(p-1)p^n} - 1, s^{(p-1)p^n}\right)$$

ovat abc-osumia tarpeeksi suurilla luvun $n \in \mathbb{N}$ arvoilla.

Todistus. Lemman 2.1.29 ja Eulerin lauseen (Lause 2.1.31) nojalla pätee kongruenssi

$$s^{(p-1)p^n} = s^{p^{n+1} - p^n} = s^{\phi(p^{n+1})} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}},$$

jolloin siis $p^{n+1} \mid b_n$. Näin ollen tulon $a_n b_n c_n$ radikaalille saadaan arvio

$$\mathrm{rad}(a_n b_n c_n) \leq \frac{b_n}{p^n} \cdot 1 \cdot s \leq \frac{s}{p^n} c_n < c_n,$$

missä viimeinen epäyhtälö on voimassa aina, kun $\frac{s}{p^n} < 1$, ts. kaikilla $n > \frac{\log s}{\log p}$. Tarpeeksi suurilla luvun n arvoilla kaikki edellä olevan muotoiset *abc*-summat ovat siis *abc*-osumia. □

Huomautus 3.6.6. Vastaavanlaista konstruktiota ei ole pystytty esittämään sellaisille *abc*-osumille, joiden termistä mikään ei ole arvoltaan yksi.

Abc-osumia tiedetään siis olevan ääretön määrä. Empiirisesti *abc*-osumia on etsitty varsinkin Leidenin yliopiston BOINC-pohjaisen hajautetun laskennan projektin ABC@Homen [38] avulla. Havainnollisuuden vuoksi ensimmäiset 31 *abc*-osumaa on esitetty taulukkona Liitteessä D. Varsinaisia algoritmeja *abc*-osumien tai *hyvien abc*-osumien (L-arvo vähintään 1,4) löytämiseksi ei tässä tutkielmassa kuitenkaan käsitellä, ks. [38], [44] tai [46].

Abc-osumien lukumäärän kuvaamiseksi otetaan käyttöön seuraava merkintä [13, s. 1865].

Merkintä 3.6.7. Merkitään *abc*-osumien lukumäärää funktiolla $N : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$N(X) = \left|\{abc\text{-osuma (a,b,c)} \in \mathbb{N}^3 \;\middle|\; c \leq X\}\right|.$$

Huomautus 3.6.8. *Abc*-osumien lukumäärälle ei ole esitetty asymptoottista kasvua kuvaavaa alkulukulauseen (Lause 2.8.4) kaltaista tulosta eikä yhteyttä alkulukujen lukumäärään. Empiiristen tulosten [38] perusteella *abc*-osumat näyttäisivät olevan alkulukuja huomattavasti harvemmassa, ks. Liite C.

S. Dahmen esitti vuonna 2008 *abc*-osumien lukumäärällä olevan seuraavan alarajan [13]:

Lause 3.6.9. *Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $X_0 > 0$ siten, että kaikilla $X \geq X_0$ pätee*

$$N(X) \geq \exp\left((\log X)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right).$$

Todistus. Olkoon $q = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ siten, että $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ja $\text{syt}(b, c) = 1$. Määritellään luvun q korkeus funktiolla $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$,

$$h(q) = \log\big(\max(|b|, |c|)\big),$$

missä merkinnällä $|\cdot|$ tarkoitetaan standardin itseisarvon muodostamaa metriikkaa. Olkoon $x \geq 5$ ja merkitään luvulla

$$n = \pi(x) - 1$$

lukumäärää parittomille alkuluvuille, jotka ovat korkeintaan yhtä suuria kuin x. Merkitään $p_1, \ldots, p_n$ n ensimmäistä paritonta alkulukua. Tarkastellaan niiden virittämää joukon $\mathbb{Q}_{>0}$ osajoukkoa

$$\mathcal{Q}_n := \left\{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

sekä rajoitettujen alkioiden muodostamaa osajoukkoa

$$\mathcal{B}_x := \left\{q \in \mathcal{Q}_n \;\middle|\; h(q) \leq B(x)\right\},$$

missä $B : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ on myöhemmin määritettävä muuttujan x funktio. Määritellään injektiivinen joukkohomomorfismi $\varphi_n : \mathcal{Q}_n \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_n(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}) = (a_1 \log p_1, a_2 \log p_2, \ldots, a_n \log p_n).$$

Tällöin joukko

$$\Lambda_n = \varphi_n(\mathcal{Q}_n) = \left\{(a_1 \log p_1, \ldots, a_n \log p_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ täysiasteinen hila. Käytetään rajoitettujen alkioiden joukosta $\mathcal{B}_x$ muodostetulle hilalle merkintää $L_x = \varphi_n(\mathcal{B}_x)$, toisin sanoen

$$L_x = \left\{ y \in \Lambda_n \;\middle|\; \sum_{\substack{i=1 \\ y_i>0}}^{n} y_i \leq B(x) \;\text{ ja }\; \sum_{\substack{i=1 \\ y_i<0}}^{n} |y_i| \leq B(x) \right\},$$

sekä avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitettujen alkioiden joukolle merkintää

$$V_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{\substack{i=1 \\ y_i>0}}^{n} y_i \leq B(x) \;\text{ ja }\; \sum_{\substack{i=1 \\ y_i<0}}^{n} |y_i| \leq B(x) \right\}.$$

Näin ollen $L_x \subset V_x$ ja joukon V_x tilavuus tunnetaan Huomautuksen 2.3.10 nojalla.

Todistuksessa tarkastellaan osamääränä $\frac{b}{c}$ esitettyjä abc-kolmikoita $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$. Abc-kolmikoiden $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, joille $\operatorname{rad}(bc) \mid \prod_{i=1}^{n} p_i$, ja järjestämättömien parien $\pm y \in \Lambda_n \setminus \{0\}$ välillä on nimittäin bijektiivinen kuvaus

$$(a,b,c) \mapsto \left\{ \varphi_n\left(\tfrac{b}{c}\right), -\varphi_n\left(\tfrac{b}{c}\right) \right\}.$$

Saman bijektiivisen kuvauksen nojalla parit $\pm y \in L_x \setminus \{0\}$ vastaavat abc-kolmikoita (a,b,c), joille $\operatorname{rad}(bc) \mid \prod_{i=1}^{n} p_i$ ja $\log c \leq B(x)$. Todistus perustuu oleellisesti parien $\pm y \in L_x \setminus \{0\}$ ja abc-kolmikoiden väliseen yhteyteen.

Määritellään joukon $\mathcal{Q}_n$ osajoukko

$$\mathcal{Q}_{n,m} = \left\{ \tfrac{b}{c} \in \mathcal{Q}_n \;\middle|\; b \equiv c \pmod{2^m},\ \operatorname{syt}(b,c) = 1 \right\}.$$

ja sitä vastaava hila $\Lambda_{n,m} = \varphi_n(\mathcal{Q}_{n,m})$. Lauseen 2.4.16 nojalla alkiot 3 ja 5 virittävät ryhmän $(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^*$. Esimerkkien 2.4.20 ja 2.4.31 mukaan on siten olemassa surjektiivinen homomorfismi $\mathcal{Q}_n \to (\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^*$, jonka ydin on ryhmä $\mathcal{Q}_{n,m}$. Näin ollen on ryhmät $\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n,m}$ ja $(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^*$ ovat isomorfiset. Esimerkin 2.4.33 nojalla siten $|\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n,m}| = 2^{m-1}$, ja näin ollen vastaavalle hilalla pätee

$$|\Lambda_n/\Lambda_{n,m}| = 2^{m-1}. \tag{3.9}$$

Olkoon sitten $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ ja olkoon $\beta := 1 - \alpha$ sekä merkitään luvun α nimittäjää luvulla $d \in \mathbb{N}$. Valitaan luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $d \mid m$ ja

$$2^{m-d} < \frac{\operatorname{vol}_n V_x}{2^n \det \Lambda_n} \leq 2^m. \tag{3.10}$$

Jatkossa tarkastellaan joukon V_x sisään jäävien hilapisteiden $\pm y \in L_x \setminus \{0\}$ lukumäärää soveltamalla Minkowskin konveksin kappaleen lausetta (Lause 2.3.7).

Tarkastellaan ensin epäyhtälön (3.10) ylärajaa. Lemman 2.3.9, Huomautuksen 2.3.10 sekä tiedon $\det \Lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \log p_i$ (Esimerkki 2.3.12) nojalla saadaan

$$\begin{aligned} 2^m \geq \frac{\operatorname{vol}_n V_x}{2^n \det \Lambda_n} &= \frac{(2n)!B(x)^n}{(n!)^3 2^n \prod_{i=1}^{n} \log p_i} \\ &= \exp\left(\log\left(\left(\frac{(2n)!B(x)^n}{(n!)^3 2^n} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} \log p_i \right)^{-1} \right) \right) \\ &= \exp\left(\log\left(\frac{(2n)!B(x)^n}{(n!)^3 2^n} \right) - \sum_{i=1}^{n} \log\log p_i \right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Lemman 2.7.16 nojalla

$$\log\left(\frac{(2n)!}{(n!)^3 2^n} \right) = n \log\left(\frac{2e}{n} \right) + \mathcal{O}(\log n).$$

Edellä olevan sekä Lemman 2.8.10 nojalla saadaan epäyhtälöstä (3.11) siten

$$\begin{aligned} 2^m &\geq \exp\left(\log\left(\frac{(2n)!}{(n!)^3 2^n} B(x)^n \right) - \sum_{i=1}^{n} \log\log p_i \right) \\ &= \exp\left(n \log\left(\frac{2eB(x)}{x} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x} \right) \right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Tarkastellaan sitten epäyhtälön (3.10) alarajaa. Aiemmin asetettiin $m = kd$ jollekin $k \in \mathbb{N}$ ja $\alpha = \frac{k'}{d}$ jollekin $k' \in \mathbb{N}$, $k' < d$, jolloin

$$\alpha m = \tfrac{k'}{d} \cdot kd = kk' \quad \text{ja} \quad \beta m = (1-\alpha)m = k(d-k'),$$

toisin sanoen $\alpha m, \beta m \in \mathbb{N}$. Koska $m = m(1-\alpha) + \alpha m = \beta m + 1 + \alpha m - 1$, epäyhtälöstä (3.10) saadaan

$$\operatorname{vol}_n(V_x) > 2^{m-d} 2^n \det \Lambda_n = 2^{\beta m+1-d} 2^n 2^{\alpha m-1} \det \Lambda_n = 2^{\beta m+1-d} 2^n \det \Lambda_{n,\alpha m}, \tag{3.13}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Huomautuksesta 2.4.27, Esimerkistä 2.4.38 sekä yhtälöstä (3.9). Myöhemmin todistuksessa nähdään, että $2^m \to \infty$, kun $x \to \infty$, joten riittävän suurella muuttujan x arvolla $2^{\beta m+1-d} \in \mathbb{N}$. Soveltamalla epäyhtälöön (3.13) Minkowskin konveksin kappaleen lausetta (Lause 2.3.7) nähdään, että tarpeeksi suurella muuttujan x arvolla on ainakin $2^{\beta m+1-d}$ erilaista nollasta eroavaa paria $\pm y \in \Lambda_{n,m}$, jotka sisältyvät joukkoon V_x ja siten myös joukkoon L_x. Aiemmin mainitun bijektion nojalla nämä pisteparit vastaavat $2^{\beta m+1-d}$ eri abc-kolmikkoa $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, joille $\log c \leq B(x)$ sekä

$$\operatorname{rad}(bc) \mid \prod_{i=1}^{n} p_i \quad \text{ja} \quad 2^{\alpha m} \mid c - b = a. \tag{3.14}$$

Jälkimmäinen tieto seuraa joukon $\mathcal{Q}_{n,m}$ määritelmästä.

Osoitetaan seuraavaksi, että tarpeeksi suurilla muuttujan x arvoilla edellä mainitut abc-kolmikot ovat itse asiassa abc-osumia. Soveltamalla radikaaliin tietoja (3.14), arvioita $a = c - b \leq c$ ja (3.12) sekä Lemmaa 2.8.11 saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{rad}(abc) &\leq \frac{a}{2^{\alpha m}} \prod_{i=1}^{n} p_i \leq c \left(\frac{1}{2^m}\right)^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} p_i \\
&\leq c \exp\left(n \log\left(\frac{x}{e} \left(\frac{x}{2eB(x)} \right)^{\alpha} \right) - \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x} \right) \right).
\end{aligned}$$

Redusoidaan radikaalin lauseketta määritellään nyt rajoitefunktio B siten, että

$$\frac{x}{e} \left(\frac{x}{2eB(x)} \right)^{\alpha} = 1, \tag{3.15}$$

toisin sanoen

$$B(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{e} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Näin ollen riittävän suurilla muuttujan x arvoilla pätee epäyhtälö

$$\operatorname{rad}(abc) \leq c \exp\left(-\frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x} \right) \right) < c,$$

jolloin kyseessä olevat abc-kolmikot ovat todella abc-osumia. Koska joukkoon L_x kuuluville abc-kolmikoille pätee $\log c \leq B(x)$, toisin sanoen $c \leq \exp\big(B(x)\big)$, abc-osumien lukumääräfunktion N määritelmän mukaan siten tarpeeksi suurilla muuttujan x arvoilla pätee

$$N\big(\exp\big(B(x)\big)\big) \geq 2^{\beta m+1-d}. \tag{3.16}$$

Arviossa (3.16) on siis huomioitu myös sellaiset *abc*-osuamia vastaavat nollasta eroavat parit $\pm y \in \Lambda_{n,m}$, joille $2^{\alpha m} \nmid c - b = a$.

Arvioidaan sitten epäyhtälöä (3.16) siten, että saadaan viimein lauseen väite. Kirjoittamalla yhtälö (3.15) muodossa

$$\frac{2eB(x)}{x} = \Big(\frac{x}{e}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

saadaan luvulle 2^m epäyhtälöä (3.12) soveltamalla Lemman 2.8.12 mukaisesti arvio

$$2^m \geq \exp\left(\frac{x}{\alpha}\left[1 + \frac{1}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right]\right).$$

Näin ollen nähdään, että $2^m \to \infty$, kun $x \to \infty$. Soveltamalla saatua arviota epäyhtälöön (3.16) saadaan tarpeeksi suurille muuttujan x arvoille edelleen arvio

$$\begin{aligned} N\big(\exp\big(B(x)\big)\big) &\geq \exp\big(\log 2^{m\beta+1-d}\big) = \exp\left(\beta \log 2^m + (1-d)\log 2\right) \\ &\geq \exp\left(\beta \log\left[\exp\left(\frac{x}{\alpha}\left[1 + \frac{1}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\right]\right)\right] + (1-d)\log 2\right) \\ &= \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}x\left[1 + \frac{1}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^3 x}\right) + \frac{\alpha}{\beta x}(1-d)\log 2\right]\right) \\ &\geq \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right). \end{aligned}$$

Sijoittamalla sitten tieto $\beta = 1 - \alpha$ sekä yhtälöstä (3.15) saatu $x = e\big(2B(x)\big)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ saadaan

$$N\big(\exp\big(B(x)\big)\big) \geq \exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} e\big(2B(x)\big)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right) = \exp\big(C'_\alpha B(x)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\big),$$

missä $C'_\alpha := e(\frac{1}{\alpha} - 1)2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} > 0$. Koska kuvaus $x \mapsto \exp\big(B(x)\big) : (0,\infty) \to (1,\infty)$ on surjektio ja monotonisesti kasvava, voidaan tehdä muuttujanvaihto asettamalla $\exp\big(B(x)\big) = X$, toisin sanoen $B(x) = \log X$. Näin ollen edellisen nojalla tarpeeksi suurilla muuttujan X arvoilla pätee

$$N(X) \geq \exp\big(C'_\alpha (\log X)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\big).$$

Koska $0 < \frac{\alpha}{\alpha+1} < \frac{1}{2}$ tarkasteltavalla välillä $0 < \alpha < 1$, voidaan osamäärä $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ esittää luvun $\varepsilon > 0$ avulla asettamalla $\frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{2} - \varepsilon$, jolloin myös vakio C'_α korvataan vastaavalla luvulla C_ε. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $C_\varepsilon > 0$ siten, että tarpeeksi suurilla muuttujan X arvoilla

$$N(X) \geq \exp\big(C_\varepsilon (\log X)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\big).$$

Lopuksi nähdään, että jokaisella $\varepsilon > 0$ ja riittävän suurella muuttujan X arvolla pätee

$$\log N(X) \geq C_{\frac{\varepsilon}{2}} (\log X)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} = C_{\frac{\varepsilon}{2}} (\log X)^{\frac{1}{2}} (\log X)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \geq (\log X)^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

mistä väite seuraa. □

Huomautus 3.6.10. Lauseen 3.6.9 antama alaraja ei ole paras mahdollinen. Todistus perustuu oleellisesti siihen, että tarkasteltavien *abc*-kolmikoiden luku a on jaollinen jollain luvun 2 suurella potenssilla. Tällöin tarkastelun ulkopuolella jää monta *abc*-kolmikkoa. Lauseen 3.6.9 tulos ei kuitenkaan välttämättä parane, vaikka käytettäisiin menetelmää, jossa huomioidaan luvun a olevan jaollinen joidenkin muiden lukujen suurilla potensseilla. Dahmen kuitenkin uskoo, että alarajaa voidaan oleellisesti samalla päättelyllä parantaa korvaamalla $(\log X)^{\varepsilon}$ jollakin funktion $\log\log X$ potenssilla. [13]

Lauseen 3.6.9 perusteella on luonnollista kysyä, kuinka hyvin alarajafunktio approksimoi *abc*-osumien lukumääräfunktiota $N(X)$. Alustavan arvion saamiseksi voidaan käyttää Leidenin yliopiston BOINC-pohjaisen hajautetun laskennan projektin ABC@Homen [38] tuloksena marraskuussa 2011 saatua listaa kaikista *abc*-osumista, joille $a < b < c < 10^{18}$. Kuvassa 3 nähdään tilanne arvoilla $X \leq 10^6$.

Jo arvoilla $X \leq 10^6$ nähdään alarajafunktion olevan todella löysä. Toki kyseessä on hyvin lyhyt väli eikä asymptoottisesta käyttäytymisestä voida vielä sen perusteella sanoa paljoa, mutta selvästikään ei voida vielä puhua approksimaatiosta. Suurin syy tähän lienee jo aiemmin mainittu huomio, että Lauseen 3.6.9 alarajafunktio ei huomioi kaikkia mahdollisia *abc*-osumia. Kuvassa 4 on graafisesti haettu lukumääräfunktiolle $N(X)$ parempaa approksimaatiota arvoilla $X \leq 10^{10}$ käyttämällä funktioita

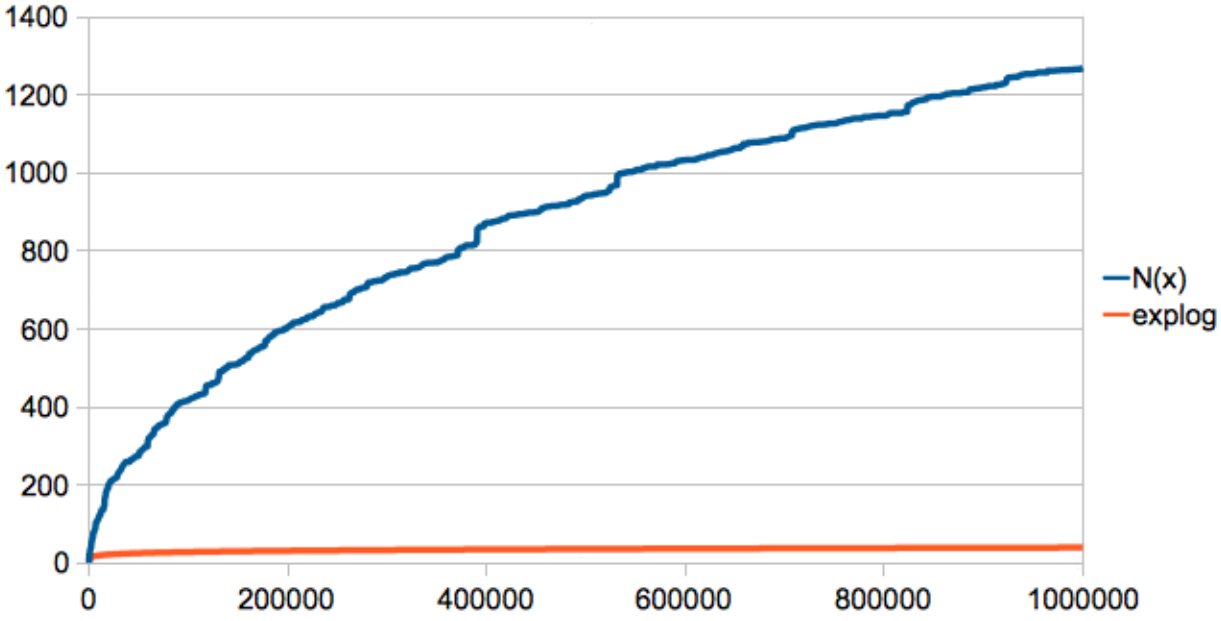
$$\begin{array}{ll} \sqrt{x} & (\text{sqrt\_x}), \\ \exp((\log X)^{\frac{1}{2}}) & (\text{explog}), \\ \exp((\log X)^{\frac{1}{2}}(\log\log X)^{\frac{1}{2}}) & (\text{exploglog}), \\ \exp((\log X)^{\frac{1}{2}}(\log\log X)^{\frac{7}{10}}) & (\text{exploglog}7/10). \end{array}$$

Kuvasta 4 nähdään, että varsinkin viimeisimmäksi mainittu funktio antaa jo kohtalaisen approksimaation funktiolle $N(X)$ kyseisillä muuttujan X arvoilla.

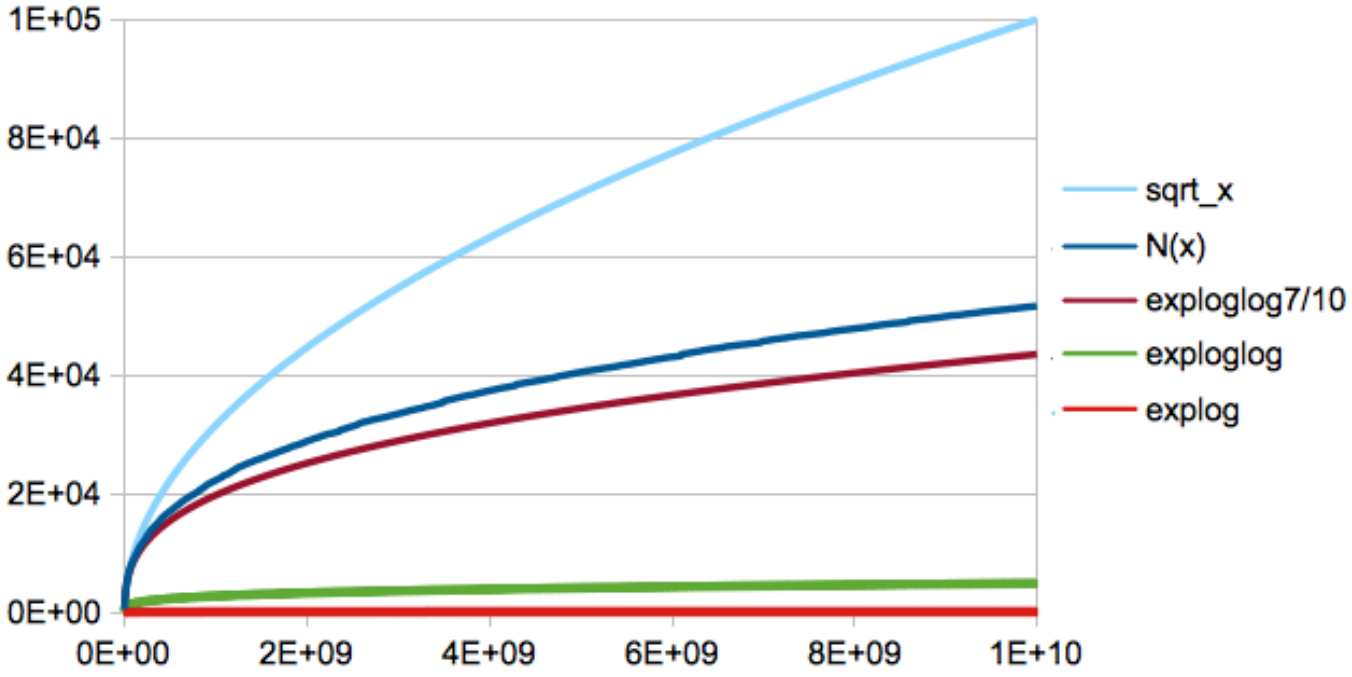
Abc-osumien ylärajalle ei ole osoitettu mitään rajoittavaa funktiota. ABC@Homen laskentatulosten perusteella artikkelissa [21] ehdotetaan funktion $X^{\frac{2}{3}}$ olevan eräs tällainen ylärajafunktio. Kuvan 4 perusteella voidaan kuitenkin ehdottaa Lausetta 3.6.9 ja artikkelia [13] mukaillen vielä tiukempaa ylärajaa:

Propositio 3.6.11. *Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $X_0 > 0$ siten, että kaikilla $X \geq X_0$ pätee*

$$N(X) \leq X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$



Kuva 3: *Abc*-osumien lukumääräfunktio $N(X)$ ja alarajafunktio $\exp((\log X)^{\frac{1}{2}})$.



Kuva 4: *Abc*-osumien lukumääräfunktio $N(X)$ ja sitä rajoittavia funktioita.

3.7 Logaritmisten abc-osumien lukumäärästä

Edellisessä alaluvussa todettiin olevan äärettömästi *abc*-osumia, toisin sanoen epäyhtälön

$$c > \operatorname{rad}(abc)$$

toteuttavia *abc*-kolmikoita $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Seuraavassa tarkastellaan *abc*-kolmikoille asetettua vieläkin tiukempaa ehtoa, jonka tarkoituksena on muodostaa rakenteellista yhteneväisyyttä kokonaislukujen ja funktioteorian välille, ks. alaluku 5.4. Tämä alaluku sisältää kirjallisuudessa aiemmin julkaisematonta tietoa ja perustuu allekirjoittaneen sekä professori Risto Korhosen välisiin keskusteluihin.

Määritelmä 3.7.1. *Abc*-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ kutsutaan *logaritmiseksi abc-osumaksi*, jos

$$\operatorname{rad}(abc) < \frac{c}{\log c}.$$

Huomautus 3.7.2. Kaikki logaritmiset *abc*-osumat ovat myös "tavallisia" *abc*-osumia, sillä kaikilla $c > e$ logaritmisille *abc*-osumille pätee epäyhtälöketju

$$\operatorname{rad}(abc) < \frac{c}{\log c} < c.$$

Logaritmiehdon asettaminen *abc*-kolmikoille pienentää todella tehokkaasti tarkasteltavien osumien määrää, sillä nyt radikaalin täytyy olla jo huomattavasti kolmikon suurinta lukua pienempi. Ensimmäinen logaritminen *abc*-osuma onkin vasta

$$(1, 2400, 2401) = (1, 2^5 3 \cdot 5^2, 7^4),$$

ja seuraavien logaritmisten *abc*-osumien suurimman luvun arvo kasvaa nopeasti, ks. liite E. Kuten *abc*-osumien tapauksessa, myös logaritmisten *abc*-osumien kohdalla voidaan pienimmästä kolmikon ajatusta yleistämällä osoittaa tarkasteltavia osumia olevan ääretön määrä.

Lause 3.7.3. *Logaritmisia abc-osumia on äärettömästi.*

Todistus. Osoitetaan väite konstruoimalla ääretön jono *abc*-kolmikoita (a_n, b_n, c_n) asettamalla

$$a_n = 1, \quad b_n = 7^{2^n} - 1, \quad \text{ja} \quad c_n = 7^{2^n},$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että arvosta $n = 2$ lähtien kyseiset kolmikot ovat logaritmisia *abc*-osumia.

Esimerkin 2.1.22 nojalla arvoilla $n \geq 2$ pätee $2^{n+3}5^2 \mid b_n$. Näin ollen saadaan arvio

$$rad(a_n b_n c_n) \leq 1 \cdot \frac{b_n}{2^{n+2}5} \cdot 7 \leq \frac{7}{2^{n+2}5} c_n \leq \frac{7}{2^{n+2}4} c_n = \frac{7}{2^{n+4}} c_n.$$

Lauseen väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että

$$\frac{7}{2^{n+4}} < \frac{1}{\log c_n} = \frac{1}{2^n \log 7}.$$

kaikilla $n \geq 2$. Ristiinkertomalla ja termejä järjestelemällä saadaan ekvivalentti epäyhtälö

$$2^{n+4} - 7 \cdot 2^n \log 7 = 2^n(2^4 - 7 \log 7) > 0.$$

Koska $2^n > 0$ kaikilla $n \geq 2$ ja $2^4 - 7 \log 7 \approx 2,38 > 0$, epäyhtälön vasen puoli on positiivinen kaikilla $n \geq 2$. □

Huomautus 3.7.4. Lauseen 3.7.3 todistuksen *abc*-kolmikolle ehto

$$\frac{7}{2^{n+4}} < \frac{1}{\log c_n}$$

on paras mahdollinen tai ainakin hyvin lähellä sitä, sillä ehtoa ei voida enää tiukentaa korvaamalla termi $\log c_n$ termillä $(\log c_n)^{1+\delta}$, missä $\delta > 0$. Tällöin nimittäin saadaan epäyhtälö

$$2^{n+4} - 7(2^n \log 7)^{1+\delta} = 2^{n+4} - 7 \cdot 2^{n(1+\delta)}(\log 7)^{1+\delta} = 2^n(2^4 - 7 \cdot 2^{n\delta}(\log 7)^{1+\delta}) > 0,$$

jonka vasen puoli ei enää ole positiivinen kaikilla muuttujan $n \geq 2$ arvoilla.

Tiukentamalla *abc*-osumille asetettua ehtoa saadaan siis vielä äärettömästi osumia *abc*-kolmikoiden joukosta. Koska logaritmiset *abc*-osumat ovat myös tavallisia *abc*-osumia, voidaan edellisiä etsiä jälkimmäisten joukosta käyttämällä hyväksi aiemmin mainittun Leidenin yliopiston hajautetun laskennan projektin ABC@Homen [38] tuloksia. Logaritmisten *abc*-osumien löytämiseen käytetty java-algoritmi on esitetty Liitteessä F ja sen tuloksena saadut 31 ensimmäistä logaritmista *abc*-osumaa on esitetty taulukkona Liitteessä E.

Logaritmisten *abc*-osumien lukumäärän kuvaamiseksi otetaan käyttöön seuraava tavallisten *abc*-osumien kanssa analoginen merkintä:

Merkintä 3.7.5. Merkitään logaritmisten *abc*-osumien lukumäärää analogisesti funktiolla $N_{\log} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$N_{\log}(X) = |\{\text{logaritminen } abc\text{-osuma (a,b,c)} \in \mathbb{N}^3 \mid c \leq X\}|.$$

Logaritmisten *abc*-osumien lukumäärän kasvu on tiukemmista ehdoista johtuen huomattavasti *abc*-osumien lukumäärän kasvua hitaampaa. Tämän voi nähdä vertaamalla funktion $N_{\log}$ arvoja funktion N arvoihin (Taulukko 4). Voidaan kuitenkin osoittaa, että S. Dahmenin *abc*-osumien lukumäärälle osoittama alaraja (Lause 3.6.9) pätee myös logaritmisten *abc*-osumien lukumäärälle.

X	$N_{log}(X)$	$N(X)$
10	0	1
10^2	0	6
10^3	0	31
10^4	4	120
10^5	10	418
10^6	40	1268
10^7	129	3499
10^8	312	8987
10^9	756	22 316
10^{10}	1661	51 677
10^{11}	3776	116 978
10^{12}	7838	252 856

Taulukko 4: Logaritmisten ja tavallisten *abc*-osumien lukumääräfunktioiden arvoja.

Lause 3.7.6. *Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $X_0 > 0$ siten, että kaikilla $X \geq X_0$ pätee*

$$N_{\log}(X) \geq \exp\left((\log X)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right).$$

Todistus. Lauseen 3.6.9 todistuksessa määriteltiin rajoitefunktio B yhtälöllä (3.15) siten, että riittävän suurilla muuttujan x arvoilla tarkastelluille abc-kolmikoille pätee

$$\operatorname{rad}(abc) \leq c \exp\left(-\frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) < c.$$

Osoitetaan, että tarkasteltavat abc-kolmikot ovat itse asiassa logaritmisia abc-osumia. Toisin sanoen osoitetaan, että riittävän suurilla muuttujan x arvoilla pätee ehto

$$\exp\left(-\frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) < \frac{1}{\log c}. \tag{3.17}$$

Todistus perustuu epäyhtälön (3.17) eksponenttifunktion sisäfunktiolle riittävän suurilla muuttujan x arvoilla saatavaan arvioon

$$-\frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) < \log\left(\frac{1}{B(x)}\right) \leq \log\left(\frac{1}{\log c}\right), \tag{3.18}$$

missä viimenen epäyhtälö on voimassa Lauseen 3.6.9 todistuksessa tarkasteltaville abc-kolmikoille asetetun ehdon $\log c \leq B(x)$ nojalla.

Sijoittamalla nyt yhtälöllä (3.15) määrätty rajoitefunktio B epäyhtälöön (3.18) saadaan

$$-\frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) < \log\left(\frac{1}{B(x)}\right) = -\log B(x) = -\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}\right],$$

josta termejä järjestelemällä ja sieventämällä saadaan edelleen

$$\frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) - \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\log x - \log C''_\alpha > 0, \tag{3.19}$$

missä $C''_\alpha = (2e^{1+\frac{1}{\alpha}})^{-1}$ on vakio. Jaetaan epäyhtälön (3.19) tarkastelu kahteen osaan riippuen termin $\mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) = K\frac{x}{\log^3 x}$ kertoimesta $K \in \mathbb{R}$.

Jos $K \geq 0$, riittää tarkastella epäyhtälön (3.19) alaspäin arvioitua muotoa

$$\frac{x}{\log^2 x} - \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\log x - \log C''_\alpha > 0.$$

Tällöin L'Hospitalin lausetta kolme kertaa soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log^2 x}}{(1+\frac{1}{\alpha})\log x + \log C''_\alpha} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1+\frac{1}{\alpha})\log^3 x + \log C''_\alpha \log^2 x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3(1+\frac{1}{\alpha})\log^2 x + 2\log C''_\alpha \log x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{6(1+\frac{1}{\alpha})\log x + 2\log C''_\alpha} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{6(1+\frac{1}{\alpha})} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Näin ollen murtoluvun osoittaja kasvaa nimittäjää nopeammin. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa luku $x_0 > 0$ siten, että epäyhtälö (3.19) on voimassa kaikilla $x > x_0$. Tällöin myös epäyhtälö (3.17) on voimassa.

Jos taas $K < 0$, niin neljä kertaa L'Hospitalin lausetta soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log^2 x}}{-K\frac{x}{\log^3 x} + (1+\frac{1}{\alpha})\log x + \log C''_\alpha} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\log x}{-Kx + (1+\frac{1}{\alpha})\log^4 x + \log C''_\alpha \log^3 x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\log x + x}{-Kx + 4(1+\frac{1}{\alpha})\log^3 x + 3\log C''_\alpha \log^2 x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\log x + 2x}{-Kx + 12(1+\frac{1}{\alpha})\log^2 x + 6\log C''_\alpha \log x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\log x + 3x}{-Kx + 24(1+\frac{1}{\alpha})\log x + 6\log C''_\alpha} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\log x + 4}{-K + 4!(1+\frac{1}{\alpha})\frac{1}{x}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Tässäkin tapauksessa murtoluvun osoittaja kasvaa nimittäjää nopeammin, joten raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa luku $x_0 > 0$ siten, että kun $x > x_0$, epäyhtälö (3.19) toteutuu.

Tapausten tulokset yhdistämällä nähdään, että epäyhtälö (3.19) ja siten myös epäyhtälöt (3.18) ja (3.17) ovat voimassa tarpeeksi suurilla muuttujan x arvoilla. Väite seuraa analogisesti Lauseen 3.6.9 todistuksesta. □

Huomautus 3.7.7. Lauseen 3.7.6 antama alaraja logaritmisille *abc*-osumille tuskin on paras mahdollinen. Huomautusta 3.6.10 soveltamalla voidaankin esittää, että termi $(\log X)^\varepsilon$ voitaneen korvata jollain termin $\log\log X$ potenssilla.

Huomautus 3.7.8. Lauseen 3.7.6 todistus herättää kysymyksen, voidaanko *abc*-osumille esittää vielä logaritmiehtoakin tiukempi ehto, jonka toteuttaville *abc*-kolmikoille voidaan osoittaa olevan voimassa Lauseiden 3.6.9 ja 3.7.6 mukainen alaraja.

Logaritmisten *abc*-osumien kerrointa $\frac{1}{\log c}$ ei esimerkiksi voida todistuksessa korvata kertoimella $c^{-\delta}$, $\delta \in (0,1)$. Oletuksen $\log c \le B(x)$ nojalla nimittäin $-\log c \ge -B(x)$, joten voidaan tarkastella epäyhtälöketjua (3.18) vastaavaa epäyhtälöketjua

$$-\frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) < -\delta B(x) \le -\delta \log c.$$

Sijoittamalla yhtälöllä (3.15) määrätty rajoitefunktio B ensimmäiseen epäyhtälöön saadaan

$$\frac{x}{\log^2 x} - \epsilon B(x) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) = \frac{x}{\log^2 x} - \frac{\delta}{2}\left(\frac{x}{e}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) > 0.$$

Koska $0 < \alpha < 1$, niin $1 + \frac{1}{\alpha} > 2$. Termi x^2 kasvaa vakiolla δ skaalauksesta huolimatta nopeammin kuin termi $\frac{x}{\log^2 x}$, joten epäyhtälö ei toteudu enää tarpeeksi suurilla muuttujan x arvoilla.

Lauseen 3.6.9 tapauksen mukaisesti voidaan tässäkin tapauksessa kysyä, kuinka hyvin Lauseen 3.7.6 alaraja approksimoi logaritmisten *abc*-osumien lukumääräfunktiota $N_{\log}(X)$. Alustava arvio saadaan soveltamalla Liitteen F algoritmiä jo aiemmin mainittuihin Leidenin yliopiston ABC@Home-laskentaprojektin tuloksiin [38].

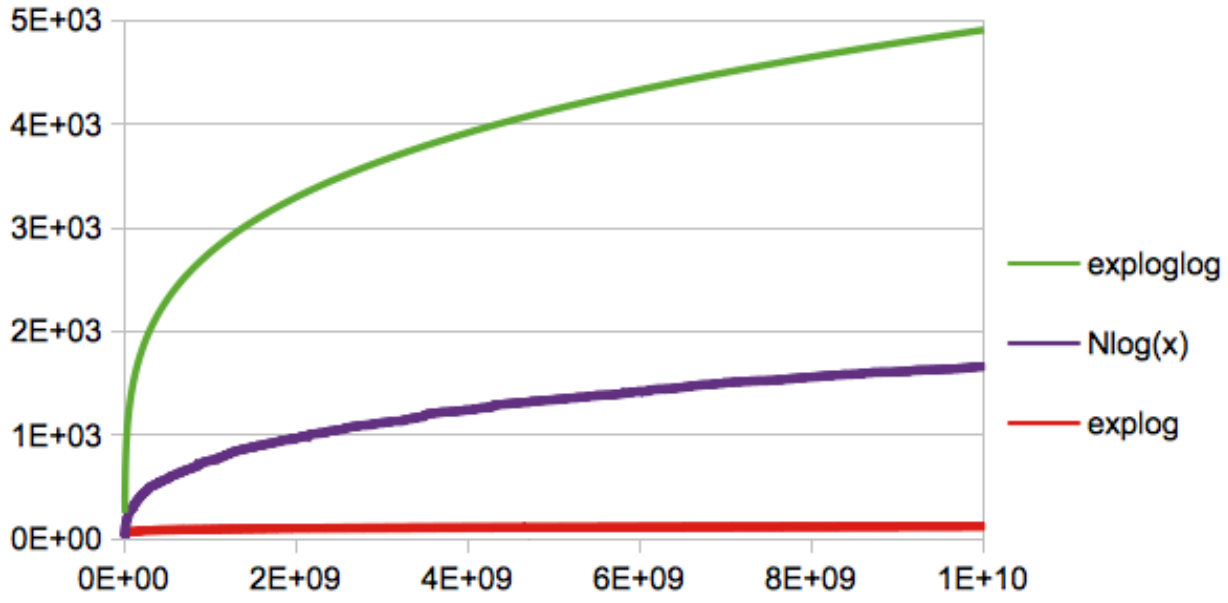
Kuvasta 5 nähdään, että alarajafunktio antaa jo huomattavasti paremman approksimaation funktiolle $N_{\log}(X)$ kuin mitä funktiolle $N(X)$, ks. Kuva 4. Tätä selittää myös logaritmisten *abc*-osumien pienempi lukumäärä. Tiukemmasta ehdosta johtuen on lisäksi vaikeaa konsturoida äärettömästi logaritmisia *abc*-osumia Lemman 3.6.5 tapaisesti. Kuvassa 5 funktion $N_{\log}(X)$ kasvua välillä $0 \leq X \leq 10^{10}$ on verrattu funktioihin

$$\begin{array}{ll} \exp((\log X)^{\frac{1}{2}}) & \text{(explog)}, \\ \exp((\log X)^{\frac{1}{2}}(\log\log X)^{\frac{1}{2}}) & \text{(exploglog)}. \end{array}$$

Kuvan 5 perusteella voidaan ehdottaa lukumääräfunktiolle $N_{\log}(X)$ seuraavaa ylärajaa:

Propositio 3.7.9. *Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $X_0 > 0$ siten, että kaikilla $X \geq X_0$ pätee*

$$N_{\log}(X) \leq \exp((\log X)^{\frac{1}{2}}(\log\log X)^{\frac{1}{2}}).$$



Kuva 5: Logaritmisten *abc*-osumien lukumääräfunktio $N_{log}(X)$ ja sitä rajoittavia funktioita.

3.8 Szpiron konjektuureista

Fermat'n suuren lauseen lisäksi *Abc*-konjektuurin syntyyn ovat vaikuttaneet suuresti 1980-luvulla esitetyt Szpiron konjektuurit sekä Stothers-Masonin lause. Tässä alaluvussa tarkastellaan Szpiron elliptisille käyrille esittämiä konjektuureja sekä niiden yhteyttä *Abc*-konjektuuriin, josta tässä yhteydessä käytetään ilman erillistä mainintaa yleisempää muotoa (Konjektuuri 3.2.2). Elliptisiä käyriä tarkastellaan seuraavassa kerroinkunnassa $\mathbb{Q}$ ja niihin liittyvää teoriaa on käsitelty tarkemmin alaluvussa 2.6.

Aloitetaan L. Szpiron vuonna 1983 esittämällä alkuperäisellä konjektuurilla [47, s. 167].

Konjektuuri 3.8.1 (Szpiro, heikko muoto)**.** *On olemassa luvut $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että jokaiselle puolivakaalle elliptiselle käyrälle E pätee epäyhtälö*

$$|\Delta_E| \leq \alpha N_E^{\beta}.$$

Kokonaisluvuille saadaan analoginen tulos:

Konjektuuri 3.8.2. *On olemassa luvut $\alpha' > 0$ ja $\beta' > 0$ siten, että kaikille abc-kolmikoille $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, pätee epäyhtälö*

$$|abc| \leq \alpha' \operatorname{rad}(abc)^{\beta'}.$$

Huomautus 3.8.3. Konjektuuri 3.8.2 voidaan esittää myös pelkän radikaalin avulla [48]: On olemassa luku $s > 0$ siten, että kaikille abc-kolmikoille $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, pätee epäyhtälö

$$|abc| \leq \operatorname{rad}(abc)^s.$$

Tämä nähdään soveltamalla työn [53, s. 26] ajatusta seuraavasti: valitaan luku $r > 0$ siten, että $2^r \geq \alpha'$. Koska kaikilla abc-kolmikoilla $\operatorname{rad}(abc) \geq 2$, saadaan tällöin $\alpha' \leq \operatorname{rad}(abc)^r$. Väite seuraa valitsemalla $s = \beta' + r$.

Vuonna 1988 Oesterlé huomautti, että mikäli Konjektuuriin 3.8.2 lisätään ehto $16 \mid abc$, niin se seuraa Szpiron konjektuurin heikosta muodosta [47, s. 167]. Osoitetaan seuraavaksi, että Konjektuuri 3.8.2 seuraa helposti *Abc*-konjektuurista.

Lause 3.8.4. *Konjektuurista 3.2.2 seuraa Konjektuuri 3.8.2.*

Todistus. Oletetaan, että Konjektuuri 3.2.2 on voimassa. Tällöin Huomautuksen 3.2.14 nojalla luku $C(\varepsilon)$,

$$C(\varepsilon) = \sup\left\{ \frac{\max\{|a|, |b|, |c|\}}{\operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}} : \operatorname{syt}(a, b) = 1,\ a + b = c \right\},$$

on äärellinen jokaisella $\varepsilon > 0$. Näin ollen Konjektuuria 3.2.2 soveltamalla saadaan

$$|abc| \leq \big(\max\{|a|, |b|, |c|\}\big)^3 \leq \big(C(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}\big)^3,$$

mistä väite seuraa valitsemalla $\alpha' = C(\varepsilon)^3$ ja $\beta' = 3(1 + \varepsilon)$. □

Konjektuurissa 3.8.1 ei aseteta tarkemmin rajaa luvulle β. Vuonna 1988 Oesterle osoitti edellä mainittua ehtoa $16 \mid abc$ ja Konjektuuria 3.8.2 soveltamalla, että Konjektuurissa 3.8.1 täytyy olla $\beta > 6$ [47, s. 168]. Näin saadaan *vahva Szpiron konjektuuri.*

Konjektuuri 3.8.5 (Szpiro, vahva muoto)**.** *Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa vakio $C(\varepsilon) > 0$ siten, että jokaiselle puolivakaalle elliptisille käyrälle E pätee epäyhtälö*

$$|\Delta_E| \leq C(\varepsilon) N_E^{6+\varepsilon}.$$

Huomautus 3.8.6. Konjektuuri 3.8.5 ei ole voimassa ilman lukua $\varepsilon > 0$. Tämän nähdään lähteistä [47, s. 168] ja [44, s. 4–5]. Näin ollen Konjektuurin 3.8.5 väite on paras mahdollinen.

Triviaalisti Szpiron konjektuurin vahva muoto implikoi heikon muodon. Vahvan muodon avulla voidaan osoittaa myös seuraavan *abc*-kolmikoihin liittyvän konjektuurin olevan voimassa [44, s. 7–8].

Konjektuuri 3.8.7. *Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $C(\varepsilon)$ siten, että kaikille abc-kolmikoille $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$ ja $16 \mid abc$, pätee epäyhtälö*

$$|abc| \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{3+\varepsilon}.$$

Huomautus 3.8.8. Konjektuurin 3.8.7 mukaan osamäärä

$$\rho = \rho(a, b, c) = \frac{\log |abc|}{\log \operatorname{rad}(abc)} \tag{3.20}$$

on rajoitettu. Osamäärää (3.20) kutsutaan *abc*-kolmikon *Szpiron osamääräksi* (engl. Szpiro ratio) ja sillä on läheinen yhteys aiemmin määriteltyyn L-arvoon (Määritelmä 3.2.15). Szpiro-laadultaan hyviä *abc*-kolmkoita, joilla $\rho(a, b, c) > 4$, on taulukoitu Liitteessä B.

Lause 3.8.9. *Konjektuuri 3.8.5 implikoi Konjektuurin 3.8.7*

Todistus. Oletetaan, että nollasta eroaville luvuille a, b ja c pätee ehdot

$$a + b + c = 0, \quad a \equiv -1 \pmod 4, \quad 16 \mid b.$$

Lemman 2.6.8 nojalla tällöin puolivakaa elliptinen käyrä

$$E_{abc} : \; y^2 + xy = x^3 + \frac{b - a - 1}{4} x^2 - \frac{ab}{16} x$$

on minimaalimalli, jolloin Huomautusta 2.6.9 ja Konjektuuria 3.8.5 soveltamalla sekä ylöspäin arvioimalla saadaan

$$\left(\frac{abc}{16} \right)^2 \leq C_1(\varepsilon) \operatorname{rad} \left(\frac{abc}{16} \right)^{6+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{6+\varepsilon}.$$

Puolittain neliöjuuri ottamalla sekä luvulla 16 kertomalla saadaan edelleen

$$|abc| \leq 16 C_1(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \operatorname{rad}(abc)^{3+\frac{\varepsilon}{2}},$$

mistä väite seuraa merkitsemällä $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ ja $C(\varepsilon') = 16 C_1(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$. □

Hallin konjektuurin (Konjektuuri 4.5.1) pohjalta S. Lang esitti vuonna 1990 seuraavan *yleistetyn Szpiron konjektuurin*, jota jossain yhteyksissä kutsutaan myös *Lang-Szpiron konjektuuriksi* [34, s. 44], [45, s. 6].

Konjektuuri 3.8.10 (Szpiro, yleistetty)**.** *Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoot $A, B \in \mathbb{Z}$ suhteellisia alkulukuja. Tällöin on olemassa vakio $c(\varepsilon, A, B) > 0$ siten, että mikäli luvut $u, v, k \in \mathbb{Z}$ toteuttavat ehdot*

$$\operatorname{syt}(Au, Bv) = 1 \quad ja \quad k = Au^3 + Bv^2, \tag{3.21}$$

niin tällöin

$$|u| \leq c(\varepsilon, A, B) \operatorname{rad}(k)^{2+\varepsilon} \quad ja \quad |v| \leq c(\varepsilon, A, B) \operatorname{rad}(k)^{3+\varepsilon}$$

Osoitetaan, että yllä oleva konjektuuri on yhtäpitävä *Abc*-konjektuurin kanssa. Todistus perustuu lähteisiin [45, s. 6–7] ja [53, s. 20–21].

Lause 3.8.11. *Konjektuuri 3.2.2 ja Konjektuuri 3.8.10 ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Oletetaan ensin, että Konjektuuri 3.2.1 on voimassa. Olkoot $A, B \in \mathbb{Z}$ suhteellisia alkulukuja ja $u, v, k \in \mathbb{Z}$ ehdot (3.21) toteuttavia lukuja. Konjektuurin 3.2.2 nojalla saadaan

$$|Bv^2| \leq \max\left\{|Au^3|, |Bv^2|, |k|\right\} \leq C_1(\varepsilon) \operatorname{rad}(ABuvk)^{1+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon)|ABuv|^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}(k)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen

$$|v|^2 \leq \frac{C_1(\varepsilon)|AB|^{1+\varepsilon}}{|B|}|uv|^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}(k)^{1+\varepsilon} = C_2(\varepsilon, A, B)|uv|^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}(k)^{1+\varepsilon}, \tag{3.22}$$

missä $C_2(\varepsilon, A, B) = C_1(\varepsilon)|A|^{1+\varepsilon}|B|^{\varepsilon}$.

Oletetaan sitten, että $|Au^3| \leq |Bv^2|$. Tällöin $|u| \leq C_3(A, B)|v|^{\frac{2}{3}}$, missä $C_3 = \left|\frac{B}{A}\right|^{\frac{1}{3}}$. Soveltamalla tätä epäyhtälöön (3.22) saadaan

$$|v|^2 \leq C_2(\varepsilon, A, B)C_3(A, B)^{1+\varepsilon}|u|^{\frac{5}{3}(1+\varepsilon)} \operatorname{rad}(k)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen puolittain termillä $|u|^{\frac{5}{3}(1+\varepsilon)}$ jakamalla

$$|v|^{\frac{1-5\varepsilon}{3}} \leq C_4(\varepsilon, A, B) \operatorname{rad}(k)^{1+\varepsilon}, \tag{3.23}$$

missä $C_4(\varepsilon, A, B) = C_2(\varepsilon, A, B)C_3(A, B)^{1+\varepsilon}$. Valitaan nyt ε väliltä $\left(0, \frac{1}{5}\right)$, jolloin $1 - 5\varepsilon > 0$, ja määritellään $\varepsilon' = \frac{18\varepsilon}{1-\varepsilon}$, jolloin $3 + \varepsilon' = \frac{3(1+\varepsilon)}{1-5\varepsilon}$. Tällöin $\varepsilon' > 0$ ja epäyhtälöstä (3.23) saadaan

$$|v| \leq \left(C_4(\varepsilon, A, B)\right)^{\frac{3}{1-5\varepsilon}} \operatorname{rad}(k)^{\frac{3}{1-5\varepsilon}(1+\varepsilon)} = C_5(\varepsilon', A, B) \operatorname{rad}(k)^{3+\varepsilon'},$$

missä $C_5(\varepsilon', A, B) = \left(C_4(\varepsilon, A, B)\right)^{\frac{3}{1-5\varepsilon}}$. Epäyhtälöstä $|u| \leq C_3(A, B)|v|^{\frac{2}{3}}$ saadaan edelleen

$$|u| \leq C_3(A, B)\left(C_5(\varepsilon', A, B) \operatorname{rad}(k)^{3+\varepsilon'}\right)^{\frac{2}{3}} \leq C_6(\varepsilon', A, B) \operatorname{rad}(k)^{2+\varepsilon},$$

missä $C_6(\varepsilon', A, B) = C_3(A, B)\left(C_5(\varepsilon', A, B)\right)^{\frac{2}{3}}$. Näin ollen Konjektuuri 3.8.10 on voimassa. Tapauksessa $|Au^3| \geq |Bv^2|$ päättely on oleellisesti samanlainen.

Oletetaan kääntäen, että Konjektuuri 3.8.10 on voimassa. Muodostetaan mielivaltaiseta *abc*-kolmikosta $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, lukuja tarvittaessa uudelleen määrittelemällä kolmikko $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, $0 < a < b < c$, ja sitä vastaava elliptinen käyrä E asettamalla

$$E : y^2 = x(x - a)(x + b) = x^3 + (b - a)x^2 - abx.$$

Esimerkin 2.6.6 nojalla luvut c_4 ja c_6 sekä käyrän diskriminantti ovat tällöin

$$\begin{aligned} c_4 &= 16(a^2+ab+b^2) \\ c_6 &= -32(b-a)(a+2b)(2a+b) \\ \Delta &= 16\big(ab(a+b)\big)^2 \end{aligned}$$

Lemman 2.6.5 mukaan $1728\Delta = c_4^3 - c_6^2$, joten sijoittamalla yllä olevat luvut ja jakamalla luvulla 4096 saadaan yhtälö

$$(a^2+ab+b^2)^3 - \big(\tfrac{1}{2}(b-a)(a+2b)(2a+b)\big)^2 = 3^3\big(\tfrac{1}{2}ab(a+b)\big)^2.$$

Koska $\operatorname{syt}(a,b)=1$, niin Lemmaa 2.1.7 toistuvasti käyttämällä yhtälön toiseen ja kolmanteen termiin nähdään yhtälön termien suurimman yhteisen tekijän olevan joko 3^3 tai 1. Jos nimittäin $b-a \equiv 0 \pmod 3$, niin $a^2+ab+b^2 = (b-a)^2+3ab \equiv 0 \pmod 3$ sekä

$$a+2b = 2(b-a)+3a \equiv 0 \pmod 3 \quad \text{ja} \quad 2a+b = -2(b-a)+3b \equiv 0 \pmod 3.$$

Tässä tapauksessa jaetaan yhtälö luvulla 3^3 ja valitaan $k = \big(\tfrac{1}{2}ab(a+b)\big)^2$. Mikäli taas suurin yhteinen tekijä on yksi, valitaan $k = 3^3\big(\tfrac{1}{2}ab(a+b)\big)^2$. Tällöin yhtälö toteuttaa ehdot (3.21) arvoilla $A=1$ ja $B=-1$, jolloin Konjektuuria 3.8.10 soveltamalla saadaan

$$a^2 \le a^2+ab+b^2 \le C_1(\varepsilon,1,-1)\operatorname{rad}(k)^{2+\varepsilon} \le 3C_1(\varepsilon,1,-1)\operatorname{rad}(abc)^{2+\varepsilon}, \tag{3.24}$$

josta edelleen

$$a \le C_2(\varepsilon)\operatorname{rad}(abc)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{3.25}$$

missä $C_2(\varepsilon) = \big(3C_1(\varepsilon,1,-1)\big)^{\frac{1}{2}}$. Samanlaisella päättelyllä saadaan vastaava epäyhtälö luvulle b. Kun nyt merkitään $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ ja $C(\varepsilon') = \frac{1}{2}C_2(\varepsilon)$, saadaan yhtälöt puolittain summaamalla

$$c = a+b \le C(\varepsilon')\operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon'}.$$

Näin ollen Konjektuuri 3.2.2 on voimassa. □

Huomautus 3.8.12. Yleistetystä Szpiron konjektuurista seuraa vahva Szpiron konjektuuri [47, s. 169]. Tämä näytetään tietyin lisäoletuksin työssä [53, s. 21–22]. Näin ollen nähdään toista kautta, että luku $\varepsilon > 0$ on tarpeellinen Szpiron vahvassa konjektuurissa. Lauseen 3.2.13 mukaan nimittäin *Abc*-konjektuuri ei ole voimassa ilman lukua $\varepsilon > 0$, joten myöskään Konjektuurit 3.8.10 ja 3.8.5 eivät ole voimassa ilman lukua $\varepsilon > 0$.

Osoitetaan vielä kirjaan [56, s. 259–260] perustuen, että *Abc*-konjektuuri implikoi suoraan Szpiron konjektuurin vahvan muodon.

Lause 3.8.13. *Konjektuurista 3.2.2 seuraa Konjektuuri 3.8.5.*

Todistus. Olkoon E elliptinen käyrä, joka saadaan minimaalisesta Weierstrassin yhtälöstä. Tällöin käyrän diskriminantin ja lukujen c_4 sekä c_6 välillä on yhteys

$$1728\Delta = c_4^3 - c_6^2.$$

Merkitään $d = \operatorname{syt}(c_4^3, c_6^2)$. Soveltamalla nyt yleistettyä *Abc*-konjekjektuuria arvoilla

$$a = \frac{c_4^3}{d}, \quad b = -\frac{c_6^2}{d} \quad ja \quad c = \frac{1728\Delta}{d}$$

saadaan

$$\max\{|c_4^3|, |c_6^2|, |1728\Delta|\} \leq C(\varepsilon) d \operatorname{rad}(c_4^3 c_6^2 1728\Delta)^{1+\varepsilon}.$$

Koska $1728 = 2^6 3^3$, voidaan radikaalille käyttää arviota $\operatorname{rad}(c_4^3 c_6^2 1728\Delta)^{1+\varepsilon} \leq 6|c_4 c_6 \Delta|^{1+\varepsilon}$. Merkitsemällä lisäksi $C_1(\varepsilon) = 6C(\varepsilon)d$ saadaan *abc*-kolmikon luvuille epäyhtälöt

$$\begin{aligned} |c_4|^{2-\varepsilon} &\leq C_1(\varepsilon)|c_6\Delta|^{1+\varepsilon} \\ |c_6|^{1-\varepsilon} &\leq C_1(\varepsilon)|c_4\Delta|^{1+\varepsilon} \\ |\Delta| &\leq C_1(\varepsilon)|c_4 c_6 \Delta|^{1+\varepsilon} \end{aligned}$$

Korottamalla nyt ensimmäinen epäyhtälö potenssiin $2 + 2\varepsilon$, toinen epäyhtälö potenssiin $3 + 3\varepsilon$ ja kolmas potenssiin $1 - 5\varepsilon$ sekä kertomalla saadut epäyhtälöt keskenään saadaan

$$\begin{aligned} |c_4|^{4+2\varepsilon-2\varepsilon^2}|c_6|^{3-3\varepsilon^2}|\Delta|^{1-5\varepsilon} &\leq C_1(\varepsilon)^6 |c_6\Delta|^{2+4\varepsilon+2\varepsilon^2}|c_4\Delta|^{3+6\varepsilon+3\varepsilon^2}|c_4c_6\Delta|^{1-4\varepsilon-5\varepsilon^2} \\ &\leq C_1(\varepsilon)^6 |c_4|^{4+2\varepsilon-2\varepsilon^2}|c_6|^{3-3\varepsilon^2}|\Delta|^{6+6\varepsilon}, \end{aligned}$$

josta puolittain jakamalla saadaan lopulta

$$|\Delta|^{1-5\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon)^6 |\Delta|^{6+6\varepsilon}. \tag{3.26}$$

Yhtälö (3.26) on vain luvun ε säätöä vaille sama kuin Szpiron konjektuurissa. □

Huomautus 3.8.14. Lauseen 3.8.13 käänteinen väite ei suoraan ole voimassa. Voidaan kuitenkin helposti osoittaa, että vahva Szpiron konjektuuri implikoi *Abc*-konjektuurin, jossa luku $1 + \varepsilon$ on korvattu luvulla $\frac{3}{2} + \varepsilon$ [56, s. 259]. Paras tämänlaatuinen tulos on Oesterlén vuonna 1988 esittämä tiukempi yläraja $\frac{6}{5} + \varepsilon$ [47, s. 169].

Koontina voidaan sanoa, että *Abc*-konjektuurista seuraa yleistetty Szpiron konjektuuri, josta puolestaa seuraa sekä Szpiron konjektuurin vahva että heikko muoto. Szpiron konjektuurin vahva muoto implikoi edelleen *Abc*-konjektuurin radikaalin eksponentilla $\frac{6}{5} + \varepsilon$. Tämän alaluvun tulokset perustuvat oleellisesti Lemmassa 2.6.13 esitettyyn Freyn käyrään, jonka avulla voidaan luoda yhteys Diophantoksen yhtälöiden ja elliptisten käyrien välille.

3.9 Fermat'n suuri lause

Lukuteorian kuuluisimpiin tuloksiin kuuluu Fermat'n suuri lause, jonka todistaminen on innostanut ja turhauttanut matemaatikoita jo reilun kolmen vuosisadan ajan [15]. Tämä A. Wilesin viimein vuonna 1995 todistama tulos [67] on myös suurimpia *Abc*-konjektuurin synnyn innoittajia, joten on perusteltua käsitellä sitä vielä erikseen. Fermat'n suuren lauseen yleistettyä muotoa on käsitelty erikseen alaluvussa 4.6.

Aloitetaan toteamalla kuuluisa lause moderneilla merkinnöillä [15, s. 2]:

Lause 3.9.1 (Fermat'n suuri lause)**.** *Yhtälöllä*

$$x^n + y^n = z^n, \tag{3.27}$$

ei ole kokonaislukuratkaisuja $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ *luonnollisilla luvuilla* $n \geq 3$*.*

Huomautus 3.9.2. Jos yhtälöllä (3.27) on kokonaislukuratkaisu, niin sillä on ratkaisu myös suhteellisilla alkuluvuilla. Nimittäin, jos kolmikko $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ toteuttaa yhtälön (3.27) ja jokin alkuluku p jakaa luvut x ja y, niin p jakaa myös luvun z. Näin ollen kolmikko $(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p})$ toteuttaa myös kyseisen yhtälön.

Vaikkei *Abc*-konjektuurin avulla pystytäkään todistamaan koko Fermat'n suurta lausetta, voidaan sen avulla osoittaa seuraava asymptoottinen tulos [41, s. 185–186]:

Lause 3.9.3. *Konjektuurin 3.2.2 nojalla on olemassa* $n_0 \in \mathbb{N}$ *siten, että yhtälöllä (3.27) ei ole suhteellisia alkulukuratkaisuja arvoilla* $n \geq n_0$*.*

Todistus. Huomautuksen 3.9.2 nojalla riittää tarkastella yhtälön (3.27) jollakin $n \in \mathbb{N}$ toteuttavia positiivisia suhteellisia alkulukuja x, y ja z. Radikaalille saadaan tällöin arvio

$$\mathrm{rad}(x^n y^n z^n) = \mathrm{rad}(xyz) \leq xyz < z^3.$$

Jos nyt $n \geq 2$, niin $z \geq 3$. Konjektuuria 3.2.2 arvoilla $\varepsilon = 1$ ja $C_1 = \max\{1, C(1)\}$ soveltamalla saadaan

$$z^n = \max\{x^n, y^n, z^n\} \leq C_1 \mathrm{rad}(x^n y^n z^n)^2 < C_1 z^6,$$

josta edelleen

$$n < 6 + \frac{\log C_1}{\log z} \leq 6 + \frac{\log C_1}{\log 3}.$$

Väite seuraa. □

Huomautus 3.9.4. *Abc*-konjektuurin soveltamisen kannalta suurimman haasteen aihettaa se, ettei lukua $C(\varepsilon) > 0$ ole mitenkään tarkemmin määritelty. Jos kuitenkin pystytään esittämään *Abc*-konjektuuri efektiivisessä muodossa, saadaan myös Fermat'n suuren lauseen eksponentille n efektiivinen yläraja. Soveltamalla esimerkiksi alaluvussa 3.5 esitettyä otaksumaa, jonka mukaan kaikilla *abc*-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ pätee

$$c < \mathrm{rad}(abc)^2,$$

nähdään, ettei yhtälöllä (3.27) ei ole kokonaislukuratkaisuja arvoilla $n \geq 6$.

Parhaan efektiivisen tuloksen antaa alaluvun 3.5 Konjektuuri 3.5.3.

Lause 3.9.5. *Konjektuurin 3.5.3 nojalla yhtälöllä (3.27) ei ole suhteellisia alkulukuratkaisuja arvoilla $n \geq 5$.*

Huomautus 3.9.6. Mikäli Lause 3.9.5 on totta, Fermat'n suurelle lauseelle voidaan esittää paljon Wilesin todistusta alkeellisempi todistus. Euler nimittäin osoitti, ettei yhtälöllä (3.27) ole ratkaisuja arvolla $n = 3$ [15, s. 39–58], ja Pythagoraan primitiivisiä kolmikoita sekä Fermat'n kehittämää äärettömän laskeutumisen periaatetta käyttämällä voidaan osoittaa sama tilanne arvolla $n = 4$ [15, s. 9–10].

Edellisessä alaluvussa osoitettiin *Abc*-konjektuurin ja Szpiron konjektuurien välillä oleva yhteys. Näin ollen luonnollisesti myös Fermat'n suuren lauseen ja elliptisten käyrien välillä on yhteys. Osoitetaan lopuksi vahvan Szpiron konjektuurin avulla seuraava asymptoottinen tulos [56, s. 256–257]:

Lause 3.9.7. *Konjektuurin 3.8.5 nojalla on olemassa luku $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että yhtälöllä (3.27) ei ole suhteellisia alkulukuratkaisuja arvoilla $n \geq n_0$.*

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a < b < c$, siten, että $a^n + b^n = c^n$ ja $\mathrm{syt}(a, b, c) = 1$. Tarkastellaan puolivakaata elliptistä käyrää E,

$$E: \ y^2 = x(x + a^n)(x - b^n),$$

jonka diskriminantiksi saadaan Esimerkkiä 2.6.6 soveltamalla

$$\Delta = 16\big(a^n b^n (a^n + b^n)\big)^2 = 16(abc)^{2n}.$$

Oletusten nojalla siis $\Delta \neq 0$, joten kyseessä todella on elliptinen käyrä. Lemmaa 2.6.13 soveltamalla tiedetään, että käyrän E minimaalidiskriminantille $\Delta_{\min}$ pätee joko

$$|\Delta_{\min}| = 2^4 |abc|^{2n} \quad \text{tai} \quad |\Delta_{\min}| = 2^{-8} |abc|^{2n}.$$

Erityisesti on voimassa $|\Delta_{\min}| \geq 2^{-8}|abc|^{2n}$. Koska minimaalidiskriminantti on aina kokonaisluku, saadaan yllä olevaa tietoa käyttämällä käyrän E johtajalle N arvio

$$N = \prod_{p | \Delta_{min}} p \leq \prod_{p | 2abc} p^2 \leq |2abc|^2,$$

missä p on alkuluku. Soveltamalla Konjektuuria 3.8.5 arvolla $\varepsilon = 1$ saadaan epäyhtälöketju

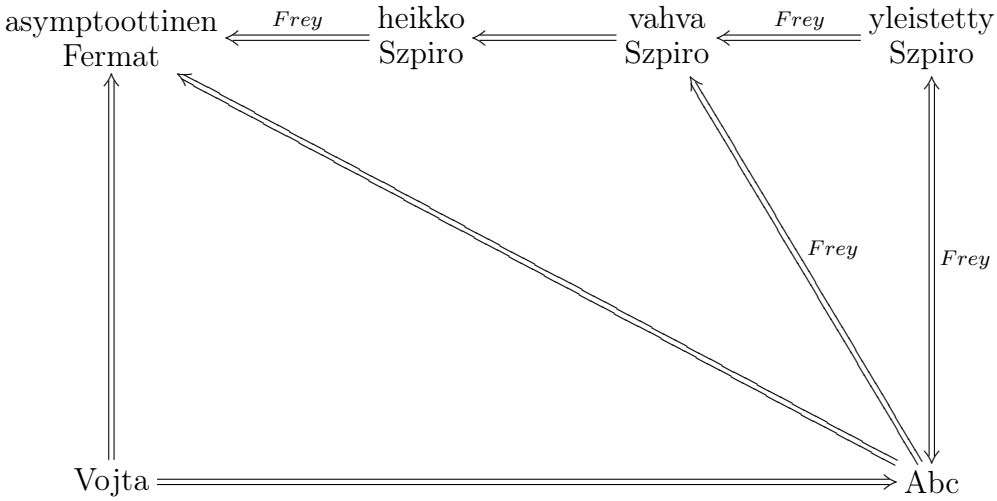
$$\frac{|abc|^{2n}}{2^8} \leq |\Delta_{\min}| \leq C(1) N^7 \leq C(1) |2abc|^{14},$$

missä $C(1)$ on jokin absoluuttinen vakio. Tästä saadaan edelleen epäyhtälö

$$|abc|^{2n-14} \leq 2^{22} C(1),$$

josta tiedon $|abc| \geq 2$ nojalla nähdään, että luvulla n on olemassa jokin absoluuttinen yläraja. □

Huomautus 3.9.8. Lauseen 3.9.7 todistus perustui Freyn käyrien teoriaan, jonka avulla pystytään tulkitsemaan kokonaislukuyhtälö elliptisenä käyränä. Kuvassa 6 on yhteenvetona esitetty tässä sekä edellisessä aliluvussa tarkasteltujen konjektuurien välisiä yhteyksiä. Kuvassa on mainittu lähdettä [34, s. 47] mukaillen vielä Vojtan konjektuurin yhteys käsiteltyihin konjektuureihin. Vojtan konjektuuria ei tässä tutkielmassa kuitenkaan mainintaa enempää tarkastella, perusteellinen esitys aiheesta löytyy esimerkiksi kirjasta [65].



Kuva 6: Eri konjektuurien välisiä implikaatioita.

4 Abc-konjektuurin seurauksia

Tässä luvussa tarkastellaan *Abc*-konjektuurin seurauksia lukuteorian kannalta. Täydellisempi lista seurauksista löytyy mm. internetsivuilta [46]. *Abc*-konjektuurista käytetään ilman erillistä mainintaa Lauseen 3.2.1 mukaista versiota oletuksella $0 < a < b < c$:

***Abc*-konjektuuri.** *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla abc-kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ on voimassa epäyhtälö*

$$c \leq C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Yksinkertainen neljän askeleen ajatusketju konjektuurin soveltamiseen on seuraavanlainen:

1. Muodostetaan summa $a + b = c$, jolla $\mathrm{syt}(a, b, c) = 1$ (tarvittaessa jaetaan termit luvulla $d = \mathrm{syt}(a, b, c) \geq 2$)
2. Sovelletaan *Abc*-konjektuuria, jolloin saadaan epäyhtälö
3. Arvioidaan epäyhtälön oikeaa puolta (ylärajaa) siten, että tuloksena on vakio tai vakio kertaa tarkasteltava summan termi
4. Yhdistetään termit, kiinnitetään luku $\varepsilon > 0$ ja todetaan termin arvojen olevan ylhäältä rajoitettuja

Haasteita aiheuttaa usein kohta 3, kun pelkkä radikaalin arvioiminen Lemman 3.1.7 mukaan ei riitä ja on käytettävä apuna muita tuloksia. Hyvin käyttäkelpoisia aputuloksia ovat arviot $\frac{n^n}{e^n} \leq n!$ (Lemma 2.7.13) sekä $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ (Lemma 2.8.1).

Abc-konjektuurin avulla ei aina voida eksplisiittisesti todistaa haluttuja väittämiä. Mikäli kuitenkin luvusta $\varepsilon > 0$ riippuva vakio $C(\varepsilon)$ voitaisiin määrittää efektiivisesti, saataisiin ratkaisujen lukumäärälle selkeä numeerinen yläraja nykyisen "äärellisen määrän" sijaan. Käsittelemällä poikkeustapaukset tietokoneavusteisesti voitaisiin *Abc*-konjektuurin voimaa tehostaa entisestään.

Tässä luvussa esiteltävien seurausten pääasiallisena lähteenä on käytetty Abderrahmane Nitaj'n väitöskirjaa [44] sekä suuntaa antavasti internetsivua [46]. Mahdollisuuksien mukaan alkuperäislähteitä on kuitenkin käytetty ensisijaisina lähteinä.

4.1 Abc-kolmikoihin liittyviä tuloksia

Väitöskirjassaan [44, s. 13–15] Nitaj osoitti *Abc*-konjektuurin avulla seuraavat kolme melko yksinkertaista mutta hyvin erilaista *abc*-kolmikoihin liittyvää tulosta.

Lause 4.1.1. *Abc-konjektuurin nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa vakio $C(\varepsilon)$ siten, että kaikilla abc-kolmikoilla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ on voimassa epäyhtälö*

$$x_i \leq C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(x_i)^{3+\varepsilon}$$

kaikilla $i = 1, 2, 3$.

Todistus. *Abc*-konjektuurin nojalla kaikilla $i = 1, 2, 3$ pätee

$$x_i \leq C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(x_1x_2x_3)^{1+\varepsilon},$$

joten kertomalla puolittain yhtälöt saadaan

$$x_1x_2x_3 \leq C(\varepsilon)^3 \operatorname{rad}(x_1x_2x_3)^{3+\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Oletetaan vastoin väitettä, että kaikilla $i = 1, 2, 3$ pätee

$$x_i > C(\varepsilon) \operatorname{rad}(x_i)^{3+\varepsilon},$$

jolloin kertomalla puolittain yhtälöt saadaan

$$x_1x_2x_3 > C(\varepsilon)^3 \big(\operatorname{rad}(x_1) \operatorname{rad}(x_2) \operatorname{rad}(x_3) \big)^{3+\varepsilon} > C(\varepsilon)^3 \operatorname{rad}(x_1x_2x_3)^{3+\varepsilon}.$$

Tämä on ristiriita epäyhtälön (4.1) kanssa. □

Toinen tulos antaa eräänlaisen arvion lukujen potensseille:

Lause 4.1.2. *Abc-konjektuurin nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa vakio $C_0(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla $x, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*

$$x^{n-1} \leq C_0(\varepsilon) \operatorname{rad}(x^n - 1)^{1+\varepsilon}.$$

Todistus. Valitaan luku ε siten, että $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Soveltamalla *Abc*-konjektuuria summaan $(x^n - 1) + 1 = x^n$ saadaan

$$x^n \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\big((x^n - 1)x^n\big)^{1+\varepsilon} \leq \operatorname{rad}(x^n - 1)^{1+\varepsilon} x^{1+\varepsilon},$$

josta puolittain luvulla $x^{1+\varepsilon}$ jakamalla saadaan edelleen

$$x^{n-(1+\varepsilon)} = x^{n-1-\varepsilon} = (x^{n-1})^{1-\frac{\varepsilon}{n-1}} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(x^n - 1)^{1+\varepsilon}.$$

Korottamalla nyt epäyhtälö puolittain potenssiin $(1 - \frac{\varepsilon}{n-1})^{-1} = \frac{n-1}{n-1-\varepsilon}$ saadaan

$$x^{n-1} \leq C(\varepsilon)^{\frac{n-1}{n-1-\varepsilon}} \operatorname{rad}(x^n - 1)^{\frac{(1+\varepsilon)(n-1)}{n-1-\varepsilon}}.$$

Vakion $C(\varepsilon)$ ja radikaalin eksponentteja tarkastelemalla nähdään, että $\frac{n-1}{n-1-\varepsilon} < 2$, mikä seuraa suoraan epäyhtälöstä $n - 1 - 2\varepsilon > 0$ sekä oletuksista $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ja $n \geq 2$. Lisäksi

$$\frac{(n-1)(1+\varepsilon)}{n-1-\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{n-1}} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon+2\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon',$$

missä $\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Näin ollen väite seuraa, kun valitaan $C_0(\varepsilon) = C(\varepsilon)^2$. □

Kolmas tulos antaa ylärajan *abc*-kolmikon suurimmalle termille muiden termien kautta:

Lause 4.1.3. *Olkoon kolmikko $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ siten, että $x_1 < x_2 < x_3$ ja $x_1 + x_2 = x_3$. Tällöin Abc-konjektuurin nojalla kaikilla $i = 1, 2, 3$*

$$x_3 \leq C(\varepsilon) \left(x_i \operatorname{rad}\left(\frac{x_1x_2x_3}{x_i} \right) \right)^{1+\varepsilon}.$$

Todistus. Olkoon $d = \operatorname{syt}(x_1, x_2, x_3)$. Soveltamalla *Abc*-konjektuuria kolmikkoon $(\frac{x_1}{d}, \frac{x_2}{d}, \frac{x_3}{d})$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{d} &\leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\left(\frac{x_1x_2x_3}{d^3} \right)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\left(\frac{x_1x_2x_3}{d} \right)^{1+\varepsilon} \\ &\leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\left(\frac{x_1x_2x_3}{d} \cdot \frac{x_i}{x_i} \right)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(\frac{x_i}{d} \right)^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}\left(\frac{x_1x_2x_3}{x_i} \right)^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Väite seuraa käyttämällä arviota $d \leq d^{1+\varepsilon}$ epäyhtälön oikean puolen nimittäjään ja kertomalla epäyhtälö puolittain luvulla d. □

4.2 Aritmeettisista lukujonoista

Olkoot $m, d, k \in \mathbb{N}$ siten, että $\text{syt}(m, d) = 1$ ja $k \geq 3$. Tarkstellaan tuloa

$$\Pi = m(m+d)(m+2d)\cdots(m+(k-1)d),$$

joka koostuu k:sta peräkkäisestä aritmeettisen lukujonon $m, m+d, \ldots, m+(k-1)d$ termistä. Vuonna 1975 P. Erdös ja J. L. Selfridge osoittivat, että jos $d = 1$, niin Π ei voi olla muotoa y^n, missä $y, n \geq 2$. 1985 R. Marzsalek osoitti, että muoto $\Pi = y^n$ on mahdollinen d:n valinnasta riippuvalle rajoitetulle määrälle lukuja k, kun $y, n \geq 2$. Sovelletaan tilanteeseen *Abc*-konjektuuria seuraavalla aputuloksella. [44, s. 36–37]

Lemma 4.2.1. *Olkoot $i, j \in \mathbb{N}$ siten, että $0 \leq i < j \leq k-1$. Tällöin* $\text{syt}(m+id, m+jd) < k$.

Todistus. Lauseen 2.1.5 nojalla $g = \text{syt}(m+id, m+jd) = m+jd-(m+id) = (j-i)d$. Jos p on luvun g alkutekijä, niin Lemman 2.1.13 nojalla joko $p \mid (j-i)$ tai $p \mid d$. Jos $p \mid d$, niin ehdoista $g \mid (m+id)$ ja $p \mid g$ seuraa $p \mid m$, jolloin oletuksen $\text{syt}(m, d) = 1$ nojalla täytyy olla $p = 1$. Jos taas $p \mid (j-i) < k$, niin myös $g < k$. Tämä osoittaa, että termeillä $m+id$ ja $m+jd$ ei ole yhteisiä alkutekijöitä p, joille $p \geq k$ □

Huomautus 4.2.2. Olkoon $i \in \mathbb{N}$. Edellisen Lemman mukaan
(i) jos $0 \leq i \leq k-2$, niin $\text{syt}(m+id, m+(i+1)d) = 1$.
(ii) jos $0 \leq i \leq k-3$, niin $\text{syt}(m+id, m+(i+2)d) \leq 2$.

Konjektuuri 4.2.3. *Olkoot $m, k, y, n \in \mathbb{N}$ siten, että $k \geq 3$ ja $n \geq 2$. Tällöin kaikilla $d \in \mathbb{N}$ yhtälöllä*

$$m(m+d)(m+2d)\cdots(m+(k-1)d) = y^n$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Lause 4.2.4. *Abc-konjektuurin nojalla Konjektuuri 4.2.3 on voimassa arvolla $k = 3$.*

Todistus. Lemman 4.2.1 nojalla kaikilla $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq 2$ pätee

$$m + id = a_i y_i^n,$$

missä luku a_i koostuu lukua $k = 3$ pienemmistä alkutekijöistä ja luku y_i koostuu suuruudeltaan vähintään lukua 3 olevista alkutekijöistä tai $y_i = 1$. Huomautuksen 4.2.2 mukaan $\text{syt}(m+d, m(m+2d)) = 1$, jolloin $a_1 = 1$ ja $y_1 \geq 2$. Yhtälöstä $(m+d)^2 = d^2 + m(m+2d)$ saadaan siten *abc*-summa

$$a_1 y_1^{2n} = d^2 + a_0 a_2 y_0^n y_2^n. \tag{4.2}$$

Soveltamalla *Abc*-konjektuuria ja arvioimalla ylöspäin saadaan

$$y_1^{2n} \leq C(\varepsilon)\,\text{rad}(d^2 a_0 a_1 a_2 y_0 y_1 y_2)^{1+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon) y_1^{3(1+\varepsilon)},$$

missä $C_1(\varepsilon) = C(\varepsilon) d a_0 a_1 a_2$. Edelleen

$$y_1^{2n-3(1+\varepsilon)} \leq C(\varepsilon),$$

josta nähdään luku ε kiinnittämällä, että n on rajoitettu. Lisäksi epäyhtälön 4.2 nojalla kaikilla $n \geq 2$ myös luvut y_1, y_2 ja y_3 ovat rajoitettuja. □

4.3 Luvuista, joilla on samat alkutekijät

Vuonna 1999 T. Cochrane ja R. Dressler [11] julkaisivat hyvin läheisesti Bertrandin postulaattia muistuttavat kaksi otaksumaa:

Konjektuuri 4.3.1 (Dressler)**.** *Olkoot $a, c \in \mathbb{N}$, $a < c$, siten, että luvuilla a ja c on samat alkutekijät. Tällöin on olemassa alkuluku p, jolle pätee*

$$a \leq p < c.$$

Konjektuuri 4.3.2. *Olkoot $a, c \in \mathbb{N}$, $a < c$, siten, että luvuilla a ja c on samat alkutekijät. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että*

$$c - a \geq C(\varepsilon) c^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Konjektuuri 4.3.1 seuraa Konjektuurista 4.3.2, mikäli tiedetään enemmän vakiosta $C(\varepsilon)$ ja kahden peräkkäisen alkuluvun maksimaalisen välin pituudesta. Konjektuuri 4.3.2 on puolestaan helppo seuraus *Abc*-konjektuurista. [11]

Lause 4.3.3. *Abc-konjektuurista seuraa Konjektuuri 4.3.2.*

Todistus. Oletetaan, että luvut a ja c ovat Konjektuurin 4.3.2 oletukset täyttäviä lukuja, jolloin siis $\operatorname{rad}(a) = \operatorname{rad}(c)$. Asetetaan $b = c - a$ ja $d = \operatorname{syt}(a, b, c)$. Tällöin kolmikko $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ muodostaa *abc*-summan. Lukujen a ja c radikaalille pätee $\operatorname{rad}(a) \mid b$, joten saadaan arvio

$$\operatorname{rad}\left(\frac{a}{d}\frac{b}{d}\frac{c}{d}\right) \leq \operatorname{rad}(ac) \operatorname{rad}\left(\frac{b}{d}\right) \leq \operatorname{rad}(a) \cdot \frac{b}{d} \leq \frac{b^2}{d}.$$

Soveltamalla *Abc*-konjektuuria ja edellä saatua arviota *abc*-summaan $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{c}{d}$ saadaan

$$\frac{c}{d} \leq C(\varepsilon) \left(\frac{b^2}{d}\right)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen

$$c \leq C(\varepsilon) b^{2(1+\varepsilon)}.$$

Näin ollen

$$b \geq \left(\frac{c}{C(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2(1+\varepsilon)}} = C'(\varepsilon) c^{\frac{1+\varepsilon-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} = C'(\varepsilon) c^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} \geq C'(\varepsilon) c^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

missä $C'(\varepsilon) = C(\varepsilon)^{-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}}$. Koska $b = c - a$, väite seuraa. □

Itse asiassa seuraava Lauseeseen 3.3.2 perustuva Konjektruurin 4.3.2 mukainen tulos on voimassa ilman oletuksia *Abc*-konjektuurin todenperäisyydestä [11].

Lause 4.3.4. *Olkoot $a, c \in \mathbb{N}$, $a < c$, siten, että luvuilla a ja c on samat alkutekijät. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että*

$$c - a \geq C(\varepsilon) (\log c)^{\frac{3}{4}-\varepsilon}.$$

4.4 Catalanin ja Pillain konjektuurit

Vuonna 1844 E. C. Catalan esitti konjektuurin, jonka mukaan 8 ja 9 ovat ainoat peräkkäiset kokonaislukupotenssit [55, s. 201]. Formaalimmin konjektuuri voidaan esittää muodossa

Konjektuuri 4.4.1 (Catalan)**.** *Olkoot $x, y, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tällöin yhtälöllä*

$$x^m - y^n = 1 \tag{4.3}$$

on vain ratkaisu $(x, y, m, n) = (3, 2, 2, 3)$.

Huomautus 4.4.2. Aiemmin on pystytty osoittamaan muun muassa, että yhtälöllä (4.3) ei ole ratkaisuja arvolla $n = 2$ (Lebesgue, 1850) ja arvolla $m = 2$ on vain ratkaisu $(x, y, m, n) = (3, 2, 2, 3)$ (Chao Ko, 1965) [55, s. 216-217]. Viimein vuonna 2002 P. Mihăilescu osoitti konjektuurin todeksi käyttämällä hyväksi syklotomisten kuntien teoriaa [39].

Näytetään seuraavaksi kirjaan [41, s. 186-187] perustuen, että *Abc*-konjektuuri implikoi Catalanin konjektuurin asymptoottisen version.

Lause 4.4.3. *Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä (4.3) on vain äärellisen monta ratkaisua.*

Todistus. Olkoon (x, y, m, n) yhtälön (4.3) ratkaisu. Huomautuksen 4.4.2 nojalla riittää tarkastella tilannetta $\min\{m, n\} \geq 3$. Lauseen 2.1.5 mukaan $\mathrm{syt}(x, y) = 1$. Soveltamalla *Abc*-konjektuuria arvolla $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ja vakiolla $K_2 = C(\frac{1}{4})$ saadaan

$$y^n < x^m \leq K_2 \mathrm{rad}(x^m y^n)^{\frac{5}{4}} = K_2 \mathrm{rad}(xy)^{\frac{5}{4}} \leq K_2 (xy)^{\frac{5}{4}},$$

josta seuraa yhtälöt

$$m \log x \leq \log K_2 + \frac{5}{4}(\log x + \log y) \tag{4.4}$$

$$n \log y < \log K_2 + \frac{5}{4}(\log x + \log y). \tag{4.5}$$

Laskemalla yhtälöt (4.4) ja (4.5) puolittain yhteen saadaan

$$m \log x + n \log y < 2 \log K_2 + \frac{5}{2}(\log x + \log y),$$

josta edelleen termejä järjestelemällä

$$\left(m - \frac{5}{2}\right) \log x + \left(n - \frac{5}{2}\right) \log y < 2 \log K_2. \tag{4.6}$$

Koska oletuksen nojalla $x \geq 2$ ja $y \geq 2$, saadaan arvio alaspäin

$$(m + n - 5) \log 2 = \left(m - \frac{5}{2}\right) \log 2 + \left(n - \frac{5}{2}\right) \log 2 \leq \left(m - \frac{5}{2}\right) \log x + \left(n - \frac{5}{2}\right) \log y,$$

jota käyttämällä yhtälö (4.6) sievenee muotoon

$$m + n < \frac{2 \log K_2}{\log 2} + 5.$$

Koska epäyhtälön oikea puoli on vakio, yhtälöllä (4.3) on vain äärellinen määrä ratkaisuja eksponenttiparilla (m, n). Näin ollen kiinnitetyillä eksponenteilla $m \geq 3$ ja $n \geq 3$ yhtälöllä (4.6) on vain äärellisen monta positiivista kokonaislukuratkaisua x ja y, mistä väite seuraa. □

Catalanin konjektuurin yleisti Pillai vuonna 1945 [55, s. 201]:

Konjektuuri 4.4.4 (Pillai)**.** *Olkoot $A, B, k \in \mathbb{N}$ ja $x, y, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ siten, että $mn > 4$. Tällöin yhtälöllä*

$$Ax^m - By^n = k \tag{4.7}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Osoitetaan konjektuuri *Abc*-konjektuurin avulla [44, s. 23].

Lause 4.4.5. *Konjektuuri 4.4.4 seuraa Abc-konjektuurista.*

Todistus. Merkitsemällä $d = \operatorname{syt}(Ax^m, By^n, k)$ ja soveltamalla *Abc*-konjektuuria summaan $\frac{Ax^m}{d} = \frac{By^n}{d} + \frac{k}{d}$ saadaan epäyhtälöketju

$$\frac{By^n}{d} \leq \frac{Ax^m}{d} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\Big(\frac{Ax^m By^n k}{d^3}\Big)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen ylöspäin arvioimalla saadaan

$$By^n \leq Ax^m \leq C(\varepsilon)\Big(d \cdot \frac{ABk}{d} \operatorname{rad}\big(x^m y^n\big)\Big)^{1+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon, A, B, k)(xy)^{1+\varepsilon},$$

missä $C_1(\varepsilon, A, B, k) = C(\varepsilon)(ABk)^{1+\varepsilon}$. Näin ollen saadaan epäyhtälöt

$$x^m \leq C_2(\varepsilon, A, B, k)(xy)^{1+\varepsilon}, \tag{4.8}$$
$$y^n \leq C_3(\varepsilon, A, B, k)(xy)^{1+\varepsilon}, \tag{4.9}$$

missä $C_2(\varepsilon, A, B, k) = C(\varepsilon)(Bk)^{1+\varepsilon}A^\varepsilon$ ja $C_3 = C(\varepsilon)(Ak)^{1+\varepsilon}B^\varepsilon$.

Oletetaan nyt $x^m \leq y^n$, jolloin $x \leq y^{\frac{n}{m}}$. Tällöin yhtälöstä (4.9) saadaan

$$y^n \leq C_3(\varepsilon, A, B, k) y^{(1+\frac{n}{m})(1+\varepsilon)},$$

josta edelleen

$$y^{n-(1+\frac{n}{m})(1+\varepsilon)} = (y^n)^{1-(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})(1+\varepsilon)} \leq C_3(\varepsilon, A, B, k). \tag{4.10}$$

Koska $m \geq 2$ ja $n \geq 2$ siten, että $mn > 4$, täytyy tulo $mn \geq 6$, jolloin

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Näin ollen valinta $0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$ toteuttaa epäyhtälön

$$\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\Big)\big(1 + \varepsilon\big) < 1,$$

jolloin edelleen epäyhtälön (4.10) nojalla y ja n ovat rajoitettuja. Oletuksesta $x^m \leq y^n$ seuraa, että myös x ja m ovat rajoitettuja.

Tapauksessa $y^n \leq x^m$ päättely on täysin analoginen. Väite seuraa. □

Tarkastellaan vielä Pillain konjektuurin ulkopuolelle jäänyttä hieman Pellin yhtälöä muistuttavaa tilannetta $m = n = 2$ [44, s. 23–24]:

Lause 4.4.6. *Olkoot $A, B, k \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä*

$$Ax^2 - By^2 = k. \tag{4.11}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja, kun $\operatorname{rad}(y)$ *on rajoitettu.*

Todistus. Merkitsemällä $d = \operatorname{syt}(Ax^2, By^2, k)$ ja soveltamalla *Abc*-konjektuuria summaan $\frac{Ax^2}{d} = \frac{By^2}{d} + \frac{k}{d}$ saadaan epäyhtälö

$$\frac{Ax^2}{d} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\Big(\frac{ABkx^2y^2}{d^3}\Big)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen

$$Ax^2 \leq C(\varepsilon)\Big(d \cdot \frac{ABk}{d} \operatorname{rad}\big(x^2y^2\big)\Big)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon)\big(ABk\big)^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}\left(xy\right)^{1+\varepsilon}.$$

Jakamalla puolittain luvulla A ja arvioimalla radikaalia saadaan siten

$$x^2 \leq C(\varepsilon)\big(Bk\big)^{1+\varepsilon} A^{\varepsilon} x^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}(y)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen

$$x^{1-\varepsilon} \leq C(\varepsilon)\big(Bk\big)^{1+\varepsilon} A^{\varepsilon} \operatorname{rad}(y)^{1+\varepsilon}.$$

Valinnalla $0 < \varepsilon < 1$ nähdään, että oletuksen $\operatorname{rad}(y)$ on rajoitettu nojalla myös x on rajoitettu. Näin ollen yhtälöllä (4.11) on vain äärellinen määrä ratkaisuja. □

Huomautus 4.4.7. Lauseen 4.4.6 todistusta imitoimalla saadaan samanlainen tulos myös olettamalla, että $\operatorname{rad}(x)$ on rajoitettu.

4.5 Hallin konjektuuri

Vuonna 1971 M. Hall esitti täydellisten neliöiden ja täydellisten kuutioiden erotuksella olevan tietynlainen alarajan [54, s. 205]:

Konjektuuri 4.5.1 (Hall, alkuperäinen)**.** *On olemassa vakio $C > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in \mathbb{N}$, $x^2 \neq y^3$, on voimassa epäyhtälö*

$$\left|x^2 - y^3\right| > Cy^{\frac{1}{2}}.$$

Abc-konjektuuri implikoi ns. Hallin konjektuurin heikon muodon [54, s. 205–206]:

Konjektuuri 4.5.2 (Hall, heikko)**.** *Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että epäyhtälö*

$$\left|x^2 - y^3\right| > C(\varepsilon)y^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

toteutuu kaikilla $x, y \in \mathbb{N}$, $x^2 \neq y^3$.

Lause 4.5.3. *Abc-konjektuurista seuraa Konjektuuri 4.5.2.*

Todistus. Asetetaan $d = \operatorname{syt}(x^2, y^3)$ sekä $a = \frac{x^2}{d}$, $b = -\frac{y^3}{d}$ ja $c = \frac{x^2-y^3}{d}$. Tällöin summaan $a + b = c$ voidaan soveltaa *Abc*-konjektuurin yleistä muotoa (Konjektuuri 3.2.2), jolloin saadaan epäyhtälöt

$$|b| = \frac{y^3}{d} \leq \max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$$
$$a = \frac{x^2}{d} \leq \max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Kertomalla epäyhtälöt puolittain ja arvioimalla saadaan

$$\frac{x^2y^3}{d^2} \leq C(\varepsilon)^2 \operatorname{rad}(abc)^{2+2\varepsilon} \leq C(\varepsilon)^2 x^{2+2\varepsilon} y^{2+2\varepsilon} \frac{|x^2 - y^3|^{2+2\varepsilon}}{d^{2+2\varepsilon}},$$

josta edelleen

$$x^2y^3 \leq C(\varepsilon)^2 x^{2+2\varepsilon} y^{2+2\varepsilon} |x^2 - y^3|^{2+2\varepsilon}.$$

Näin ollen epäyhtälö sievenee muotoon

$$|x^2 - y^3|^{2+2\varepsilon} \geq \frac{1}{C(\varepsilon)^2} x^{-2\varepsilon} y^{1-2\varepsilon},$$

josta tarkastelu jakautuu kahteen osaan.

Jos $x \leq 2y^2$, niin tällöin

$$|x^2 - y^3|^{2+2\varepsilon} \geq \frac{1}{C(\varepsilon)^2} \frac{1}{(2y^2)^{2\varepsilon}} y^{1-2\varepsilon} = \frac{1}{4^\varepsilon C(\varepsilon)^2} \frac{y^{1-2\varepsilon}}{y^{4\varepsilon}} = \frac{1}{4^\varepsilon C(\varepsilon)^2} y^{1-6\varepsilon},$$

josta edelleen

$$|x^2 - y^3| \geq \left(\frac{1}{4^\varepsilon C(\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2+2\varepsilon}} y^{\frac{1-6\varepsilon}{2+2\varepsilon}} = C_1(\varepsilon) y^{\frac{1+\varepsilon-7\varepsilon}{2(1+\varepsilon))}} = C_1(\varepsilon) y^{\frac{1}{2} - \frac{7\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} > C_1(\varepsilon) y^{\frac{1}{2}-7\varepsilon},$$

missä $C_1(\varepsilon) = \left(4^\varepsilon C(\varepsilon)^2\right)^{-\frac{1}{2+2\varepsilon}}$. Merkitsemällä $\varepsilon' = 7\varepsilon$ saadaan epäyhtälö lopulta haluttuun muotoon

$$|x^2 - y^3| > C_1(\varepsilon') y^{\frac{1}{2}-\varepsilon'}.$$

Jos taas $x > 2y^2$, niin tällöin suoraan erotusta arvioimalla saadaan

$$|x^2 - y^3| > 4y^4 - y^4 = 3y^4 > C_2(\varepsilon) y^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

missä esimerkiksi $C_2(\varepsilon) = \max\{1, C_1(\varepsilon)\}$. Molemmissa tapauksissa väite seuraa. □

Huomautus 4.5.4. Hallin konjektuurin voidaan ajatella olevan Pillain konjektuurin erikoistapaus, asettamalla nimittäin Konjektuurissa 4.4.4 $(A, B, m, n) = (1, 1, 2, 3)$ muuntuu tarkasteltava yhtälö (4.7) muotoon

$$x^2 - y^3 = k.$$

Mainitaan vielä, että työssään [44, s. 20–21] Nitaj osoittaa *Abc*-konjektuurin implikoivan myös seuraavanlaisen version heikosta Hallin konjektuurista.

Konjektuuri 4.5.5. *Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että epäyhtälö*

$$\left|x^2 - y^3\right| \geq C(\varepsilon) \max(x^2, y^3)^{\frac{1}{6}-\varepsilon}.$$

toteutuu kaikilla $x \in \mathbb{N}$ ja $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

4.6 Fermat-Catalanin konjektuuri

Yhdistämällä Fermat'n suuren lauseen ja Catalanin konjektuurin ideat saadaan seuraava Fermat-Catalanin konjektuuriksi kutsuttu otaksuma [14]:

Konjektuuri 4.6.1 (Fermat-Catalan)**.** *Olkoot* $x, y, z, p, q, r \in \mathbb{N}$ *siten, että* $\operatorname{syt}(x, y, z) = 1$ *ja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$*. Tällöin yhtälöllä*

$$x^p + y^q = z^r$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Huomautus 4.6.2. Tällä hetkellä tunnetaan vain ratkaisut

$$\begin{aligned} 1^p + 2^3 &= 3^2 & 2^5 + 7^2 &= 3^4 \\ 7^3 + 13^2 &= 2^9 & 2^7 + 17^3 &= 71^2 \\ 3^5 + 11^4 &= 122^2 & 17^7 + 76271^3 &= 21063928^2 \\ 1414^3 + 2213459^2 &= 65^7 & 9262^3 + 15312283^2 &= 113^7 \\ 43^8 + 96222^3 &= 30042907^2 & 33^8 + 1549034^2 &= 15613^3. \end{aligned}$$

Ensimmäisessä yhtälössä valitsemalla $p \geq 6$ saadaan äärettömästi ratkaisuja, mutta konjektuurin valossa tarkastellaan sitä kuitenkin vain yhtenä ratkaisuna. [14]

Abc-konjektuurin avulla voidaan osoittaa seuraava yleisempi tulos [44, s. 24–25].

Lause 4.6.3. *Olkoot* $A, B, C, x, y, z, p, q, r \in \mathbb{N}$ *siten, että* $\operatorname{syt}(x, y, z) = 1$ *ja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$*. Tällöin Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä*

$$Ax^p + By^q = Cz^r \tag{4.12}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Todistus. Voidaan olettaa $z \geq 2$, sillä tapauksessa $z = 1$ väite seuraa Pillain konjektuurista (Konjektuuri 4.4.4). Asettamalla $d = \operatorname{syt}(Ax^p, By^q, Cz^r)$ ja soveltamalla *Abc*-konjektuuria summaan $\frac{Ax^p}{d} + \frac{By^q}{d} = \frac{Cz^r}{d}$ saadaan

$$\frac{Cz^r}{d} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\Big(\frac{ABCx^p y^q z^r}{d^3}\Big)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen ylöspäin arvioimalla

$$z^r \leq \frac{1}{C} \cdot C(\varepsilon)\Big(d \cdot \frac{ABC}{d} \operatorname{rad}\big(x^p y^q z^r\big)\Big)^{1+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon, A, B, C)(xyz^r)^{1+\varepsilon},$$

missä $C_1(\varepsilon, A, B, C) = \frac{1}{C} \cdot C(\varepsilon)(ABC)^{1+\varepsilon}$. Koska $Ax^p < Cz^r$ ja $By^q < Cz^r$, niin $x < (\frac{Cz^r}{A})^{\frac{1}{p}}$ ja $y < (\frac{Cz^r}{B})^{\frac{1}{q}}$, ja siten

$$z^r \leq C_2(\varepsilon, A, B, C)(z^r)^{(1+\varepsilon)(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q})},$$

missä $C_2(\varepsilon, A, B, C) = C_1(\varepsilon, A, B, C)\left(\left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{1+\varepsilon}$. Tästä saadaan edelleen

$$(z^r)^{1-(1+\varepsilon)(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \leq C_2(\varepsilon, A, B, C).$$

Valitsemalla nyt $\varepsilon > 0$ siten, että $1 - (1+\varepsilon)(\frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) > 0$, nähdään termin z^r olevan ylhäältä rajoitettu vakiolla $C_2(\varepsilon, A, B, C)$. Näin ollen myös luvut z, x, y, p, q, r ovat rajoitettuja. □

Huomautus 4.6.4. Yhtälöä (4.12) kutsutaan yleistetyksi Fermat'n yhtälöksi [14].

4.7 Shorey-Tijdemanin konjektuuri

Vuonna 1986 T. N. Shorey ja R. Tijdeman esittivät seuraavan konjektuurin [55, s. 202]:

Konjektuuri 4.7.1 (Shorey-Tijdeman)**.** *Olkoot $x, y, v, w \in \mathbb{N}$ ja $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ siten, että* $\operatorname{syt}(x, v) = \operatorname{syt}(y, w) = 1$ *ja $mn > 4$. Tällöin yhtälöllä*

$$\left(\frac{x}{v}\right)^m - \left(\frac{y}{w}\right)^n = 1 \tag{4.13}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Teoksen [55] samassa yhteydessä osoitetaan, että konjektuuri pitää paikkansa, mikäli jokin luvuista v, w, x, y on kiinnitettyjen alkulukujen tulo. *Abc*-konjektuurin avulla voidaan konjektuuri osoittaa todeksi asettamalla lisäoletus eksponenteille m ja n [44, s. 25–26].

Lause 4.7.2. *Abc-konjektuurin nojalla Konjektuuri 4.7.1 on voimassa.*

Todistus. Oletetaan $(v, w) \neq (1, 1), (1, 2), (2, 1)$, sillä muuten väite seuraa Catalanin ja Pillain konjektuureista (Konjektuurit 4.4.1 ja 4.4.4). Nyt yhtälö (4.13) saadaan muotoon

$$w^n x^m - v^m y^n = v^m w^n, \tag{4.14}$$

josta edelleen saadaan yhtälöt

$$w^n x^m = v^m \left(y^n + w^n\right), \tag{4.15}$$

$$v^m y^n = w^n \left(x^m - v^m\right). \tag{4.16}$$

Määritelmän 2.1.1 ja yhtälön (4.15) mukaan $v^m \mid w^n x^m$, jolloin oletuksesta $\operatorname{syt}(x, v) = 1$ ja Eukleideen lemmasta (Lemma 2.1.12) seuraa $v^m \mid w^n$. Vastaavalla päättelyllä yhtälöstä (4.16) seuraa $w^n \mid v^n$, ja oletuksesta $v, w \in \mathbb{N}$ edelleen $v^m = w^n$. Aritmetiikan peruslauseen (Lause 2.1.14) yksikäsitteisyyden nojalla voidaan asettaa luku $z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ siten, että

$$v^m = w^n = z^{\operatorname{pym}(n,m)}, \tag{4.17}$$

missä $\operatorname{pym}(n, m)$ on lukujen n ja m pienin yhteinen monikerta. Yhtälö (4.14) sievenee tällöin yhtälöä (4.17) soveltamalla muotoon

$$x^m - y^n = z^{pym(m,n)}. \tag{4.18}$$

Soveltamalla nyt *Abc*-konjektuuria Lauseen 4.6.3 mukaisesti saadaan, että yhtälöllä 4.18 on äärellinen määrä ratkaisuja aina kun

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\operatorname{pym}(m, n)} < 1. \tag{4.19}$$

Yhtälö (4.19) on voimassa kaikilla $m, n \geq 2$ ja $mn > 4$ lukuunottamatta lukupareja $(m, n) = (2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$. Tarkastellaan nämä tilanteet erikseen:

1. $(m, n) = (2, 3)$ ja $(m, n) = (3, 2)$: Yhtälöillä $x^2 - y^3 = z^6$ ja $x^3 - y^2 = z^6$ on vain äärellinen määrä ratkaisuja, sillä vastaavilla elliptisillä käyrillä on vain äärellinen määrä rationaaliratkaisuja [44, s. 26]
2. $(m, n) = (3, 3)$: Yhtälöllä $x^3 - y^3 = z^3$ ei ole ei-triviaaleja ratkaisuja [15, s. 40–54], [67]
3. $(m, n) = (2, 4)$: Yhtälöllä $x^2 - y^4 = z^4$ ei ole ei-triviaaleja ratkaisuja [40, s. 16]
4. $(m, n) = (4, 2)$: Yhtälöllä $x^4 - y^2 = z^4$ ei ole ei-triviaaleja ratkaisuja [40, s. 17].

Väite seuraa. □

4.8 Erdös-Stewartin konjektuuri

Merkitään p_k:lla k:tta alkulukua, missä $k \in \mathbb{N}$. P. Erdös ja C.L. Stewart asettivat seuraavan konjektuurin [26, Problem A2, s. 7]:

Konjektuuri 4.8.1 (Erdös-Stewart)**.** *Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ja olkoon $n \in \mathbb{N}$ siten, että $p_{k-1} \leq n < p_k$. Tällöin yhtälöllä*

$$n! + 1 = p_k^a p_{k+1}^b \tag{4.20}$$

on ainoastaan ratkaisut

$$1! + 1 = 2, \qquad 2! + 1 = 3, \qquad 3! + 1 = 7, \qquad 4! + 1 = 5^2, \qquad 5! + 1 = 11^2.$$

Vuonna 2001 F. Luca todisti konjektuurin osoittamalla ensin ettei yhtälöllä (4.20) ole ratkaisuja arvoilla $n > 7\ 242\ 115$ ja tarkistamalla sitten loput tapaukset tietokoneavusteisesti [37]. Osoitetaan kuitenkin vielä *Abc*-konjektuurin avulla, että yhtälöllä (4.22) on vain äärellinen määrä ratkaisuja. Todistus perustuu työhön [44, s. 32–33] ja siinä tarvitaan seuraavaa tulosta [27, s. 455-457]:

Lause 4.8.2 (Bertrandin postulaatti)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa ainakin yksi alkuluku p siten, että*

$$n < p \leq 2n.$$

Toisin sanoen kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$p_{k+1} < 2p_k.$$

Lause 4.8.3. *Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä (4.20) on vain äärellisen monta ratkaisua.*

Todistus. Lauseen 2.1.5 nojalla $\operatorname{syt}(n!, p_k^a p_{k+1}^b) = 1$. Soveltamalla *Abc*-konjektuuria *abc*-summaan (4.20) saadaan

$$n! \leq p_k^a p_{k+1}^b \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(n! p_k p_{k+1})^{1+\varepsilon} = C(\varepsilon) \Big(\prod_{p \leq p_{k+1}} p \Big)^{1+\varepsilon}. \tag{4.21}$$

Bertrandin postulaatin ja oletuksen $p_{k-1} \leq n$ mukaan $p_{k+1} < 2p_k < 4p_{k-1} \leq 4n$, jolloin arvioita $\frac{n^n}{e^n} \leq n!$ (Lemma 2.7.13) ja $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ (Lemma 2.8.1) soveltamalla saadaan epäyhtälö (4.21) muotoon

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq C(\varepsilon) 4^{p_{k+1}(1+\varepsilon)} \leq C(\varepsilon) 4^{4n(1+\varepsilon)} \leq \left(C(\varepsilon) 4^{4(1+\varepsilon)}\right)^n,$$

josta puolittain n:s juuri ottamalla ja ε kiinnittämällä nähdään, että luku n on rajoitettu. □

Työssä [44, s. 32–33] huomautetaan vielä, että *Abc*-konjektuurin avulla voidaan äärellistä määrää poikkeuksia lukuunottamatta osoittaa todeksi myös seuraava yleisempi konjektuuri:

Konjektuuri 4.8.4. *Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $u \in \mathbb{N}$, ja $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ siten, että $p_{k-u} \leq n < p_k$. Tällöin yhtälöllä*

$$n! + 1 = p_k^a p_{k+1}^b$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

4.9 Erdös-Woodsin konjektuuri arvolla $k = 3$

Vuonna 1981 A. Woods [69, s. 53] otaksui P. Erdösin ajatuksien pohjalta seuraavaa:

Konjektuuri 4.9.1 (Erdös-Woods)**.** *On olemassa luku $k \in \mathbb{N}$ siten, että jokainen luku $x \in \mathbb{N}$ voidaan määritellä yksikäsitteisesti (toisistaan eroavista) alkutekijöistä p muodostuvien joukkojen jonona $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k$, missä*

$$S_i = \{p : p \mid x + i\}.$$

Esitetään konjektuuri seuraavassa ekvivalentissa muodossa:

Konjektuuri 4.9.2. *On olemassa vakio $k \in \mathbb{N}$ siten, että jos luvuille $x, y \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\operatorname{rad}(x + i) = \operatorname{rad}(y + i) \tag{4.22}$$

kaikilla $i = 1, \ldots, k$, niin tällöin $x = y$.

Huomautus 4.9.3. Konjektuuri 4.9.2 ei toteutu luvulla $k = 2$. Tämä nähdään esimerkiksi valitsemalla $x = 74$ ja $y = 1214$, jolloin

$$\begin{aligned} x + 1 &= 75 = 3 \cdot 5^2, & x + 2 &= 76 = 2^2 19, \\ y + 1 &= 1215 = 3^5 5, & y + 2 &= 1216 = 2^6 19. \end{aligned}$$

Vastaesimerkkejä voidaan itse asiassa konstruoida äärettömästi asettamalla

$$x_n = 2^n - 3 \qquad \text{ja} \qquad y_n = 2^{2n} - 2^{n+1} - 1.$$

Tällöin nimittäin

$$\begin{aligned} x_n + 1 &= 2(2^{n-1} - 1), & x_n + 2 &= 2^n - 1, \\ y_n + 1 &= 2^{2^n} - 2^{n+1} = 2^{n+1}\left(2^{n-1} - 1\right), & y_n + 2 &= 2^{2n} - 2^{n+1} + 1 = \left(2^n - 1\right)^2. \end{aligned}$$

Vastaavanlaisia esimerkkejä ei tunneta luvuille $k \geq 3$. [44, s. 18-19]

1993 M. Langevin osoitti todeksi lukua $k = 3$ koskevan konjektuurin [44, s. 19–20]:

Lause 4.9.4. *Abc-konjektuurin nojalla Konjektuuri 4.9.2 on voimassa arvolla $k = 3$ äärellistä määrää poikkeuksia lukuunottamatta.*

Todistus. Olkoot $x, y \in \mathbb{N}$ siten, että $x < y$ ja yhtälö (4.22) toteutuu arvoilla $i = 1, 2, 3$. Triviaalisti $\operatorname{rad}(y + i) \mid (y + i)$ ja oletusten mukaan

$$\operatorname{rad}(y + i) = \operatorname{rad}(x + i) \mid (x + i)$$

sekä

$$\operatorname{rad}(y + i) \mid (y - x)$$

kaikilla $i = 1, 2, 3$, sillä $y - x = (y + i) - (x + i)$. Näin ollen saadaan

$$\operatorname{rad}\big((y + 1)(y + 2)(y + 3)\big) \mid (y - x).$$

Koska $\operatorname{syt}(y+1, y+2) = \operatorname{syt}(y+2, y+3) = 1$, saadaan *Abc*-konjektuuria summaan

$$1 + (y+1)(y+3) = (y+2)^2$$

soveltamalla ja aiempaa jaollisuushuomiota käyttämällä arvio

$$y^2 < (y+2)^2 \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\big((y+1)(y+2)(y+3)\big)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon)(y-x)^{1+\varepsilon} < C(\varepsilon)y^{1+\varepsilon},$$

jolloin siis

$$y^{1-\varepsilon} < C(\varepsilon).$$

Valitsemalla $0 < \varepsilon < 1$ nähdään, että epäyhtälön oikea puoli antaa luvulle y vain luvusta ε riippuvan ylärajan. Näin ollen kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa vakio $C_0(\varepsilon) > 0$ siten, että jos luvuilla x, y toteutuu yhtälö (4.22) kaikilla $i = 1, 2, 3$ ja $y > C_0(\varepsilon)$, niin $x = y$. Konjektuuri 4.9.2 on siis voimassa lukuunottamatta äärellistä määrää lukuja x, y, joille $x < y \leq C_0(\varepsilon)$. □

Huomautus 4.9.5. Konjektuurin 4.9.2 yleisessä tapauksessa voidaan osoittaa *Abc*-konjektuurista riippumaton tulos, jonka mukaan arvolla $k \geq 2$ jokaista lukua $x \in \mathbb{N}$ kohti on korkeintaan äärellinen määrä yhtälön (4.22) toteuttavia lukuja y [44, s. 19].

4.10 Richardin konjektuuri

D. Richard esitti vuonna 1989 seuraavan konjektuurin [44, s. 38]:

Konjektuuri 4.10.1 (Richard)**.** *Jos kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ luvuille $x, y \in \mathbb{N}$ on voimassa yhtälö*

$$\operatorname{rad}\left(x^{2^n} - 1\right) = \operatorname{rad}\left(y^{2^n} - 1\right), \tag{4.23}$$

niin tällöin $x = y$.

Osoitetaan työhön [44, s. 38] perustuen, että Richardin konjektuuri on *Abc*-konjektuurin seuraus. Tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Lemma 4.10.2. *Abc-konjektuurin nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa vakio $C(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ja $n \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$\operatorname{rad}\left(x^n - 1\right) \geq C(\varepsilon) x^{n(1-\varepsilon)-1}.$$

Todistus. Soveltamalla *abc*-summaan $(x^n - 1) + 1 = x^n$ Konjektuuria 3.2.6 saadaan

$$C(\varepsilon)(x^n)^{1-\varepsilon} \leq \operatorname{rad}((x^n - 1)x^n) \leq x \operatorname{rad}(x^n - 1),$$

mistä väite seuraa jakamalla puolittain luvulla x. □

Lause 4.10.3. *Abc-konjektuurin nojalla Konjektuuri 4.10.1 on totta.*

Todistus. Oletetaan, että luvuilla $x, y \in \mathbb{N}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ yhtälö (4.23). Valitaan luvut $\varepsilon > 0$ ja n siten, että

$$x^{1-\varepsilon} = \left(x(x-1)\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ja} \quad (x-1)^{2^{n-1}} < C(\varepsilon)x^{2^{n-1}-1}. \tag{4.24}$$

Oletetaan vastoin väitettä, että $y < x$. Näin ollen ylöspäin arvioimalla, valintoja (4.24) sekä *Abc*-konjektuuria Lemman 4.10.2 mukaisesti soveltamalla saadaan

$$y^{2^n} - 1 < (x-1)^{2^n} < C(\varepsilon)x^{2^{n-1}-1}(x-1)^{2^{n-1}} = C(\varepsilon)x^{2^n(1-\varepsilon)-1} \leq \operatorname{rad}\left(x^{2^n}-1\right).$$

Siten oletuksen (4.23) nojalla saadaan epäyhtälö

$$y^{2^n} - 1 < \operatorname{rad}\left(y^{2^n}-1\right),$$

joka ei ole voimassa millään $y \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriita, joten täytyy olla $x = y$. □

4.11 Brocard-Ramanujan yhtälö $n! + 1 = m^2$

Toisistaan tietämättä H. Brocard (1876 ja 1885) ja S. Ramanujan (1913) esittivät ongelman kaikkien positiivisten kokonaislukuratkaisujen löytämiseksi yhtälölle

$$n! + 1 = m^2.$$

Ongelma on edelleenkin avoin. Tällä hetkellä tunnettuja ratkaisuja (n, m) arvoon $n = 10^9$ asti ovat ainoastaan $(4, 5)$, $(5, 11)$, $(7, 71)$. [5]

Vuonna 1993 M. Overholt todisti, että *Abc*-konjektuurin nojalla yhtälöllä on vain äärellinen määrä ratkaisuja [48]. Esitetään seuraavaksi Overholtin tulos käyttämällä todistuksessa Overholtin tavoin seuraavaa *Abc*-konjektuurin implikoimaa Szpiron konjektuurin heikon muodon (Konjektuuri 3.8.1) analogia kokonaisluvuille (Huomautus 3.8.3):

Konjektuuri 4.11.1. *On olemassa luku $s > 0$ siten, että kaikille kolmikoille $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, joille $abc \neq 0$, $\operatorname{syt}(a, b, c) = 1$ ja $a + b = c$, pätee epäyhtälö*

$$|abc| \leq \operatorname{rad}(abc)^s.$$

Lause 4.11.2. *Olkoot $n, m \in \mathbb{N}$. Konjektuurin 4.11.1 nojalla yhtälöllä*

$$n! + 1 = m^2 \tag{4.25}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Todistus. Luvut $1! + 1 = 2$, $2! + 1 = 3$ ja $3! + 1 = 7$ eivät ole minkään luonnollisen luvun neliöitä, joten voidaan olettaa, että $n \geq 4$. Lisäksi kertoma $n!$ on parillinen, jolloin luvun m täytyy olla pariton.

Merkitsemällä nyt $m = 2k + 1$ jollekin $k \in \mathbb{N}$, saadaan yhtälö (4.25) muotoon

$$n! = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1),$$

josta edelleen

$$\frac{1}{4}n! = k(k+1). \tag{4.26}$$

Soveltamalla nyt Konjektuuria 4.11.1 *abc*-summaan $1 + k = k + 1$ sekä arvioita $(\frac{e}{n})^n < n$ (Lemma 2.7.13) ja $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ (Lemma 2.8.1) käyttämällä saadaan yhtälöstä (4.26) edelleen

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{1}{4}n! = k(k+1) \leq \operatorname{rad}(k(k+1))^s \leq \operatorname{rad}\left(\frac{n!}{4}\right)^s \leq \left(\prod_{p \leq n} p\right)^s < 4^{sn}.$$

Kertomalla puolittain luvulla $4e^n$ saadaan

$$n^n < 4^{sn+1}e^n \leq 4^{sn+n}e^n = \left(4^{s+1}e\right)^n,$$

josta edelleen

$$n < 4^{s+1}e.$$

Koska s on vakio, nähdään näin ollen että yhtälön (4.25) toteuttavia lukuja n on vain äärellinen määrä. □

Yleisemmän tuloksen esitti A. Dabrowski vuonna 1996 [12]:

Lause 4.11.3. *Olkoot $n, m, A \in \mathbb{N}$. Konjektuurin 4.11.1 nojalla yhtälöllä*

$$n! + A = m^2 \tag{4.27}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja, kun $A = k^2$ jollekin $k \in \mathbb{N}$.

Huomautus 4.11.4. Tapauksessa $A \neq k^2$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ voidaan osoittaa ilman *Abc*-konjektuuria, että yhtälöllä (4.27) on vain äärellinen määrä ratkaisuja [12].

4.12 Simmonsin yhtälö $n! = m(m^2 - 1)$

Kirjassa [26, Problem D25, s. 193] Simmons kysyy, onko mahdollista esittää luvun $n \in \mathbb{N}$ kertoma kolmen peräkkäisen luvun tulona kun $n > 6$. Toisin sanoen, onko yhtälöllä

$$n! = (m-1)m(m+1) = m(m^2 - 1)$$

muita ratkaisuja kuin $(n, m) = (3, 2), (4, 3), (5, 5), (6, 9)$? Lisäksi hän kysyy, onko yleisellä tapauksella

$$n! = m(m^k - 1)$$

ratkaisuja.

Osoitetaan työhön [44, s. 34] perustuen, että *Abc*-konjektuurin nojalla päästään käsiksi vielä yleisempään tapaukseen.

Lause 4.12.1. *Olkoot $n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä*

$$n! = m\left(m^k \pm 1\right) \tag{4.28}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Todistus. Kirjoitetaan yhtälö (4.28) muodossa

$$m^k \pm 1 = \frac{n!}{m}, \tag{4.29}$$

josta nähdään $\operatorname{syt}(m^k, \frac{n!}{m}) = 1$. Soveltamalla summaan (4.29) *Abc*-konjektuurin yleistä muotoa (Konjektuuri 3.2.2) ja arvioimalla ylöspäin $m^{k-1} \leq n!$ saadaan

$$\frac{n!}{m} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\left(1 \cdot m^k \cdot \frac{n!}{m}\right)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(n!)^{1+\varepsilon}. \tag{4.30}$$

Yhtälöstä (4.29) saadaan ylöspäin arvioimalla $m^k \leq \frac{2n!}{m}$, josta edelleen

$$m \leq (2n!)^{\frac{1}{k+1}}. \tag{4.31}$$

Soveltamalla epäyhtälöön (4.30) arvioita (4.31) ja $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ (Lemma 2.8.1) saadaan

$$\frac{n!}{(2n!)^{\frac{1}{k+1}}} \leq \frac{n!}{m} \leq C(\varepsilon) 4^{n(1+\varepsilon)}.$$

Kirjoittamalla epäyhtälön vasemmanpuoleinen termi muodossa

$$\frac{n!}{(2n!)^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{(n!)^{1-\frac{1}{k+1}}}{2^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{(n!)^{\frac{k}{k+1}}}{2^{\frac{1}{k+1}}}$$

ja käyttämällä arviota $\frac{n^n}{e^n} \leq n!$ (Lemma 2.7.13) saadaan

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{n \cdot \frac{k}{k+1}} \leq (n!)^{\frac{k}{k+1}} \leq C(\varepsilon) 2^{\frac{1}{k+1}} 4^{n(1+\varepsilon)},$$

josta edelleen

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{k}{k+1}} \leq C(\varepsilon)^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{n(k+1)}} 4^{(1+\varepsilon)} \leq C(\varepsilon) 2^{\frac{1}{6}} 4^{(1+\varepsilon)},$$

mistä nähdään luku ε kiinnittämällä, että luku n on rajoitettu. Näin ollen myös luvut m ja k ovat rajoitettuja. □

4.13 Gandhin yhtälö $x^n + y^n = n!z^n$

Kirjassa [26, Problem D 2, s. 145] J. M. Gandhi esittää avoimen kysymyksen ratkaisuista yhtälölle

$$x^n + y^n = n!z^n, \tag{4.32}$$

kun $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Sovelletaan tapaukseen *Abc*-konjektuuria [44, s. 33–34]:

Lause 4.13.1. *Olkoot $x, y, z, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä (4.32) on vain äärellinen määrä ratkaisuja.*

Todistus. Olkoot x, y, z, n yhtälön (4.32) toteuttavat luvut. Voidaan olettaa $\operatorname{syt}(x^n, y^n) = 1$, jolloin myös $\operatorname{syt}(x^n, y^n, n!z^n) = 1$ (Huomautus 3.1.2). Soveltamalla *Abc*-konjektuuria *abc*-summaan (4.32) saadaan

$$n!z^n \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(x^n y^n n! z^n)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon)(xyz)^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}(n!)^{1+\varepsilon}.$$

Oletuksien $x, y, z \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 4$ nojalla $x, y, z \leq (n!z^n)^{\frac{1}{n}}$, joten saadaan

$$n!z^n \leq C(\varepsilon)(n!z^n)^{\frac{3(1+\varepsilon)}{n}} \operatorname{rad}(n!)^{1+\varepsilon},$$

josta jakamalla puolittain termillä $(n!z^n)^{\frac{3(1+\varepsilon)}{n}}$ sekä tuloksia $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ (Lemma 2.7.13) ja $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ (Lemma 2.8.1) käyttämällä edelleen

$$\left(\frac{nz}{e}\right)^{n(1-\frac{3(1+\varepsilon)}{n})} < (n!z^n)^{1-\frac{3(1+\varepsilon)}{n}} \leq C(\varepsilon) 4^{n(1+\varepsilon)}.$$

Ottamalla puolittain n:s juuri saadaan viimein

$$\left(\frac{nz}{e}\right)^{1-\frac{3(1+\varepsilon)}{n}} \leq C(\varepsilon)^{\frac{1}{n}} 4^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) 4^{1+\varepsilon}.$$

Valitsemalla ε siten, että $\frac{3(1+\varepsilon)}{n} < 1$ nähdään lukujen n ja z olevan rajoitettuja, jolloin yhtälöllä (4.32) on vain äärellinen määrä ratkaisuja. □

Huomautus 4.13.2. Tapauksissa $n = 2$ ja $n = 3$ yhtälöllä (4.32) on äärettömästi ratkaisuja [44, s. 33]. Tapauksessa $n = 2$ tämä nähdään valitsemalla luvut x_k ja y_k siten, että

$$x_k + y_k\sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^k,$$

jolloin ne toteuttavat myös yhtälön $x_k - y_k\sqrt{2} = \left(1 - \sqrt{2}\right)^k$ (vrt. Lemma 2.2.11). Kertomalla yhtälöt puolittain saadaan yhtälö

$$x_k^2 - 2y_k^2 = (-1)^k,$$

josta nähdään, että parittomilla muuttujan $k \in \mathbb{N}$ arvoilla luvut x_n ja y_n toteuttavat yhtälön (4.32) muodossa

$$1 + x_k^2 = 2y_k^2.$$

Tapauksessa $n = 3$ saadaan äärettömästi ratkaisuja asettamalla

$$x_0 = 37, \qquad y_0 = 17 \qquad \text{ja} \qquad z_0 = 21,$$

jolloin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ saadaan yhtälön (4.32) toteuttavat kolmikot

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k \left(x_k^3 + 2y_k^3\right), \\ y_{k+1} &= -y_k \left(2x_k^3 + y_k^3\right), \\ z_{k+1} &= z_k \left(x_k^3 - y_k^3\right). \end{aligned}$$

4.14 Voimakkaista luvuista

P. Erdös ja G. Szekers tutkivat lukuja $n \in \mathbb{N}$, joille ehdosta $p \mid n$ seuraa $p^2 \mid n$, kun p on jokin alkuluku. S. Golomb nimesi tällaiset luvut *voimakkaiksi*. [26, Problem B16, s. 70]

Määritelmä 4.14.1. Luvun $n \in \mathbb{N}$ sanotaan olevan *voimakas* (engl. powerful), jos

$$\operatorname{rad}(n)^2 \mid n. \tag{4.33}$$

Huomautus 4.14.2. Voimakkaille luvuille $n \in \mathbb{N}$ pätee $\operatorname{rad}(n) \leq n^{\frac{1}{2}}$, sillä ehdosta (4.33) seuraa $\operatorname{rad}(n)^2 \leq n$.

Ekvivalentisti voimakas luku voidaan määritellä täydellisen neliön ja kuution tulona.

Lemma 4.14.3. *Luku $m \in \mathbb{N}$ on voimakas, jos ja vain jos $m = a^2b^3$ joillekin $a, b \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Ohitetaan triviaalin tapauksen tarkastelu ja oletetaan, että $m, a, b > 1$.

Jos $m = a^2b^3$ joillekin $a, b \in \mathbb{N}$, niin luvun m alkutekijäesityksessä jokainen luvun m alkutekijä on korotettu ainakin potenssiin kaksi, jolloin luku m on voimakas.

Oletetaan sitten, että $m \in \mathbb{N}$ on voimakas ja sillä on alkutekijäesitys $m = \prod p_i^{a_i}$, $a_i \geq 2$. Määritelllään luku c_i siten, että

$$c_i = \begin{cases} 3, & \text{jos } a_i \text{ on pariton} \\ 0, & \text{jos } a_i \text{ on parillinen} \end{cases}$$

ja asetetaan $b_i = a_i - c_i$, jolloin $b_i \in \mathbb{N}$ on parillinen. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$m = \prod p_i^{a_i} = \prod p_i^{b_i} \prod p_i^{c_i} = \Big(\prod p_i^{\frac{b_i}{2}}\Big)^2 \Big(\prod p_i^{\frac{c_i}{3}}\Big)^3.$$

Väite seuraa. □

Huomautus 4.14.4. Jos $n^2 \nmid b$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, esitys $m = a^2b^3$ on yksikäsitteinen [49].

Tarkastellaan seuraavaksi voimakkaisiin lukuihin liittyviä konjektuureja P. Ribenboimin artikkelin [49] pohjalta. Mollin ja Walsh esittivät tietämättään seuraavan Erdösin aiemmin esittämän konjektuurin:

Konjektuuri 4.14.5 (Erdös-Mollin-Walsh)**.** *Ei ole olemassa kolmea peräkkäistä voimakasta lukua.*

Abc-konjektuurin avulla voidaan osoittaa asymptoottinen tapaus [44, s. 27–28]:

Lause 4.14.6. *Abc-konjektuurin nojalla on olemassa vain äärellinen määrä kolmen peräkkäisen voimakkaan luvun joukkoja.*

Todistus. Jos $1 < a < b < c$ ovat kolme peräkkäistä voimakasta lukua, niin tällöin neliöstä

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a(a+2) + 1$$

saadaan summa

$$b^2 = ac + 1. \tag{4.34}$$

Soveltamalla *Abc*-konjektuuria summaan (4.34), ja käyttämällä arviota $\operatorname{rad}(abc) \leq (abc)^{\frac{1}{2}}$ (Huomautus 4.14.2) saadaan

$$b^2 \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon)(abc)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \leq C(\varepsilon) b^{\frac{3(1+\varepsilon)}{2}}, \tag{4.35}$$

josta edelleen

$$b^{\frac{1-3\varepsilon}{2}} \leq C(\varepsilon).$$

Näin ollen valitsemalla $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ nähdään, että luku b on rajoitettu, jolloin myös luvut a ja c ovat rajoitettuja. □

Seuraavat kaksi konjektuuria liittyvät osaltaan Fermat'n ja Mersennen lukuihin, joten palautetaan mieleen niiden määritelmät. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Lukuja F_n ja M_m,

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$
$$M_m = 2^m - 1,$$

kutsutaan *Fermat'n luvuiksi* ja *Mersennen luvuiksi*, vastaavasti [51, s. 81, 182].

Konjektuuri 4.14.7. *Merkitään jokaisella $k \in \mathbb{N}$ n_k:lla sitä voimakasta lukua, joka on lähinnä lukua 2^k ja $n_k \neq 2^k$. Tällöin*

$$\lim_{k\to\infty} |2^k - n_k| = \infty.$$

Tilanteeseen voidaan soveltaa *Abc*-konjektuuria seuraavasti [44, s. 28]:

Lause 4.14.8. *Abc-konjektuurin nojalla Konjektuuri 4.14.7 on voimassa.*

Todistus. Lukua 2^k lähinnä oleva voimakas luku on muotoa $n_k = 2^s n_k'$, missä $s = 0$ tai $1 < s < k$ ja n_k' on pariton voimakas luku. Soveltamalla sitten *Abc*-konjektuuria summaan

$$2^{k-s} - \frac{n_k}{2^s} = z$$

saadaan

$$\frac{n_k}{2^s} \leq 2^{k-s} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\left(\frac{2^{k-s} n_k z}{2^s}\right)^{1+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon)\left(|z| \operatorname{rad}\left(\frac{n_k}{2^s}\right)\right)^{1+\varepsilon},$$

missä $C_1(\varepsilon) = 2^{1+\varepsilon} C(\varepsilon)$. Kertomalla puolittain luvulla 2^s ja arvioimalla ylöspäin (Huomautus 4.14.2) saadaan

$$n_k \leq C_1(\varepsilon)\left(2^s |z| \operatorname{rad}\left(\frac{n_k}{2^s}\right)\right)^{1+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon)|2^k - n_k|^{1+\varepsilon} n_k^{\frac{1+\varepsilon}{2}},$$

josta edelleen

$$n_k^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \leq C(\varepsilon)|2^k - n_k|^{1+\varepsilon}.$$

Koska $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, väite seuraa valitsemalla $0 < \varepsilon < 1$. □

Abc-konjektuuri antaa varman vastauksen myös seuraavalle otaksumalle [44, s. 28–29].

Konjektuuri 4.14.9. *On olemassa äärettömästi Fermat'n ja Mersennen lukuja, jotka eivät ole voimakkaita.*

Lause 4.14.10. *Abc-konjektuurin nojalla konjektuuri 4.14.9 on voimassa.*

Todistus. Osoitetaan väite näyttämällä, että *Abc*-konjektuurin nojalla on olemassa äärellinen määrä voimakkaita Fermat'n ja Mersennen lukuja. Tarkastellaan Diophantoksen yhtälöä

$$2^k \pm 1 = z,$$

missä $k \in \mathbb{N}$ ja z on voimakas. Nyt kuitenkin Lauseen 4.14.8 nojalla yhtälöllä on vain äärellinen määrä ratkaisuja. Koska Fermat'n ja Mersennen lukuja on äärettömästi, väite seuraa. □

Tarkastellaan vielä lopuksi erästä Erdösin konjektuuria [44, s. 29]. Sitä varten tarvitsemme seuraavan yleistyksen [26, Problem B16, s. 70].

Määritelmä 4.14.11. Olkoon $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Luku $n \in \mathbb{N}$ on *k-voimakas* (engl. *k-ful*), jos

$$\operatorname{rad}(n)^k \mid n.$$

Huomautus 4.14.12. k-voimakkaille luvuille $n \in \mathbb{N}$ pätee vastaavasti $\operatorname{rad}(n) \leq n^{\frac{1}{k}}$.

Konjektuuri 4.14.13 (Erdös)**.** *Yhtälöllä*

$$x + y = z$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja 4-voimakkailla suhteellisilla alkuluvuilla x, y ja z.

Osoitetaan jälleen *Abc*-konjektuurin voima [44, s. 29].

Lause 4.14.14. *Abc-konjektuurin nojalla Erdösin konjektuuri on voimassa.*

Todistus. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{N}$ 4-voimakkaita lukuja siten, että $\operatorname{syt}(x, y, z) = 1$ ja $x + y = z$. Tällöin *Abc*-konjektuurin nojalla

$$z \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(xyz)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon)(xyz)^{\frac{1+\varepsilon}{4}} \leq C(\varepsilon) z^{\frac{3(1+\varepsilon)}{4}},$$

josta edelleen

$$z^{\frac{1-3\varepsilon}{4}} \leq C(\varepsilon).$$

Valitsemalla $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ nähdään, että z on rajoitettu. □

Huomautus 4.14.15. Mikäli Konjektuurissa 4.14.13 tarkastellaan 3-voimakkaita lukuja, saadaan äärettömästi ratkaisuja. Nitaj [43] osoitti tämän käyttämällä yhtälön $x_n^3 + y_n^3 = a z_n^3$ toteuttavia kolmikoita (vrt. Huomautus 4.13.2)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \left(x_n^3 + 2y_n^3\right), \\ y_{n+1} &= -y_n \left(2x_n^3 + y_n^3\right), \\ z_{n+1} &= z_n \left(x_n^3 - y_n^3\right), \end{aligned}$$

alkuarvoilla $(a, x_0, y_0, z_0) = (6, 1\ 805\ 723, -2\ 237\ 723, -960\ 540)$, jolloin

$$x_0 + y_0 = -2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 2287^3.$$

4.15 Wieferichin alkuluvuista

Vuonna 1909 A. Wieferich todisti Fermat'n suureen lauseeseen liittyen seuraavaa [32]:

Lause 4.15.1 (Wieferich)**.** *Olkoot $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Jos parittomalle alkuluvulle $p \nmid xyz$ on voimassa yhtälö*

$$x^p + y^p + z^p = 0,$$

luku p toteuttaa konguenssin

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}. \tag{4.36}$$

Kongruenssin toteuttavia alkulukuja alettiin kutsua esittäjänsä mukaisesti.

Määritelmä 4.15.2. Alkulukua p sanotaan *Wieferichin alkuluvuksi*, jos se toteuttaa kongruenssin (4.36).

Kongruenssi (4.36) ei toteutu suurimmalla osalla alkuluvuista. Vaikka Wieferichin alkulukuja uskotaan olevan äärettömästi, tällä hetkellä ainoat tunnetut lukua $1,25 \cdot 10^{15}$ pienemmät Wieferichin alkuluvut ovat 1093 ja 3511 [32]. Lang ja Trotter otaksuvatkin esiintymistiheydelle seuraavaa [35, s.175]:

Konjektuuri 4.15.3 (Lang-Trotter)**.** *Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $x > e^e$. Tällöin*

$$\#\big\{p \text{ alkuluku} \;\big|\; p \leq x \text{ ja } 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}\big\} \leq C \log\log x$$

jollekin vakiolle $C > 0$.

Vuonna 1988 J. Silveman [57] osoitti *Abc*-konjektuurin nojalla olevan olemassa äärettömästi ns. ei-Wieferichin alkulukuja, jotka eivät toteuta kongruenssia (4.36). Osoitetaan tämä kirjaan [41, s. 187–188] perustuen. Tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Lemma 4.15.4. *Olkoon p pariton alkuluku. Jos jollekin $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$2^n \equiv 1 \pmod{p} \quad \textit{mutta} \quad 2^n \not\equiv 1 \pmod{p^2},$$

niin luku p ei ole Wieferichin alkuluku.

Todistus. Koska p on pariton, $\operatorname{syt}(p, 2) = 1$. Olkoon d luvun 2 kertuluku modulo p, ts. $d = \operatorname{ord}_p 2$. Tällöin $d \mid n$ Lemman 2.1.33 nojalla ja yhtälöstä $2^n \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ seuraa

$$2^d \not\equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Kertaluvun määritelmän nojalla $2^d = 1 + kp$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $\operatorname{syt}(k, p) = 1$. Koska Eulerin lauseen (Lause 2.1.31) nojalla $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ja Seurauksen 2.1.34 nojalla $d \mid p - 1$, voidaan kirjoittaa $p - 1 = de$ jollekin kokonaisluvulle $1 \leq e \leq p - 1$. Tällöin $\operatorname{syt}(ek, p) = 1$ ja

$$2^{p-1} = (2^d)^e = (1 + kp)^e \equiv 1 + ekp \not\equiv 1 \pmod{p^2},$$

missä $(1 + kp)^e \equiv 1 + ekp$ saadaan soveltamalla binomilausetta termiin $(1 + kp)^e$ ja tarkastelemalla tulosta modulo p^2. Näin ollen p ei ole Wieferichin alkuluku. □

Seuraavassa todistuksessa käytetään hyväksi voimakkaita lukuja (Määritelmä 4.14.1).

Lause 4.15.5. *Abc-konjektuurin nojalla on olemassa äärettömästi alkulukuja, jotka eivät toteuta kongruenssia (4.36).*

Todistus. Merkitään ei-Wieferichin alkulukujen joukkoa NW:lla, toisin sanoen

$$NW = \big\{p \text{ alkuluku} \;\Big|\; 2^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}\big\}.$$

Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ voidaan kirjoittaa

$$2^n - 1 = v_n u_n, \tag{4.37}$$

missä v_n on suurin voimakas luku, joka jakaa luvun $2^n - 1$, ja u_n on neliövapaa luku, ts. $k^2 \nmid u_n$ kaikilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, siten, että $\operatorname{syt}(v_n, u_n) = 1$.

Mikäli nyt $p \mid u_n$, niin tällöin $p \nmid v_n$ ja edelleen

$$2^n \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{mutta} \quad 2^n \not\equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Lemman 4.15.4 nojalla siten $p \in NW$ eli u_n on jaollinen vain ei-Wieferichin alkuluvuilla.

Oletetaan vastoin väitettä, että joukko NW on äärellinen. Näin ollen on olemassa vain äärellisen monta neliövapaata kokonaislukua u_n, joiden alkutekijät kuuluvat joukkoon NW. Merkitään U:lla suurinta tällaista lukua u_n. Koska

$$\lim_{n\to\infty} 2^n - 1 = \infty,$$

joukko $\{v_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ puolestaan on tällöin ääretön ja rajoittamaton.

Soveltamalla nyt *Abc*-konjektuuria summaan $(2^n - 1) + 1 = 2^n$ saadaan

$$2^n \le C(\varepsilon) \operatorname{rad}\big(2^n(2^n-1)\big)^{1+\varepsilon} = C(\varepsilon) \operatorname{rad}\big(2(2^n-1)\big)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen yhtälön (4.37) nojalla sekä arvioimalla

$$v_n \le C(\varepsilon) \operatorname{rad}\big(2v_n u_n\big)^{1+\varepsilon} \le C(\varepsilon) \operatorname{rad}(2u_n)^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}(v_n)^{1+\varepsilon}.$$

Käyttämällä arvioita $U = \max u_n$ ja $\operatorname{rad}(v_n) \le v^{\frac{1}{2}}$ (Huomautus 4.14.2) saadaan

$$v_n \le C(\varepsilon)(2U)^{1+\varepsilon}(v_n)^{\frac{1+\varepsilon}{2}},$$

josta lopulta

$$v_n^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \le C_1(\varepsilon),$$

missä $C_1(\varepsilon) = C(\varepsilon)(2U)^{1+\varepsilon}$. Valitsemalla $0 < \varepsilon < 1$ nähdään, että tällöin myös luvut v_n ovat rajoitettuja, mikä on ristiriita. Näin ollen joukko NW on ääretön. □

Silverman todisti itse asiassa vielä edellistä voimakkaamman tuloksen [57]:

Lause 4.15.6. *Abc-konjektuurin nojalla jokaista luonnollista lukua $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ kohden on olemassa äärettömästi alkulukuja p, jotka toteuttavat ehdon*

$$a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

ja joiden lukumäärälle pätee kaikilla $x > x_0$

$$\big|\big\{p \text{ alkuluku} \;\Big|\; p \le x \text{ ja } a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}\big\}\big| > C(a) \log x,$$

missä $C(a) > 0$ on vakio.

4.16 Edgarin ja Shorey-Tijdemanin probleema

Kirjassa [26, Problem D10, s. 157] H. Edgar kysyy onko yhtälöllä

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{x-1} = p^y$$

ratkaisun $(q, x, p, y) = (3, 5, 11, 2)$ lisäksi muita ratkaisuja parittomilla alkuluvuilla p ja q ja luonnollisilla luvuilla x ja y, kun $x \geq 5$ ja $y \geq 2$. Shorey ja Tijdeman esittivät yleisen tapauksen geometrisen sarjan summan avulla ja asettivat sille seuraavan konjektuurin [55, s. 202-203].

Konjektuuri 4.16.1. *Olkoot $n, x, y \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ja $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Tällöin yhtälöllä*

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = y^n \tag{4.38}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Huomautus 4.16.2. Yhtälölle (4.38) tunnetaan Edgarin ratkaisun lisäksi ratkaisut $(x, m, y, n) = (7, 4, 20, 2), (18, 3, 7, 3)$. Tietyillä oletuksilla lukujen x, m ja y suhteen voidaan myös osoittaa, että yhtälöllä (4.38) on vain äärellisesti ratkaisuja. [55, s. 203]

Nitaj [44, s. 35] esittää vieläkin yleisemmän tilanteen ja osoittaa, että *Abc*-konjektuurin mukaan saadaan rajoitettu määrä ratkaisuja.

Lause 4.16.3. *Olkoot $x, y, z, n, m \in \mathbb{N}$ siten, että $x > y$, $\operatorname{syt}(x, y) = 1$, $m > 1$, $n > 3$ ja $\frac{3}{n} + \frac{1}{m} < 1$. Tällöin Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä*

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} = \frac{x^n - y^n}{x - y} = az^m, \tag{4.39}$$

on vain äärellinen määrä ratkaisuja.

Todistus. Yhtälöketjusta (4.39) saadaan puolittain termillä $x - y$ kertomalla summa

$$y^n + az^m(x - y) = x^n. \tag{4.40}$$

Ehdosta $\operatorname{syt}(x, y) = \operatorname{syt}(x^n, y^n) = 1$ saadaan $\operatorname{syt}\big(x^n, y^n, az^m(x - y)\big) = 1$ Lemman 2.1.7 nojalla. Arvioita $x - y < x$ ja $z \leq x^{\frac{n}{m}}$ sekä *Abc*-konjektuuria summaan (4.40) soveltamalla saadaan

$$x^n \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(y^n a z^m (x - y) x^n)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon)(ayz(x - y)x)^{1+\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon, a) x^{(3+\frac{n}{m})(1+\varepsilon)},$$

missä $C_1(\varepsilon, a) = C(\varepsilon)a^{1+\varepsilon}$. Edelleen

$$(x^n)^{1-(\frac{3}{n}+\frac{1}{m})(1+\varepsilon)} \leq C_1(\varepsilon, a).$$

Valitsemalla luku $\varepsilon > 0$ siten, että $(\frac{3}{n} + \frac{1}{m})(1 + \varepsilon) < 1$ nähdään, että luvut x, n ja siten myös luvut y, z ja m ovat rajoitettuja. □

4.17 Goormaghtighin ja Batemanin ongelma

Goormaghtigh esitti ongelman olemassaolosta luvuille, joilla on on samoista numeroista koostuvat esitykset eri lukujärjestelmissä [55, s. 203]. Toisin sanoen, onko olemassa alkulukuja, jotka voidaan esittää kahdella eri tavalla muodossa

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}, \tag{4.41}$$

missä $x, m, y, n \in \mathbb{N}$ siten, että $m > n > 2$ ja $y > x > 1$. Ongelmaan tunnetaan ainakin ratkaisut

$$31 = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = \frac{5^3 - 1}{5 - 1} \qquad \text{ja} \qquad 8191 = \frac{2^{13} - 1}{2 - 1} = \frac{90^3 - 1}{90 - 1},$$

joista ensimmäinen toteuttaa myös ns. Batemanin ongelman, jossa x ja y ovat alkulukuja ja $m, n \geq 3$. Batemanin ongelmalle ei ole muita positiivisia ratkaisuja suuruudeltaan korkeintaan 10^{10} olevien alkulukujen joukossa. [26, Problem B25, s. 81]

Abc-konjektuurin avulla voidaan osoittaa ratkaisujen äärellisyys [44, s. 36].

Lause 4.17.1. *Abc-konjektuurin nojalla yhtälöllä (4.41) on olemassa vain äärellinen määrä ratkaisuja luonnollisilla luvuilla $m > n > 3$ ja $y > x > 1$.*

Todistus. Nimittäjillä kertomalla ja termejä siirtämällä saadaan yhtälö (4.41) muotoon

$$x^m(y - 1) = y^n(x - 1) + (y - x).$$

Merkitään $d = \operatorname{syt}\big(x^m(y-1), y^n(x-1)\big)$. Soveltamalla summaan $\frac{y^n(x-1)}{d} + \frac{y-x}{d} = \frac{x^m(y-1)}{d}$ *Abc*-konjektuuria saadaan

$$\frac{x^m(y-1)}{d} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\left(\frac{y^n(x-1)(y-x)x^m(y-1)}{d^3}\right)^{1+\varepsilon},$$

josta edelleen käyttämällä puolittain arviota $y - 1 < y$ sekä arvioimalla ylöspäin saadaan

$$\begin{aligned} yx^m \leq C(\varepsilon)\left((y-x)y \operatorname{rad}\Big(\frac{x^m y^n(x-1)}{d}\Big)\right)^{1+\varepsilon} &\leq C(\varepsilon)\big((y-x)yxy(x-1))\big)^{1+\varepsilon} \\ &\leq C(\varepsilon)\big(x^2y^3\big)^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Yhtälöä (4.41) soveltamalla nähdään lukujen x^{m-1} ja y^{n-1} olevan karkeasti samaa suuruusluokkaa ($x^{m-1} \approx y^{n-1}$), joten saadaan arvio $x^{\frac{m-1}{n-1}} \approx y$. Soveltamalla tätä edellä olevaan epäyhtälöön saadaan

$$x^{m+\frac{m-1}{n-1}} \leq C(\varepsilon)\left(x^{2+3\frac{(m-1)}{n-1}}\right)^{1+\varepsilon},$$

josta viimein

$$x^{\frac{mn-1-(2n+3m-5)(1+\varepsilon)}{n-1}} \leq C(\varepsilon).$$

Valitaan nyt ε siten, että $mn - 1 > (2n + 3m - 5)(1 + \varepsilon)$ toteutuu arvoilla $m > n > 3$. Näin ollen nähdään, että luku x on rajoitettu, ja siten myös luvut y, m, n ovat rajoitettuja. □

4.18 Croftin ongelma

Kirjassa [26, Problem F23, s. 261] Croft esittää avoimen kysymyksen kuinka pieni erotus $|n! - 2^m|$ voi olla suhteessa lukuun 2^m. *Abc*-konjektuurilla saadaan seuraava arvio [44, s. 39]:

Lause 4.18.1. *Abc-konjektuurin nojalla jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa vakio $C(\varepsilon) > 0$ siten, että*

$$n \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(n! - 2^m)^{\frac{1+\varepsilon}{n}}$$

on voimassa kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) \neq (0, 0), (1, 0), (2, 1)$.

Todistus. Kirjoitetaan $n!$ muodossa $n! = 2^s j$, missä j on pariton ja $s < n$. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan riippuen luvun s suuruudesta.

Jos $s \geq m$, niin soveltamalla *Abc*-konjektuuria summaan

$$\frac{n!}{2^m} - 1 = k \tag{4.42}$$

saadaan

$$\frac{n!}{2^n} \leq \frac{n!}{2^m} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\Big(\frac{n!k}{2^m}\Big)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(n! 2^m k)^{1+\varepsilon},$$

jolloin tuloksia $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ (Lemma 2.7.13) ja $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ (Lemma 2.8.1) käyttämällä saadaan

$$\Big(\frac{n}{2e}\Big)^n \leq C(\varepsilon) 4^{n(1+\varepsilon)} \operatorname{rad}(2^m k)^{1+\varepsilon}.$$

Tästä edelleen puolittain n:s juuri ottamalla ja yhtälöä (4.42) käyttämällä

$$n \leq 2eC(\varepsilon)^{\frac{1}{n}} 4^{1+\varepsilon} \operatorname{rad}(2^m k)^{\frac{1+\varepsilon}{n}} \leq C_1(\varepsilon) \operatorname{rad}(n! - 2^m)^{\frac{1+\varepsilon}{n}},$$

missä $C_1(\varepsilon) = 2eC(\varepsilon)4^{1+\varepsilon}$.

Jos taas $s < m$, niin soveltamalla *Abc*-konjektuuria summaan

$$\frac{n!}{2^s} - 2^{m-s} = k$$

saadaan

$$\frac{n!}{2^n} \leq \frac{n!}{2^s} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}\Big(\frac{n!}{2^s} 2^{m-s} k\Big)^{1+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \operatorname{rad}(n! 2^{m-s} k)^{1+\varepsilon} = C(\varepsilon) \operatorname{rad}(n! 2^s k)^{1+\varepsilon}.$$

Tämän jälkeen päättely on vastaava kuin edellä. □

Nitaj esittää Lauseen 4.18.1 sekä numeeristen laskelmien pohjalta seuraavan voimakkaamman tuloksen [44, s. 39]

Konjektuuri 4.18.2. *On olemassa vakio $C > 0$ siten, että epäyhtälö*

$$n \leq C \operatorname{rad}(n! - 2^m)^{\frac{1}{n}}$$

on voimassa kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) \neq (0, 0), (1, 0), (2, 1)$.

4.19 Muita seurauksia

Täydellisyyden vuoksi esitetään vielä lopuksi ilman todistuksia kolme *Abc*-konjektuurin seurausta. Vaikka jo todistettujen Faltingsin ja Rothin lauseen tarkastelu tuntuu turhalta, *Abc*-konjektuuri tarjoaa kuitenkin yksinkertaisemman ja helpommin seurattavan päättelyketjun, jossa näkyy paremmin yhteydet eri teorioiden välillä. Lisäksi *Abc*-konjektuurin avulla voidaan osoittaa alkuperäisiä lauseita voimakkaammat tulokset. [20]

Tarvitaan seuraavaa määritelmää [27, s. 203]:

Määritelmä 4.19.1. Lukua x kutsutaan *algebralliseksi luvuksi*, mikäli se toteuttaa jonkun muotoa

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_n = 0$$

olevan yhtälön, missä $a_i \in \mathbb{Z}$ ja $a_j \neq 0$ jollekin $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Huomautus 4.19.2. Kahden muuttujan polynomiyhtälön nollakohtien ratkaisujoukko muodostaa *algebrallisen käyrän.*

Vuonna 1922 L. J. Mordell otaksui seuraavan tuloksen, jonka G. Faltings myöhemmin vuonna 1983 todisti [20, s. 56]:

Lause 4.19.3 (Faltings)**.** *Olkoon C algebrallinen käyrä, jonka genus $g \geq 2$, kerroinkunnassa $\mathbb{Q}$. Tällöin käyrällä C on vain äärellinen määrä rationaalipisteitä.*

Tuloksen osoitti seuraavan myös *Abc*-konjektuurista N. Elkies vuonna 1991 [20]. Todistuksessaan hän käytti Belyin teoriaa sekä yleisissä lukukunnissa määriteltyjen käyrien rationaalipisteiden korkeuteen liittyviä ominaisuuksia [44, s. 17].

Vuonna 1955 K. J. Roth osoitti seuraavan lauseen, joka liittyy algebrallisten lukujen approksimointiin rationaaliluvuilla [20, s. 55]:

Lause 4.19.4 (Roth)**.** *Olkoon α algebrallinen luku kerroinkunnassa Q ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin epäyhtälö*

$$\left|\alpha - \frac{s}{t}\right| < \frac{1}{t^{2+\varepsilon}}$$

toteutuu vain äärellisen monella rationaaliluvulla $\frac{s}{t}$, $t > 0$.

Vaikka Lause 4.19.4 on luonteeltaan kvantitatiivinen, voidaan se kvalitatiivisesti tulkita siten, että algebrallista lukua ei voida kovin hyvin approksimoida äärettömän monella rationaaliluvulla [10, s. 152]. E. Bombieri osoitti tuloksen seuraavan *Abc*-konjektuurista vuonna 1994 [20, s. 45].

Vielä lopuksi mainittakoon A. Granvillen ja H. Starkin [24] vuonna 2000 osoittama analyyttiseen lukuteoriaan liittyvä tulos:

Lause 4.19.5. *Algebrallisille lukukunnille muotoillun Abc-konjektuurin nojalla Dirichlet'n karakteeriin $(\frac{-d}{\cdot})$, $-d < 0$, liittyvällä L-funktiolla ei ole "Siegelin nollakohtia".*

5 Abc-konjektuurin yleistyksiä

Tässä luvussa tarkastellaan muutamia *Abc*-konjektuurin yleistyksiä, kuten *Abc*-konjektuurin kongruenssiversiota, n-konjektuuria ja *Abc*-konjektuurin polynomiversiota, Mason-Stothersin lausetta. Lopuksi mainitaan vielä ilman perusteluita meromorfisille funktioille sovelletuista analogioista. Täydellisempi lista yleistyksistä löytyy mm. internetsivuilta [46].

5.1 Abc-konjektuurin kongruenssiversio

Abc-konjektuurin kongruenssimuotoinen versio määritellään seuraavasti [41, s. 191]:

Konjektuuri 5.1.1 (Abc, kongruenssiversio)**.** *Olkoon $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $C(m, \varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\operatorname{syt}(a, b, c) = 1$, joille*

$$abc \equiv 0 \pmod{m} \qquad ja \qquad a + b = c,$$

on voimassa epäyhtälö

$$\max(|a|, |b|, |c|) \leq C(m, \varepsilon) \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Konjektuurin 5.1.1 väittämä on kongruenssiehdosta johtuen normaalia *Abc*-konjektuuria heikompi. Kuitenkin voidaan osoittaa, että mikäli Konjektuuri 5.1.1 on voimassa jollakin luvulla $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, niin tällöin myös varsinainen *Abc*-konjektuuri on voimassa. Ensimmäisenä tämän todisti J. Ellenberg vuonna 2000 [16].

Osoitetaan Ellenbergin tulos kirjan [41, s. 191–195] esitykseen perustuen. Aloitetaan tarkastelu seuraavalla alkeellisella huomiolla.

Lemma 5.1.2. *Olkoon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ abc-summa siten, että $a < b < c$.*

(i) Jos c on pariton, niin $b - a$ on pariton;

(ii) Jos c on parillinen, niin a sekä b ovat parittomia ja $b - a$ on parillinen. Lisäksi

$$4 \mid c \quad tai \quad 4 \mid (b - a).$$

Todistus. Koska $c = a + b$, riittää tarkastella lukujen a ja b parillisuutta tai parittomuutta. Olkoot $m, k \in \mathbb{N}$ siten, että $m < k$.

Jos luku c on pariton, niin silloin luvut a ja b ovat muotoa $a = 2m$ ja $b = 2k + 1$ tai $a = 2m + 1$ ja $b = 2k$. Tällöin molemmissa tapauksissa $c = 2(m + k) + 1$. Ensimmäisessä tapauksessa $b - a = 2(k - m) + 1$ ja toisessa $b - a = 2(k - m - 1) + 1$, joten (i) on voimassa.

Jos luku c on parillinen, niin silloin $a = 2m + 1$ ja $b = 2k + 1$. Tapaus $a = 2m$ ja $b = 2k$ johtaa ristiriitaan $\operatorname{syt}(a, b, c) > 1$. Nyt $c = 2(m + k + 1)$ ja $b - a = 2(k - m)$ eli (ii):n ensimmäinen osa tämän nojalla voimassa.

Olkoot $k', m' \in \mathbb{N}$ siten, että $k' < m'$. Taulukoidaan kohdan (ii) mahdollisuudet.

m	k	$c = 2(m + k + 1)$	$b - a = 2(k - m)$
$2m'$	$2k'$	$4(k' + m') + 2$	$4(k' - m')$
$2m' + 1$	$2k' + 1$	$4(k' + m' + 1) + 2$	$4(k' - m')$
$2m' + 1$	$2k'$	$4(k' + m' + 1)$	$4(k' - m' - 1) + 2$
$2m'$	$2k' + 1$	$4(k' + m' + 1)$	$4(k' - m') + 2$

Taulukosta nähdään, että aina joko $4 \mid c$ tai $4 \mid (b - a)$. □

Huomautus 5.1.3. Lemman 5.1.2 nojalla nähdään eksplisiittisesti, että kaikilla *abc*-summilla $abc \equiv 0 \pmod 2$, sillä ainakin yksi luvuista a, b, c on parillinen. Näin ollen Konjektuuri 5.1.1 arvolla $m = 2$ on sama kuin alkuperäinen *Abc*-konjektuuri.

Huomautuksen 5.1.3 nojalla riittää siis tarkastella Konjektuuria 5.1.1 arvoilla $m \geq 3$. Osoitetaan seuraavaksi, että vanhojen *abc*-kolmikoiden avulla voidaan muodostaa uusia *abc*-kolmikoita.

Lemma 5.1.4. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ abc-kolmikko siten, että $a < b < c$. Jos luku c on pariton, asetetaan*

$$A_n = (b-a)^n, \qquad B_n = c^n - (b-a)^n, \qquad C_n = c^n.$$

Jos luku c on parillinen, asetetaan

$$A_n = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n, \qquad B_n = \left(\frac{c}{2}\right)^n - \left(\frac{b-a}{2}\right)^n, \qquad C_n = \left(\frac{c}{2}\right)^n.$$

Tällöin (A_n, B_n, C_n) muodostaa abc-kolmikon.

Todistus. Selvästi $A_n + B_n = C_n$ molemmissa tapauksissa. Oletuksen nojalla $0 < b - a < c$, jolloin Lemman 5.1.2 nojalla luvut A_n, B_n ja C_n ovat molemmissa tapauksissa luonnollisia lukuja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen nähdään, että $A_n < C_n$, $B_n < C_n$ ja $A_n \neq B_n$, joten luvut A_n, B_n, C_n ovat eri lukuja ja tarvittaessa uudelleen määrittelemällä saadaan $A_n < B_n < C_n$. Riittää siis osoittaa, että $\operatorname{syt}(A_n, B_n, C_n) = 1$.

Olkoon c ensin pariton. Esimerkin 2.1.6 nojalla $\operatorname{syt}(c, b-a) \leq 2$. Koska luvut c ja $b-a$ ovat parittomia (Lemma 5.1.2), täytyy olla $\operatorname{syt}(c, b-a) = 1$. Lemmojen 2.1.11 ja 2.1.7 nojalla edelleen

$$1 = \operatorname{syt}(c^n, (b-a)^n) = \operatorname{syt}(c^n - (b-a)^n, (b-a)^n) = \operatorname{syt}(c^n - (b-a)^n, c^n).$$

Olkoon sitten luku c parillinen. Tällöin myös $b-a$ on parillinen (Lemma 5.1.2), joten Esimerkin 2.1.6 nojalla $\operatorname{syt}(c, b-a) = 2$. Lemman 2.1.10 nojalla $\operatorname{syt}\left(\frac{c}{2}, \frac{b-a}{2}\right) = 1$, jolloin päättely on analoginen yllä olevan kanssa. □

Lemman 5.1.4 luvuilla A_n, B_n, C_n on voimassa seuraava kongruenssi:

Lemma 5.1.5. *Olkoot $m \geq 3$ ja $n = \phi(m)$. Lemman 5.1.4 kolmikolle (A_n, B_n, C_n) pätee tällöin*

$$A_n B_n C_n \equiv 0 \pmod m. \tag{5.1}$$

Todistus. Riittää näyttää, että jos p on alkuluku ja $p^r \mid m$ jollekin $r \in \mathbb{N}$, niin

$$A_n B_n C_n \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Tällöin väite (5.1) seuraa luvun m kanonisen esityksen ja Lauseen 2.1.24 nojalla. Todetaan kuitenkin aluksi, että jos alkuluvulle p pätee $p^r \mid m$ jollekin $r \in \mathbb{N}$, niin $(p-1)p^{r-1} \mid n$ (Lemma 2.1.29 ja Lause 2.1.30) ja siten

$$r \leq 2^{r-1} \leq (p-1)p^{r-1} \leq n.$$

Olkoon p ensin pariton alkuluku. Jos $p \mid c$, niin $p^n \mid c^n$ ja $p^n \mid C_n$. Koska $r \leq n$, saadaan $C_n \equiv 0 \pmod{p^r}$. Vastaavasti jos $p \mid (b-a)$, niin $A_n \equiv 0 \pmod{p^r}$. Jos taas $p \nmid c$ ja $p \nmid (b-a)$, niin Lemman 2.1.29 sekä Eulerin lauseen (Lause 2.1.31) nojalla

$$c^{(p-1)p^{r-1}} \equiv 1 \pmod{p^r}$$
$$(b-a)^{(p-1)p^{r-1}} \equiv 1 \pmod{p^r}.$$

Koska $(p-1)p^{r-1} \mid n$, saadaan

$$c^n \equiv (b-a)^n \equiv 1 \pmod{p^r},$$

jolloin siis $B_n \equiv 0 \pmod{p^r}$. Näin ollen (5.1) pätee kaikilla parittomilla alkuluvuilla.

Olkoon sitten $p = 2$. Jos $2^r \mid m$, niin $2^{r-1} \mid n$ ja $r \leq n$. Tarkastellaan erikseen tapaukset, missä luku c on parillinen ja pariton.

Jos $2 \mid c$, niin $2 \mid (b-a)$ ja täsmälleen toinen luvuista c ja $b-a$ on jaollinen luvulla 4 (Lemma 5.1.2). Näin ollen joko c^n tai $(b-a)^n$ on jaollinen luvulla 4^n eli joko $2^n \mid C_n$ tai $2^n \mid A_n$. Mutta koska $2^r \mid 2^n$, kongruenssi (5.1) on voimassa.

Jos $2 \nmid c$, niin $2 \nmid b-a$ (Lemma 5.1.2) jolloin Eulerin lauseen nojalla

$$c^{2^{r-1}} \equiv (b-a)^{2^{r-1}} \equiv 1 \pmod{2^r}.$$

Koska $2^{r-1} \mid n$, saadaan

$$c^n \equiv (b-a)^n \equiv 1 \pmod{2^r},$$

joten $B_n \equiv 0 \pmod{2^r}$. Näin ollen kongruenssi (5.1) toteutuu alkuluvulla $p = 2$. □

Osoitetaan viimein itse väite.

Lause 5.1.6. *Olkoon $m \geq 3$. Jos Konjektuuri 5.1.1 on voimassa luvulla m, niin tällöin myös Abc-konjektuuri on voimassa.*

Todistus. Olkoon $0 < \varepsilon < 1$. Määritellään *abc*-summille $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ funktio Φ_ε siten, että

$$\Phi_\varepsilon(a,b,c) = \log c - (1+\varepsilon) \log \operatorname{rad}(abc). \tag{5.2}$$

Kirjoittamalla $\log c = (1+\varepsilon)(\log c) - \varepsilon \log c$ saadaan siten

$$\log \operatorname{rad}(abc) = \log c - \frac{\varepsilon \log c}{1+\varepsilon} - \frac{\Phi_\varepsilon(a,b,c)}{1+\varepsilon}. \tag{5.3}$$

Oletetaan, että Konjektuuri 5.1.1 on voimassa. Tällöin on olemassa luku $K(m,\varepsilon) > 0$ siten, että Konjektuurin 5.1.1 ehdot toteuttaville kolmikoille (A,B,C) pätee

$$\max\left\{|A|,|B|,|C|\right\} \leq K(m,\varepsilon) \operatorname{rad}(ABC)^{1+\varepsilon},$$

joka voidaan vaatimuksen $0 < A < B < C$ ja yhtälön (5.2) nojalla kirjoittaa ekvivalentisti muodossa

$$\Phi_\varepsilon(A,B,C) \leq \log K(m,\varepsilon) = K^*(m,\varepsilon). \tag{5.4}$$

Olkoon $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tavallinen abc-summa siten, että $a < b < c$. Todistetaan väite osoittamalla, että yhtälöä (5.4) soveltamalla nähdään myös luvun $\Phi_\varepsilon(a,b,c)$ olevan vakiolla rajoitettu.

Asetetaan $n = \phi(m)$, joka on parillinen luku oletuksen $m \geq 3$ ja Huomautuksen 2.1.28 nojalla. Määritellään luvut A_n, B_n ja C_n kuten Lemmassa 5.1.4, jolloin niille Lemman 5.1.5 nojalla pätee $A_n B_n C_n \equiv 0 \pmod{m}$, ja ne toteuttavat epäyhtälön (5.4). Oletetaan tässä yksinkertaisuuden vuoksi, että luku c on pariton. Jos c on parillinen, päättely on oleellisesti samanlainen.

Luvun n parillisuuden nojalla saadaan Lemmaa 2.2.10 käyttämällä arvio

$$\begin{aligned} B_n &= c^n - (b-a)^n = (b+a)^n - (b-a)^n \\ &= 4ab\big((b+a)^{n-2} + (b+a)^{n-2}(b-a)^2 + \cdots + (b-a)^{n-2}\big) \\ &\leq 4ab\left(\frac{n}{2}\right)(b+a)^{n-2} \\ &= 2abnc^{n-2}. \end{aligned}$$

Kirjoittamalla

$$A_n B_n C_n = (b-a)^n\Big(\frac{abB_n}{ab}\Big)c^n = (b-a)^n\Big(\frac{B_n}{ab}\Big)abc^n,$$

saadaan radikaalille arvio

$$\begin{aligned} \operatorname{rad}(A_n B_n C_n) &= \operatorname{rad}\left((b-a)^n\Big(\frac{B_n}{ab}\Big)abc^n\right) = \operatorname{rad}\left((b-a)\Big(\frac{B_n}{ab}\Big)abc\right) \\ &\leq \operatorname{rad}(b-a)\operatorname{rad}\left(\frac{B_n}{ab}\right)\operatorname{rad}(abc) \\ &\leq (b-a)\left(\frac{B_n}{ab}\right)\operatorname{rad}(abc) \\ &\leq (b-a)\left(2nc^{n-2}\right)\operatorname{rad}(abc) \\ &\leq 2nc^{n-1}\operatorname{rad}(abc). \end{aligned}$$

Ottamalla nyt puolittain logaritmi, sijoittamalla yhtälö (5.3) ja arvioimalla ylöspäin saadaan

$$\begin{aligned} \log\operatorname{rad}(A_n B_n C_n) &\leq (n-1)\log c + \log\operatorname{rad}(abc) + \log 2n \\ &= n\log c - \frac{\varepsilon\log c}{1+\varepsilon} - \frac{\Phi_\varepsilon(a,b,c)}{1+\varepsilon} + \log 2n \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)n}\right)\log c^n - \frac{\Phi_\varepsilon(a,b,c)}{1+\varepsilon} + \log 2n \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)n}\right)(\log C_n + n\log 2) - \frac{\Phi_\varepsilon(a,b,c)}{1+\varepsilon} + \log 2n \\ &\leq \left(\frac{n+(n-1)\varepsilon}{(1+\varepsilon)n}\right)\log C_n - \frac{\Phi_\varepsilon(a,b,c)}{1+\varepsilon} + 2n\log 2, \end{aligned}$$

kun käytetään arviota

$$\Big(1 - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)n}\Big)n\log 2 + \log 2n \leq \Big(n - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)}\Big)\log 2 + \log 2^n \leq n\log 2 + n\log 2 = 2n\log 2.$$

Ratkaisemalla $\Phi_\varepsilon(a,b,c)$, yhteinen tekijä ottamalla ja arvioimalla $\varepsilon < 1$ saadaan

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(a,b,c) &\leq \Big(\frac{n+(n-1)\varepsilon}{n}\Big)\left(\log C_n - \Big(\frac{(1+\varepsilon)n}{n+(n-1)\varepsilon}\Big)\log\,\mathrm{rad}(A_nB_nC_n)\right)\\ &\quad + 2(1+\varepsilon)n\log 2\\ &< 2\left(\log C_n - \Big(\frac{(1+\varepsilon)n}{n+(n-1)\varepsilon}\Big)\log\,\mathrm{rad}(A_nB_nC_n)\right) + 4n\log 2\\ &= 2\big(\log C_n - (1+\varepsilon')\log\,\mathrm{rad}(A_nB_nC_n)\big) + 4n\log 2,\end{aligned} \tag{5.5}$$

missä

$$\varepsilon' = \frac{(1+\varepsilon)n}{n+(n-1)\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{\phi(m)+(\phi(m)-1)\varepsilon}.$$

Koska *abc*-summa $(A_n,B_n,C_n)\in\mathbb{N}^3$ toteuttaa Konjektuurin 5.1.1 oletukset, saadaan yhtälön (5.2) ja epäyhtälön (5.4) nojalla

$$\log C_n - (1+\varepsilon')\log\,\mathrm{rad}(A_nB_nC_n) = \Phi_{\varepsilon'}(A_n,B_n,C_n) \leq K^*(\varepsilon',m),$$

jolloin epäyhtälöketju (5.5) sievenee muotoon

$$\Phi_\varepsilon(a,b,c) < 2K^*(\varepsilon',m) + 4\phi(m)\log 2.$$

Näin ollen jokaisella $\varepsilon > 0$ ja mielivaltaisella *abc*-summalla $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$, $a<b<c$, funktio $\Phi_\varepsilon(a,b,c)$ on ylhäältä rajoitettu. Tämä on yhtäpitävää *Abc*-konjektuurin kanssa. □

Huomautus 5.1.7. J. Oesterlé [47, s. 169] huomautti jo vuonna 1987, että mikäli Konjektuuri 5.1.1 pätee arvolla $m = 16$, niin silloin myös varsinainen *Abc*-konjektuuri on voimassa. Yleistä tapausta pidettiin pitkään tunnettuna, vaikka varsinainen todistus esitettiin kirjallisuudessa vasta vuonna 2000 [16].

5.2 n-konjektuuri

Abc-konjektuurissa tarkastellaan kolmea kokonaislukua, jotka täyttävät tietyt ehdot. Luonnollinen yleistys otaksumalle onkin tarkastella tilannetta, jossa kokonaislukuja on $n \geq 3$ kappaletta. Seuraava esitys perustuu J. Brownkinin ja J. Brzezińskin artikkeliin [6]. Aloitetaan tarkastelu määrittelemällä n-summa.

Määritelmä 5.2.1. Olkoon $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Vektoria $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ kutsutaan *n-summaksi*, mikäli seuraavat kolme ehtoa toteutuvat:

(i) $\operatorname{syt}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$,

(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$,

(iii) mikään kohdan (ii) summan aito osasumma ei ole yhtä suuri kuin nolla.

Vuonna 1994 J. Brownkin ja J. Brzeziński esittivät seuraavan otaksuman:

Konjektuuri 5.2.2 (n-konjektuuri)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa vakio $C(n, \varepsilon) > 0$ siten, että kaikille n-summille $(a_1, \ldots, a_n)$ pätee*

$$\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} \leq C(n, \varepsilon) \operatorname{rad}(a_1 \cdots a_n)^{2n-5+\varepsilon}.$$

Käyttämällä n-summaan liittyviä merkintöjä

$$\begin{aligned} M_n &= \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}, \\ m_n &= \operatorname{rad}(a_1 \cdots a_n), \\ L_n &= L(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\log M_n}{\log m_n}. \end{aligned}$$

voidaan Konjektuuri 5.2.2 esittää L_n-arvojen joukon kasaantumispisteiden supremumin $\limsup L_n$ avulla seuraavassa muodossa:

Konjektuuri 5.2.3. *Olkoon $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin kaikille n-summille $(a_1, \ldots, a_n)$ pätee*

$$\limsup L_n = 2n - 5.$$

n-konjektuurin todeperäisyyttä ei ole vielä pystytty osoittamaan. Voidaan kuitenkin osoittaa hieman heikompi tulos, jonka mukaan L_n-arvojen joukon kasaantumispisteiden supremum on suuruudeltaan ainakin $2n - 5$, ts. $\limsup L_n \geq 2n - 5$. Tätä varten tarvitaan seuraava aputulos.

Lemma 5.2.4. *Jokaista lukua $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ kohti on olemassa k-asteinen positiivikertoiminen polynomi $f_k \in \mathbb{Z}[x]$ siten, että*

$$\frac{x^{2k+1} - 1}{x - 1} = x^k f_k\left(\frac{(x-1)^2}{x}\right). \tag{5.6}$$

Todistus. Olkoon f_k polynomi, jolloin se voidaan kirjoittaa muodossa $f_k(z) = \sum_{j=0}^{k} s_j z^j$. Näin ollen yhtälö (5.6) voidaan geometrisen sarjan summan kaavaa soveltamalla ja tulo auki kirjoittamalla esittää muodossa

$$1 + x + \cdots + x^{2k-1} + x^{2k} = s_0 x^k + s_1 (x-1)^2 x^{k-1} + \cdots + s_{k-1}(x-1)^{2(k-1)} x + s_k (x-1)^{2k}.$$

Yhtälön eri puolien polynomien kertoimia vertailemalla ja polynomiesityksen yksikäsitteisyyttä soveltamalla nähdään, että ratkaisu on ylipäänsä olemassa ja että polynomin f_k kertoimet $s_j \in \mathbb{Z}$ kaikilla $j = 0, 1, \ldots, k$.

Tarkastellaan sitten yhtälön (5.6) vasenta puolta. Asetetaan $\alpha_j = \frac{2\pi j}{2k+1}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Näin ollen Lemmaa 2.5.12 soveltamalla sekä tuloa muokkaamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2k+1} - 1}{x - 1} &= \prod_{j=1}^{k} (x^2 - 2x\cos\alpha_j + 1) \\
&= \prod_{j=1}^{k} \Big(x^2 - 2x + 1 + 2x - 2x\cos\alpha_j \Big) \\
&= x^k \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{(x-1)^2}{x} + 2(1 - \cos\alpha_j) \right),
\end{aligned}$$

josta voidaan valita

$$f_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \big(z + 2(1 - \cos\alpha_j) \big).$$

Aiemmin todettiin kaikkien polynomin f_k kerrointen olevan kokonaislukuja. Kaikki kertoimet ovat lisäksi positiivisia, sillä polynomin f_k juuret ovat negatiivisia lukuja

$$z = -2(1 - \cos\alpha_j)$$

kaikilla $j = 1, 2, \ldots, k$. Väite seuraa. □

Huomautus 5.2.5. Polynomi $f_k(z)$ voidaan määritellä joko eksplisiittisesti muodossa

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^{k} \frac{2k+1}{k+j+1} \binom{k+j+1}{2j+1} z^j$$

tai induktiivisesti muodossa

$$\begin{aligned}
f_0(z) &= 1, \\
f_1(z) &= z + 3, \\
f_{k+1}(z) &= (z+2) f_k(z) - f_{k-1}(z).
\end{aligned}$$

Molemmilla tavoilla seuraaviksi polynomeiksi saadaan

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= z^2 + 5z + 5, \\
f_3(z) &= z^3 + 7z^2 + 14z + 7, \\
f_4(z) &= z^4 + 9z^3 + 27z^2 + 30z + 9 \\
f_5(z) &= z^5 + 11z^4 + 44z^3 + 77z^2 + 55z + 11.
\end{aligned}$$

Todistetaan seuraavaksi itse väite.

Lause 5.2.6. *Olkoon $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin kaikille n-summille $(a_1, \ldots, a_n)$ pätee*

$$\limsup L_n \geq 2n - 5.$$

Todistus. Olkoon $f_k, f_k(z) = \sum_{j=0}^{k} s_j z^j$, Lemman 5.2.4 mukainen polynomi, jolla $s_j \in \mathbb{N}$ kaikilla $j = 0, 1, \ldots, k$. Asetetaan yhtälössä (5.6) $k = n - 3$ ja $x = -\frac{a_1}{a_2}$, jolloin yhtälön vasen puoli sievenee muotoon

$$\frac{\left(-\frac{a_1}{a_2}\right)^{2(n-3)+1} - 1}{\left(-\frac{a_1}{a_2}\right) - 1} = \frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n-5} + 1}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + 1} = \frac{a_1^{2n-5} + a_2^{2n-5}}{a_2^{2n-6}(a_1 + a_2)}$$

ja yhtälön oikea puoli muotoon

$$\begin{aligned}\Big(-\frac{a_1}{a_2}\Big)^{n-3} \cdot \sum_{j=0}^{n-3} s_j \left(\frac{\left(\left(-\frac{a_1}{a_2}\right) - 1\right)^2}{\left(-\frac{a_1}{a_2}\right)}\right)^j &= \Big(-\frac{a_1}{a_2}\Big)^{n-3} \cdot \sum_{j=0}^{n-3} s_j \left(\frac{(\frac{a_1}{a_2} + 1)^2}{-\frac{a_1}{a_2}}\right)^j \\ &= \Big(-\frac{a_1}{a_2}\Big)^{n-3} \cdot \sum_{j=0}^{n-3} s_j \left(\frac{(a_1 + a_2)^2}{-a_1 a_2}\right)^j.\end{aligned}$$

Kertomalla yhtälön (5.6) sievennytty versio puolittain luvulla $a_2^{2n-6}(a_1 + a_2)$ saadaan

$$\begin{aligned}a_1^{2n-5} + a_2^{2n-5} &= a_2^{2n-6}(a_1 + a_2)\Big(-\frac{a_1}{a_2}\Big)^{n-3} \cdot \sum_{j=0}^{n-3} s_j \left(\frac{(a_1 + a_2)^2}{-a_1 a_2}\right)^j \\ &= (a_1 + a_2)\,(-a_1 a_2)^{n-3} \sum_{j=0}^{n-3} s_j \frac{(a_1 + a_2)^{2j}}{(-a_1 a_2)^j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-3} s_j (a_1 + a_2)^{2j+1} (-a_1 a_2)^{n-j-3}.\end{aligned}$$

Valitsemalla nyt $a_1 = 2^i$, $i > 1$, ja $a_2 = -1$, saadaan edellä olevasta yhtälöstä n:n kokonaisluvun summa

$$2^{i(2n-5)} - 1 - \sum_{j=0}^{n-3} s_j (2^i - 1)^{2j+1} 2^{i(n-j-3)} = 0. \tag{5.7}$$

Summalla ei ole sellaista aitoa osasummaa, joka olisi yhtä suuri kuin nolla, sillä ainoastaan ensimmäinen termi on positiivinen. Koska summan toinen termi on -1, kaikkien summattavien termien suurin yhteinen tekijä on 1 (Lause 2.1.5). Näin ollen Määritelmän 5.2.1 ehdot ovat voimassa, jolloin kyseessä on n-summa. Yhtälöstä (5.7) saadaan määrättyä edelleen

$$\begin{aligned}M_{n,i} &= 2^{i(2n-5)}, \\ m_{n,i} &= \operatorname{rad}\big((2^i - 1) 2 s_0 s_1 \cdots s_{n-3}\big) = \operatorname{rad}\big((2^i - 1)c\big),\end{aligned}$$

missä $c = 2s_0s_1 \cdots s_{n-3}$. Soveltamalla radikaalille arviota

$$\operatorname{rad}\big((2^i-1)c\big) \leq \operatorname{rad}(2^i-1)\operatorname{rad}(c) \leq (2^i-1)\operatorname{rad}(c) \leq 2^i \operatorname{rad}(c)$$

ja käyttämällä 2-kantaista logaritmia saadaan lopulta arvio

$$L_n = \frac{\log_2 M_{n,i}}{\log_2 m_{n,i}} = \frac{i(2n-5)}{\log_2 \operatorname{rad}((2^i-1)c)} \geq \frac{i(2n-5)}{i + \log_2 \operatorname{rad}(c)} \to 2n-5,$$

kun $i \to \infty$. Koska on äärettömästi sellaisia lukuja i, joille $2^i - 1$ ovat suhteellisia alkukuja, luvun i arvoja vastaavia erilaisia osamääriä L_n on äärettömästi. Näin ollen Lausetta 3.4.8 soveltaen joukolla $\{L_n\}$ on kasaantumispiste, joka on vähintään $2n-5$. □

Esitetään lopuksi Hun ja Yangin vuonna 2000 esittämä k:n termin *Abc*-konjektuuri [29].

Määritelmä 5.2.7. Olkoot $k \in \mathbb{N}$ ja $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Luvun a k-radikaali määritellään tulona

$$\operatorname{rad}_k(a) = \prod_{v=1}^{n} p_v^{\min\{i_v,k\}},$$

missä on käytetty kanonista esitystä $|a| = p_1^{i_1} \cdots p_n^{i_n}$.

Konjektuuri 5.2.8. *Olkoot* $a_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *siten, että* $\operatorname{syt}(a_0, a_j) = 1$ *kaikilla* $j = 1, \ldots, k$ *sekä mikään summan*

$$a_1 + \cdots + a_k = a_0$$

aito osasumma ei ole yhtä suuri kuin nolla. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ *kohti on olemassa luku* $C(k,\varepsilon)$ *siten, että*

$$\max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|\} \leq C(k,\varepsilon)\operatorname{rad}_{k-1}(a_0a_1 \cdots a_k)^{1+\varepsilon}.$$

5.3 Stothers-Masonin lause

Vuonna 1981 Stothers todisti *Abc*-konjektuuria vastaavan tuloksen polynomeille käyttämällä syvällisiä algebrallisen geometrian keinoja. Todistuksen syvällisyyden takia tulos ei kuitenkaan noussut yleiseen tietoisuuteen ennen kuin vasta vuonna 1983, jolloin Mason esitti alkeellisen todistuksen. Yksinkertaisimman tunnetun todistuksen tulokselle antoi Noah Snyder vuonna 2000. [35, s. 165]

Esitetään seuraavaksi Snyderin todistus kirjaan [35, s. 165–170] perustuen sekä selkeyttävää lähdettä [33] apuna käyttäen. Sitä ennen tarvitaan kuitenkin muutama aputulos.

Lemma 5.3.1. *Olkoon f polynomi suljetussa algebrallisessa kunnassa ja olkoon α polynomin f juuri monikertanaan $m(\alpha)$. Tällöin polynomin f' juuren monikerta pisteessä α on $m(\alpha) - 1$.*

Todistus. Kirjoitetaan polynomi f muodossa $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$, missä polynomille g pätee $g(\alpha) \neq 0$. Tulon derivoimissäännön nojalla

$$\begin{aligned} f'(t) &= (x-\alpha)^m g'(x) + m(x-\alpha)^{m-1} g(x) \\ &= (x-\alpha)^{m-1}\big((x-\alpha)g'(x) + mg(x)\big) = (x-\alpha)^{m-1} h(x), \end{aligned}$$

missä $h(x) = \big((x-\alpha)g'(x) + mg(x)\big)$ ja arvot $h(\alpha)$, $mg(\alpha)$ sekä $g'(\alpha)$ ovat nollasta eroavia. Näin ollen $(x-\alpha)^{m-1}$ on korkein luvun $(x-\alpha)$ potenssi, joka jakaa polynomin f', joten $m-1$ on polynomin f' juuren α monikerta. □

Merkintä 5.3.2. Olkoon f ei-vakio polynomi. Tällöin merkitään

$$\begin{aligned} \mathrm{n}_0(f) &= \text{funktion } f \text{ erillisten nollakohtien lukumäärä} \\ (f, f') &= \mathrm{syt}(f, f') = \text{funktioden } f \text{ ja } f' \text{ suurin yhteinen tekijä polynomirenkaassa.} \end{aligned}$$

Lemma 5.3.3. *Jos f on polynomi, niin* $\deg(f, f') = \deg(f) - \mathrm{n}_0(f)$.

Todistus. Olkoon $\deg(f) = n$ ja olkoot $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ polynomin f erilliset juuret moninkertoinaan $k_1, \ldots, k_i$. Tällöin $n = k_1 + \cdots + k_i$. Lemman 5.3.1 todistuksen mukaan

$$\mathrm{syt}(f, f') = (x-\alpha_1)^{k_1-1}(x-\alpha_2)^{k_2-1}\cdots(x-\alpha_i)^{k_i-1}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \deg(f, f') &= (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_i - 1) \\ &= (k_1 + k_2 + \cdots + k_i) - i \\ &= n - i = \deg(f) - \mathrm{n}_0(f), \end{aligned}$$

mistä väite seuraa □

Lause 5.3.4 (Stothers-Mason)**.** *Olkoot $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ keskenään jaottomia polynomeja, joista ainakin yksi ei ole vakio ja jotka toteuttavat yhtälön $f + g = h$. Tällöin*

$$\max\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} \leq \mathrm{n}_0(fgh) - 1.$$

Todistus. Todetaan ensin, että nyt on voimassa yhtälö

$$f'g - fg' = f'h - fh'. \tag{5.8}$$

Nimittäin yhtälöä $f + g = h$ derivoimalla saadaan $f' + g' = h'$, joten

$$f'g - fg' = f'(h - f) - f(h' - f') = f'h - fh'.$$

Todetaan lisäksi, että nyt ainakin kaksi polynomeista f, g ja h eivät ole vakioita. Kahden vakiofunktion tapauksessa nimittäin kolmannenkin funktion täytyy olla vakiofunktio. Näin ollen voidaan olettaa, että polynomit f ja g ovat vakiosta eroavia. Tällöin

$$f'g - fg' \neq 0.$$

Jos nimittäin $f'g = fg' \neq 0$, niin tällöin saadaan ristiriita $g \mid g'$, sillä polynomit f ja g ovat keskenään jaottomia.

Tarkastellaan sitten yhtälöä (5.8). Havaitaan, että yhtälön vasen puoli on jaollinen tekijöillä $\operatorname{syt}(f, f')$ sekä $\operatorname{syt}(g, g')$ ja yhtälön oikea puoli on jaollinen tekijällä $\operatorname{syt}(h, h')$. Mutta koska vasen ja oikea puoli ovat yhtäsuuret ja polynomit f, g ja h ovat keskenään jaottomia, saadaan

$$\operatorname{syt}(f, f') \operatorname{syt}(g, g') \operatorname{syt}(h, h') \mid (f'g - fg').$$

Näin ollen

$$\deg(f, f') + \deg(g, g') + \deg(h, h') \leq \deg(f'g - fg'),$$

jolloin edelleen

$$\deg(f, f') + \deg(g, g') + \deg(h, h') \leq \deg(f) + \deg(g) - 1. \tag{5.9}$$

Soveltamalla Lemmaa 5.3.3 polynomeihin f, g ja h saadaan

$$\begin{aligned} \deg(f, f') &= \deg(f) - \mathrm{n}_0(f), \\ \deg(g, g') &= \deg(g) - \mathrm{n}_0(g), \\ \deg(h, h') &= \deg(h) - \mathrm{n}_0(h), \end{aligned}$$

jotka sijoittamalla yhtälöön (5.9) saadaan

$$\deg(h) \leq \mathrm{n}_0(f) + \mathrm{n}_0(g) + \mathrm{n}_0(h) - 1 = \mathrm{n}_0(fgh) - 1,$$

sillä polynomit f, g ja h ovat keskenään jaottomia.

Koska funktiot f, g ja h ovat oleellisesti symmetrisiä yhtälön $f + g = h$ suhteen, voidaan vastaavanlaisella päättelyllä osoittaa sama yläraja asteille $\deg(f)$ ja $\deg(g)$. Väite seuraa. □

Huomautus 5.3.5. Lauseen 5.3.4 ehdot toteuttavien polynomien asteille pätee artikkelin [64] mukaan alaraja

$$\min\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} \leq \mathrm{n}_0(fgh) - 2.$$

Lauseen 5.3.4 välittömänä seurauksena saadaan Fermat'n suuren lauseen polynomiversio [35, s. 169].

Lause 5.3.6 (Fermat'n suuri lause polynomeille)**.** *Olkoot $u, v, w \in \mathbb{C}[x]$ keskenään jaottomia vakiosta eroavia polynomeja ja olkoon $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Tällöin yhtälöllä*

$$u^n + v^n = w^n$$

ei ole ratkaisuja.

Todistus. Lausetta 5.3.4 polynomeihin $f = u^n, g = v^n$ ja $h = w^n$ soveltamalla saadaan

$$\deg u^n \leq \mathrm{n}_0(u^n v^n w^n) - 1.$$

Koska $\deg(f) = \deg(u^n) = n \cdot \deg(u)$ ja $\mathrm{n}_0(f) = \mathrm{n}_0(u^n) \leq \deg(u)$, saadaan edelleen

$$n \cdot \deg(u) \leq \deg(u) + \deg(v) + \deg(w) - 1.$$

Analogisella päättelyllä saadaan polynomeille v ja w epäyhtälöt

$$\begin{aligned} n \cdot \deg(v) &\leq \deg(u) + \deg(v) + \deg(w) - 1, \\ n \cdot \deg(w) &\leq \deg(u) + \deg(v) + \deg(w) - 1. \end{aligned}$$

Lisäämällä yhtälöt puolittain yhteen saadaan

$$n\big(\deg(uvw)\big) \leq 3\big(\deg(uvw)\big) - 3 < 3\big(\deg(uvw)\big),$$

koska polynomit u, v ja w ovat oletuksen mukaan keskenään jaottomia. Jakamalla reunimmaiset epäyhtälöt puolittain termillä $\deg(uvw)$ saadaan $n < 3$, mikä on ristiriita. □

Huomautus 5.3.7. Lause 5.3.6 ei ole voimassa arvolla $n = 2$. Tämä nähdään asettamalla $u(x) = 1 - x^2$, $v(x) = 2x$ ja $w(x) = 1 + x^2$, jolloin polynomit u, v ja w ovat keskenään jaottomia mutta

$$(1 - x^2)^2 + (2x)^2 = (1 + x^2)^2.$$

Huomautus 5.3.8. Lauseessa 5.3.6 tarkasteltiin yksinkertaisuuden vuoksi tilannetta lukukunnassa $\mathbb{C}$. Mikäli tarkasteltavan lukukunnan karakteristika $\mathrm{char}\, p > 0$, ei lause ole enää voimassa. Tämä nähdään asettamalla lähteen [68, s. 9] mukaisesti $f(x) = x + 1, g(x) = x$ ja $h(x) = 1$, jolloin yhtälö

$$f(x)^p = g(x)^p + h(x)^p.$$

toteutuu myös arvolla $p > 3$.

5.4 Yleistys meromorfifunktioille

Tarkastellaan lopuksi vielä Nevanlinnan teorian ja lukuteorian välistä yhteyttä, jonka huomasi C. F. Osgood jo vuonna 1981 ja jota P. Vojta vuonna 1987 julkaisemassaan monografiassa [65, s. 30–45] syvensi rinnastamalla teorioiden käsitteitä ns. sanakirjan avulla [10, s. 151–160]. Aiemmin tarkasteltu Stothers-Masonin polynomilause (Lause 5.3.4) voidaan pienellä muokkauksella esittää vielä yleisemmässä, meromorfifunktioiden kontekstissa. Seuraavassa tarkastellaan tilannetta origokeskisessä r-säteisessä kiekossa, $|z| \leq r$, ja N ovat T Nevanlinnan teoriaan liittyvät lukumääräfunktio ja karakteristinen funktio, ks. [10], [28] ja [29]. Merkinnällä $\overline{N}$ tarkoitetaan erillisiin nollakohtiin liittyvää funktiota N [29, s. 290].

Vuonna 2000 Hu ja Yang esittivät Stothers-Masonin lauseen yleistyksen [28]:

Lause 5.4.1. *Olkoon κ algebrallisesti suljettu kunta, jonka karakteristika on nolla ja joka on kokonainen epätriviaalin ei-Arkhimedisen itseisarvon suhteen. Olkoot $a, b, c \in \kappa$ kokonaisia funktioita, joilla ei ole yhteisiä nollakohtia ja joille $a + b = c$. Tällöin*

$$\max\big\{T(r,a), T(r,b), T(r,c)\big\} \leq \overline{N}\Big(r, \frac{1}{abc}\Big) - \log r + \mathcal{O}(1).$$

Huomautus 5.4.2. Jos f on polynomi, tällöin voidaan osoittaa, että

$$\deg(f) = \lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r}, \qquad \mathrm{n}_0(f) = \lim_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

jolloin Stothers-Masonin lause seuraa Lauseesta 5.4.1 antamalla $r \to \infty$ [28].

Vuonna 2002 Hu ja Yang esittivät edelliselle lauseelle vielä seuraavan yleistyksen [29]:

Lause 5.4.3. *Olkoon κ algebrallisesti suljettu kunta, jonka karakteristika on nolla ja joka on kokonainen epätriviaalin ei-Arkhimedisen itseisarvon suhteen. Olkoot $f_j \in \kappa, j = 0, 1, \ldots, k$, kokonaisia funktioita, joilla ei ole yhteisiä nollakohtia ja joille*

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_k = 0.$$

Tällöin

$$\max_{0\leq j\leq k} \big\{T(r, f_j)\big\} \leq \sum_{i=0}^{k} N_{k-1}\Big(r, \frac{1}{f_i}\Big) - \frac{k(k-1)}{2}\log r + \mathcal{O}(1),$$

missä lukumääräfunktio N_{k-1} laskee jokaisen nollakohdan korkeintaan $k-1$-kertaisena.

Huomautus 5.4.4. Olkoon $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Jos polynomilla f on faktorisointi

$$f(z) = z_0(z - z_1)^{i_1} \cdots (z - z_n)^{i_n},$$

missä $z_0 \in \kappa \setminus \{0\}$ ja $z_1, \ldots, z_n \in \kappa$ ovat polynomin f toisistaan eroavia juuria, niin tällöin

$$\mathrm{n}_{0,k-1}(f) = \lim_{r\to\infty} \frac{N_{k-1}(r, \frac{1}{f})}{\log r} = \sum_{v=1}^{n} \min\{i_v, k\}.$$

Huomautusten 5.4.2 ja 5.4.4 nojalla Lauseesta 5.4.3 saadaan suorana seurauksena seuraava polynomilause [29]:

Seuraus 5.4.5. *Olkoon κ algebrallisesti suljettu kunta, jonka karakteristika on nolla ja joka on kokonainen epätriviaalin ei-Arkhimedisen itseisarvon suhteen. Olkoot $f_j \in \kappa$, $j = 0, 1, \ldots, k$, polynomeja, joilla ei ole yhteisiä nollakohtia ja joille*

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_k = 0.$$

Tällöin

$$\max_{0\le j\le k} \left\{ \deg(f_j) \right\} \le \sum_{i=0}^{k} \mathrm{n}_{0,k-1}(f_i) - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Huomautus 5.4.6. Arvolla $k = 2$ Seuraus 5.4.5 redusoituu Mason-Stothersin lauseeksi.

Huomautus 5.4.7. Lausetta 5.4.3 kokonaislukujen tilanteeseen soveltamalla saadaan myös hieman erilainen yleistys *Abc*-konjektuurista (Konjektuuri 5.2.8). Tässäkin tapauksessa arvolla $k = 2$ konjektuuri redusoituu alkuperäiseen tilanteeseen.

Abc-konjektuurin versioissa meromorfifunktioille on mukana poikkeuksetta logaritmisia termejä. Herääkin kysymys, voidaanko alkuperäiseen *Abc*-konjektuuriin lisätä vastaavanlaisia termejä kokonaislukujen ja meromorfifunktioiden matemaattisten struktuurien yhtenäistämiseksi. Tiedetään ehdon $\mathrm{rad}(abc) < c$ toteuttavia *abc*-osumia olevan äärettömästi, mutta voidaanko ehtoa vielä tiukentaa logaritminen termi lisäämällä, esimerkiksi

$$\mathrm{rad}(abc) < \frac{c}{\log c},$$

ja saada silti ääretön määrä ehdon toteuttavia *abc*-kolmikoita? Vastaus ainakin kyseiseen esimerkkiin on myönteinen ja sitä on tarkasteltu syvemmin aliluvussa 3.7.

6 Yhteenveto

Vuonna 1985 Joseph Oesterlé ja David Masser esittivät *Abc*-konjektuurin pohjaten Szpiron elliptisille käyrille esittämään konjektuuriin sekä Masonin ja Stothersin polynomeille todistamaan lauseeseen tarkoituksenaan kehittää uusi työkalu Fermat'n suuren lauseen todistamiseen. Se onkin osoittautunut erittäin käyttökelpoiseksi niin Diophantoksen yhtälöiden ja epäyhtälöiden kuin myös elliptisten käyrien teoriassa. Yleisessä muodossa *Abc*-konjektuuri voidaan esittää seuraavasti:

***Abc*-konjektuuri.** *Jokaista reaalilukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa reaaliluku $C(\varepsilon) > 0$ siten, että kaikilla kolmikoilla $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$ ja* $\operatorname{syt}(a, b, c) = 1$, *on voimassa epäyhtälö*

$$\max\left\{|a|, |b|, |c|\right\} \leq C(\varepsilon)\,\operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon},$$

missä $\operatorname{rad}(abc)$ *tarkoittaa tulon abc alkutekijöiden tuloa.*

Abc-konjektuurin formulaatio on paras mahdollinen tai ainakin hyvin lähellä sitä, sillä se ei ole totta ilman lukua $\varepsilon > 0$. Luku $C(\varepsilon)$ sen sijaan voitaneen jättää pois, mikäli tämä huomioidaan radikaalin eksponentissa $1 + \varepsilon$. Lukujen ε ja $C(\varepsilon)$ välillä onkin eräänlainen käänteinen suhde, sillä $C(\varepsilon) \to \infty$, kun $\varepsilon \to 0$. Vakiolta $C(\varepsilon)$ ei vaadita efektiivistä laskettavuutta, joten sen poisjättäminen mahdollistaisi eksplisiittisten tulosten saamisen. Rajoituttaessa tarkastelemaan asymptoottista "vain äärellisen ratkaisujoukon olemassaoloa" tämä ei kuitenkaan ole ongelma.

Konjektuuria voidaan tarkastella myös keskittymällä pelkästään sen oletukset toteuttaviin positiivisiin *abc*-kolmikoihin, joilla $0 < a < b < c$. Ehdon $\operatorname{rad}(abc) < c$ toteuttavia *abc*-kolmikoita, ns. *abc-osumia*, on ääretön määrä kuten myös tiukemman ehdon

$$\operatorname{rad}(abc) < \frac{c}{\log c}$$

toteuttavia ns. *logaritmisia abc-osumia*, joita ei kirjallisuudessa aiemmin ole esiintynyt. Kasaantumispisteisiin liittyvien menetelmien käytön tarkastelussa mahdollistaa *abc*-osumista muodostetut osamäärät eli ns. L-arvot,

$$L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log\, \operatorname{rad}(abc)}.$$

Abc-konjektuurin monet esitysmuodot perustuvat erilaisiin lähestymistapoihin ymmärtää tai soveltaa otaksumaa. Luonnolliset yleistykset liittyvät konjektuurin väitteen jalostamiseen, tarkasteltavien kokonaislukujen jaollisuuteen tai lukumäärään sekä Stothers-Masonin polynomilauseen pohjalta kehiteltyihin *Abc*-konjektuurin funktioversioihin.

Tässä tutkielmassa käsitellään *Abc*-konjektuuria lähinnä lukuteorian näkökulmasta. Tavoitteena on antaa laaja kuva konjektuurin taustalla olevista matemaattisista rakenteista sekä esittää perusteellinen katsaus kuluneen vajaan 30 vuoden aikana julkaistuista tuloksista. *Abc*-osumien etsimiseen liittyviä algoritmeja ei ole aiemmin kirjallisuudessa esiintymättömiä logaritmisia *abc*-osumia (liite F) lukuunottamatta tässä yhteydessä käsitelty, vaikka niihin perustuvaa taulukkotietoa onkin esitetty liitteissä A, B, C, D ja E. Kirjoitushetkellä *Abc*-konjektuurin todenperäisyys on vieläkin tuntematon.

Viitteet

[1] Apostol, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag New York Inc., New York, 1976.

[2] Baker, A. *Logarithmic forms and the abc-conjecture.* Number Theory: diophantine, computational and algebraic aspects: proceedings of the international conference held in Eger, Hungary, July 29-August 2, ss. 37–44, de Gruyter, Berliini, 1998.

[3] Ball P. *Proof claimed for deep connection between primes.* WWW-dokumentti (haettu 16.10.2012). url: `http://www.nature.com/news/proof-claimed-for-deep-connection-between-primes-1.11378`

[4] Bombieri, E., Gubler, W. *Heights in Diophantine Geometry.* Cambridge University Press, New York, 2006.

[5] Berndt, B. C., Galway, W. F. *On the Brocard-Ramanujan Diophantine Equation* $n! + 1 = m^2$. Ramanujan J. 4, No. 1 (2000), ss. 41–42.

[6] Browkin, J., Brzeziński, J. *Some remarks on the abc-conjecture.* Math. Comp. 62, No. 206 (1994), ss. 931–939.

[7] Browkin, J., Filaseta, M., Greaves, G., Schinzel, A. *Squarefree values of polynomials and the abc conjecture.* Sieve Methods, Exponential Sums, and their Applications in Number Theory, Cambridge University Press ss. 65–85, Cambridge, 1997.

[8] Browkin, J. *The abc-conjecture.* Number theory, ss. 75–105, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2000.

[9] Cassels, J. W. S. *An Introduction to the Geometry of Numbers, reprint of the 1971 edition.* Springer-Verlag, Berliini, 1997.

[10] Cherry W. Ye Z. *Nevanlinna's Theory of Value Distribution.* Springer-Verlag, Berliini, 2001

[11] Cochrane, T., Dressler, R. E. *Gaps between integers with the same prime factors.* Math. Comp. 68, No. 225 (1999), ss. 395–401.

[12] Dabrowski, A. *On the Diophantine equation* $x! + A = y^2$. Nieuw Arch. Wisk. (4) 14, No. 3 (1996), ss. 321–324.

[13] Dahmen, S. R. *Lower bounds for numbers of ABC-hits.* Journal of Number Theory 128 (2008), ss. 1864–1873.

[14] Darmon, H., Granville, A. *On the equations* $z^m = F(x, y)$ *and* $Ax^p + By^q = Cz^r$. Bull. London Math. Soc. 27, No. 6 (1995), ss. 513–543.

[15] Edwards, H. M. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[16] Ellenberg, J. S. *Congruence ABC implies ABC*. Indag. Math. (N.S.) 11, No. 2 (2000), ss. 197–200.

[17] Filaseta, M., Konyagin, S. *On a limit point associated with the abc-conjecture*. Colloq. Math. 76 (1998), No. 2, ss. 265–268.

[18] Fraleigh, J. B. *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 2003.

[19] van Frankenhuysen, M. *A Lower Bound in the abc Conjecture*. J. Number Theory 82 (2000), No. 1, ss. 91–95.

[20] van Frankenhuysen, M. *The ABC conjecture implies Roth's Theorem and Mordell's conjecture*. Mat. Contemp. 16 (1999), ss. 45–72.

[21] Geuze, G., de Smit, B. *Reken mee met ABC*. Nieuw Archief voor Wiskunde Part 8, No. 1 (2007), ss. 26–30.

[22] Goldfeld, D. *Beyond the Last Theorem*. The Sciences, March/April (1996), ss. 34–40.

[23] Granville A., Tucker T. *It's as easy as abc*. Notices Amer. Math. Soc. 49, No. 10 (2002), ss. 1224–1231.

[24] Granville, A., Stark, H. *ABC implies no "Siegel zeros" for L-functions of characters with negative discriminant*. Invent. Math. 139, No. 3 (2000), ss. 509–523

[25] Greaves, G. Nitaj, A. *Some polynomial identities related to the abc- conjecture*. Number theory in progress. Proceedings of the international conference organized by the Stefan Banach International Mathematical Center in honor of the 60th birthday of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland, June 30–July 9, 1997. Volume 1: Diophantine problems and polynomials, ss. 229–236. de Gruyter, Berlin, 1999.

[26] Guy, R. K. *Unsolved Problems in Number Theory, Second Edition*. Springer Verlag New York Inc., Yhdysvallat, 1994.

[27] Hardy, G. H., Wright, E. M. *Introduction to the Theory of Numbers, Sixth Edition*. Oxford University Press Inc., Norfolk , 2008.

[28] Hu P.-C., Yang C.-C. *The abc conjecture over function fields*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci 76, No. 7 (2000), ss. 118–120

[29] Hu P.-C., Yang C.-C. *A generalized abc-Conjecture over Function Fields*. Journal of Number Theory, 94 (2002), ss. 286–298

[30] Ingham, A. E. *The Distribution of Prime Numbers*. Stechert-Hafner Service Agency Inc., New York, 1964.

[31] Jones, G. A., Jones J. M. *Elementary Number Theory*. Springer-Verlag, Lontoo 2005

[32] Knauer, J., Richstein, J. *The Continuing Search for Wieferich Primes*. Math. Comp. 74, No. 251 (2005), ss. 1559–1563.

[33] Lama, V. *Mason-Stothers Theorem and the ABC Conjecture*. WWW-dokumentti (haettu 25.12.2012). url: `http://topologicalmusings.wordpress.com/2008/03/03/mason-stothers-theorem-and-the-abc-conjecture/`

[34] Lang, S. *Old and New Conjectured Diophantine Equations*. Bull. Amer. Math. Soc. 23, No. 1 (1990), ss. 37–75.

[35] Lang, S. *Undergraduate Algebra, Third Edition*. Springer Science+Business Media Inc., Yhdysvallat, 2005.

[36] Latvala, V. *Lukuteoria*. Luentomoniste, Itä-Suomen yliopisto, 2010.

[37] Luca, F. *On a conjecture of Erdös and Stewart*. Math. Comp. 70, No. 234 (2001), ss. 893–896.

[38] Mathematical Institute of Leiden University. *ABC@Home*. Haettu 5.3.2013 url: `http://abcathome.com/`

[39] Mihăilescu, P. *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*. J. Reine Angew. Math. 572 (2004), ss. 167–195.

[40] Mordell, L. J. *Diophantine Equations*. Academic Press Inc., Lontoo, 1969.

[41] Nathanson, M. B. *Elementary Methods in Number Theory*. Springer-Verlag New York Inc., New York, 2000.

[42] Nitaj, A. *Aspects expérimentaux de la conjecture abc*. Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 235 ss. 145–156, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[43] Nitaj, A. *On a conjecture of Erdös on 3-powerful numbers*. Bull. London Math. Soc. 27, No. 4 (1995), ss. 317–318.

[44] Nitaj, A. *Conséquences et aspects expérimentaux des conjectures abc et de Szpiro*. Ph.D. Thesis, University of Caen, 1994.

[45] Nitaj, A. *La conjecture abc*. Enseign. Math. (2) 46, No. 1-2 (1996), ss. 3–24.

[46] Nitaj, A. *The abc conjecture*. WWW-dokumentti (haettu 12.5.2013). url: `http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html`

[47] Oesterlé, J. *Nouvelles approches du "theoreme" de Fermat*. Séminaire N. Bourbaki, Vol. 1987–88. Astérisque No. 161–162 (1988), Exp. No. 694, 4, ss. 165–186.

[48] Overholt, M. *The Diophantine Equation* $n! + 1 = m^2$. Bull. Lond. Math. Soc. 25, No. 2 (1993), s.104.

[49] Ribenboim, P. *Remarks on exponential congruences and powerful numbers*. J. Number Theory 29, No. 3 (1988), ss. 251–263.

[50] Riesel, H. *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, Second Edition*. Birkhäuser, Boston, 1994.

[51] Rosen, K. H. *Elementary Number Theory and Its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Yhdysvallat, 1986.

[52] Ross, S. M. *A First Course in Probability*. Prentice-Hall Inc., Yhdysvallat, 1998.

[53] Saari, K. *ABC-otaksuma*. Pro gradu –tutkielma, Turun yliopisto, 2003.

[54] Schmidt, W. *Diophantine Approximations and Diophantine Equations (Lecture Notes in Mathematics)*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Saksa, 1991.

[55] Shorey, T. N., Tijdeman, R. *Exponential Diophantine Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[56] Silverman, J. H. *The Arithmetic of Elliptic Curves, Second Edition*. Springer Science+Business Media, New York, 2009.

[57] Silverman, J. H. *Wieferich's criterion and the abc-conjecture*. J. Number Theory 30, No. 2 (1988), ss. 226–237.

[58] de Smit, B. *Bart de Smit - ABC triples*. WWW-dokumentti (haettu 12.5.2013). url: `http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php?sort=1`

[59] Stewart, C. L., Yu, Kun Rui. *On the abc-conjecture*. Math. Ann. 291, No. 2 (1991), ss. 225–230.

[60] Stewart, C. L., Yu, Kun Rui. *On the abc-conjecture. II*. Duke Math. J 108, No. 1 (2001), ss. 161-181.

[61] Stewart, C. L., Tijdeman, R. *On the Osterlé-Masser Conjecture*. Monatsh. Math 102, No. 3 (1986), ss. 251–257.

[62] Tignol, J.-P. *Galois' Theory of Algebraic Equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 2002.

[63] Trench, W. F. *Introduction to real analysis*. Prentice Hall/Pearson Education, 2003.

[64] Vaserstein, L. N. *Quantum (abc)-Theorems*. J. Number Theory 81, No. 2 (2000), ss. 351– 358.

[65] Vojta, P. *Diophantine Approximations and Value Distribution Theory*. Springer-Verlag, Berliini, 1987.

[66] Waldschmidt, M. *Nombres Transcendants*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1974.

[67] Wiles, A. *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*. Ann. of Math. (2) 141, No. 3 (1995), ss. 443–551.

[68] Wheeler, J. P. *The abc conjecture.* Master's Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 2002.

[69] Woods, A. L. *Some problems in logic and number theory, and their connections.* Ph.D. thesis, University of Manchester, 1981. WWW-dokumentti (haettu 25.12.2012). url: `http://school.maths.uwa.edu.au/~woods/thesis/WoodsPhDThesis.pdf`

A 50 laadultaan parasta *abc*-kolmikkoa

Abc-kolmikon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ laatu [8, s. 77] määritellään lukuna

$$L = L(a, b, c) = \frac{\log c}{\log \operatorname{rad}(abc)}.$$

Abc-kolmikko on laadultaan *hyvä*, mikäli $L > 1,4$ [45, s. 18]. Nykyään tunnetaan 234 laadultaan hyvää *abc*-kolmikkoa, joista 50 parasta on esitetty alla [58].

No.	L	a	b	c	löytäjä	vuosi
1	1.6299	2	$3^{10}109$	23^5	ER	1987
2	1.6260	11^2	$3^2 5^6 7^3$	$2^{21}23$	BdW	1985
3	1.6235	$19 \cdot 1307$	$7 \cdot 29^2 31^8$	$2^8 3^{22} 5^4$	JB JB	1994
4	1.5808	283	$5^{11}13^2$	$2^8 3^8 17^3$	JB JB AN	1993
5	1.5679	1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 7$	BdW	1988
6	1.5471	7^3	3^{10}	$2^{11}29$	BdW	1988
7	1.5444	$7^2 41^2 311^3$	$11^{16}13^2 79$	$2 \cdot 3^3 5^{23} 953$	AN	1993
8	1.5367	5^3	$2^9 3^{17} 13^2$	$11^5 17 \cdot 31^3 137$	HtR PM	
9	1.5270	$13 \cdot 19^6$	$2^{30}5$	$3^{13}11^2 31$	AN	1993
10	1.5222	$3^{18}23 \cdot 2269$	$17^3 29 \cdot 31^8$	$2^{10}5^2 7^{15}$	AN	1993
11	1.5094	$13^{10}37^2$	$3^7 19^5 71^4 223$	$2^{26}5^{12}1873$	TD	2003
12	1.5033	$2^7 23^8$	$19^9 857^2$	$3^{22}13 \cdot 47^2 263$	TS MH	
13	1.5028	239	$5^8 17^3$	$2^{10}37^4$	JB JB AN	1993
14	1.4976	$5^2 7937$	7^{13}	$2^{18}3^7 13^2$	BdW	1988
15	1.4924	$2^2 11$	$3^2 13^{10} 17 \cdot 151 \cdot 4423$	$5^9 139^6$	AN	1993
16	1.4916	73	$2^{13}7^7 941^2$	$3^{16}103^3 127$	AN	1993
17	1.4892	2^{24}	$11^7 19 \cdot 29^2$	$3^{11}5^3 7^3 41$	AN	1993
18	1.4889	11^2	$3^9 13$	$2^{11}5^3$	BdW	1988
19	1.4829	37	2^{15}	$3^8 5$	BdW	1988
20	1.4813	$5^{14}19$	$2^5 3 \cdot 7^{13}$	$11^7 37^2 353$	AN	1993
21	1.4805	$5^{22}79 \cdot 45949$	$3^2 13^{18} 61^3$	$2^{23}17^4 251^2 1733^3$	FR	2010
22	1.4744	1	$3^{16}7$	$2^3 11 \cdot 23 \cdot 53^3$	AN	1993
23	1.4741	7^2	$2^{10}11 \cdot 53^2$	$3^4 5^8$	JB JB AN	1993
24	1.4713	$3^4 199$	11^8	$2^3 5^7 7^3$	JB JB AN	1993
25	1.4657	$17^4 67$	$2^{19}137^4$	$3^{15}5^3 13 \cdot 89^2$	HtR PM	
26	1.4655	7^{12}	$2^{14}67^3 461$	$3^{13}11 \cdot 19^4$	AN	1993
27	1.4646	$5^2 23^{10} 106531$	$7^{11}11^3 193^4$	$2^4 3^{19} 17^8 29$	FR	2007
28	1.4619	$2^7 5^2$	$7^6 41$	13^6	BdW	1988
29	1.4606	$7 \cdot 167 \cdot 811^4 919$	$3^4 13^2 23^{12} 67^4$	$2^{31}5^3 11^2 17^5 107^4$	IC	2010
30	1.4594	$5^{11}31 \cdot 191$	$2^8 7^{13} 89 \cdot 859^2$	$3^{30}13^4 277$	KV	

No.	L	a	b	c	löytäjä	vuosi
31	1.4578	$5^{12}17^2 31^2 1699$	$23^{14}29$	$2^{19}3^2 11 \cdot 13^{10}47$	AN	1993
32	1.4578	$3^6 5^{12}$	$2^{16}13 \cdot 59^4$	$7^{11}47 \cdot 113$	AN	1993
33	1.4575	$3 \cdot 109 \cdot 131^4$	$5^{22}89$	$2^3 11^2 19^5 97^4$	TS	
34	1.4571	$3^2 5^2$	$2^4 17^3 31^4$	$7^{10}257$	AN	1993
35	1.4562	$2^{25}19$	$3 \cdot 5^{15}1033$	$11^7 13^3 47^2$	AN	1993
36	1.4557	1	$2^5 3 \cdot 5^2$	7^4	BdW	1988
37	1.4551	$3^2 11^6$	2^{35}	$19^5 13883$	JB JB	1994
38	1.4550	$23^2 31^5$	$2^{25}7 \cdot 109^3$	$3^{19}5^2 19^2 29$	TS	
39	1.4544	$7^8 2707$	$2^{10}5^{10}29^3$	$3^{18}11^4 43$	TS AR	
40	1.4533	13^6	$2 \cdot 3^4 7^4 11^9 23$	$5^7 103^4 2399$	AN	1993
41	1.4532	$7^5 23^2 101^4$	$2^{43}359^2$	$3^9 13 \cdot 19^6 307^2$	TS MH	
42	1.4526	$2^{19}13 \cdot 103$	7^{11}	$3^{11}5^3 11^2$	BdW	1988
43	1.4520	$2^{20}233^5$	$37 \cdot 59^8 4729^2$	$3^{24}5^6 19 \cdot 23 \cdot 251^2$	FR	2010
44	1.4519	$31^3 61^5$	$17^{10}83^2 2719 \cdot 15101$	$2 \cdot 3^3 5^{17}7^{12}$	FR	2007
45	1.4513	$3^5 7$	$5^6 67$	2^{20}	JB JB AN	1993
46	1.4509	$3^5 7^3$	$2^{13}23^3 59$	$5^3 19^6$	JB JB	1994
47	1.4502	$23^8 37^4$	$2^{28}3^7 11^4 19^3 61 \cdot 127 \cdot 173^2$	$5^{18}17^4 43^2 4817^2$	IC	2008
48	1.4501	$23^3 53^6 3167^2$	$2^8 3^{29}11399^2$	$5^7 7^4 13^{12}523$	FR	2008
49	1.4500	1	$3^3 5^3 7^7 23$	$2^{13}11^4 13 \cdot 41$	AN	1993
50	1.4497	1	$3 \cdot 5^5 47^2$	$2^{18}79$	GF	

Löytäjien lyhenteet

AN : Abderrahmane Nitaj
AR : Andrej Rosenheinrich
BdW : Benne de Weger
ER : Eric Reyssat
FR : Frank Rubin
GF : Gerhard Frey
HtR : Herman te Riele
IC : Ismael Jiménez Calvo
JB JB : Jerzy Browkin, Juliusz Brzezinski
KV : Kees Visser
MH : Mathias Hegner
PM : Peter Montgomery
TD : Tim Dokchitser
TS : Traugott Schulmeiss

B 50 laadultaan parasta *abc*-Szpiro-kolmikkoa

Szpiron konjektuurin innoittamana voidaan tarkastella *abc*-kolmikon $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ Szpiro-laatua [44, s. 8], joka määritellään lukuna

$$\rho = \rho(a, b, c) = \frac{\log |abc|}{\log \operatorname{rad}(abc)}.$$

Abc-kolmikko on Szpiro-laadultaan *hyvä*, mikäli $\rho > 4$. Alla on esitetty uudemman tiedon puutteessa 50 parasta vuonna 2003 tunnettua hyvää *abc*-Szpiro-kolmikkoa [46], [42].

No.	ρ	a	b	c	löytäjä	vuosi
1	4.41901	$13 \cdot 19^6$	$2^{30}5$	$3^{13}11^2 31$	AN	1992
2	4.26801	$2^5 11^2 19^9$	$5^{15}37^2 47$	$3^7 7^{11} 743$	AN	1994
3	4.24789	$2^{19}13 \cdot 103$	7^{11}	$3^{11}5^3 11^2$	BdW	1985
4	4.23181	$19^8 43^4 149^2$	$2^{15}5^{23}101$	$3^{13}13 \cdot 29^2 37^6 911$	TD	2003
5	4.23069	$2^{35}7^2 17^2 19$	$3^{27}107^2$	$5^{15}37^2 2311$	AN	1994
6	4.22979	$3^{18}23 \cdot 2269$	$17^3 29 \cdot 31^8$	$2^{10}5^2 7^{15}$	AN	1994
7	4.22960	$17^4 79^3 211$	$2^{29}23 \cdot 29^2$	5^{19}	AN	1994
8	4.22532	$5^{14}19$	$2^5 3 \cdot 7^{13}$	$11^7 37^2 353$	AN	1994
9	4.21019	$2^7 5^4 7^{22}$	$19^4 37 \cdot 47^4 53^6$	$3^{14}11 \cdot 13^9 191 \cdot 7829$	TD	2003
10	4.20094	3^{21}	$7^2 11^6 199$	$2 \cdot 13^8 17$	AN	1992
11	4.17428	$3^6 5^{12}$	$2^{16}13 \cdot 59^4$	$7^{11}47 \cdot 113$	AN	
12	4.17088	$3^{16}23^2$	$2^{13}29^2 37^3$	$5^9 11^4 13$	AN	
13	4.16452	$5^{14}11$	$3^6 7^5 13^2 \cdot 251$	$2^{21}23^4$	AN	
14	4.14980	$2^{17}3^{19}11 \cdot 25867$	$7^{12}23^7$	$5 \cdot 37^{10}53 \cdot 71$	TD	2003
15	4.14883	$5^{18}6359$	$3^2 47^6 73^3$	$2^7 19^{10}79$	AN	1994
16	4.13636	$7^8 13 \cdot 89^3$	$3^{13}5^3 11^4 1499$	$2 \cdot 19^{12}$	TD	2003
17	4.13152	$2^7 23^8$	$19^9 857^2$	$3^{22}13 \cdot 47^2 263$	MH TS	
18	4.13000	$11^3 31^5 101 \cdot 479$	107^8	$2^{31}3^4 5^6 7$	AN	1994
19	4.12727	$5^{12}17^2 31^2 1699$	$23^{14}29$	$2^{19}3^2 11 \cdot 13^{10}47$	AN	
20	4.12465	$13^{10}37^2$	$3^7 19^5 71^4 223$	$2^{26}5^{12}1873$	TD	2003
21	4.12366	$3 \cdot 5^9 13^2 79^3 239^2 91249$	7^{29}	$2^{65}37 \cdot 41 \cdot 103$	AN	
22	4.10907	$2^{55}23$	$3^{13}7^9 13 \cdot 79^2$	$11^4 43^6 65353$	TD	2003
23	4.10809	$11^8 13^9 53$	$2^4 5^{16}17 \cdot 547 \cdot 6163$	$7^6 19^{12}$	TD	2003
24	4.10757	$7 \cdot 11^6 43$	$3^{11}5^4$	$2^{17}17^3 43$	GX	1986
25	4.10590	$233^4 439$	$2^{15}3^{19}$	$5^8 17^5 71$	TD	2003
26	4.10470	$2^{13}71^2 337^3$	$7^{13}1117^2$	$3^{21}13^3 73^2$	TD	2003
27	4.10410	$3 \cdot 5^{14}199$	$7^2 11^5 17^4 41$	$2^{30}13^4$	AN	
28	4.10116	$5^7 23^7 1493$	$31^8 3907^2$	$2^{52}3^2 331$	TD	2003
29	4.09700	$3^6 5^{11}41$	$2^9 7^9 283$	$13^{10}53$	AN	1994
30	4.09655	$2^{16}41 \cdot 71$	$3^{15}7^2$	19^7	AN	1993

No.	ρ	a	b	c	löytäjä	vuosi
31	4.09647	$3^{12}5^6$	$7^9 31^2$	$2^9 11^5 571$	AN	1992
32	4.09080	$7^8 19$	$2^{15}5^2 37^2$	$3 \cdot 17^7$	AN	1992
33	4.08545	$2^6 5^2 7^{13} 13^2 463$	$3^4 43^{12}$	$11^{12} 389^2 6841$	AN	
34	4.08362	$2^{13}5^{12}13^4 29$	$7^{16}19 \cdot 7451$	$3^{20}11^4 353^2$	TD	2003
35	4.08331	$79^5 677$	2^{42}	$3^{12}7 \cdot 13^4 61$	AN	1994
36	4.08299	$11^{11}73^2 991 \cdot 306083$	$2^2 3 \cdot 5^{11}7^{15}19^2$	$13^{15}31^5$	TD	2003
37	4.08262	$2 \cdot 5^9 11^4 41^2 53^3$	$3^9 7^{16}37$	$23^{11}40423$	TD	2003
38	4.07920	$31 \cdot 59^6$	$2^{25}3^1 1$	$5^3 11^7 13 \cdot 229$	TD	2003
39	4.07709	$5^{18}8837$	$7^9 19^3 79 \cdot 191^2$	$2^{22}3^5 13^8$	AN	
40	4.07457	$3^{13}13 \cdot 23^3 97^2$	$2^{37}157^2$	$5^5 31^7 67$	TD	2003
41	4.07337	$3^2 73^{10}$	$5^{25}17^2 23$	$2^2 7^1 1827^2 373357$	TD	2003
42	4.07114	$2^{24}3^5$	$5 \cdot 19^5 59^2$	$7^{10}167$	AN	1992
43	4.07038	$19 \cdot 47 \cdot 71^6$	$5^3 7^3 29^{11}$	$3^{35}23^3$	AN	1994
44	4.06886	$3^4 5^{18}71 \cdot 419 \cdot 876581$	$2^{17}13^2 19^{15}$	$7^6 11^{12} 977^3$	TD	2003
45	4.06705	$2^{26}11^4 7639$	$5^6 23^{11}$	$3^{18}47^4 7879$	TD	2003
46	4.06668	$5^{16}19^2$	$3^8 7^3 89^4$	$2^{28}11^2 6043$	TD	2003
47	4.06406	$7^3 29^5 151^2$	$2^4 5^{16}97 \cdot 919$	$3^{27}13^4$	AN	
48	4.06347	$19 \cdot 47 \cdot 71^6$	$3^{21}193^2$	$2^7 5^{12}127^2$	AN	1994
49	4.06231	$5^7 7^7 19^2 107$	$2^{14}11^9 97$	$3^{10}23^7 31$	TD	2003
50	4.06160	$2^7 3 \cdot 821^5$	13^{16}	$5^{12}101^2 324697$	TD	2003

Löytäjien lyhenteet

AN : Abderrahmane Nitaj
BdW : Benne de Weger
GX : Gang Xiao
MH TS : Mathias Hegner, Traugott Schulmeiss
TD : Tim Dokchitser

C Abc-osumien lukumäärä

Abc-osumien ja alkulukujen lukumäärää kuvataan funktioilla $N(X)$ ja $\pi(X)$,

$$N(X) = |\{abc\text{-osuma (a,b,c)} \in \mathbb{N}^3 \mid c \leq X\}|$$
$$\pi(X) = |\{p \text{ alkuluku} \mid p \leq X\}|.$$

Alla olevassa taulukossa verrataan *abc*-osumien lukumäärää alkulukujen lukumäärään. [2]

X	$N(X)$	$\pi(X)$	$\pi(X)/N(X)$	$N(10X)/N(X)$
10	1	4	4	6
10^2	6	25	$4,17$	$5,17$
10^3	31	168	$5,42$	$3,87$
10^4	120	1229	$10,24$	$3,48$
10^5	418	9592	$22,95$	$3,03$
10^6	1268	78 498	$61,91$	$2,76$
10^7	3499	664 579	$189,93$	$2,57$
10^8	8987	5 761 455	$641,09$	$2,48$
10^9	22 316	50 847 534	$2\,278,52$	$2,32$
10^{10}	51 677	455 052 512	$8\,805,71$	$2,26$
10^{11}	116 978	4 118 054 813	$35\,203,67$	$2,16$
10^{12}	252 856	37 607 912 018	$148\,732,53$	$2,09$
10^{13}	528 275	346 065 536 839	$655\,085,96$	$2,04$
10^{14}	1 075 319	3 204 941 750 802	$2\,980\,456,73$	$1,98$
10^{15}	2 131 671	29 844 570 422 669	$14\,000\,551,88$	$1,93$
10^{16}	4 119 410	279 238 341 033 925	$67\,786\,003,59$	$1,89$
10^{17}	7 801 334	2 623 557 157 654 233	$336\,295\,966,52$	$1,86$
10^{18}	14 482 065	24 739 954 287 740 860	$1\,708\,316\,755,09$	

[2] Arvoilla $X \leq 10^{12}$ on käytetty lähteitä [21] sekä [51, s. 48] vastaavasti, ja siitä eteenpäin on käytetty 26.12.2012 haettuja internetlähteitä `http://www.rekenmeemetabc.nl/Synthese_resultaten` sekä `http://oeis.org/A006880` vastaavasti.

D 31 ensimmäistä *abc*-osumaa

Alla taulukoituna kaikki *abc*-kolmikot $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joilla $\mathrm{rad}(abc) < c \leq 1000$ [21].

No.	a	b	c	$\mathrm{rad}(abc)$
1	$1=1$	$8=2^3$	$9=3^2$	6
2	$5=5$	$27=3^3$	$32=2^5$	30
3	$1=1$	$48=2^43$	$49=7^2$	42
4	$1=1$	$63=3^27$	$64=2^6$	42
5	$1=1$	$80=2^45$	$81=3^4$	30
6	$32=2^5$	$49=7^2$	$81=3^4$	42
7	$4=2^2$	$121=11^2$	$125=5^3$	110
8	$3=3$	$125=5^3$	$128=2^7$	30
9	$1=1$	$224=2^57$	$225=3^25^2$	210
10	$1=1$	$242=2\cdot 11^2$	$243=3^5$	66
11	$2=2$	$243=3^5$	$245=5\cdot 7^2$	210
12	$7=7$	$243=3^5$	$250=2\cdot 5^3$	210
13	$13=13$	$243=3^5$	$256=2^8$	78
14	$81=3^4$	$175=5^27$	$256=2^8$	210
15	$1=1$	$288=2^53^2$	$289=17^2$	102
16	$100=2^25^2$	$243=3^5$	$343=7^3$	210
17	$32=2^5$	$343=7^3$	$375=3\cdot 5^3$	210
18	$5=5$	$507=3\cdot 13^2$	$512=2^9$	390
19	$169=13^2$	$343=7^3$	$512=2^9$	182
20	$1=1$	$512=2^9$	$513=3^319$	114
21	$27=3^3$	$512=2^9$	$539=7^211$	462
22	$1=1$	$624=2^43\cdot 13$	$625=5^4$	390
23	$49=7^2$	$576=2^63^2$	$625=5^4$	210
24	$81=3^4$	$544=2^517$	$625=5^4$	510
25	$1=1$	$675=3^35^2$	$676=2^213^2$	390
26	$1=1$	$728=2^37\cdot 13$	$729=3^6$	546
27	$25=5^2$	$704=2^611$	$729=3^6$	330
28	$104=2^313$	$625=5^4$	$729=3^6$	390
29	$200=2^35^2$	$529=23^2$	$729=3^6$	690
30	$1=1$	$960=2^63\cdot 5$	$961=31^2$	930
31	$343=7^3$	$625=5^4$	$968=2^311^2$	770

E 31 ensimmäistä logaritmista *abc*-osumaa

Alla taulukoituna 31 ensimmäistä *abc*-kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, joille $\operatorname{rad}(abc) < \frac{c}{\log c}$.

No.	a	b	c	$\operatorname{rad}(abc)$	$\frac{c}{\log c}$
1	$1=1$	$2400=2^5 3 \cdot 5^2$	$2401=7^4$	210	$308,47$
2	$625=5^4$	$2048=2^{11}$	$2673=3^5 11$	330	$338,74$
3	$1=1$	$4374=2 \cdot 3^7$	$4375=5^4 7$	210	$521,85$
4	$289=17^2$	$6272=2^7 7^2$	$6561=3^8$	714	$746,51$
5	$7=7$	$32761=181^2$	$32768=2^{15}$	2534	$3151,62$
6	$37=37$	$32768=2^{15}$	$32805=3^8 5$	1110	$3154,83$
7	$1=1$	$59048=2^3 11^2 61$	$59049=3^{10}$	4026	$5374,87$
8	$343=7^3$	$59049=3^{10}$	$59392=2^{11} 29$	1218	$5403,24$
9	$3=3$	$65533=13 \cdot 71^2$	$65536=2^{16}$	5538	$5909,28$
10	$7168=2^1 07$	$78125=5^7$	$85293=3^8 13$	2730	$7512,26$
11	$128=2^7$	$109375=5^6 7$	$109503=3^2 23^3$	4830	$9436,90$
12	$81=3^4$	$123823=7^3 19^2$	$123904=2^{10} 11^2$	8778	$10565,47$
13	$12672=2^7 3^2 11$	$117649=7^6$	$130321=19^4$	8778	$11065,01$
14	$18225=3^6 5^2$	$112847=7^4 47$	$131072=2^{17}$	9870	$11123,35$
15	$81=3^4$	$134375=5^5 43$	$134456=2^3 7^5$	9030	$11385,90$
16	$17=17$	$140608=2^6 13^3$	$140625=3^2 5^6$	6630	$11863,23$
17	$12005=5 \cdot 7^4$	$161051=11^5$	$173056=2^{10} 13^2$	10010	$14347,95$
18	$5=5$	$177147=3^{11}$	$177152=2^{10} 173$	5190	$14659,12$
19	$47=47$	$250000=2^4 5^6$	$250047=3^6 7^3$	9870	$20117,38$
20	$121=11^2$	$255879=3^9 13$	$256000=2^{11} 5^3$	4290	$20557,41$
21	$71875=5^5 23$	$190269=3^8 29$	$262144=2^{18}$	20010	$21010,77$
22	$3481=59^2$	$262144=2^{18}$	$265625=5^6 17$	10030	$21267,28$
23	$95=5 \cdot 19$	$279841=23^4$	$279936=2^7 3^7$	13110	$22319,32$
24	$131072=2^{17}$	$221875=5^5 71$	$352947=3 \cdot 7^6$	14910	$27629,95$
25	$338=2 \cdot 13^2$	$390625=5^8$	$390963=3 \cdot 19^4$	7410	$30362,83$
26	$24389=29^3$	$393216=2^{17} \cdot 3$	$417605=5 \cdot 17^4$	14790	$32266,70$
27	$1=1$	$512000=2^{12} 5^3$	$512001=3^5 7^2 43$	9030	$38947,04$
28	$49=7^2$	$531392=2^6 19^2 23$	$531441=3^1 2$	18354	$40311,54$
29	$533871=3^5 13^3$	$9583=7 \cdot 37^2$	$524288=2^{19}$	20202	$40481,85$
30	$2197=13^3$	$583443=3^5 \cdot 7^4$	$585640=2^3 5 \cdot 11^4$	30030	$44097,87$
31	$8192=2^{13}$	$634933=13^3 17^2$	$643125=3 \cdot 5^4 7^3$	46410	$48087,37$

F Java-koodi logaritmisten *abc*-osumien etsimiseen

Ohessa ns. brute force -javakoodi, jolla Liitteen E logaritmisten abc-osumien taulukko laskettiin. Ohjelmalla luettiin haluttu määrä rivejä tiedostosta *triples_below_1018*, joka oli ladattu ABC@Home-projektin kotisivuilta [38]. Tiedostossa oli listattu kaikki *abc*-osumat, joille $a < b < c < 10^{10}$, siten, että yksi rivi sisälsi aina yhden osuman muodossa c a.

```
1 import java.io.*;
2 import java.io.PrintWriter;
3 import java.util.*;
4 /**
5  * To find abc-triples with rad<c/logc
6  * @author Marko Lamminsalo
7  */
8 public class abclogc {
9         private static Scanner lukija= new Scanner(System.in);
10        private static Scanner input;
11        private static double radical;
12        private static String tiednimi="triples_below_1018";
13        private static String ulostulo="abclogc_triples.txt";
14        private static String text;
15        private static double a;
16        private static double b;
17        private static double c;
18        private static int mones=0;
19        private static String turhake;
20
21        public static void main(String[] args) throws Exception,
              FileNotFoundException{
22              PrintWriter output=new PrintWriter(ulostulo);
23
24              /*Testing primefactors();
25               *
26               * System.out.print("Anna luku 1: ");
27              int luku1=Integer.parseInt(lueRivi());
28              int[] taulu=primefactors(luku1);
29              for (int j=0; j<taulu.length; j++){
30                      System.out.print(taulu[j] + " ");
31              }
32              */
33
34
35
36              // Input abc triple
37              /*
38              System.out.print("a: ");
39              float a=Float.parseFloat(lueRivi());
40
41              System.out.print("b: ");
42              float b=Float.parseFloat(lueRivi());
43
44              float c=a+b;
```

```
45                  float cee=c;
46                  double lokki=c/(java.lang.Math.log(cee));
47
48                  radical=rad(a, b, c);
49                  System.out.printf("==========" + "\na:%10.0f"+ "\nb:%10.0f" +
                        "\nc:%10.0f"
50                                  + "\nrad %10.0f"+ "\nc/logc %10.6f", a, b, c,
                                        radical, lokki);
51                  if (radical < c){
52                          System.out.println("\nAbc-hit!");
53                  }
54                  if (radical < lokki){
55                          System.out.println("Mod abc-hit!");
56                  }
57                  System.out.println();
58                  */
59
60
61                  //Luetaan tiedostosta:
62                  if (tiednimi == null) {
63                      System.out.println("Tiedoston nimea ei asetettu. ");
64                   }
65
66              File file = new File(tiednimi);
67              if (file.exists() && file.isFile() && file.canRead() ) {
68                  input = new Scanner(file);
69              } else {
70                  System.out.println("Tiedostoa " + tiednimi + " ei voi lukea
                        . ");
71              }
72
73              boolean otsikko=false;
74              //1268 on c < 10^6 asti
75              //51677 on c < 10^10 asti
76              //116978 on c < 10^11 asti
77              //14 482 059 kaikki c < 10^18
78              for (int j=0; j < 1000000 ; j++){
79
80                  text=lueTiedRivi();
81                  text=text.trim();
82                  String[] osat = text.split(" ");
83                  c=Double.parseDouble(osat[0]);
84                  a=Double.parseDouble(osat[1]);
85                  b=c-a;
86
87                  double lokki=c/(java.lang.Math.log(c));
88
89                  radical=rad(a, b, c);
90
91                  if(radical < lokki){
92                  if(otsikko==false){
93                    output.printf("%-10s " + "%12s="+"%-22s" + "%11s="+"%-19s
                          " + "%12s="+"%-22s" + "%12s "
94                                      + "  %12s\n","n(abc-hit)","c", "fact(c)
                                            ","a", "fact(a)","b", "fact(b)","
```

```
                                                radical","c/logc");
95                      otsikko=true;
96                     }
97                     mones+=1;
98                     turhake="" + mones + "(" + (j+1) + ")";
99                    output.printf("%-10s " + "%12.0f="+"%-22s" + "%11.0f="+"
                          %-19s" + "%12.0f="+"%-22s" + "%12.0f "
100                                    + "  %12.2f\n",turhake,c, printpf(c),a,
                                           printpf(a),b, printpf(b),radical,
                                           lokki);
101                   }
102
103               }
104               output.close();
105
106               /*
107               int lkm=0;
108                 while (input.hasNext()){
109                         input.nextLine();
110                         lkm++;
111                 }
112
113                 input.close();
114
115                 System.out.println(lkm);
116                 */
117
118
119 //14 482 059 rivia
120
121
122
123         }
124
125         //tiedostosta luku
126
127
128         public static String lueTiedRivi() {
129                 if (input == null) {
130                     System.out.println("Avattava tiedosto ennen lukua. ");
131                     return null;
132                 }
133                 if (input.hasNext()) {
134                     String rivi = input.nextLine();
135                     return rivi;
136                 } else {
137                     return null;
138                 }
139             }
140
141
142         //muutakin kuin tiedostosta lukua
143
144         public static String lueRivi(){
145                   String teksti = lukija.nextLine();
```

```
146                 teksti=teksti.trim();
147                 return teksti;
148                 }
149
150         public static String printTaulu(double[] taulu, int[] potens){
151                 StringBuilder uusi=new StringBuilder();
152                 String filler;
153                 String[] osat;
154                 int k;
155                 for (int j=0; j<taulu.length; j++){
156                         filler=Double.toString(taulu[j]);
157                         filler=filler.trim();
158                         osat=filler.split("\\.");
159                         uusi.append(osat[0]);
160                         if (potens[j] >1){
161                           uusi.append("^");
162                           uusi.append(potens[j]);
163                           }
164                         uusi.append(".");
165                 }
166                 uusi.append("I");
167                 String palaute=uusi.toString();
168                 k = palaute.indexOf("I");
169                 palaute=palaute.substring(0,k-1);
170                 return palaute;
171         }
172
173
174
175         //rad, primefactors
176
177         public static double rad(double a, double b, double c){
178                 double[] ataul=primefactors(a);
179                 double[] btaul=primefactors(b);
180                 double[] ctaul=primefactors(c);
181                 double luku=1;
182
183                 for (int j=0; j<ataul.length; j++){
184                         luku *= ataul[j];
185                 }
186                 for (int j=0; j<btaul.length; j++){
187                   if (luku % btaul[j] != 0){
188                         luku *= btaul[j];
189                   }
190                 }
191                 for (int j=0; j<ctaul.length; j++){
192                   if (luku % ctaul[j] != 0){
193                         luku *= ctaul[j];
194                   }
195                 }
196                 return luku;
197
198
199         }
200
```

```
201         public static double[] primefactors(double n){
202                 double[] temp=new double[100];
203                 int koko=0;
204                 boolean lisattu=false;
205                 boolean prime=true;
206                 for (double i = 2; i <= n; i++) {
207                   while (n % i == 0) {
208                         prime=false;
209                         n/=i;
210                         if (lisattu==false){
211                                 temp[koko]=i;
212                                 koko++;
213                                 lisattu=true;
214                         }
215                 }
216                 lisattu=false;
217         }
218             if (prime==true){
219                 double[] prm={n};
220                 return prm;
221                     }else{
222                 double[] prm= new double[koko];
223                 System.arraycopy(temp, 0, prm, 0, koko);
224                 return prm;
225         }
226         }
227
228         public static String printpf(double n){
229           double[] temp=new double[100];
230           int koko=0;
231           int potenssi=0;
232           int[] potenssit=new int[100];
233           boolean lisattu=false;
234           boolean prime=true;
235           String texto;
236           for (double i = 2; i <= n; i++) {
237                 while (n % i == 0) {
238                         prime=false;
239                         n/=i;
240                         if (lisattu == true){
241                               potenssi++;
242                               potenssit[koko-1]=potenssi;
243                         }
244                         if (lisattu==false){
245                                 temp[koko]=i;
246                                 potenssi++;
247                                 potenssit[koko]=potenssi;
248                                 koko++;
249                                 lisattu=true;
250                         }
251
252                 }
253                 lisattu=false;
254                 potenssi=0;
255           }
```

```
256
257
258             if (prime==true){
259               double[] prm={n};
260               texto=printTaulu(prm, potenssit);
261             }else{
262               double[] prm= new double[koko];
263               System.arraycopy(temp, 0, prm, 0, koko);
264               texto= printTaulu(prm,potenssit);
265             }
266             return texto;
267             }
268 }
```