

Arto Passoja:

LUENTORUNKOMONISTE

SÄHKÖMAGNETISMI

190202 4 ov



Sähkömagnetismi



* 1 1 *

1. Johdantoa**2. Staattinen sähkökenttä**

- 2. 1. Sähkövaraus
- 2. 2. Varaussysteemin sähkökenttä
- 2. 3. Gaussin laki

- 2. 5. Sähkökentän potentiaali
- 2. 6. Sähkökentän voimakkuuden määrittäminen potentiaalilla
- 2. 7. Sähköstaattisen kentän differentiaalilait
- 2. 8. Johdekappale sähkökentässä
- 2. 9. Eristeen vaikutus sähkökenttään
- 2.10. Sähkökentän energia

3. (Tasavirta

- 3.1. Sähkövirta)

4. Staattinen magneettikenttä

- 4.1. Kokeelliset perusteet
- 4.2. Virtasysteemin magneettikenttä
- 4.3. Amperen kiertämälaki
- 4.4. Magnetostaattisten kenttien yleiset lait
- 4.5. Magneettikentän aiheuttamat voimat
- 4.6. Hiukkanen staattisessa sähkömagneettisessä kentässä
- 4.7. Magneettisen vuorovaikutuksen ongelmat

5. Sähködynamiikka

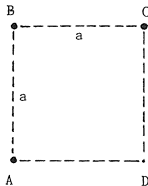
- 5.1. Sähkömagneettinen induktio
- 5.2. Induktio liikkuvassa johtimessa
- 5.3. Induktio muuttuvassa magneettikentässä
- 5.4. Indusoituva sähkökenttä
- 5.5. Aineen vaikutus magneettikenttään

6. (Muuttuvat sähkövirrat)**7. Maxwellin lait**

- 7.1. Käänteinen induktio
- 7.2. Sähkömagneettinen aaltoliike
- 7.3. Jälkihuomautuksia

1. Kaksi pientä yhtä suurta kuulaa A ja B on yhdistetty toisiinsa vaakasuoralla nylonlangalla siten, että kuulien keskipisteiden välimatka on 8,0 cm. Kuulan A varaus on $+1,0 \times 10^{-10}$ C ja kuulan B varaus $+9,0 \times 10^{-10}$ C. Pieni positiivisesti varattu reißallinen kuula C pääsee liukumaan kitkattomasti langassa. Kuinka kaukana kuulasta A kuula C on levossa ?

2. Pistevaraukset $+1,0$ nC, $-2,0$ nC ja $+2,0$ nC on sijoitettu neliön ABCD (sivun pituus $a = 50$ cm) kärkipisteisiin A, B ja C.



- Laske sähkökentän voimakkuus pisteessä D.
- Laske sähkökentän potentiaali pisteessä D.
- Kuinka suuri työ tarvitaan siirtämään varaus $+5,0$ nC pisteeseen D ?
- Mikä on pisteeseen D tuodun varauksen potentiaalienergia ?
- Mikä voima vaikuttaa pisteeseen D tuotuu varaukseen ?

3. Varaus on jakautunut tasaisesti hyvin pitkään, suoraan lankaan. Langan lineaarinen varaustiheys on $\lambda = 2,4 \mu\text{C/m}$. Mikä sähköinen voima vaikuttaa langan lähelle (etäisyydelle $x = 4,0$ cm) tuotuu varaukseen $q = 1,2$ nC ?

4. Laske sähkökentän voimakkuus homogeenisesti varatun ympyrärenkaan akselilla.

5. Laske sähkökentän voimakkuus homogeenisesti varatun ympyrälevyn akselilla.

6. Johda lauseke sähkökentän voimakkuudelle kahden laajan erimerkkisesti varatun (varauskateet $+\sigma$ ja $-\sigma$) yhdensuuntaisen tason välissä.

7. Fresbee (pinta-ala 250 cm^2) lentää vaakasuorassa. Missä avaruuskulmassa se näkyy origosta katsottuna hetkellä, jolloin sen paikkavektori on muotoa $\vec{r} = (\sqrt{15} \hat{i} + 3 \hat{j} + 5 \hat{k}) \text{ m}$?
Valitussa koordinaatistossa xy-taso on vaakasuorassa ja z-akseli on suoraan maan pinnasta ylöspäin.

8. Coulombin lain yleistys: Tarkastellaan pallosymmetristä varausjakautumaa (ulkosäde = R), jonka varaustiheys on $\rho = \rho(r)$. Sovella Gaussin lakia r-säteiseen palloon.

- Määritä sähkövuo ko. pinnan läpi ja sähkökentän voimakkuus etäisyydellä r.
- Mikä on sähkökentän voimakkuuden määräävän varauksen Q(r) suuruus r:n funktiona ?

9. Tarkastellaan sylinterisymmetristä (symmetria-akselina z-akseli) varausjakautumaa. Sovella Gaussin lakia ympyrälieriöön, jonka akselina on symmetria-akseli ja jonka säde on r ja korkeus L. a) Määritä sähkövuo ko. pinnan läpi ja sähkökentän voimakkuus etäisyydellä r symmetria-akselista. b) Mikä on sähkökentän voimakkuuden määräävän varauksen suuruus r:n funktiona ? Tarkastele erikoistapauksena tasaisesti varattua sauvaa.

10. Pitkää johdesylinteriä (pituus = L, kokonaisvaraus = +q) ympäröi toinen, samanakselinen johdava sylinterikuori, jonka varaus on $-2q$. Käytä Gaussin lakia ja määritä

- sähkökentän voimakkuus eri alueissa (sisänsylinterin sisällä, ulkosylinterin ulkopuolella, sylinteripintojen välissä) ja
- ulkosylinterin sisä- ja ulkopintojen varaukset.

- Tarkastellaan tasaisesti varattua sauvaa. Määritä sauvan sähkökentän potentiaali etäisyydellä r sauvan akselista ($r > R$, missä R on sauvan poikkileikkauksen säde).
- Määritä tasaisesti varatun ympyrärenkaan sähkökentän potentiaali renkaan akselilla, etäisyydellä z renkaan tasosta. Renkaan säde on R ja varaus Q .
- Määritä tasaisesti varatun ympyrälevyn sähkökentän potentiaali levyn akselilla, etäisyydellä z levyn tasosta. Levyn säde on R ja varauskate σ .
- Pallosymmetrisen varausjakautuman sähkökenttä on muotoa $\vec{E}(r) = (ar^{-3} - 2br^{-2}) \hat{u}_r$, missä $a = 2 \times 10^{-3} \text{ Vm}^2$ ja $b = 10^{-2} \text{ Vm}$. Määritä sähkökentän pisteiden A ja B välinen potentiaaliero, kun A on 11 cm etäisyydellä ja B on 26 cm etäisyydellä varausjakautuman keskipisteestä (= origosta). Kumpi pisteistä on korkeammassa potentiaalissa?
- Mihin suuntaan pisteestä $P = (1,1,1)$ siirryttäessä funktio $u = 3x^2y$ kasvaa voimakkaimmin? Kuinka suuri on funktion derivaatta tähän suuntaan?
- Määritä 3-ulotteisen pinnan $u = 5x^2 + 4y^2 + 3z^2 = a^2$ normaalin suuntainen yksikkövektori pinnan pisteessä $P = (x,y,z)$.
- Laske vektorin $\vec{u} = 3xy \hat{i} - y^2 \hat{j}$ viivaintegraali pitkin xy -tason käyrää $y = 2x^2$ pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(1,2)$.
- Laske vektorikentän $\vec{B} = 4xz \hat{i} - y^2 \hat{j} + yz \hat{k}$ vuo pinnan A läpi. Pinta A on sellaisen kuution pinta, jota rajoittavat tasot $x=0$ ja $x=1$, $y=0$ ja $y=1$, $z=0$ ja $z=1$.
- Mikä on vektorin $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ vuo pinnan A läpi. Pinta A on sylinteripinta: sylinterin säde = b ja korkeus = h . Sylinteripinnan toinen pääty on xy -tasossa ja sylinterin akseli on positiivinen z -akseli.
- Osoita, että keskeisvoimakenttä $\vec{F} = F(r) \hat{r}$ on konservatiivinen.
- Onko vektorikenttä $\vec{B} = (x^2 - yz) \hat{i} - 2yz \hat{j} + (z^2 - 2zx) \hat{k}$ lähteetön?
- Määritä pitkän sylinterinmuotoisen homogeenisen avaruusvarauksen sähkökentän potentiaali varausjakautuman sisä- ja ulkopuolella. Muista, että potentiaali on jatkuva varausjakautuman reunalla. Normita potentiaali nolaksi varausjakautuman akselilla. Avaruusvarauksen varaus tiheys on 8 nC/m^3 ja poikkileikkauksen säde on 4 cm. Määritä sähkökentän potentiaali varausjakautuman pinnalla.
- Pistevaraus Q on etäisyydellä a johdetasosta. Määritä sähkökentän voimakkuus johdetason pinnalla. Määritä myös johdetason pinnalle indusoituneen varauksen suuruus.

1/11 Kahden samankeskisen varatun johdepallon (säteet $r_0 = 0,2 \text{ m}$ ja $R = 0,3 \text{ m}$) välissä on kaasua, jonka jatkuvasti jakautuneen avaruusvarauksen tiheys ρ on vakio. Sisemmällä kuorella on varaus $q = +6,0 \text{ nC}$ ja ulommalla kuorella varaus $Q = +4,0 \text{ nC}$. Sähkökentän voimakkuudeksi mitataan 1,0 m etäisyydellä pallojen keskipisteestä $\vec{E} = 60 \text{ V/m} \hat{e}_r$. a) Määritä kaasun varaus tiheys ρ . b) Määritä sähkökentän voimakkuudet johdepallojen ulkopinnoilla.

1/12 Varaustiheys pallossa on verrannollinen etäisyyteen pallon pinnasta. Määritä sähkökentän voimakkuus $\vec{E} = E(\vec{r})$, kun pallon säde R ja kokonaisvaraus Q_0 tunnetaan.

- Levykondensaattorin levyjen pinta-ala on 2000 cm^2 ja levyt ovat 1 cm päässä toisistaan. Levyjen välinen jännite, kun kondensaattori on tyhjiössä, on 3000 V . Se pienee arvoon 1000 V , kun levyjen väliin tuodaan eristelevy. Laske a) alkuperäinen kapasitanssi C_0 , b) kondensaattorin varaus Q , c) kapasitanssi C , kun levyjen välissä on eriste, d) eristeen suhteellinen permittivisyys ϵ_r , e) eristeen permittivisyys ϵ , f) eristeen kumpaankin pintaan induisoitunut näennäisvaraus q' ja näennäisvaraukate σ' , g) alkuperäinen sähkökentän voimakkuus E_0 levyjen välissä sekä h) sähkökentän voimakkuus E , kun levyjen välissä on eriste.
- Eristepallossa (säde R) on polaroituminen säteittäistä ja sen suuruus on $\vec{P} = kr^{-1} \hat{u}_r$, missä k on vakio. Määritä näennäisvarausitiheydet σ' ja ρ' . Tarkista, että näennäisvarausten summa on nolla.
- Määritä tehtävän 1 eristetäytteiselle levykondensaattorille vektorit \vec{E} , \vec{D} ja \vec{P} eristeessä.
- Levykondensaattorin levyjen pinta-ala on 1500 cm^2 ja välissä 2.00 mm ilmarako (ilmalle $\epsilon_r \approx 1$). a) Kuinka suuri on kondensaattorin kapasitanssi? b) Kuinka suuri on kondensaattorin energia, kun levyjen välille kytketään 1000 V jännite? c) Kuinka suuri on kondensaattorin levyjen välillä vaikuttava vetovoima?
- Määritä varatun johdepallon (säde R , varaus q)
 - kentän energiatiheys etäisyydellä r pallon keskipisteestä ($r < R$ ja $r > R$),
 - potentiaalienergia ja
 - kentän energia.
- Umpinaisen kuparipallon (säde $b = 20 \text{ cm}$) sisällä on samankeskinen pallonmuotoinen ontelo (säde $a = 10 \text{ cm}$). Ontelo täytetään kaasulla, jonka varaustiheys on $\rho = +2.4 \times 10^{-6} \text{ C/m}^3$ ja pallokuoreen tuodaan varaus -14.1 nC .
 - Käytä Gaussin lakia sähkökentän voimakkuuden määrittämiseen ontelossa, paksussa pallokuoreessa ja systeemin ulkopuolella.
 - Kuinka suuri ja minkä suuntaisen on sähkökentän voimakkuus pallokuoren sisä- ja ulkopinnoilla?
 - Määritä sähkökentän potentiaali eri alueissa. Normita potentiaali nolaksi kaukana.
 - Mikä on ontelon keskipisteen potentiaali?
- Kahden johdepallon säteet ovat $0,10 \text{ cm}$ ja $0,15 \text{ cm}$ sekä varaukset 100 nC ja 200 nC . Määritä pallojen varaukset sen jälkeen, kun ne ovat koskettaneet toisiaan.
- Onko vektorikenttä $\vec{E} = A [2xy \hat{i} + (x^2 - y^2) \hat{j}]$ pyörteetön? A on vakio.
 - Millä vakion a arvolla vektorikenttä $\vec{B} = (4x - z^2) \hat{i} + (5ay - 8x^2) \hat{j} + z \hat{k}$ on lähteetön?
 - Laske Gaussin lausetta käyttäen vektorikentän $\vec{C} = (5x-1) \hat{i} + (8y+4) \hat{j} + 2z \hat{k}$ vuo $\oint_S \vec{C} \cdot d\vec{S}$ origokeskisen pallopinnan (säde $r = 3$) läpi.

1. Johdepallo viedään homogeeniseen sähkökenttään. Piirrä kuva ja selitä lyhyesti mitä tapahtuu.
2. Varaus $Q = 4.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ on jakautunut tasaisesti umpinaiseen eristepalloon, jonka säde on $R = 30 \text{ cm}$ ja suhteellinen permittivisyys $\epsilon_r = 3$.
 - a) Määritä sähkökentän voimakkuus eristeessä.
 - b) Osoita, että polarisoituman suuruus eristeessä on muotoa $\vec{P}(r) = kr \hat{u}_r$, missä k on vakio.
 - c) Määritä b-kohdan polarisoitumaa vastaava näennäisvaraustiheys ja näennäisvaraus eristeessä.
 - d) Määritä näennäisvaraukate ja näennäisvaraus eristepallon pinnalla.
3. Ohut eristesauva on polarisoitunut. Polarisoituma on sauvan suuntainen ja sen itseisarvoa esittää lauseke $P = ax^2 + b$, missä x on etäisyys sauvan toisesta päästä, a ja b ovat vakioita. Määritä näennäisvaraustiheys sauvassa ja näennäisvaraukset sauvan päissä. Osoita, että näennäisvarausten summa on nolla.
4. Varatun eristepallon (säde $R = 20 \text{ cm}$) varaustiheys on $\rho(r) = r^2 \mu\text{C/m}^3$, missä r on etäisyys pallon keskipisteestä. a) Määritä pallon kokonaisvaraus. b) Määritä pallokuorten $r_1 = 10 \text{ cm}$ ja $r_2 = 20 \text{ cm}$ väliin jäävä varaus.
5. Alfahiukkanen, jonka liike-energia on 4.0 MeV lentää suoraan kohti elohopea-atomin ydintä (ytimen keskipisteestä). Elohopean järjestysluku Z on 80. a) Laske, kuinka lähelle ydintä alfahiukkanen pääsee. b) Vertaa tulosta ytimen säteeseen.
6. Määritä johdinelektronien vaellusnopeus kuparijohtimessa, jonka poikkileikkauksen pinta-ala on 1 mm^2 ja jossa kulkee 1 A virta. Kuparin tiheys on $8,96 \text{ g/cm}^3$ ja atomipaino 63,55.
7. Metallikappale voidaan hopeoida laittamalla esim. lusikka ja hopeatanko hopeanitraattiliuokseen. Kun ne yhdistetään virtalähteen napoihin, alkaa niiden kautta kulkea sähkövirta. Hopeatangon pinnalla tapahtuvassa reaktiossa irtoaa tangosta hopeaioni ja vapautuva elektroni kulkeutuu virtapiiriin kautta lusikkaan, jonka pinnalla tapahtuvassa reaktiossa elektroni absorboituu ja metallinen hopea tarttuu lusikan pintaan. Kuinka monta elektronia on virrattava hopeatangosta lusikkaan, jotta lusikan pinnalle kertyneen hopean massa olisi 1 g ?
8. Elektroni kiertää ympyrän muotoisella radalla, jonka säde on $1,0 \times 10^{-10} \text{ m}$, tehden $2,0 \times 10^{13}$ kierrosta sekunnissa. Laske elektronin liikkeen synnyttämän magneettikentän magneettivuon tiheyden suuruus rataympyrän keskipisteessä.

- Tarkastellaan pitkää ympyrällieriötä (ulkosäde = R_0), jossa on akselin suuntainen tasainen virtajakautuma (kokonaisvirta = I). Määritä magneettikentän voimakkuus johteen sisä- ja ulkopuolella.
- Koaksiaalikaapelin muodostavat kaksi samanakselistä ohutseinäistä johdesylinteriä, joiden säteet ovat a ja b ($a < b$). Sisä- ja ulkosylinterissä kulkee yhtä suuri virta I päinvastaisiin suuntiin. Määritä magneettivuon tiheys \vec{B} sisä- ja ulkosylinterien välialueella, sylinterien ulkopuolella.
- Sylinterisymmetrinen virtajakautuma on muotoa $\vec{J}(R) = aR^2 \hat{k}$, kun $R \leq R_0 = 1,0$ cm. Määritä vakio a , kun johteessa kulkeva kokonaisvirta on $I_0 = 12$ A.
- Pitkän solenoidin virrantiheys on muotoa $\vec{J}(R) = aR \hat{u}_\phi$, kun $R_1 \leq R \leq R_2$. Määritä magneettikentän voimakkuus ja magneettivuon tiheys solenoidin sisällä ($R \leq R_1$). Miten magneettikentän voimakkuus muuttuu siirryttäessä etäisyydeltä R_1 etäisyydelle R_2 solenoidin akselista?
- Määritä vektorin $\vec{U} = (2x - y) \hat{i} - yz^2 \hat{j} - y^2z \hat{k}$ kierto suljetun käyrän c ympäri. Käyrä c on origokeskinen ympyrä $x^2 + y^2 = 1$. Suorita sama tehtävä käyttämällä Stokesin lausetta ja otamalla pinnaksi S pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ylempi puolisko.
- Tarkastellaan suorakulmaista virtasilmutta (sivut a ja b) homogeenisessa magneettikentässä. Silmukan toinen sivu on y -akselin suuntainen ja magneettikenttä x -akselin suuntainen. Määritä silmukkaan vaikuttava vääntömomentti.
- Tarkastellaan xy -tasossa olevaa virtasilmutta (pinta-ala $0,25$ cm²) homogeenisessa magneettikentässä $\vec{B} = (0,2 \hat{i} + 0,6 \hat{j})$ mT. Määritä silmukkaan vaikuttava kokonaisvoima ja vääntömomentti.
- Suorakulmaisessa virtasilmutkassa, jonka sivujen pituudet ovat $5,0$ cm ja $8,0$ cm, kulkee 10 A virta. Silmutta on sijoitettu $0,15$ T magneettikenttään siten, että silmukan taso on kentän suuntainen. a) Määritä silmukkaan kohdistuva vääntömomentti. b) Määritä silmukan magneettinen momentti. c) Määritä suurin mahdollinen vääntömomentti, joka voidaan aikaansaada samanpituksella (erimuotoisella!) johtimella muuten samoissa olosuhteissa.
- Korkeajännitekaapelissa kulkeva sähkövirta on 1000 A ja kaapeli on 20 metrin korkeudella maasta. Kaapelilinja on rakennettu siten, että virran suunta on suoraan etelästä pohjoiseen. Paikalla on maan magneettivuon tiheyden horisontaalikomponentti $1,6 \times 10^{-5}$ T. Kuinka suuren poikkeaman kompassilukemaan kaapeli aiheuttaa,
 - kun suunnistaja juoksee suoraan linjan alapuolella etelästä pohjoiseen nopeudella $5,2$ m/s ja pitää kompassia $1,5$ m korkeudella,
 - kun suunnistaja (ruotsalainen?) päättää ottaa tarkan suunnan maan suoraan linjan alapuolella muurahaispesän suojassa kompassi tiukasti maassa kiinni,
 - kun suunnistaja on 100 m etäisyydellä linjasta maan tuuheaan näreen suojassa kompassi maassa kiinni?

L1.

Vetyatomin pienimmän elektroniradan sade (Bohrin atomimallin mukaan) on $R = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ ja pitkin rataa liikkuvan elektronin impulssimomentti $L = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$. a) Kuinka suuria keskimääräistä virranvoimakkuutta kiertävä elektroni vastaa? b) Kuinka suuri on elektronin rataliikkeestä aiheutuva magneettinen momentti? c) Laske elektronin aiheuttama magneettivuon tiheys ytimen kohdalla.

L2.

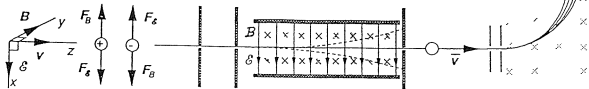
Hiukkanen, jonka varaus on 4 nC , liikkuu magneettikentässä. Kun liike tapahtuu xy -tasossa nopeudella 30 km/s suuntaan, joka muodostaa 45° kulman sekä x - että y -akselin positiivisten suuntien kanssa, hiukkaseen vaikuttaa negatiivisen z -akselin suuntainen voima. Kun liike tapahtuu nopeudella 20 km/s z -akselin positiiviseen suuntaan, hiukkaseen vaikuttaa $40 \mu\text{N}$ suuruinen voima positiivisen x -akselin suuntaan. Määritä magneettivuon tiheyden suunta ja suuruus.

L3.

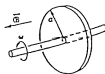
Määritä pitkän solenoidin ($N = 800$, $L = 60 \text{ cm}$, $I = 12 \text{ A}$, sisäsäde $R_1 = 2 \text{ cm}$, ulkosäde $R_2 = 4 \text{ cm}$) keskialueella aukon poikkileikkauksen läpisevän magneettivuon suuruus.

L4.

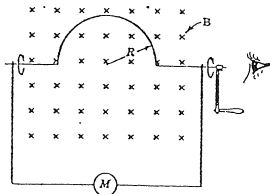
Massaspektrometrissä saman varauksen omaavat ionit kulkevat ensin nopeusvalitsimen läpi (kts. kuva): toisiaan ja nopeusvektoria vastaan kohtisuorat sähkö- ja magneettikentät ($E = 6.0 \text{ kV/m}$, $B = 0.30 \text{ T}$) päästävät suoraan valitsimen läpi vain tietyt nopeuden omaavat ionit. Valitsimen jälkeen ionit ohjataan kohtisuorasti homogeeniseen magneettikenttään $B = 0.30 \text{ T}$, jossa ionit kulkevat puoliympyrän muotoisen radan ja osuvat kohtisuorasti valokuvaukselle. Kuinka suuri on kertaalleen ionisoituneita ($q = e$) atomeja ^{235}U ja ^{238}U vastaavien viivojen välimatka valokuvauksella? Massoina voit käyttää arvoja $235u$ ja $238u$, missä $u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$.



1. Metallilevy (säde = a) pyörii kulmanopeudella ω levyä vastaan kohtisuoran akselin suhteen homogeenisessa magneettikentässä B . Osoita, että levyn keskustan ja reunan välinen potentiaaliero on $\omega a^2 B/2$, kun magneettikenttä on pyörimisakselin suuntainen.

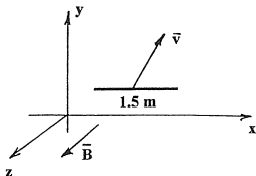


2. Jäykkään johdelankaan on taivutettu puoliympyrä, jonka säde R on 10 cm. Lankaa pyöritetään kulmanopeudella $\omega = 10$ rad/s homogeenisessa magneettikentässä, jonka vuon tiheys on 0,1 T (kts. kuva). Laske indusoituva sähkömotorinen voima. Laske myös piirissä kulkeva induktiovirta, kun ampeerimittarin M resistanssi on 0,1 Ω ja piirin muu resistanssi on mitätön.



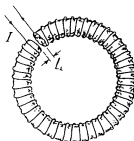
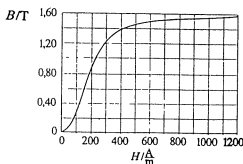
3. 1,25 mm paksuinen ja 15,0 mm levyinen kuparinauha, jossa kulkee 100 A virta, on kohtisuorassa 1,75 T magneettikenttää vastaan. Määritä
- Hall-ilmion aiheuttama poikittainen sähkökenttä ja
 - ko. sähkökentän johdinelektroniiin kohdistama poikittainen voima.
4. 0,20 mm paksu johdinlevy, jossa kulkee 150 mA virta, asetetaan kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Laske magneettivuon tiheys, kun levyyn syntyvä Hallin jännite levyn laitojen välillä on 40 mV. Johtimessa olevien vapaiden elektronien tiheys on $7,1 \times 10^{22}$ kpl/m³.
5. Ympyränmuotoisessa käämissä on 50 kierrosta ja sen säde on 15 cm. Käämin keskelle sen akselin suuntaiseksi asetetaan lyhyt solenoidi, jossa on 500 kierrosta ja jonka poikkileikkauksen pinta-ala on 15 cm².
- Määritä käämin ja solenoidin keskinäisinduktanssi.
 - Solenoidissa kulkee sinimuotoinen vaihtovirta, jonka huippuarvo on 1,2 A ja taajuus 50 Hz. Millainen sähkömotorinen voima käämiin indusoituu?

1. Johdinlanka, jonka pituus on 1.5 m, liikkuu x-akselin suuntaisena pysyen nopeudella $\vec{v} = (2.0 \hat{i} + 3.46 \hat{j})$ m/s magneettikentässä $\vec{B} = 0.50$ T \hat{k} . Kuinka suuri sähkömotorinen voima indusoituu langan päiden välille ?



2. Arvioi johdinsilmukan ($D = 10$ cm), lyhyen käämin ($D = 10$ cm, $N = 100$) ja ohuen rengaskäämin eli toroidin ($R = 10$ cm, $S = 3$ cm², $N = 100$) induktanssin suuruutta.
3. Tarkastellaan kahta samankeskistä johdesilmukkaa, joiden yhteisenä akselina on z-akseli ja joiden säteet ovat $r_1 = 5.0$ cm ja $r_2 = 0.60$ cm. Määritä silmukoiden keskinäisinduktanssi. Jos isommassa silmukassa kulkee vaihtovirta $I = I_0 \sin \omega t$, missä $I_0 = 5.0$ A ja $\omega = 100\pi$ rad/s ja pienemmän silmukan resistanssi on 0.8Ω , niin mitkä ovat pienempään silmukkaan indusoituvan sähkömotorisen voiman ja vaihtovirran huippuarvot ?
4. Tarkastellaan vielä edellisen tehtävän silmukoita: jos pienempi silmukka liikkuu vakionopeudella $v_2 = 0.25$ m/s pitkin silmukoiden yhteistä akselia ja jos isommassa silmukassa kulkee vakiovirta $I = 6.0$ A, niin kuinka suuri SMV pieneen silmukkaan indusoituu ja missä pisteessä indusoitunut SMV saavuttaa maksiminsa ?
5. Määritä B ja H tyhjän solenoidin ($L = 24$ cm, $R = 1.8$ cm, $I = 0.5$ A) keskialueella. Miten B ja H muuttuvat, kun solenoidi täytetään rautasydämellä, jonka $\mu_r = 2500$.
6. Toroidissa, jonka sisähalkaisija on 22 cm ja ulkohalkaisija 26 cm, on 3000 kierrosta. Toroidissa kulkee 5.0 A suuruinen virta. Mikä on magneettikentän voimakkuus ja magneettivuon tiheys toroidin sisällä, a) kun sisällä on ilmaa tai b) kun sisällä on rautarengas, jonka suhteellinen permeabiliteetti on 1500. c) Määritä ko. suuret myös (sekä raudassa että ilma-araossa), kun b-kohdan rautasydän on katkaistu siten, että siihen on muodostunut 2 mm :n pituinen ilmarako.

7. Rengaskäämissä (toroidissa) on 800 johdinkierrosta ja sen keskipituus on 80 cm. Käämin sisällä on rautasydän, jonka magnetointikäyrä on oheisessa kuvassa. a) Kuinka suurina ovat suhteellinen permeabiliteetti ja magnetoituma virran arvolla 0.30 A ? b) Kuinka monta prosenttia edellisen kohdan vuon tiheydestä on rauta-atomien aiheuttamaa ? c) Kuinka suuri on suurin suhteellinen permeabiliteetti ? d) Rautasydämeen tehdään 12 mm pituinen ilmarako. Kuinka suuri virta on käämissä tarpeen, jotta ilma-araossa olisi $B = 0.20$ T ? Rautasydämen poikkileikkauksen pinta-ala on 6.0 cm². Oletetaan, että ilma-araossa kenttä menee yhtä suuren pinnan läpi, joten vuon tiheydet raudassa ja ilma-araossa ovat yhtä suuret.



SÄHKÖMAGNETISMI

1) Johdantoa

FPK / ELEKTRONIIKKA

* sähkömagnetismin historiasta ja merkityksestä

SÄHKÖMAGNETISMIN KURSSI

* erilaiset varaussysteemit (levossa olevat & liikkuvat): sähkökenttä = ? magneettikenttä = ?
→ Maxwellin lait (1865)

Huom.

1) Mekaniikassa: vuorovaikuttavat kpl:t

1) Sähkömagn. teoria: systeemin rakenneosina kpl:t ja kentät

Lopuksi: sähkömagn. aallot (valo) ts. optiikan perusta...

* alkeisvaraus: $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
-esim. protoni: +e, elektroni: -e

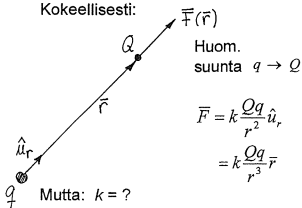
-luonnossa aina: $q = ne$

* alkeishiukkasen varaus on sille ominainen vakio

* varauksen säilymlaki: kaikissa reaktioissa kokonaisvaraus säilyy

Coulombin laki (1784)

Kokeellisesti:



2. Staattinen sähkökenttä

2.1. Sähkövaraus

* lajit: + & -

* mittaus \leftrightarrow aiheuttamansa vuorovaikutuksen avulla:

-poistovoima:

$$+ \quad + \rightarrow \vec{F}$$

$$q_1 \quad q_2$$

$$+ \quad + \rightarrow 2\vec{F}$$

$$q_1 \quad 2q_2$$

-vetovoima:

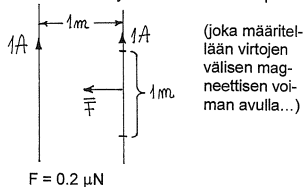
$$+ \quad - \vec{F} \leftarrow -$$

$$q_1 \quad -q_2$$

* 2 varaukselle: $F \propto q_1 q_2$

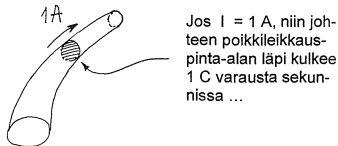
SI-järjestelmä:

Lähtökohta: sähkövirran yksikkö = 1A = 1 ampeeri



Varaus on johdannaissuure:

\rightarrow sen yksikkö = 1 C = 1 coulombi = 1 As



Jolloin:

tai:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}} \quad \left(\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right)$$

missä:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

= sähkövaklo ts. tyhjiön permittivisyys

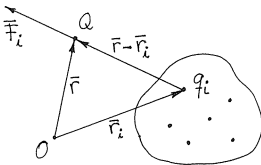
$$\left(1\text{F} = 1 \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}} = 1 \text{ faradi} = \text{kapasitanssin yksikkö} \right)$$

1 C = 1 As on hyvin suuri varaus:

Esim. 2 kpl; Q = q = 1 C etäisyys = 1m

$$F \approx 10^{10} \text{N} \quad \left(= 9 \times 10^9 \frac{1 \cdot 1}{1^2} \text{N} \right)$$

vrt. mg \rightarrow m $\approx 10^6$ tonnia



$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Varaussysteemin Q:n kohdistama kokonaisvoima:

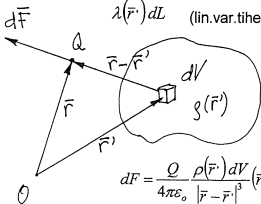
$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

Jatkuvalle varausjakautumalle:

$$q_i \rightarrow dq = \rho(\vec{r}') dV \quad (\text{varaustiheys } \rho)$$

$$\sigma(\vec{r}') dS \quad (\text{varauskate } \sigma)$$

$$\lambda(\vec{r}') dL \quad (\text{lin.var.tiheys } \lambda)$$



$$dF = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

jne.

Lab.kokeissa:

$$q \approx 10^{-9} \text{C} (= n\text{C}) \rightarrow 10^{-12} \text{C} \quad (= 1 \text{ pC})$$

Huom. $\mu = 10^{-6}$
 $n = 10^{-9}$
 $p = 10^{-12}$

2.2. Varaussysteemin sähkökenttä

Coulombin laki (= alkeislaki)

(Q = varaussysteemin lähelle tuotu varaus)

Sähkökenttä:

$$\vec{E}(\vec{r}) = ?$$

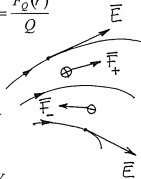
- 1) Varaussyst. luo sähköstaattisen kentän, jonka voimakkuus = $\vec{E}(\vec{r})$
- 2) Kenttä vaikuttaa pisteeseen \vec{r} tuotuun varaukseen Q voimalla $\vec{F} = Q\vec{E}(\vec{r})$

Joten yleisesti:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_Q(\vec{r})}{Q}$$

- 3) Kenttäviivaesitys:

Kenttäviiva on jok. pisteessä $\uparrow \vec{E}$



- 4) Yksikkö:

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

(1V = 1 voltti = jännitteen yksikkö)

$$5) q_i \rightarrow \vec{E}_i, \quad \rightarrow \vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

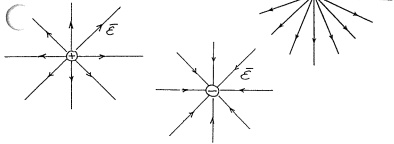
6) Pistevaraukselle q :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{u}_r$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$$

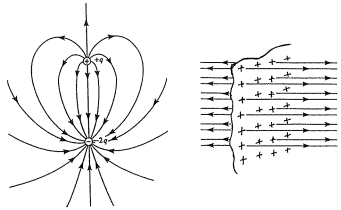
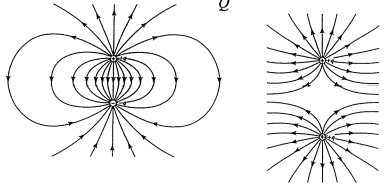
(ts. positiivisesta varauksesta pois-päin, negatiivista varausta kohti)

Sama kenttäviivoin:



Yleisesti:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \dots$$



11

Rinnastuksia:

a) Pistevarauksen Q kenttä:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r, \quad \text{ts. noudattaa } r^{-2} \text{ -lakia}$$

Tästä seuraa mm.

b) Pitkän varatun sauvan kenttä:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{u}_r, \quad \text{ts. noudattaa } r^{-1} \text{ -lakia}$$

c) Laajan varatun tason kenttä:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_r = \text{vakio} \quad \text{ts. noudattaa } r^0 \text{ -lakia !}$$

12

Multipolit:

Myös sellaisella sähköisellä systeemillä, joka kokonaisuudessaan on neutraali, on sähkökenttä.

Systeemin kentälle voidaan aina muodostaa etäisyyden negatiivisten potentssien mukaan etenevä kehitemä. Sen ensimmäinen termi on systeemin kokonaisvarauksen määräämä Coulombin kenttä. Seuraavien termien kertoimet määrittelevät systeemin sähköiset momentit,

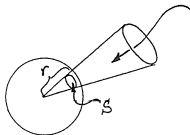
- * dipolimomentin,
- * kvadrupolimomentin jne.

Jos systeemin kokonaisvaraus on $= 0$, kentän asymptoottisen käyttäytymisen määrää systeemien dipolimomentti. Jos tämäkin on nolla, käyttäytymisen määrää kvadrupolimomentti jne.

(kts. § 2.9.3.)

2.3. Gaussin laki

2.3.1. Avaruuskulma



$$\Omega = \frac{S}{r^2} sr$$

SI-järjestelmän avaruuskulman yksikkö = steradiaani = 1 sr

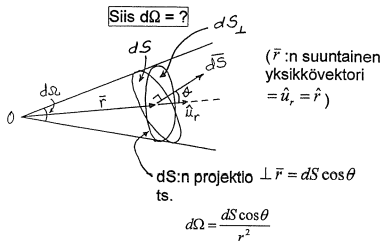
Täysi avaruus-

kulma: $S = 4\pi r^2$ ts. $\Omega = 4\pi$ sr

Entäpä: Missä avaruuskulmassa $d\Omega$ vektorin \vec{r} päässä oleva pinta-alkio dS näkyy origosta katsottuna?

Riippuu tietysti dS -alkion asennosta ja erityisesti:

$(d\Omega)_{\max}$, kun dS -alkio $\perp \vec{r}$



Määr.

Pinta-alkion pinta-ala vektorina $d\vec{S}$

- 1) jonka itseisarvo $= |d\vec{S}| = dS$ on alkion pinta-ala
- 2) $d\vec{S} \perp$ pinta-alkio
- 3) joka määrittelee samalla pinnan "ulkopuolen", "yläpuolen"

Nyt siis:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

ja pinnan S peittämä avaruuskulma:

$$\Omega_S = \int_S \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

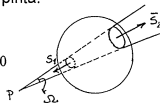
Määritelmän mukaan:

- 1) $\Omega_S > 0$, jos pinnan ulkopuoli on katsojasta pois päin
- 2) $\Omega_S < 0$, jos pinnan ulkopuoli on katsojaan päin

Esim.

Kaareva läpinäkyvä pinta:

- S_1 näkyy avar.kulmassa $\Omega_1 < 0$
- S_2 vastaavasti avar.kulmassa $\Omega_2 > 0$



Huom: $|\Omega_1| = |\Omega_2|$

Erityisesti:

Umpinainen pinta S näkyy avaruuskulmassa

$$\oint_S \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \Omega_S = 4\pi \quad (\text{sisältä})$$

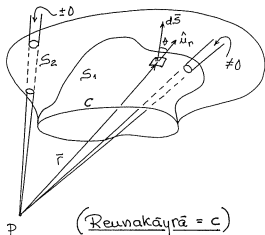
$$\Omega_S = 0 \quad (\text{ulkoa})$$

Yleisesti:

Pinnan **reunakäyrä** määrää avaruuskulman Ω , jossa pinta näkyy tarkastelupisteestä:

Pinta S näkyy P :stä avaruuskulmassa:

$$\Omega_{S_1} = \int_S \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \Omega_{S_2}$$



- 4) Umpinaisen pinnan läpäisevien viivojen määrä:
- ulos tulevat lasketaan positiivisina
 - sisään menevät negatiivisina

Σ = pinnan sisäänsä sulkema kokonaisvaraus

Esim.

Pistemäisestä varauksesta lähtee N ($= Q$) voimaviivaa (säteittäisesti kaikkiin suuntiin).

Kenttäviivojen tiheys etäisyydellä r on

$$= \frac{N}{4\pi r^2}$$

ts. tiettyyn avaruuskulmaan Ω osuu kenttäviivoja

$$N_\Omega = \frac{\Omega}{4\pi} N \quad \text{kappaletta !}$$

2.3.2. Kenttäviivat ja sähkövuo

ts. havainnollistetaan sähkökenttää ...

Kenttäviivat ovat kenttään kuviteltuja viivoja,

- * joiden suunta ilmaisee sähkökentän voimakkuuden suunnan ja
- * joiden tiheys ilmaisee sähkökentän voimakkuuden suuruuden.

Sovitaan:

- 1) Kustakin varauksesta lähtee varauksen ilmaisema määrä kenttäviivoja.
- 2) Viivat alkavat positiivisista varauksista.
- 3) Viivat päättyvät negatiivisiin varauksiin.

Sähkövuo

Kenttäviivaesitys havainnollinen, mutta diskreetti...

Vastaava jatkuva esitys saadaan, ottamalla

- * kenttäviivojen lukumäärää vastaamaan sähkövuo ja
- * kenttäviivojen tiheyttä vastaamaan sähkövuon tiheys

Sovitaan:

Pistemäisestä varauksesta Q lähtee sähkövuo $\psi_Q = Q$, joka leviää säteittäisesti ja tasaisesti joka suuntaan.

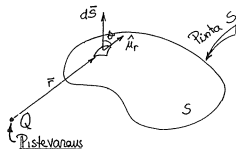
Esim.

Avaruuskulmaan Ω osuu sähkövuo

$$\psi_\Omega = \frac{\Omega}{4\pi} Q, \text{ etc.}$$

Esim.

Pistevaraus Q
Ja mielivaltaisen pinta S .
Kuinka suuri on sähkövuon ψ pinnan S läpi?



Varauksen Q sähkövuon pisteessä $\vec{r} = r\hat{u}_r$, olevan pinta-alkion $d\vec{S}$ läpi:

Q :sta katsottuna pinta-alkio $d\vec{S}$ näkyy avar.kulmassa

$$d\Omega = \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

Joten:

$$d\psi = \frac{d\Omega}{4\pi} Q = \frac{Q}{4\pi} \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$$\psi_S = \epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Yleistys: Sähkövuon pinnan S läpi kentässä $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\psi_S = \epsilon_0 \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Sähkövuon tiheys = D

kuten kenttäviivojen tiheys: ts. kenttää vastaan \perp pinnan läpäisevä sähkövuon jaettuna pinnan alalla.

Esim. Pistevaraukselle Q :

$$d\psi = \frac{Q}{4\pi} \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} \quad dS_{\perp} = \hat{u}_r \cdot d\vec{S}$$

$$D = \frac{d\psi}{dS_{\perp}} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \epsilon_0 E(\vec{r})$$

Määritellään yleisesti:

Sähkövuon tiheys kentässä $\vec{E}(\vec{r})$ on vektorisuure:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

Joten:

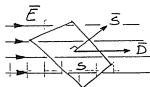
$$d\psi = \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

tai

$$\psi_S = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Esim.

Homog. kenttä $\rightarrow \vec{D} = \text{vakio} = \epsilon_0 \vec{E}$



Tasopinnan S läpäisee sähkövuon:

$$\psi_S = \vec{D} \cdot \vec{S} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Jos taso $\perp \vec{E}$, niin:

$$\psi_S = DS = \epsilon_0 ES$$

2.3.3. Gaussin laki

Sähkövuon tiheys:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{u}_r$$

Sähkövuon pinnan läpi:

$$\psi_S = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi} \int_S \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi} \Omega_S$$

Jos S on umpinainen pinta:

$$1) \psi_S = Q, \text{ jos varaus on pinnan sisäpuolella } (\Omega_S = 4\pi)$$

$$2) \psi_S = 0, \text{ jos varaus on pinnan ulkopuolella } (\Omega_S = 0)$$

Mielivaltainen diskreetti varaus-
systemi:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \vec{D}_i(\vec{r})$$

ja

$$\psi_s = \int_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi} \Omega_{si}$$

(missä Ω_{si} on avaruuskulma, jossa
varaus Q_i näkee pinnan S)

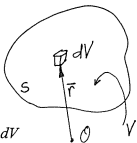
Vastaavasti

jatkuville varauksille: $\Sigma \rightarrow \int$

Sovelletaan tulosta umpinaiseen
pintaan:

$$\psi_s = \int_s \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = Q_s = \int_v \rho(\vec{r}) dV$$

$$dq = \rho(\vec{r}) dV$$



2.3.4. Pallosymmetriset systemit

Coulombin lain yleistys:

- pallosymmetrinen varausjakauma
- symmetriakeskus origoksi

$$\rho = \rho(r) \rightarrow \vec{E} = E(r)\hat{u}_r$$

- Gaussin lakia voidaan soveltaa
r- säteiseen pallopintaan
→ saadaan :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2} \hat{u}_r,$$

missä $Q_s = Q(r)$ on ko.pallopinnan
sisälle sulkema varaus.

- tulos kuten Coulombin laki, mutta
varauksesta vain r-säteisen pallon
sisältämä osuus mukana !
- systeemin ulkopuolella kenttä on
systeemin kokonaisvarauksien
aiheuttama Coulombin kenttä.

ts.
umpinaisen pinnan S läpäisevä sähkö-
vuo = pinnan sisälle sulkema koko-
naisvaraus Q_s (= äärettömyyteen
jatkuvien kenttäviivojen määrä)

Gaussin laki: varaukset ovat sähkö-
kentän lähteitä.

Huom.

Merkinnässä \int_s rengas symboloi
sitä, että integraali lasketaan suljetun
pinnan yli.

Huom.

Gaussin laki tarjoaa yksinkertaisen kei-
non sähkökentän voimakkuuden laske-
miseen tietyissä symmetrisissä tilan-
teissa :

- 1) symmetria \rightarrow kentän muo-
to ts. \vec{E} :n suunta
- 2) laskettava vain \vec{E} :n ska-
laariarvo paikan funktiona

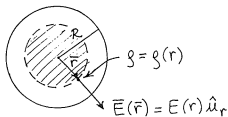
$$Q(r) = ?$$

Tilavuusalkioksi infinitesimaalinen
pallokuori :

$$Q(r) = \int \rho(r) dV = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \dots$$

Esim.

R = pallosymmetrisen varausysteem-
in ulkosäde ja varausitiheys etäisyy-
dellä r varaus-systeemin keskipitees-
tä = $\rho = \rho(r)$



Huom.

r-säteisen pallon pinnalla $E(r) = \text{vakio} !$

Homogeenisesti varattu pallo :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \text{ kun } r \leq R$$

$$\frac{Q_0 \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ kun } r \geq R$$

missä Q_0 on pallon kokonaisvaraus ja R sen säde.

2.3.5.

Sylinterisymmetriset systeemit

Sylinterisymmetria \rightarrow käytetään sylinterikoordinaatistoa: symmetria-akseli = z-akseli ja radiaalinen koordinaatti r .

Kentän muoto: $\rho = \rho(r)$
 $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$
 (ts. \perp symmetria-aks)

Mutta: $E(r) = ?$

31

2.5. Sähkökentän potentiaali

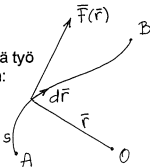
2.5.1. & 2.5.2.

Potentiaalienergia, potentiaali, jännite (kertausta)

Yleisesti (mekaniikasta):

- 1) voiman kpl:een tekemä työ tiettyä reittiä s myöten:

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \Delta E_k$$



- 2) jos \vec{F} on konservatiivinen ts. W ei riipu tiestä, niin määritellään kpl:n potentiaalienergia :

$$E_p(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + C$$

(usein valitaan: $E_p(\infty) = 0$, ts. $C=0$)

Kun sovelletaan Gaussin lakia ympyrälieriöön, jonka akselina on symmetria-akseli ja jonka säde on r ja korkeus L , niin saadaan:

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(r)}{r} \hat{u}_r,$$

missä $\lambda(r) = \frac{Q(r,L)}{L}$ on sellaisen viivavaruksen lineaarinen varausitiheys, joka saadaan projisoimalla symmetria-akselille kaikki enintään etäisyydellä r oleva varaus.

ts. Kentän tietyllä etäisyydellä akselista määrää vain se osa varausta, joka on lähempänä akselia kuin tarkastelupiste.

Esim. Tasaisesti varattu pitkä ohut sauva:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{u}_r, \text{ ts. } \propto (1/r) !$$

32

- 3) muistetaan mekaniikasta: keskeisvoimakenttä

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$$

on konservatiivinen, ts. on olemassa potentiaalienergia E_p ja

$$W_k(A \rightarrow B) = -\Delta E_p = -(E_p^B - E_p^A)$$

Sovelletaan sähkökentän tapaukseen:

- a) pistevarauksen q Coulombin kenttä:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- b) kpl:een (varaus = Q) vaikuttaa Coulombin kentässä voima:

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} = F(r)\hat{r} =$$

= keskeisvoima ts. E_p on olemassa

c)

$$\begin{aligned}
 W_k(A \rightarrow B) &= \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} \\
 &= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \\
 &= -\Delta \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\Delta E_p
 \end{aligned}$$

ts. Q:n pot. energia (q:n sähkökentässä):

$$E_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} + C$$

(yhteensä valitaan, C = 0)

- 4) kun varaus Q liikkuu kentässä, niin kentän tekemä työ ja kpl:n potentiaalienergia ovat verrannollisia

varaukseen Q

ja suure $\frac{E_p}{Q}$ on pelkästään kenttää kuvaava suure.

5) **Määr.**

Sähkökentän potentiaali :

$$V(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{Q}$$

tai

$$E_p(\vec{r}) = QV(\vec{r})$$

jossa:

$$E_p(\vec{r}) = - \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -Q \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C$$

ts.

Jos kenttä $\vec{E}(\vec{r})$ tunnetaan, saadaan kentän potentiaali jakamalla eo. $E_p(\vec{r})$:n lauseke Q:lla:

$$V(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{Q} = - \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C$$

- 6) Sähkökentän pisteiden A ja B välinen jännite:

$$U_{AB} = V(A) - V(B)$$

- 7) Yksiköt:

$$[V] = [U] = \frac{J}{C} = 1V = 1\text{voltti}$$

- 8) **Esim.**

Pistevaraukselle:

$$E_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} = QV(\vec{r})$$

ts.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

- 9)

- 10) Kun hiukkanen (varaus = Q) siirtyy $A \rightarrow B$ siten, että koko ajan $V(\vec{r}) = \text{vakio}$, niin kentän tekemä työ $= W_k = Q(V_A - V_B) = 0$

Toisaalta muistetaan:

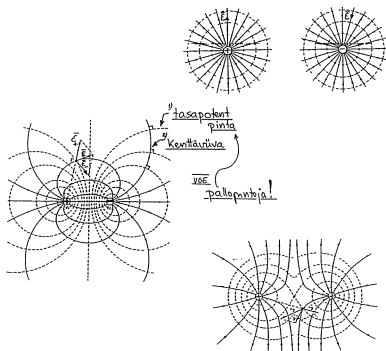
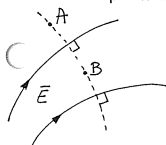
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \text{ jos } \vec{F} \perp d\vec{r}$$

Joten nyt: $\vec{F} = Q\vec{E} \perp d\vec{r}$ ts. $d\vec{r} \perp \vec{E}$

Määr.

Tasapotentialipinta $V = \text{vakio}$:

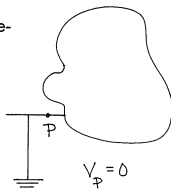
- a) ko. pinta on jokaisessa pisteessä $\perp \vec{E}$
 b) ko. pinnalla $W_k = Q(V_A - V_B) = 0$



- 11) **Huom.**

Maa on iso johde-kappale, usein sovitaan:

Maan potentiaali = 0



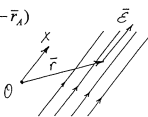
Homogeeninen kenttä :

$$V(\vec{r}) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot \int d\vec{r} = -\vec{E} \cdot \vec{r} + C$$

$$U_{AB} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{E} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

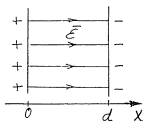
Valitaan: $\hat{i} \uparrow \vec{E}$,

$$\text{Jolloin } V = -Ex + C \\ U_{AB} = E(x_B - x_A)$$



Esim. Levykondensaattori:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{i}$$



$$V(x) = -Ex + C = -\frac{\sigma x}{\epsilon_0} + C$$

$$0 \leq x \leq d$$

(V pienenee kentän suuntaan)

2.5.3.

Laminaarisen kentän potentiaali

Kenttätön tila:

$$\vec{E} = 0 \rightarrow U_{AB} = 0 \rightarrow V(\vec{r}) = \text{vakio}$$

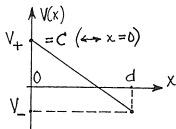
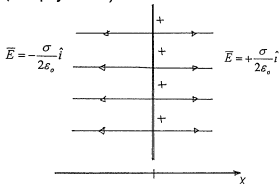
Kondensaattorin jännite = sen levyjen välinen jännite:

$$U = V_+ - V_- = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

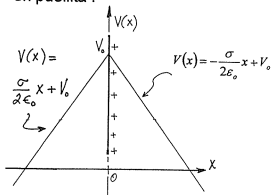
$$E = \frac{U}{d}$$

Esim.

Tasaisesti varattu taso (\vec{E} epäjatkuva):



V saa saman arvon tultaessa tasolle eri puolilta:



Jos tason

varaus on $> 0 \rightarrow V$ pienenee

$< 0 \rightarrow V$ kasvaa

etäännyttyessä levystä.

ts. AINA:

V pienenee kentän suuntaan!

2.5.4.

Pallosymmetrisen kentän potentiaali

Symmetrian perusteella:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{u}_r$$

ja:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int E(r)\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = -\int E(r)dr$$

= $V(r)$ ts. pallosymmetrinen funktio

Coulombin potentiaali

Pallosymmetrisen systeemin ulkopuolella kenttä = Coulombin kenttä, jonka määrää kokonaisvaraus Q .

Siten:

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

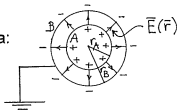
Jos valitaan $V(\infty) = 0$, niin $C = 0$.

Pallokondensaattori

Kaksi sisäkkäistä johdepallon kuorta:

jos sisäpallon varaus = $+Q$, niin

ulomman pallon varaus = $-Q$.



Kenttä kuorien välissä = Coulombin kenttä (jonka määrää varaus $+Q$).

Myös potentiaali välissä = $-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$

Maadoitetaan ulkokuori $\rightarrow V(r_B) = 0$

ja, koska $V(r)$ on jatkuva, on:

$$C = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

Kentän potentiaaliaksi pallokuorien välissä saadaan siten:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Pallokondensaattorin jännite

(=kuorten potentiaaliero)

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_B - r_A}{r_A r_B}$$

Huom.Jos $r_B - r_A$ pieni,

- merkitään: 1) $r_B - r_A = d$
 2) pinta-alojen keskiverto
 $= 4\pi r_A r_B = S$

joten:

$$U_{AB} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

(ts sama kuin levykondensaattorilla !)

2.5.6.**Tunnetun systeemin potentiaali**

- a) Homogeenisesti varatun ympyrärenkaan (säde R) akselilla:

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

- b) Homogeenisesti varatun ympyrälevyn (säde
- R_0
-) akselilla:

$$V(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{r_0} \right),$$

missä

$$r_0^2 = z^2 + R_0^2$$

2.5.5.**Sylinterisymmetrisen kentän potentiaali****Esim.**

Tasaisesti varattu sauva:

Varaussysteemin ulkopuolella:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{u}_r$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

Jos valitaan $V(r_0) = 0$,
saadaan:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

2.6. Sähkökentän voimakkuuden määrittäminen potentiaalilla**2.6.1.****Vektorilaskennan kertausta****Gradientti**Jos skalaarisuure u on yksikäsitteinen paikkavektorin (\vec{r}) funktio

→

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$$

Määr.

nabla-operaattori:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

jolloin voidaan merkitä:

$$\text{grad } u = \nabla u$$

Tuloksia:

- 1) funktio u kasvaa voimakkaimmin siirryttäessä ∇u :n suuntaan;
- 2) derivaatta gradientin suuntaan:

$$= |\nabla u|$$

Divergenssi Vektorikentälle \vec{B} :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Roottori

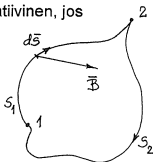
$$\operatorname{rot} \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

51

Vektorikenttä \vec{B} on konservatiivinen, jos viivaintegraali

$$\int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \text{on tiestä riippumaton.}$$



Vektorikentän \vec{A} konservatiivisuus voidaan todeta millä tahansa seuraavista ehtoista:

- 1) On olemassa skalaaripotentiali k siten, että $\vec{B} = -\nabla k$
- 2) viivaintegraali suljettua tietä pitkin häviää ts. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
- 3) \vec{B} :n roottori = 0 ts. $\nabla \times \vec{B} = 0$
 $\rightarrow \vec{B}$ = pyörteetön!

Laplacen operaattori:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Kertaa operaatiot paikkavektoreille:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{esim. } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

saatiin:

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r} \quad \nabla \cdot \vec{r} = 3 \quad \nabla \times \vec{r} = 0$$

Samoin:

$$\nabla F(r) = \frac{dF}{dr} \nabla r = \frac{dF}{dr} \hat{r}$$

52

2.6.2. \vec{E} :n määrittäminen V :n avulla

$$\nabla a \cdot d\vec{r} = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz = da$$

$$a \rightarrow V$$

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{r}$$

Sähkökentän potentiaali V määriteltiin:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{ts.} \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Joten:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

(= potentiaalifunktion määrittämisen käänteisrelaatio)

Siispä:

1) xyz -koordinaatistossa

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(r) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

2) Symmetriset kentät:

Sähkökentän voimakkuus voidaan ilmaista yhden muuttujan skalaarisen funktion avulla

→ myös potentiaali redusoituu saman koordinaatin funktioksi!

a) Pistevaraus

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}\right)\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Sylinterikoordinaatisto: r, ϕ, z

$$d\vec{R} = dr\hat{u}_r + r d\phi\hat{u}_\phi + dz\hat{u}_z$$

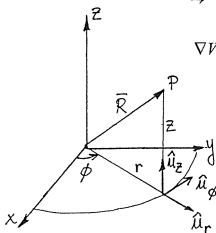
VOE:

$$\nabla V = \hat{u}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{u}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{u}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

Jos $V = V(r)$,

→

$$\nabla V = \frac{dV}{dr}\hat{u}_r$$



b) sylinterisymmetrinen systeemi

$$\vec{E} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}\right)\hat{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(-\frac{r_0}{r^2}\right)\hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

c) homog. varattu ympyrärengas

$$\vec{E} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{k} = \dots = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}\hat{k}$$

Lisäys:

Sylinteri- & pallokoordinaatistot

↔ gradientin laskeminen = ?

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Jos: $V = V(z)$, niin: $\nabla V = \frac{dV}{dz}\hat{k}$

Pallokoordinaatisto: r, θ, ϕ

$$d\vec{r} = dr\hat{u}_r + r d\theta\hat{u}_\theta + r \sin\theta d\phi\hat{u}_\phi$$

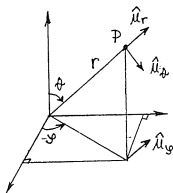
VOE:

$$\nabla V = \hat{u}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{u}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Jos:

$$V = V(r)$$

$$\rightarrow \nabla V = \frac{dV}{dr}\hat{u}_r$$



(ts. Jos $V = V(r)$ → sylinteri- tai pallo-symmetriset kentät ...)

Potentiaalin tasa-arvopinnat:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

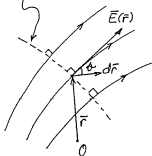
joten:

dV = potentiaalin muutos infinitesimaalisessa siirtymässä $d\vec{r}$:

$$dV = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -E(\vec{r})|d\vec{r}|\cos\theta$$

(missä θ on siirtymän ja sähkökentän voimakkuuden välinen kulma tarkastelupisteessä.

ts. potentiaalin muutos riippuu siirtymän suunnasta !



Jos $d\vec{r} \perp \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow dV = 0$ ts. potentiaali ei muutu lainkaan: \rightarrow potentiaalin tasa-arvopinnat ($V(\vec{r}) = \text{vakio}$) ovat kaikkialla \perp kenttäviivoja vastaan

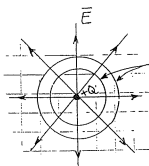
Huom.

Potentiaali pienenee jyrkimmin kenttäviivan suunnassa.

Sillä:

1) $\vec{E} \uparrow$ kenttäviiva

2) \vec{E} on tasa-arvopinnan normaalin ts:n $-\nabla V$:n suuntainen

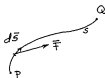


(ts. potentiaalin tasa-arvopinta on kohtisuorassa sähkökenttää vastaan !)

2.7. Sähköstaattisen kentän differentiaalilait

2.7.1. Pintaintegraali ja Gaussin lause

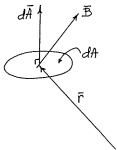
a) Muistetaan: esim. vektorin \vec{F} viivaintegraali (= työ !)



$$W = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

b) **Vektorin pintaintegraali:**

Jaetaan tarkasteltava pinta A alkioihin dA . Pinta-ala-alkioon dA liitetään vektori $d\vec{A}$, joka on \perp alkioita vastaan:



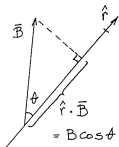
Määr. Vektorin \vec{B} integraali pinnan A yli eli \vec{B} :n vuo pinnan A läpi: $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Huom.

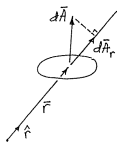
Jos pinta A on suljettu, niin merkitään:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Projektio:



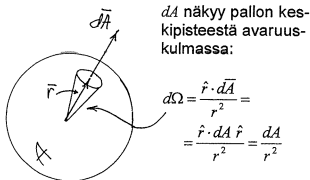
Yleisesti:
 dA :n projektiio $\perp \hat{r}$
 $= \hat{r} \cdot d\vec{A} (= dA_r)$
 (= $d\vec{A}$:n skalaarikomp. \vec{r} :llä)
 (sillä $d\vec{A} \perp dA$ -taso)



Vastaava vektori-komponentti
 $d\vec{A}_r = (\hat{r} \cdot d\vec{A}) \hat{r}$

Esim.

Vektorin \vec{r} vuo r-säteisen pallopinnan läpi = ?



Kysytty vuo =

$$= \oint_A \vec{r} \cdot d\vec{A} = \oint_A r \hat{r} \cdot d\vec{A} = r^3 \underbrace{\oint_A \frac{d\Omega}{r^2}}_{=4\pi \text{ (= koko avar. kulma)}} = 4\pi r^3$$

3) **VOE:** Yleisesti:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{K}) = 0$$

Joten:

Lähteetön kenttä \vec{B} voidaan lausua muodossa:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{K}$$

missä \vec{K} on \vec{B} :n nk. vektoripotentiaali

2.7.2. Sähkökentän lähteisyys

Coulombin laki:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{u}_r$$

(sähköstaattisten kenttien diskreetti peruslaki)

c) **Gaussin lause:**

↓ **VOE**

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV$$

missä V = suljetun pinnan A sisältämä tilavuus (dV = tilav. alkio)

d) **Lähteetön vektorikenttä:**

Jos vektorin \vec{B} vuo läpi jokaisen alueessa olevan suljetun pinnan A häviää \rightarrow vektorikenttä on lähteetön

Kolme lähteettömyysehtoa:

$$1) \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$2) \text{Gaussin lause} \rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

ts. \vec{B} :n *divergenssi* eli *lähteisyys* = $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Gaussin laki:

$$\psi_s = Q_s = \oint \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int \rho(\vec{r}) dV$$

(edellisen *integraalimuoto*, V on iso alue \rightarrow ei hyvä peruslaiksi, mutta:)

Johdetaan lakien kolmas formulointi: *differeniaalimuoto* (antaa kentän ominaisuudet tietyssä pisteessä):

Sovelletaan nyt Gaussin lakia mielivaltaisessa pisteessä \vec{r} olevaan infinitesimaaliseen alueeseen dV , jolloin saadaan:

$$d\psi = dQ = \rho(\vec{r}) dV$$

$$= dV:n \text{ pinnan läpäisevä sähkövuo}$$

$$dQ = dV:n \text{ sisältämä varaus}$$

$$\rho(\vec{r}) = \text{varaustiheys pisteessä } \vec{r}$$

Gaussin lauseesta:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \psi_s = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

ts. saadaan differentiaalilaki,

Maxwellin 1. laki:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$\nabla \cdot \vec{D}$ = sähkövuon tiheyden divergenssi eli lähteisyys

(ts. varaustiheys toimii sähkövuon tiheyden lähteisyytenä !)

Voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho(\vec{r}) = \frac{d\psi}{dV} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Potentiaalidifferentiaalilaki:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \nabla \cdot \nabla V(\vec{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 V(\vec{r})$$

ts.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V(\vec{r}) = -\left(\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \right)$$

= nk. Poisson'in yhtälö

Varauksettomassa tilassa sähkökentän potentiaali toteuttaa nk. Laplacen

yhtälön: $\nabla^2 V = 0$

(ratkaisut nk. harmonisia funktioita ...)

Eo. kaavojen tulkintoja:

1) Gaussin laki:

Vuo umpinaisen pinnan läpi (ψ_s) on integraalisuure, joka ilmaisee pinnan sisältä alkavien kenttäviivojen lukumäärän (= Q_s).

2) Maxwellin 1. Laki

Kentän lähteisyys ($\nabla \cdot \vec{D}$) on vastaava differentiaalisuure, joka ilmaisee kentän kyvyn synnyttää kenttäviivoja paikan funktiona.

Huom.

Gaussin laki & Maxwellin 1. laki ovat keskenään ekvivalentit.

2.7.3. Sähkökentän pyörteettömyys

Luvussa 2.6.1. todettiin, että staattinen sähkökenttä on konservatiivinen; ts.

1)

$$\int_A^B \int_{C1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \int_{C2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\rightarrow \oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

2) On olemassa potentiaalifunktio:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

ja

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

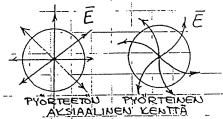
3) Maxwellin 3. laki (differentiaalilaki):

$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$ ts. staattinen kenttä on pyörteetön !

$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) =$ sähkökentän roottori eli pyörteisyyys

Huom.

Kentässä mahdollisesti esiintyvä pyörre ilmenee kenttäviivojen kiertymisenä pyörreakselin ympäri:



2.8.

Johdekappale sähkökentässä

2.8.1.

Aineen sähköstaattiset perustyytit

Toistaiseksi: $\vec{E}(\vec{r})$ tyhjiössä!

Lähtökohta:

Pistevaraus \rightarrow Coulombin kenttä ja (jos varusjakautuma tunnetaan):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum \vec{E}_i \quad \text{tai} \quad \int d\vec{E}$$

(ts. sähkökentän voimakkuuksien yhdistämislaki)

Aineen vaikutus sähkökenttään = ?

- 1) varauksia, synnyttävät kentän
- 2) tuodaan jokin kpl, jolloin kpl ja väliainekin polarisoituvat ts. tilanne muuttuu ...

71

Mikä on nyt kentän määrittelevä varusjakautuma = ?

Havaitaan: Varaus on epäkäytännöllinen lähtökohta sähkökenttien tarkastelulle.

Muistetaan:

Grayn havainto varausten erilaisesta liikkuvuudesta eri aineissa:

- johteet (varaus liikkuu vapaasti)
- eristeet (varaus ei liiku)

Esim.

Polarisoidaan sauva voimakkaassa sähkökentässä & katkaistaan ja poistetaan sitten sähkökenttä:

- 1) johdesauvan osat jäävät + ja - varautuneiksi,
- 2) eristesauvan osat neutraaleiksi.

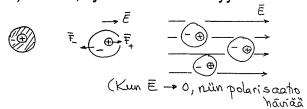
70

Comments (atomaarinen näkökulma):

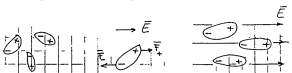
- 1) johteessa johdinelektronit pääsevät liikkumaan vapaasti,
- 2) eristeessä elektronit ovat sitoutuneet neutraaleihin atomeihin ja molekyyliihin

Eristeen polarisoituminen:

1) atomit, symmetriset molekyylit



2) epäsymmetriset molekyylit: pysyviä dipoleja; esim. H_2O



Huom.

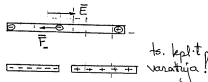
Kun $\vec{E} \rightarrow 0$, niin polarisaatio häviää.

Onko sauva johde- vai eristeainetta ?

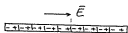
Polarisoidaan sauva voimakkaassa sähkökentässä:

Johde:

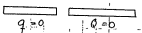
Katkaistaan,
ja $\vec{E} \rightarrow 0$



Eriste:



Katkaistaan,
ja $\vec{E} \rightarrow 0$



ts. kpl:t neutraaleja !

2) $\rho(\vec{r}) = 0$ johde kpl:n sisällä
ts. kpl sisällä neutraali
(sillä, jos

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &\neq 0 \\ \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &\neq 0 \\ \text{ts. ei tasap.)} \end{aligned}$$

Toisaalta

Gaussin laista (kun $S =$ suljettu pinta johteen sisällä):

$$\psi_S = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_S$$

$$\rightarrow Q_S = 0 \quad \text{ts.} \quad \rho(\vec{r}) = 0$$

3) Johdekappaleessa varaus asettuu aina pinnalle. Varausjakautuma on sellainen, että sen kenttä kumoaa ulkoisen kentän kpl:n sisällä:

$$\rightarrow \text{pinnan varauskate} = \sigma(\vec{r})$$

2.8.2. Johdekappaleen ideaaliset perusominaisuudet

Johdinkappale:

johdinelektronit = makroskooppinen varaus, joka pääsee vapaasti liikkumaan koko kpl:ssa (mutta ei pääse poistumaan siitä).

Kun asetetaan neutraali johde kpl ulkoiseen sähkökenttään, niin:

ensin lyhytaikainen järjestäyty-misvirta ja

sitten: tasapainotila, johon liit-tyvät **johteen sähköstaattiset perusominaisuudet**:

1) $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ johde kpl:n sisällä
(sillä, jos $\vec{E}_{\text{ulk}} \neq 0$, niin varaukset liikkuisivat \rightarrow ei tasapainotila !)

4) Johteen sisällä:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + V_0 = V_0 = \text{vakio}$$

ts. potentiaali on sama kaikkialla johdekappaleessa !

5) Johde kpl:n pinnallakin siis:

$$V = V_0 = \text{vakio}$$

ts.

johde kpl:n pinta = ulkoisen sähkö-kentän tasapotentialipinta

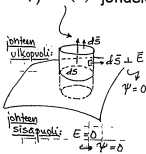
(sillä: potentiaali ei voi muuttua hyppäyksittäin !)

6) Siispä $\vec{E}_{\text{ulk}} \perp$ johde kpl:n pinta ts.

$$\vec{E}_{\text{ulk}}(\vec{r}) \uparrow \uparrow \hat{u}_n(\vec{r})$$

(ts. $\uparrow \uparrow$ kpl:n pinnasta suoraan ulos-päin suuntautuva yksikkövektori)

7) $\vec{E}(\vec{r})$ johdekl:n pinnalla = ?



Gaussin laki:
S = matala lieriö
johdekl:n pinnan
läpi:

Vain yläpinnalta $\neq 0$:

$$\psi_S = \epsilon_0 E(\vec{r}) dS = Q_S = \sigma(\vec{r}) dS$$

ja siten:

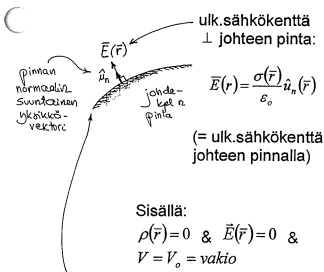
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \hat{u}_n(\vec{r})$$

ts. johdekl:n pinnan varauskate määrää sähkökentän voimakkuuden johteen pinnalla.

Yhteenveto

ts. (johdekl:n ideaaliset ominaisuudet)

Saatiin:



Pinta on ulkoisen sähkökentän tasopotentiaalipinta: $V = V_0 \rightarrow$ varaus asettuu pinnalle: varauskate $\sigma = \sigma(\vec{r})$

Huom. a) varaus ei jakaudu tasaisesti johteen pinnalle

b) myöskään kentän voimakkuus ei ole sama kaikkialla kpl:n pinnalla,

c) mutta: kpl:n potentiaali = vakio !

8) $\vec{E}(\vec{r})$ yleensä suurin siellä, missä pinnan "kaarevuus" on suurin ja heikoin siellä, missä kaarevuus on pienin (syy poistovoima: varaukset mahdollisimman kauas toisistaan) $\rightarrow \vec{E}(\vec{r})$ suuri terävien kärkien ja särmien lähellä.

Seuraus:

- kärkiin voimakas kenttä
- joka ionisoi ilmaa lähellä
- ja tekee ilman johtavaksi:
- varaus pyrkii purkautumaan kappaleen kärjistä: seurauksena kipinäpurkaus tms.

Huom.

• varaus ei jakaudu tasaisesti:

$\rightarrow \vec{E}(\vec{r})$ ei ole sama pinnan eri pisteissä

• mutta:

kpl:n potentiaali on vakio ($V = V_0$)

• samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan:

\rightarrow ajautuvat mahdollisimman kauas toisistaan, ts. teräviin kärkiin, säirmiin, etc.

\rightarrow sinne:

suuri $\sigma(\vec{r}) \rightarrow$ suuri $\vec{E}(\vec{r})$

\rightarrow voimakas kenttä ionisoi ilmaa

\rightarrow tekee sen johtavaksi ja siksi: varaus pyrkii purkautumaan kpl:n kärjistä ...

Poikkeamat mallista

Edellä: ideaalinen malli

Mutta: johteen pinnalla ei ole esitettyä matemaattisen tarkkaa epäjatkuvuutta
ts.
todellisuudessa ohut pintakerros jossa muutos

$$\vec{E}_{ulk} \rightarrow \vec{E}_{sis} = 0$$

tapahtuu jatkuvasti.

Myös:

Mallin mukaan varausta voi siirtyä vain johdekappaleiden koskettaessa toisiaan.

Mutta:

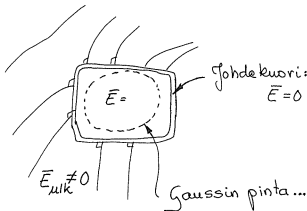
Elektroneja voi irrota johdekappaleesta mm. kuumennuksen, ulkoisen sähkökentän tai säteilyn vaikutuksesta ...

Kokeellinen merkitys

Suljetun johdekuoren sisällä: $\vec{E}(\vec{r}) = 0$

→ nk. Faradayn häkki

(jolla voidaan suojata herkkiä sähkölaitteita ulkoiselta sähkökentältä)



2.8.3. Potentiaali & jännite

(sähköopin peruskäsitteitä)

Johdekappaleilla on tietty vakio potentiaali ja kahden johdekappaleen välillä tietty jännite (=potentiaaliero).

Tarkastellaan:

kahta johdekappaleita, joilla on eri varaukset.



Annetaan niiden koskettaa toisiaan, jolloin varausta siirtyy kpl:sta toiseen.

Mikä määrää siirtyvän varauksen määrän?

Ei varausten suuruus, vaan potentiaalil

ts.

Erisuurille kpl:lle jää sama potentiaali !

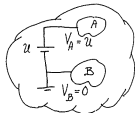
Huom.

Jännitteen mittaaminen muodostui jo varhain paljon tarkemmaksi kuin varauksen...

Sillä: havaittiin, että kemiallisen parin (Voltan pari) kohtioiden välinen jännite on parin kemialliselle reaktiolle ominainen vakio.
→ toistettavia jännitestandardeja

Maapallo

- suuri johdekpl
- sen potentiaaliksi sovitaan yleensä $V = 0$.



- joten kpl:lla, joka on yhdistetty Maahan ts. maadoitettu, on potentiaali $V = 0$.

Vaikutus perusprobleeman luonteeseen :

→ potentiaalin & jännitteen merkitys ↑, varauksen ↓

Jatkossa pyrkimyksenä:

määrittää sähköstatiikan probleemas-
sa tilanne potentiaalin avulla...

ts.

Ensin tilanteen määrittely:

- tunnettu varausjakautuma
- tunnetut johdekl:t tunnetuissa potentiaaleissa

↓

Sitten sähkökentän voimakkuuden määrittäminen ...

2.8.4. Johdekappale sähkökentässä

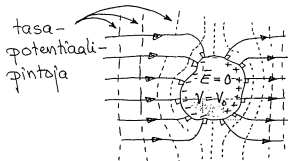
Kenttään tuotu neutraali johdekl:

- vaikuttaa kentän muotoon
- polarisoituu → varauskate $\sigma(\vec{r})$, jonka aiheuttama kenttä:

1) kumoaa ulk.kentän kpl:n sisällä

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 0,$$

2) kääntää ulkoiset kenttäviivat \perp kpl:n pintaa vastaan
ts. mukauttaa potentiaalin tasa-arvopinnat kpl:n muotoon



Johteiden & varausten ulkopuolella:

nk. Laplacen yhtälö:

$$\nabla^2 V = 0$$

&

tunnetuissa potentiaaleissa olevat johdekl:t muodostavat sen ratkaisun reunaehdot ...

ts. yleisesti:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

saadaan yksikäsitteinen ratkaisu:

$$V = V(\vec{r}) \rightarrow \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

Huom.

Em. reuna-arvoprobleeman yleinen tarkastelu olisi erinomaisen vaativa tehtävä..., mutta yksinkertaisiakin esimerkkitapauksia löytyy → ...

• kpl:n kokonaisvaraus on koko ajan nolla → ei muuta voimaviivojen lukumäärää, vain kentän muotoa

• kaukana kenttä \approx ei muutu

Joten:

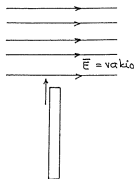
Kun tunnetaan alkuperäinen varausjakautuma ja johdekappaleen muoto:

→ saadaan

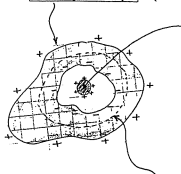
$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \text{ kaikkialla...}$$

Esim.

Johdelevy viedään kohtisuorasti homogeeniseen sähkökenttään: mitä tapahtuu ?



Ontto johdekl: (varaus = q_0)



Alkuperäinen varaussysteemi + q
Johteen sisäpinnalle indusoituu varaus - q

Sillä: Jos otetaan Gaussin pinta, joka on kokonaan johteessa

$$\rightarrow \psi_S = 0, \text{ koska } \vec{E} = 0.$$

On siis oltava $Q_S = 0 \rightarrow$ ts. tarvitaan + q :n lisäksi johdekl:n sisäpinnalle varaus - q

Huom. Johteen kokon.varaus = q_0
 \rightarrow ulkopinnalle kokonaisvaraus-
ta + $q + q_0$ vastaava va-
varausjakautuma.

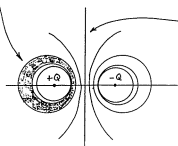
Johte kenttään:

\rightarrow potentiaalın tasa-arvopinnat johteen lähellä johteen pinnan muotoisiksi.

ts.

Jos johte yhtyy alkuper. kentän potentiaalın tasa-arvopintaan \rightarrow kenttä kpl:n ulkopuolella ei muutu!

Esim. Dipoli (+ Q ja - Q)



myös tämä taso on tasapotentialipinta

ts.

Potentiaalın kahden mielivaltaisen tasa-arvopinnan välisen alueen täyttämisen johteella ei siis muuta kenttää johteen ulkopuolella.

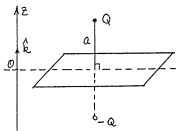
Peilivarausmenetelmä

\rightarrow

$\vec{E}(\vec{r}) = ?$ johdekl:n lähellä

Esim.

Määritä pistevarauksen kenttä "ääretömän" laajan johdetason lähellä.



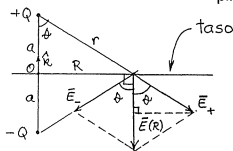
Taso on johtava \rightarrow siis se on Q :n kentän tasa-arvopinta!

Toisaalta: kahden varauksen (+ Q , - Q) yhdysjanan keskinormaalitaso on niiden kentän potentiaalın tasa-arvopinta ts.

kuvassa kenttä johdetason yläpuolella pysyy muuttumattomana, jos taso korvataan laskennallisella peilivaruksella: - Q !!!

Kenttä alkuperäisen johdetason pinnalla saadaan nyt laskemalla kahden pistevarauksen kenttä

\rightarrow pinnalla $\vec{E} \perp$ pinta!



$$\vec{E}(R) = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$|\vec{E}_+| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = |\vec{E}_-|$$

$$\vec{E}(R) = -2 \times \frac{Q \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{k} \quad \left(\cos\theta = \frac{a}{r}\right)$$

$$\vec{E}(R) = -\frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 r^3} \hat{k}$$

$$r = \sqrt{a^2 + R^2}$$

ts. johteen pinnalla: $\vec{E} \neq 0$

joten,

kun muistetaan, että yleisesti johteen pinnalla

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \hat{u}_n$$

niin johdetasolle indusoitunut varauskate = kentän sähkövuon tiheys tason kohdalla:

$$\sigma = \sigma(R) = \epsilon_0 E(R) = -\frac{Qa}{2\pi r^3}$$

$$(r = \sqrt{a^2 + R^2})$$

Johdetasolle indusoitunut kokonaisvaraus = sähkövuon tason läpi korvaavassa (+Q, -Q) systeemissä, ts.

$$= -Q.$$

$R: 0 \rightarrow \infty$

$r: a \rightarrow \infty$

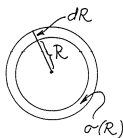
$$dS = 2\pi R dR \rightarrow dq = \sigma 2\pi r dr$$

$$R^2 + a^2 = r^2$$

$$2R dR = 2r dr$$

$$q = \int dq$$

$$= \int_0^{\infty} 2\pi R \sigma(R) dR$$



$$= \int_a^{\infty} 2\pi \left(\frac{-Qa}{2\pi r^3} \right) r dr = \dots = -Q$$

$$\left[= -Qa \int_a^{\infty} r^{-2} dr = +Qa \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} = Qa \left(-\frac{1}{a} \right) = -Q \right]$$

Yleisemmin:

Johdetason edessä varausjakautuma

$$\rho(x, y, z)$$

tasoa voidaan korvata peilisyteemillä, joka saadaan muodostamalla alkuperäisen systeemin peilikuva:

jos tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori on

$$\hat{u}_n \uparrow \uparrow \hat{k}$$

niin sijoitetaan aina varaukselle $+Q(x, y, z)$ peilivaraus $-Q(x, y, z)$, joten peilisyteemin varaus tiheys on:

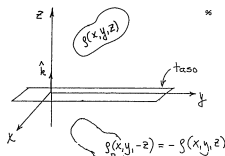
$$\rho_p(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$$

Kenttä johdetason pinnalla on sama kuin varausjakautuman $\rho + \rho_p$ kenttä!

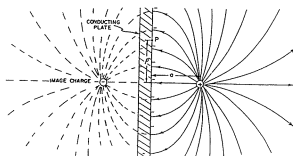
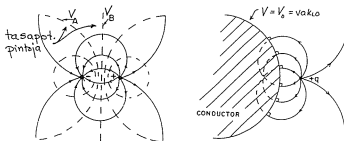
Sama tulos saataisiin myös integroimalla varauskate yli koko tason:

Nyt: varausalkio = ympyrärengas

Sama kuvana:



Pistevarauksen kenttä johdepallon ja johdelevyn lähellä:

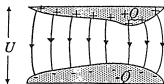


2.8.5. – 2.8.6.

(Kertausta fys. perusk./elektroniikka)

Kondensaattori

- 1) kaksi lähekkäistä johdepl = kondensaattorin levyt



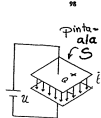
(IDEAALINEN KONDENSAATTORI!)

- 2) levyillä varaukset +Q ja -Q (Q = "kondensaattorin varaus")
- 3) kondensaattorin koko sähkökenttä on levyjen välissä, rajoitetussa tilassa
- 4) $\vec{E}(\vec{r}) \propto Q$ (muuten riippuu vain kondensaattorin geometriasta)

Levykondensaattorille:

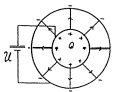
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \propto Q$$

= vakio!



Pallokondensaattorille:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r \propto Q$$



- 5) Kondensaattorin jännite:

$$U = V_+ - V_- = \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \propto Q$$

Todettiin: $U \propto Q$

Merk. $\frac{Q}{U} = C$ = kondensaattorille ominainen vakio

= kondensaattorin kapasitanssi

Kapasitanssin yksikkö:

$$[C] = \frac{C}{V} = 1F = 1 \text{ faradi}$$

Kondensaattorin eristelaki:

Jos kondensaattorin levyjen väli täytetään eristeellä, niin kapasitanssi kasvaa:

$$\frac{C}{C_0} = \epsilon_r$$

= eristeen suhteellinen permittivisyys

Huom. $\epsilon_r \geq 1$

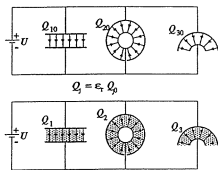
$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

= tyhjiön permittivisyys

Sähköinen susceptibiliteetti = $X = \epsilon_r - 1$

Kuva:

Kondensaattorin eristelaki:



Esim. Levykondensaattorin kapasitanssi:

\vec{E} on homogeeninen: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$
= vakio

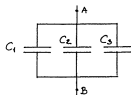
$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \int dr = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

$$C_0 = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{Joten: } C = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Merk. $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ eristeen permittivisyys

Kondensaattorisysteemit:

1) Rinnan: $U_i = U$; $Q_i = C_i U$



$$\text{ts. } C_{AB} = \frac{Q}{U} = \sum C_i$$

2) Sarjassa: $Q_i = Q$ ja $U_i = \frac{Q}{C_i}$

$$U = \sum U_i$$

$$= Q \sum \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_{AB}}$$

$$\text{ts. } \frac{1}{C_{AB}} = \sum \frac{1}{C_i}$$

Huom.

Yleiselle kondensaattorisysteemille:

- A, B systeemin navat
- systeemin jännite = U = napojen välinen jännite
- systeemin varaus = Q = positiiviseen napaan yhdistettyjen levyjen varausten summa
- negatiiviseen napaan kytkettyjen levyjen varaus on yhteensä = $-Q$
- systeemi toimii kuten yksi kondensaattori, jonka kapasitanssi on:

$$C = \frac{Q}{U}$$

2.9. Eristeen vaikutus sähkökenttään

2.9.1. Sähkökenttä eristeessä

Huom. Suure A_o → tyhjä kondensaattori,
Suure A → eristetäyteinen kondensaattori

Kondensaattorin eristelain tulkinta:

Sama varaus Q aiheuttaa:

* tyhjiin kondensaattoriin jännitteeseen

$$U_o = \frac{Q}{C_o}$$

* eristetäyteiseen kondensaattoriin jännitteeseen

$$U = \frac{Q}{\epsilon_r C_o} = \frac{1}{\epsilon_r} U_o$$

Jännitteen määritelmän perusteella:

$$\underbrace{\int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}_U = \frac{1}{\epsilon_r} \underbrace{\int \vec{E}_o(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}_{U_o}$$

VOE:

Kun kondensaattori täytetään eristeaineella → sähkökentän muoto ei muutu &

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_o(\vec{r})$$

ts.

varaus Q luo tyhjiin tilaan kentän \vec{E}_o ja eristetäyteiseen kentän

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_o}{\epsilon_r}$$

Kentät \vec{E}_o ja \vec{E} :

- ovat samanmuotoisia ja
- niiden voimakkuuksien suhteen määrää väliaineen suhteellinen permittivisyys: ϵ_r

Huom.

$$U_o = E_o d$$

$$U_1 = E_1 d$$

$$= \frac{1}{\epsilon_r} E_o d = \frac{1}{\epsilon_r} U_o$$

Esim.

a) Coulombin kenttä eristeessä:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$$

b) Coulombin voima eristeessä:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \hat{u}_r \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$$

Eristetäytteen vaikutus kondensaattoriin on sama kuin kondensaattorin varauksen pienentäminen

arvosta Q_o arvoon $\frac{Q_o}{\epsilon_r}$:

$$\rightarrow E_o = \frac{Q_o}{S\epsilon_o}$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_o = \frac{Q_o / \epsilon_r}{S\epsilon_o}$$

→ tulkinta:

eristeen polarisoituminen merkitsee eristeen pintojen **näennäistä** varautumista:

→ laskennallinen varauskate σ' !

Huom.

Eristeen pinnoilla ei todell. varauskate !!!

c) **Gaussin laki** (kun piste \vec{r} on eristeessä):

$$\epsilon \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = Q_S \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$$

d) Sama pätee kahden mielivaltaisen pisteen väliselle jännitteelle kentässä:

$$U_{AB} = \frac{1}{\epsilon_r} (U_{AB})_o$$

2.9.2. Eristeen näennäinen varautuminen kondensaattorissa

Kentässä: eriste polarisoituu samalla kun jokainen eristeen tilavuusalkio pysyy neutraalina (ts. ei vapaasti liikkuvia varauksia).

Levyn oma varauskate (σ) ja levyä vasten olevan eristepinnan näennäinen varauskate (σ') ovat tietysti vastakkaismerkkiset:

$$E = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_o} \quad \text{ja} \quad E_o = \frac{\sigma}{\epsilon_o} = \epsilon_r E$$

joten:

$$\sigma + \sigma' = \epsilon_o E = \epsilon_o \left(\frac{\sigma}{\epsilon_o \epsilon_r} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_r}$$

ja:

$$\sigma' = - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \sigma < 0$$

Esim. Levyn suuntaisesti osittain täytetty kondensaattori
 → levyjen väli = $d_1 + d_2$,
 josta
 $d_2 = \text{eristekpl:n paksuus}$

Varaukset (kts. kuva 1 sivulla 110):

$\sigma, -\sigma', \sigma'$ ja $-\sigma$, joista:

$$\sigma - \sigma' = \frac{\sigma}{\epsilon_r}$$

(Huom. merkintä:

σ, σ' samanmerkisiä.)

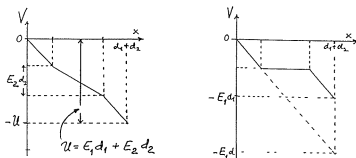
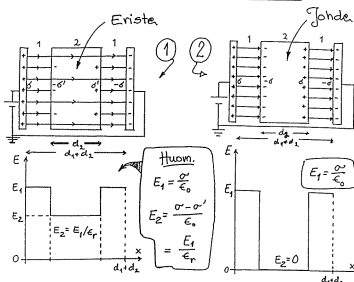
Saadaan:

Tyhjiössä: $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$

Eristeessä:

$$E_2 = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{E_1}{\epsilon_r}$$

Osittaittain täytetty kondensaattori:



111

Levyn suuntaisesti osittain täytetyn kondensaattorin jännite:

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{S\epsilon_0} \left(d_1 + \frac{d_2}{\epsilon_r} \right)$$

Joten kondensaattorin kapasitanssille saadaan:

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{d_1}{S\epsilon_0} + \frac{d_2}{S\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

ts. kuten d_1 -paksuinen tyhjä ja d_2 -paksuinen eristetäytteen kondensaattori sarjaan kytkettyinä!

Esim.

Johdelevy kondensaattorin kentässä (kts. kuva 2 sivulla 110):

→ pinnoille **aidot** varaukset $-\sigma$ ja σ (ts. yhtä suuria kuin varaukset levyillä)

→

$$E(\text{johteessa}) = 0$$

ja

$$E(\text{tyhjä} + \text{alue}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Huom.

Johdelevyllä on siis sama vaikutus kuin levyjen välin pienentämisellä arvoon d_1 .

112

Esim.

Kohtisuorasti osittain eristeellä täytetty kondensaattori (kts. kuvio sivulla 114)

→ kenttä eristeen työntämisen jälkeenkkin homogeeninen, ts. sama tyhjiössä kuin eristeessä:

$$E = \frac{U}{d} \quad \text{missä:}$$

d = levyjen etäisyys,
U = kondensaattorin jännite

Selitys?

→ kondensaattorin levyjen varauskate σ_2 eristeen täyttämässä alueessa muodostuu suuremaksi kuin varauskate σ_1 tyhjiössä alueessa:

ts.

$$\sigma_2 - \sigma' = \sigma_1$$

Kondensaattorin kapasitanssille saadaan siten:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0}{d} (S_1 + \epsilon_r S_2) = C_1 + C_2$$

ts. kuten tyhjä ja eristetäyteinen kondensaattori olisi kytketty rinnan!

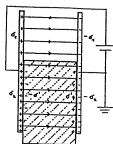
Muistetaan:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Joten:

$$\epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d}$$

$$= \begin{cases} \sigma_1 & \text{tyhjiössä} \\ \sigma_2 - \sigma' = \frac{\sigma_2}{\epsilon_r} & \text{eristeessä} \end{cases}$$



Merkitään:

- tyhjän osan pinta-ala = S_1

- eristealueen pinta-ala = S_2

Kondensaattorin varaus on:

$$Q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \epsilon_0 \frac{U}{d} (S_1 + \epsilon_r S_2)$$

2.9.3. Eristeen polarisoituma

Miksi: eristeen polarisoituminen voidaan korvata näennäisvarauksilla?

Taustaa:

Aineen sähköinen rakenne → kentässä tapahtuu atomaarinen polarisoituminen:



$$\vec{E} = 0$$



$$\vec{E} \neq 0$$

ts.

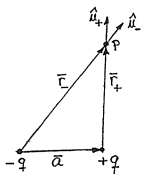
Tilavuussalkio säilyy neutraalina, mutta:

sisältää suuren määrän atomaarisia dipoleja

Dipolin sähkökenttä

- \vec{a} :n suunta $\rightarrow +$
- dipolin kokonaisvaraus = 0
- nk. dipolimomentti:

$$\vec{p} = q\vec{a}$$



Dipolin kenttä P:ssä:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{u}_+}{r_+^2} - \frac{\hat{u}_-}{r_-^2} \right)$$

Dipolin potentiaali P:ssä:

$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

Kun dipoli on kentän suuntainen, voimat pyrkivät venyttämään dipolia eli suurentamaan sen dipolimomenttia...

VOE:

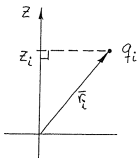
Dipolin potentiaalienergia ulkoisessa sähkökentässä on:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

ja dipoliin kohdistuva voima:

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

- Varausjakautuman kvadrupolimomentti ja kautuman symmetria-akselin (= z-akselin) suhteen:



$$Q = \frac{1}{2} \sum_i q_i (3z_i^2 - r_i^2)$$

Lisäys:

- Varaussysteemin monopolimomentti:

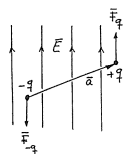
$$= \sum q_i$$

- Varaussysteemin dipolimomentti (yleisesti):

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$$

Kuvassa kahdelle varaukselle:

$$\vec{p} = q\vec{a}$$



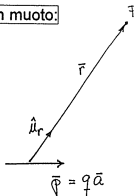
VOE:

Homogeeninen sähkökenttä \vec{E} vaikuttaa dipoliin \vec{p} vääntömomentilla:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Kentän asymptoottinen muoto:

Atomaarista dipolia (jatkuvan aineen mallissa) voidaan pitää pistemäisenä \rightarrow vain kentän käyttäytyminen suurilla etäisyyksillä on merkittävä (ts. kun $a \ll r$).



VOE:

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{u}_r)\hat{u}_r - \vec{p}]$$

ja: (kun: $a < r$)

$$V_P = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\vec{E} = -\nabla V)$$

ts. pistemäisen dipolin kenttä $\propto \frac{1}{r^3}$

ja sen potentiaali $\propto \frac{1}{r^2}$

Usean dipolin kenttä:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad \text{ja} \quad V = \sum_i V_i(\vec{r})$$

VOE: Yhden dipolin kaavat käyvät sellaisinaan, kun korvataan:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \quad (\text{ts. dipolimomentti on additiivinen suure})$$

Toisaalta:

Varausjakautumaltaan tunnetun neutraalin systeemin dipolimomentti:

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i \quad \text{tai} \quad \vec{p} = \int \rho(\vec{r}) \overbrace{d^3r}^{=dV}$$

(neutraalisuus merkitsee, että

$$\sum q_i = 0 \quad \text{tai} \quad \int \rho(\vec{r}) d^3r = 0,$$

missä $d^3r = \text{tilavuusalkio} = dV$)

Eristeen polarisoituma

Eriste kenttään \rightarrow polarisoituminen

\rightarrow tilavuusalkiossa neutraalia, jatkuvaa ainetta on hyvin suuri määrä atomaarisia dipoleja

\rightarrow niiden kentän määrää niiden dipolimomenttien summa:

$$\text{ts.} \quad \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

Jos tunnetaan atomien

keskimääräinen dipolimomentti $\langle \vec{p} \rangle$

ja

lukumääräinen tiheys

$$n = \frac{dN}{d^3r}$$

niin

tilavuusalkion

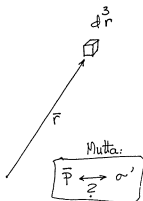
dipolimomentti on:

$$= d\vec{p} = \langle \vec{p} \rangle \overbrace{nd^3r}^{dN} \quad (\text{dN = atomien lukumäärä tilavuusalkiossa})$$

Jatkuvan aineen (eristeen) polarisoitumistilaa kuvaa **polarisoituma**, joka on aineen dipolimomenttitiheys:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d^3r} = \vec{P}(\vec{r})$$

\vec{P} on vektorisuure, jolla jatkuvan aineen mallissa on tietty arvo $\vec{P}(\vec{r})$ jokaisessa pisteessä \vec{r} .



Polarisoituma voidaan palauttaa atomaarisiin dipoleihin:

$$\vec{P} = \langle \vec{p} \rangle n.$$

2.9.4. Polarisoitumisesta aiheutuva kenttä

Eristeen polarisoitumisesta aiheutuva sähkökenttä on sama kuin

tietyin sähköstaattisen systeemin kenttä:

ts. kpl:n

sisäinen varausjakautuma $\rho'(\vec{r})$ ja

pintavaraukset $\sigma'(\vec{r})$

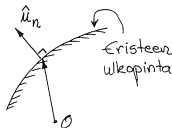
Gaussin lain

differentiaalimuoto: $\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$

VOE:

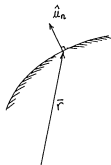
$$\rho' = \rho'(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

$$\sigma' = \sigma'(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{u}_n$$



Eo. kaavoissa:

$\vec{P}(\vec{r})$ on kpl:n polarisoituma ja yksikkövektori \hat{u}_n on pinnan normaalin suuntainen pisteessä \vec{r} (kpl:n pinnausta ulospäin).



Kpl:n pinnalle ja sisään jakautuneet näennäisvaraukset = $Q's$ ja $Q'v$,

→ toisaalta kpl:een tulisi olla edelleenkin neutraali !?

Tulisi siis olla: $Q's = -Q'v$ *(Gaussin lause!)*

$$Q's = \oint_S \sigma'(\vec{r}) dS = \oint_S \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) d^3r$$

$$= - \int_V \rho'(\vec{r}) d^3r = -Q'v \quad \boxed{O.K.}$$

127

Eo. kaavassa:

$\rho(\vec{r})$ = tarkastelupisteessä esiintyvän aidon varauksen varaustiheys

$\rho'(\vec{r})$ = polarisoitumaa vastaava näennäisvaraustiheys ko. pisteessä

Toisaalta: $\vec{E}(\vec{r})$ on pyöriteetön eli konservatiivinen:

Maxwellin III laki:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

Joten:

Kun $\vec{E}_o \Rightarrow \vec{E}$, niin:

- kentän suuruus muuttuu,
- mutta muoto ei muutu,
- kenttäviivojen määrä ei muutu (ts. sähkövuon tiheys ja kenttäviivojen tiheys ei muutu, koska ne määräytyvät aidoista varauksista)

2.9.5. Sähkövuon tiheys

Tyhjiössä: $\epsilon_o \nabla \cdot \vec{E}_o(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$,
ts.
 $\nabla \cdot \vec{D}_o(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$

Eristeen sisässä:

Määriteltiin kenttä eristeessä = kuten aitojen ja näennäisten varauksen yhdessä muodostama kenttä tyhjiössä:

$$\epsilon_o \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) + \rho'(\vec{r})$$

= Maxwellin I laki !

ts. kentän lähteisyyden määrää aidon ja näennäisen varausjakautuman summa.

128

Muistetaan:

$$\rho'(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

→

$$\nabla \cdot [\epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})] = \rho(\vec{r})$$

vrt. Maxwellin I lakiin:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$$

ts.

aito varaustiheys $\rho(\vec{r})$ on vektorikentän

$$\epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

lähteisyys (muuta varauksia ei ole !)

aitoja

Määritellään siksi:

Sähkövuon tiheys eristeessä =

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

Huom. Pätee myös eristeen ulkopuolella (tyhjiössä), jossa

$$\vec{P} = 0 \quad \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \vec{E}_o(\vec{r})$$

$$\rightarrow \vec{D}_o(\vec{r}) = \epsilon_o \vec{E}_o(\vec{r})$$

Huom.Sähkövuon tiheys on määritelty kenttänä, jonka lähteinä ovat ainoastaan *aidot varaukset*:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

Homogeeniset ja isotrooppiset eristeaineet

→ jos kondensaattori täytetään ko. aineella muuttamatta kondensaattorin varausta, niin

a) levyjen aidot varauskatteet eivät muutu → sähkövuon tiheys pysyy siksi samana, vaikka

b) sähkökentän voimakkuus pieneneekin

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{D}_o(\vec{r}) = \epsilon_o \vec{E}_o(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_o(\vec{r})$$

(alaindeksi o viittaa kenttään ennen kondensaattorin levyjen välin täyttämistä eristeellä)

Todettavissa:

$$\psi_s = \oint_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_V \rho(\vec{r}) dV = Q_s$$

= sähkövuo pinnan S läpi= pinnan S sisäänsä sulkema aito varaus (väliaineesta riippumatta) !**Huom.**

aito varaus

↓ S:n sisällä

$$\left(\oint_S \epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = Q_s + Q_s' \right)$$

näennäis-

↑ varaus S:n sisällä

Saadaan:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_r \epsilon_o \vec{E}(\vec{r})$$

(sähkövuon tiheys homogeenisella ja isotrooppisella eristeellä täytetyssä kondensaattorissa)

Vastaavasti saadaan:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - \epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) = (\epsilon_r - 1) \epsilon_o \vec{E}(\vec{r})$$

$$= X \epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) ,$$

ts.

$$\vec{P}(\vec{r}) \uparrow \uparrow \vec{E}(\vec{r})$$

missä

verrannollisuuskerroin $X = \epsilon_r - 1$
on eristeen sähkösuskeptiivisuus.

Ja vielä:

$$\bar{D}(\vec{r}) = \epsilon_r \epsilon_0 \bar{E}(\vec{r}) = \frac{\epsilon_r}{X} \bar{P}(\vec{r})$$

ts. näin on todettu
kenttien $(\bar{D}, \bar{E}, \bar{P})$ verrannollisuus!

(Kenttä on "sähköisesti isotrooppinen", jos \bar{P} , \bar{D} ja \bar{E} ovat yhdensuuntaisia.)

Joten myös niiden lähteisyydet ovat verrannolliset
ts.

$$\begin{aligned} \text{nämä kolme kenttää} & \quad \nabla \cdot \bar{P} = -\rho' \\ \text{ovat myös yhtäaikaa} & \quad \nabla \cdot \bar{D} = \rho \\ \text{lähteettömät:} & \quad \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned}$$

135

Esim.

Eristettyinen levykondensaattori:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E\hat{i} \\ \bar{D} &= D\hat{i} \\ \bar{P} &= P\hat{i} \end{aligned}$$

missä \hat{i} on kentän suuntainen yksikkövektori; ts. \bar{E}, \bar{D} & \bar{P} ovat yhdensuuntaisia.

* \bar{D} aiheutuu levyjen aidosta varauskatteesta:

$$\begin{aligned} D &= D_0 = \epsilon_0 E_0 \\ &= \epsilon_0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \sigma \end{aligned}$$

* näennäinen varaus tiheys eristeen sisällä on:

$$\rho' = -\nabla \cdot \bar{P} = 0$$

134

sta
Eo^{sta} seuraa, että aito ja näennäinen varaus tiheys ovat verrannolliset:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \nabla \cdot \bar{D} \\ &= \nabla \cdot \frac{\epsilon_r}{X} \bar{P}(\vec{r}) = \frac{\epsilon_r}{X} \nabla \cdot \bar{P}(\vec{r}) \\ &= -\frac{\epsilon_r}{X} \rho'(\vec{r}) \end{aligned}$$

ts.
ne esiintyvät & häviävät vain yhdessä:

a) eristeen sisään voi "muodostua näennäisvarausta vain, jos sinne sijoitetaan aitoakin varaus;

b) jos kpl on varaamaton,

↪ näennäisvarausta syntyy sähkökentässä vain sen pinnalle:

$$\sigma'(\vec{r}) = \bar{P}(\vec{r}) \cdot \hat{u}_n$$

136

* näennäinen varauskate eristeen pinnalla on:

$$\bar{P} \cdot \hat{u}_n = \sigma'$$

missä \hat{u}_n on pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori:

negatiivista levyä vasten olevalla pinnalla:

$$\hat{u}_n = +\hat{i}$$

ja positiivista levyä vasten olevalla pinnalla

$$\hat{u}_n = -\hat{i}$$

joten niillä on vastakkaismerkkiset näennäisvarauskatteet:

$$\sigma'_- = P = \sigma'$$

ja

$$\sigma'_+ = -P = -\sigma'$$

Huom.

Pidetään Q vakiona, kun työnnetään eriste kondensaattorin sisään
 $\rightarrow \sigma$ ei muutu $\rightarrow D$ ei muutu!

$$\left(\text{Aluksi: } D_o = \epsilon_o \vec{E}_o = \epsilon_o \frac{\sigma}{\epsilon_o} = \sigma \right)$$

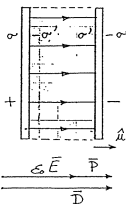
Kun eriste sisälle:

$$D = D_o = \sigma$$

$$P = \sigma' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \sigma$$

$$\epsilon_o \vec{E} = D - P$$

$$= \sigma - \sigma' = \dots$$



(Vastaavasti:

esim. pallokondensaattori jne.)

2.9.6. Eristekappale sähkökentässä

Perusprobleema:

Tunnetut aidot varaukset

$$\rightarrow \text{sähkökenttä: } \vec{E}_o(\vec{r})$$

Ko. kenttään tuodaan eristekappale

$$\rightarrow \text{polarisoituma: } \vec{P}(\vec{r})$$

Seurauksia:

1) Kenttä \vec{E} muuttuu ja

sähkökentän voimakkuutta kuvaavien kenttäviivojen määrä muuttuu,

sillä polarisoitumaa vastaava näennäisvaraus synnyttää uusia kenttäviivoja (= alkuja ja päätepisteitä)

(ts. atomaaritasoisen dipolien kenttä)

Huom.

Homogeenisuus ja isotrooppisuus ovat aineen riippumattomia ominaisuuksia.

ts.

Eriste voi esim. olla epähomogeenista, mutta isotrooppista; etc.

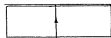
Tunnetaan myös ferrosähköisiä aineita, joissa polarisoituma säilyy silloinkin, kun ulkoinen sähkökenttä poistetaan (vrt. ferromagnetismi...).

2) Yleensä myös sähkövuon tiheys \vec{D} muuttuu:

lähteinä tosin vain aidot varaukset, joten sähkövuon tiheyttä kuvaavien kenttäviivojen määrä ei muutu,

mutta: yleensä ne taipuvat!

Vrt. Kondensaattorit
 \rightarrow ei taipumista!



Eristeessä: $\vec{E}(\vec{r}) = ?$



Jos $\vec{P}(\vec{r})$ tunnetaan, \rightarrow tunnetaan myös sitä vastaavat näennäisvaraukset

$\sigma'(\vec{r})$ ja $\rho'(\vec{r})$ ja kenttä on mahdollista laskea ...

Mutta:

yleensä $\vec{P}(\vec{r})$ ei tunneta
ja mittausten käytännössä
 \approx mahdotonta!

Jos:

eristekappaleen muoto ja suhteellinen permittivisyys tunnetaan, niin kenttien differentiaaliyhtälöt ratkaisemalla saadaan

- 1) kenttä eristekappaleessa ja sen ulkopuolella,
- 2) ratkaisu on sitten sovittava yhteen kappaleen pinnalla.

Mutta:

miten kenttä muuttuu eristekpl:n pinnalla?

Kenttä eristeen pinnalla:

$\vec{D}(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ ja $\vec{P}(\vec{r})$ ovat eristeen pinnalla epäjatkuvat:

- * jokaisessa pinnan pisteessä niillä on eri suuret
 - ulkopuolinen arvo (1) ja
 - sisäpuolinen arvo (2).

$$(\text{tietysti: } \vec{P}_1(\vec{r}) = 0)$$

Jos eriste on

- varaamaton
- isotrooppista ainetta,
- (ts. $\vec{D} \uparrow \uparrow \vec{E} \uparrow \uparrow \vec{P}$)

niin

kentät ovat sisällä ja ulkona (erikseen) yhdensuuntaiset:

$$\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2 = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E}_2 = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}_2$$

Kenttäviivojen taittumislaki:

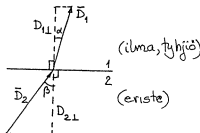
Jaetaan kentät eristeen pinnan suuntaisiin (\parallel) ja pintaa vastaan kohtisuoriin (\perp) komponentteihin erikseen ulkona ja sisällä:

VOE:

$$1) D_{1\perp} = D_{2\perp}$$

(Gaussin laki)

ts.



\perp -komponentti on eristeen pinnassa jatkuva:

$$D_1 \cos \alpha = D_2 \cos \beta$$

Syy:

Pinnassa ei ole aitoa varauskatetta.

- 2) Pinnalla näennäinen varauskate (= myös sähkökentän voimakkuuden lähde).

Gaussin laista ja sähkökentän konservatiivisuudesta seuraa:

$$a) E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad \text{ts. } E_1 \sin \alpha = E_2 \sin \beta$$

$$b) \vec{E}_1 \ \& \ \vec{E}_2 \text{ ovat samassa normaalitasossa.}$$

ts.

\parallel -komponentti on pinnassa jatkuva

Jakamalla tulokset saadaan:

$$\frac{E_1}{D_1} \tan \alpha = \frac{E_2}{D_2} \tan \beta$$

ja edelleen:

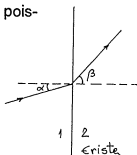
$$\tan \beta = \frac{E_1 D_2}{E_2 D_1} \tan \alpha = \frac{E_1 \epsilon_r \epsilon_o E_2}{E_2 \epsilon_o E_1} \tan \alpha$$

Näin on johdettu sähkökentän kenttäviivojen taittumislaki:

$$\tan \beta = \epsilon_r \tan \alpha$$

$$\epsilon_r > 1 \quad \text{ts.} \quad \beta > \alpha$$

joten eristeeseen menevä kenttäviiva taittuu aina normaalista pois-päin.



Saatiin: \Rightarrow

$$\tan \beta = \epsilon_r \tan \alpha \quad \epsilon_r = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$$

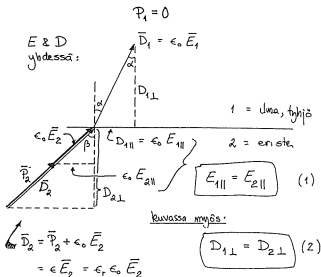
- tuleva ja taittunut kenttäviiva ovat samassa tasossa
- tulo- ja taitekulman tangenttien suhde on vakio

Infoa:

- § 5 vastaavat rajaehdot tarkastelut magneettikentälle.
- Valo = sähkömagneettista säteilyä \vec{E} & \vec{B}
 \Rightarrow ko. rajaehdot tarkastelut tarjoavat teoreettisen perustan tarkasteltaessa valon osumista eriste-pintaan: mm. taittumislaki (Snelliuksen laki) ja polarisoituminen rajapinnassa selittyvät niiden perusteella.

Sama toisin: kentät E, D ja P eristeen pinnassa:

- * \vec{E} , \vec{D} ja \vec{P} ovat epäjatkuvia
- * mutta: kentän potentiaali V on jatkuva



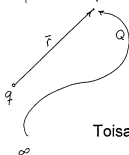
2.10. Sähkökentän energia

2.10.1. Sähköstaattinen potentiaalienergia

Määr. Systeemin E_p = kaikkien sisäisten sähköstaattisten vuorovaikutusten potentiaalienergioiden summa:

Huom: vuorovaikutus $i \leftrightarrow j$ vain kerran!

$$E_p(\vec{r}) = QV(\vec{r})$$



$$E_y = E_{j1}$$

$$\frac{1}{2} \sum E_y = E_p$$

Toisaalta muistetaan, että:

$$W_{ulk} = QV(\vec{r}) = E_p(\vec{r})$$

\uparrow
t.s.

Joten:

E_p = työ, joka tehdään, kun systeemin hiukkaset sijoitetaan paikoilleen.

Esim. Levykondensaattori (levyjen etäisyys = d):

E_p = työ, joka tehdään, kun levyt vedetään erilleen:

ts. varausta $+Q$ vedetään negatiivisen levyn vakio kentässä

$$|\bar{E}_-| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}E = VAKIO,$$

(missä E on kondensaattorin sähkökenttä).

Vetämiseen tarvittava voima =

$$F = Q|\bar{E}_-| = \frac{1}{2}QE = VAKIO$$

ja vetämisessä tehty työ =

$$W = Fd = \frac{1}{2}QEd = \frac{1}{2}QU$$

$$(Q = CU)$$

Joten:

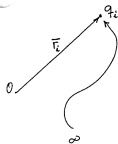
$$E_p = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

VOE:

Sama pätee mielivaltaiselle kondensaattorille.

Diskreetti varaussysteemi (N kpl):

$$E_p = \frac{1}{2} \sum E_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i)$$



missä $V(\vec{r}_i)$ on muiden $N-1$:n varauksen ko. pisteeseen (\vec{r}_i) synnyttämä potentiaali.

Ja varauksen q_i tuomiseen kaukaa pisteeseen \vec{r}_i tarvittava ulkoinen työ =

$$W_{ulk} = q_i V(\vec{r}_i)$$

Jatkuva varaussysteemi:

$dq = \rho(\vec{r}) d^3r$ ^{tilavuusalkio} \rightarrow tuodaan potentiaaliin $V(\vec{r})$

jolloin:

$$E_p = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$$

- tässä $V(\vec{r})$ on koko systeemin potentiaali pisteessä \vec{r} (vain alkio d^3r huomiotta)
- integrointi yli varaussysteemin tai yli alueen, joka sisältää ko. systeemin; systeemin ulkopuolella $\rho(\vec{r}) = 0$.

2.10.2. Kentän energiatiheys

$$E_p = ? \quad (\text{ts. tulkinta?})$$

Mihin ko. työ $W_{\text{ulk}} = E_p$ tarvitaan?

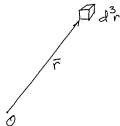
Voidaan ajatella, että se tarvitaan ko. systeemin *sähkökentän* muodostamiseen.

$$\rightarrow E_p = \text{sähkökentän energiaa !}$$

Silloin:
Sähkökenttään jakautuneen energian tiheys, ts. sähkökentän energiatiheys,

$w_E(\vec{r})$ ilmoittaa:
pisteessä \vec{r} olevan tilavuusalkion d^3r sisältämän energian:

$$dE_p = w_E(\vec{r})d^3r$$



Esim.

Levykondensaattori

Väite: Jos oletamme, että

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

niin, saamme kondensaattorin energiaksi:

$$E_p = \frac{1}{2} QU$$

Ratk.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_o = \epsilon_0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} = \sigma \hat{k}$$

ja: $\vec{E} = \frac{U}{d} \hat{k}$ ↑
posit. levyn
varauskate

ja siten:

$$E_p = \int w_E(\vec{r}) d^3r \quad (\text{integrointi koko kentän yli})$$

VOE:

$$\downarrow = \epsilon \vec{E}(\vec{r})$$

$$w_E(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon E^2(\vec{r})$$

↑
kentän sähkövuon
tiheys:

↑
sähkökentän
voimakkuus;
[tyhjiössä:
 $\vec{E}_o(\vec{r})$]

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

ts.

tyhjiössä:

$$\vec{D}_o = \epsilon_o \vec{E}_o(\vec{r})$$

Siis:

sekä \vec{D} että \vec{E} ovat homogeenisia.

→

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\sigma U}{d} \quad \text{ts. myös homogeeninen !}$$

Levykondensaattorin kenttä rajoittuu levyjen väliin:

→ koko kentän energia = $w_E V$, missä V on levyjen välinen tilavuus.

Saadaan:

$$E_p = w_E V = \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma U}{d} \right) S d$$

missä

$V = Sd$, S = levyjen pinta-ala ja
 d = levyjen välinen etäisyys

Koska

kondensaattorin varaus = $Q = \sigma S$,
saadaan:

$$E_p = \frac{1}{2} QU$$

Riittää meille (Yleisempi todistus kirjassa)

Kenttä fysikaalisena ilmiönä?

1) sähköstaattinen kenttä:

aluksi: varausten välisen vuoro-
vaikutuksen selittävä
abstrakti mekanismi

nyt: tulkinta:

$E_p \Leftrightarrow$ koko kenttään
jakautunut
energiatiheys !

ts.
ensimmäinen viite siitä,
että kenttää tulisikin käsitellä
reaalisena objektina?

Mutta:

ei vielä välttämätöntä...

Kentän olemassaolo itsenäisenä
oliona tulee näkyviin vasta:

2) sähkömagneettisten induktioilmiöiden yhteydessä (luku 5 ...)

- näin myös sen käyttöönotto historiallisesti,
- em. sähköstaatiikan tulkinta siten enemmänkin jälki-
viisautta.

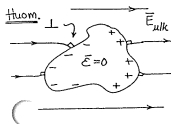
3. Tasavirta

3.1.1. – 3.1.3. Sähkövirta

(Kertausta elektroniikasta)

“Elektronien liikettä vai...?”

Johteessa vapaasti liikkuvia varauksia:
Jos johdekl viedään sähkökenttään, niin:

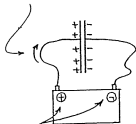
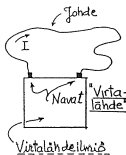


Johdekl polarisoituu
→ varaukset liikkuvat kunnes johteen sisällä $\vec{E} = 0$

“Sähkövirtailmiö” voi esiintyä systeemissä, jota kutsumme virtapiiriiksi:

⇒ sähkövirtaa mitataan sen vaikutusten avulla (magneettiset, termiset, kemialliset...)

Virtalähdeilmiö (esim. kemiallinen reaktio) on suunnattu ilmiö: ts. sille voidaan valita positiivinen suunta.

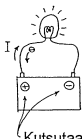


= Avoin virtapiiri

Nimitetään posit. ja negat. navoiksi (V_+ ja V_-)

Suljettu virtapiiri =

Sovitaan virran suunta $+ \rightarrow -$
(ts. negat. varaus liikkuu vastavirtaan.)



Kutsutaan posit./negat. navoiksi:

Merkitään:

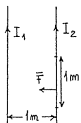


$$U = V_+ - V_- > 0$$

Sähkövirran yksikkö:

SI-järjestelmässä sähkövirta on koekellinen perussuure, yksikkönä 1 ampeeri = 1 A.

Vuodesta 1948 sen määrittelmä perustuu virtajohtimien välisiin magneettisiin voimiin:



2 yhdensuuntaista, pitkä, ohutta johdinta, joiden poikkileikkaus on ympyrä ja jotka ovat 1 m päässä toisistaan:

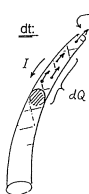
Muuttumaton sähkövirta

$$I_1 = I_2 = I A$$

aikaansaa johtimien välille vetovoiman

$$2 \times 10^{-7} N \text{ johtimen metria kohti}$$

Sähkövirran ja varauksen yhteys:



elektronien e^- liikesuunta

Kun johtimessa kulkee virta I , niin johtimen mielivalt. poikkileikkauksen läpi kulkee aikana dt varaus

$$dQ = Idt$$

ts.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Esim.

$$1 A = \frac{1 C}{1 s}$$

Muistetaan: 1C on iso varaus ...

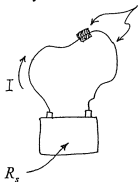
& 1C = 1As

virt.

staatt. varaukset: $\sim \mu C \rightarrow pC$

Huom.**Virtapiiri:**

Piirissä jokin sähkölaite: johteen ja laitteen yhteinen vastus = R



$$U \propto I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$[R] = \frac{V}{A} = 1\Omega$$

Lähdejännite:

$$= E = IR + IR_s$$

ts.

$$E - IR_s = IR$$

Lähteen napojen välinen jännite Jännitehäviö ulkoisessa piirissä

Historiaa:

sähkövirta = "virtaavaa varausta", missä: varaus oli ensin "sähkönesteen", sitten alkeishiukkasten muuttumaton perusominaisuus
→ varauksen säilymlaki.

Kichhoffin I sääntö:

Kun sähkövirta kulkee johtimessa niin johdin pysyy neutraalina ...
ts.

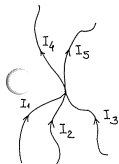
- 1) varausta ei kasaannu mihinkään,
- 2) jokaisen poikkileikkauksen läpi kulkee sama virta = $I = I(t)$ (myös virtalähteen sisällä: → + napaan),
- 3) virta syntyy & katkeaa samanaikaisesti piirin jokaisessa pisteessä (ts. varaukset = virrankuljettajat lähtevät liikkeelle yhtä aikaa),

4) haaraumiskohdassa virta vain jakautuu osiin:

→ tulevien ja lähtevien virtojen summat ovat yhtä suuret
ts.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

nk. Kirchhoffin I sääntö

**Huom.**

Sähköjohtimella on äärellinen poikkileikkauksen pinta-ala.

→ Missä varaukset liikkuvat? (johteen pinnalla, sisällä vai ...)

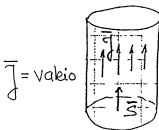
(→ luku 3.1.4)

3.1.4. Jatkuvat virtajakautumat

Virrantiheys: Jos sähkövirta I on jakautunut johtimeen tasaisesti, niin virrantiheys

$$= J = \frac{I}{S}$$

$$[J] = \frac{A}{m^2}$$



S = johtimen poikkileikkauksen pinta-ala

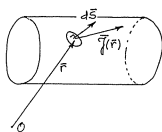
Yleisesti:

Virrantiheys on vektorisuure $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Sen suunta = virran suunta kussakin pisteessä.

Kun $\vec{J} = \text{vakio}$ & $\uparrow\uparrow \vec{S}$,
saadaan:

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S} = JS \quad \text{ts.} \quad J = \frac{I}{S}$$

Yleisesti:



Pinta-alkion $d\vec{S}$
läpäisee virta

$$dI = \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

ja
virta jonkin pin-
nan S läpi siten:

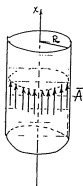
$$I = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

(missä S on esim. jokin
johteen poikkipinta)

Virtakate:

Johteen pinnalle jakautunutta sähkö-
virtaa kuvaa

pintavirrantiheys eli virtakate \vec{A}



Esim.

Johde = suora, ympyrä-
lieriön muotoinen ja
virta on jakautunut tasai-
sesti sen pinnalle:

$$A = \frac{I}{2\pi R} \quad \& \quad \vec{A} = A\hat{i}$$

$$[A] = 1 \frac{A}{m}$$

Yleisemmin: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

& \vec{A} :n suunta ilmaisee vir-
ran suunnan pinnalla kussa-
kin pisteessä \vec{r} erikseen.

Varaus- ja virtajakauman välinen yhteys:

$$\text{ts.} \quad \rho(\vec{r}, t) \leftrightarrow \vec{J}(\vec{r}, t)$$

Muistetaan:

$$\text{virta pinnan S läpi} = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Olkoon S suljettu pinta ja sen sisältä-
mä tilavuus = V.

Vain virta voi kuljettaa varausta ko.
pinnan läpi:

$$\rightarrow \text{virta } I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} d^3r$$

= varauksen vähenemä
ko. tilavuudessa aika-
yksikköä kohden

$$= -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) d^3r$$

VOE:

Kun sovell. tilavuus-
alkioon d^3r , saadaan
varauksen differentiaa-
linen säilymlaki:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \quad \text{!} \quad \frac{dy^+}{dt} = \text{vakio!}$$

ts.

jos varausjakautuma on stationäärinen
 $\rho(\vec{r})$, niin

virrantiheys on lähteetön:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = 0$$

eli

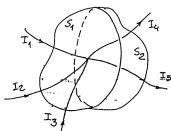
1) $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ virta umpinaisen pin-
nan läpi on nolla

2) jos pinnoilla on yhteinen reunakäy-
rä \rightarrow pintojen läpi yhtä suuret
virrat

("SISÄÄN" = "ULOS")

ts.

$$\left| \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} \right| = \left| \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \right|$$



Kirchhoffin I sääntö on tämän suora sovellus virtapiireihin, joiden johtimet pysyvät neutraaleina.

ts.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

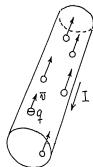
3.1.5. Virrankuljettajat

Todettiin:
virrantiheys

$$= \vec{J}(\vec{r}, t)$$

→ sähkövirta pinnan S läpi:

$$I = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$



ja varauksen differentiaalinen säilymislaki:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

Sähkövirta ?

↔ johteessa on varauksellisia hiukkasia, jotka liikkuvat ...

Millaisia "virrankuljettajia" ?

Tapaus 1:

Vain yhdenlaisia virrankuljettajia:

- lukumääräinen tiheys = n [kpl / m³]
- varaus q , nopeus v (sama kaikilla !)

→ varausitiheys:

$$\rho = nq$$

→ virrantiheys

$$\vec{J} = nq\vec{v}$$

Sillä:

Ajassa t tilavuuden V sisältämät virrankuljettajat (ts. V :n sis. varaus = Q) ehtivät poikkileikkauspinnan S läpi:

$$V = Svt \quad \text{ja} \quad Q = \rho V = nqV$$

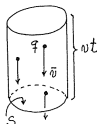
→

$$J = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{Q}{t} = nqv$$

ts.

$$\vec{J} = nq\vec{v}$$

O.K.



Näinollen: virta pinta-alkion $d\vec{S}$ läpi =

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} = nq\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Jos erityisesti:

$\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{S}$ ts. $\vec{v} \perp$ tasopinta, niin

$$I = nqvS$$

missä:

- n = virrankuljettajien lukum.tiheys
- q = varaus
- v = nopeus
- S = johteen poikkileikkauksen pinta-ala

Tapaus 2:

Jos virrankuljettajilla on eri nopeuksia → niin on laskettava hiukkasten keskinopeus nk. virrankuljettajien vaelusnopeus = \bar{v}

Esimerkkejä virrankuljettajista:

Kaikki hiukkaset, joilla on varaus, voivat toimia virrankuljettajina.

a) Metallijohtimissa:

- nk. johdinelektronit, 1-3 kpl/atomi (→ "elektronikaasu")
- pääsevät liikkumaan vapaasti koko kappaleessa
- mikä on niiden vaellusnopeus = ?

Esim. Cu -johde:

1 johdinelektroni/atomi

$$\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$$

$$M = 63,55 \text{ g/mol}$$

Jos johteen poikkileikkauksen pinta-ala on 1 mm^2 ja $I = 1 \text{ A}$, ts. virrantiheys $J = 1 \text{ A/mm}^2$, niin mikä on elektronien vaellusnopeus?

$$J = 1 \text{ A/mm}^2 = 1 \text{ C/1s} \times 1 \text{ mm}^2$$

Cu:lle

$$n = \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ kpl}}{63,55 \text{ g}} \cdot \frac{8,96 \text{ g}}{\text{cm}^3} = \frac{8,488 \times 10^{22} \text{ kpl}}{\text{cm}^3}$$

Saatiin:

$$I = nqvS \quad (I = \bar{J} \cdot \bar{S})$$

ts. kysytty vaellusnopeus on:

$$v = \frac{I}{nqS} = \frac{1 \times (10^{-2})^2}{8,488 \times 10^{22} \times 1,6 \times 10^{-19} (10^{-3})^2 \text{ s}}$$

$$= 7,4 \times 10^{-5} \text{ m/s} = 0,074 \text{ mm/s}$$

$$= 74 \mu\text{m/s}$$

$$(7,4 \times 10^{-5} \times 60 \times 60 \times 24 \text{ m/vrk} = 6,4 \text{ m/vrk})$$

b) Elektrolyyteissä (= happojen, emästen, suolojen vesiliuoksissa tai sulatteissa):

Virrankuljettajina positiiviset ja negatiiviset ionit → virran mukana myös ainevirtaus!

c) Kaasuissa:

Virrankuljettajina ionisoituneet molekyylit ja niistä irronneet elektronit

Ionisaatiota aiheuttaa:

- 1) lyhytaaltainen sähkömagneettinen säteily
- 2) hiukkassäteily
- 3) auringon ultraviolettij- ja protonisäteily ja kosminen säteily
- ionosfäärissä (n. 80 km korkeudella) kaasu on voimakkaasti ionisoitunutta
- 4) korkea lämpötila
→ kaasu ionisoituu keskinäisen törmäilyn vaikutuksesta
→ hyvin korkeissa lämpötiloissa kaasu on täysin ionisoitunutta (plasmaa), jolla hyvin suuri sähköjohtavuus

Virrankuljettajina tyhjiössä myös vapaat varaukselliset hiukkaset: esim. hehkuttamalla tai säteilyttämällä metallista irrotetut elektronit

4. Staattinen magneettikenttä

4.1. Kokeelliset perustelut

4.1.1. Magneetit

(§4.1. & 4.2. kertausta elektroniikasta)

Magneettiset perusilmiöt:

- kaksi magneettia vaikuttavat toisiinsa
- kaksi virtajohdinta toisiinsa
- virtajohdin ja magneetti magneettisilla voimilla

Luonnonmagneetit (vanhastaan tunnettuja):

- * 2 napaa: erilaiset vetävät toisiaan puoleensa & samanlaiset karkottavat toisiaan
- * kompassi-ilmio: magneetin pohjoiseen kääntyvä napa = pohjois- eli N-kohtio ja etelään kääntyvä = etelä- eli S-kohtio ...

181

Ørsted (1820):

havaitti sähkövirran vaikutuksen kompassineulaan (ts. että virtajohdin on magneettinen olio !)

Seuraavien n. 40 vuoden kuluessa: sähkömagnetismin klassinen teoria, jonka mukaan sähkö ja magnetismi ovat sähkömagneettisen vuorovaikutuksen eri ilmenemismuotoja; molemmat aiheuttaa hiukkasten varaus:

- * hiukkanen levossa → vain sähköinen vuorovaikutus
- * hiukkanen liikkuu → sekä sähköinen että magneettinen vuorovaikutus
- * magneetit & virtajohtimet ovat sähköisesti neutraaleja → vain magneettinen vuorovaikutus

180

* Gilbert, 1500 –luvun lopulla: Maa on suuri magneetti ts. kompassi-ilmiossa on kyse 2 magneetin vuorovaikuksesta

* kohtioita ei voida erottaa ts. katkaistu magneetti on täydellinen magneetti

* magnetoituminen: magneetin lähelle tuotu rautakpl muuttuu magneetiksi: N-kohtion puoleisesta päästä tulee S-kohtio etc.
= ferromagnetismi (kpl jää magneetiksi)

* paramagnetismi (heikko, ferromagnetismin suuntainen; ei pysyvä)

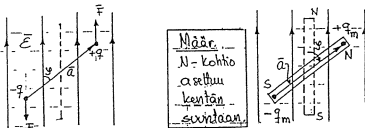
* diamagnetismi (heikko, vastakkaisuuntainen; ei pysyvä)

182

"Magneettinen Coulombin laki"

Coulomb: kokeellisesti magneettien välisen voiman lain määrittäminen (= mekaniikan probleema)

Vrt. sähkö. dipoli vrs. magneetti sähkökentässä: magneettikentässä:



Kun \vec{E} = vakio, niin:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

missä

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

Vastaavasti:

todetaan kokeellisesti:

Magneettiin vaikuttava momentti voidaan esittää muodossa:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{E}_m,$$

missä

$$\vec{E}_m = \text{magn. kenttää kuvaava suure} = ?$$

$$\vec{p}_m = \text{magneettia kuvaava suure} = ?$$

Kokeellisesti havaitaan:
magn. napojen välinen voima

$$\propto 1/r^2$$

Määr.

$$\vec{p}_m = \vec{a}q_m$$

missä

q_m on magneettinen napa-voimakkuus.

Vastaavasti magneettien vertailu:

tukittavat magneetit ja "standardimagneetti" samassa kentässä

→ saadaan määritettyä \vec{p}_m

Vääntömomentin \vec{M} määrittäminen:

1) staattisesti:

määritetään \vec{M} kun sauva $\perp \vec{E}_m$

2) dynaamisesti:

heilahtelu z-akselin suhteen

(\perp sauva & \vec{E}_m)

$$I\ddot{\varphi} + p_m E_m \sin \varphi = 0 \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{p_m E_m}}$$

joten:

$$E_m \propto 1/T^2$$

Silloin voidaan kirjoittaa (magneetisessa yksikköjärjestelmässä määritellään: $k = 1$):

$$\vec{F} = k \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2} \hat{u}_r$$

= kahden pistemäisen magn. navan välinen voimavaikutus

= magn. Coulombin laki (vain historiallinen merkitys, sillä itsenäisiä magn. napoja ei ole havaittu ...)

Kenttien vertailu:

Määritetään tiettyyn magneettiin vaikuttava vääntömomentti \vec{M} eri kentissä ja suoritetaan normitus esim. Maan magneetikentän avulla, jolloin saadaan jollaiselle kentälle kenttävoimakkuus = \vec{E}_m

4.1.2. Sähkövirtaan liittyvä magnetismi

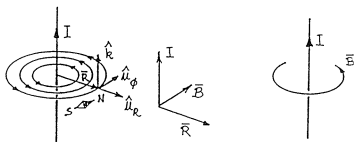
Ørsted 1820: havaitsi suoran virtajohtimen vaikutuksen magneettineulaan!

Tieto Ranskan tiedeakatemialle ...

Biot & Savart tutkivat ilmiötä & julkaisivat tulokset vielä ennen vuoden 1820 loppua:

Biot'n ja Savartin laki:

(ts. pitkän suoran virtajohtimen magneetikentän laki)

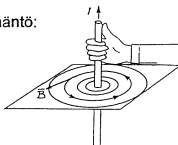


- 1) kentän suunta \perp johdin & \vec{R} siten, että virran suunta, \vec{R} ja kentän suunta muodostavat oikeakätisen, suorakulmisen koordinaatiston.
- 2) Kentän voimakkuus $\propto I$ ja $\propto \frac{1}{R}$
tällöin: $I > 0$, kun se on $\uparrow \uparrow \hat{k}$
 $I < 0$, kun se on $\uparrow \uparrow -\hat{k}$

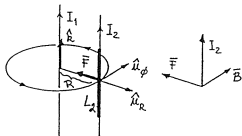
ts. kentän voimakkuus: $\propto \frac{I}{R} \hat{u}_\phi$

Kenttäviivaesitys (kuten \vec{E} :llekin):
→ suora johde: ympyröitä, joiden akselina on johdin.

Oikean käden sääntö:
 \vec{B} :n suunta =
sormien suunta
(kts. →)



Ampèren laki:



Kahden samansuuntaisten suoran virtajohtimen välisen voiman laki:

- 1) vetovoima, jos $I_1 \uparrow \uparrow I_2$ ja poistovoima, jos $I_1 \uparrow \downarrow I_2$

- 2) johtimen osaan vaikuttava voima

$$F \propto L_2, I_1 \& I_2 \quad \text{ja} \quad F \propto \frac{1}{R}$$

joten kuvassa (sylinterikoordinaatisto; akselina I_1):

$$\vec{F} = -K \frac{I_1 I_2}{R} L_2 \hat{u}_R = K \frac{I_1 I_2}{R} L_2 (\hat{k} \times \hat{u}_\phi) = I_2 L_2 \hat{k} \times K \frac{I_1}{R} \hat{u}_\phi$$

missä $I_1 \& I_2 > 0$, kun ne ovat $\uparrow \uparrow \hat{k}$.

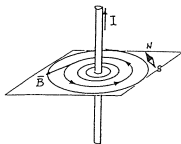
Huom.

Kenttäviivat ovat

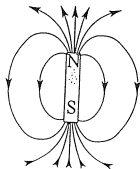
- 1) joko suljettuja silmukoita,
- 2) tai jatkuvat äärettömään.

Esim.

Suora johde:



Sauvamagneetti:



Ampere oivalsi, että virtajohtin oli nyt osoitettu magneettiseksi olioksi.

→ Amperen laki ... = ?

SI -järjestelmässä Ampèren lain avulla määritellään sähkövirran yksikkö (1A).

→

$$K = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \frac{H}{m}$$

missä

μ_0 = magneettivakio eli tyhjiön permeabiliteetti

1H = 1 henry (sähködynamiikassa myöhemmin määriteltävä induktanssin SI-yksikkö; luku 5.3.3.)

Magneettivuon tiheys:

- 1) magneettinen olio luo ympärilleen magneettikentän ja
- 2) magneettikenttä aiheuttaa voiman siinä olevaan magneettiseen olioon.

Magneettikentän voimakkuutta kuvavalla suureella on (historiallisista syistä) nimi: *magneettivuon tiheys* \vec{B} .
(Sen määrittelmä nojaa Ampéren lakiin)

Ampéren laki:

$$\vec{F} = I_2 L_2 \hat{k} \times \vec{B}_1,$$

missä:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_1(R) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \hat{u}_\phi$$

\vec{B}_1 = johtimen 1 luoma magneettivuon tiheys = Biot'n ja Savartin lain täsmennetty esitysmuoto

Yksiköistä: (SI-järjestelmässä)

$$[B] = 1 T = 1 \text{ tesla} = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2} = \frac{Vs}{m^2}$$

1 tesla on varsin suuri yksikkö:

- * suurten tavallisten sähkömagneettien magneettivuon tiheys yleensä $< 0.5 T$
- * nykyaikaisilla suprajohdemagneeteilla $\sim 5 T$

Huom.

Alueessa, jossa \vec{B} on homogeeninen, kenttää vastaan \perp virtajohtimeen vaikuttava magneettinen voima on muotoa:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B},$$

missä:

L = johtimen pituus ja

I = johtimessa kulkeva virta

ja

$$\vec{B} = \text{vakio}, \quad \vec{L} \perp \vec{B} \quad \& \quad \vec{L} \uparrow \uparrow I.$$

Huom.

Jos \vec{B} epähomogeeninen

\Rightarrow sama pätee $d\vec{L}$:lle...

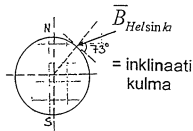
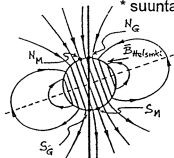
Esim.

Maan magneettikenttä

* samanmuotoinen kuin tasaisesti magnetoituneen rautapallon kenttä

* suuruus: $B \cong 50 \mu T$ (Helsingissä)

* suunta:



Deklinaatikulma = \vec{B} :n vaakasuoran komponentin poikkeama itäänpäin pohjoisesta:

Helsingissä 4°

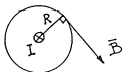
(B pienenee nykyisin n. 1% 10 vuodessa)

4.2. Virtasysteemin magneettikenttä

4.2.1. Ampèren ja Laplacen laki

Biot-Savart: suora johde:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{u}_\phi$$



Virta-alkio:

* magneettisetkin voimat noudattavat

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \text{ lakia}$$

ts.

magn. systeemin aiheuttama voima = systeemin osien aiheuttamien voimien vektorisumma

* siitä seuraa: magneettivuon tiheyksien yhdistämislaki

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$$

* Ampère & Laplace:

johdin jaetaan virta-alkioihin ($I d\vec{L}$), jolloin:

$$I d\vec{L} \rightarrow d\vec{B}$$

ja sitten

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \dots$$

Muistetaan:

- * pistevaraus $\rightarrow r^{-2}$ -kenttä
- * lineaarinen varaus $\rightarrow r^{-1}$ -kenttä
- * tasovarauksen $\rightarrow r^0$ -kenttä

Ja edellä:

* suoran johteen \vec{B} on r^{-1} -kenttä

Joten on luonnollista arvata, että

* pistemäisen virta-alkion $I d\vec{L}$ kenttä on r^{-2} -kenttä ...

Mutta suunta = ?

Ampèren ja Laplacen laki:

Virta-alkion $I d\vec{L}$ kentän magneettivuon tiheys on:

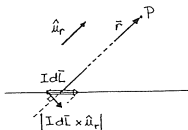
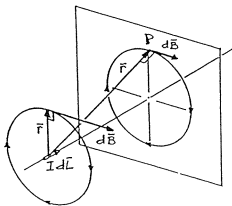
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I d\vec{L} \times \hat{u}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I d\vec{L} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

missä I = virta johtimessa, josta alkio on erotettu,

$|d\vec{L}|$ = alkion pituus,

\vec{r} = tarkasteltavan pisteen paikkavektori alkion suhteen ja

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$



Alkion kenttä:

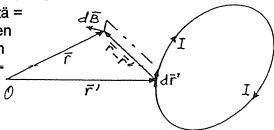
* voidaan havainnollistaa kenttäviivoilla = ympyröitä, joiden akselina on ko. alkion määrittelemä suora

* ts. muistuttaa suoran johtimen kenttää, mutta on $\propto r^{-2}$

* $I d\vec{L} \times \hat{u}_r$ = virta-alkion projekti $\perp \vec{r}$ ts. ilmaisee sen, kuinka suurena virta-alkio näkyy tarkastelupisteessä.

Virtasilmukka:

Ampéren ja Laplacen lain mukaan virtasilmukan kenttä = virta-alkioiden aiheuttamien kenttien vektorisumma:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \oint d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Ko. lain testaus:

= verrataan koetuloksia integroimalla saatiin kenttiin...

Liikkuva hiukkanen:

Sähkövirta aiheutuu varausten liikkeestä, joten virta-alkio

$$I d\vec{r}' = \frac{I}{S} \underbrace{S d\vec{r}'}_{d^3r} = \vec{J} d^3r' = nq\vec{v} d^3r' = q\vec{v} dN$$

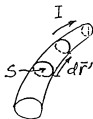
dN = varausten lukumäärä alkiossa ja

n = virrankuljettajien lukumääräinen tiheys

$$= \frac{dN}{d^3r'}$$

Joten yhden virrankuljettajan osuus

= $q\vec{v}$ (= virta-alkio!) ja sen aiheuttaman magneettivuon tiheys:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Jos ko. varauksellinen hiukkanen on origossa ja sen nopeus $= \vec{v}$, niin sen sähkökentän voimakkuus on:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

ja sen magneettivuon tiheys on:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

Huom. epärelativistisia approksimaatioita!

Saadaan:

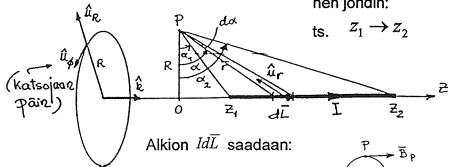
$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}(\vec{r})$$

VOE:

Pätee relativistisestikin !!

4.2.2. Suoran johtimen kenttä

- 1) $\hat{k} \uparrow \uparrow I (\geq 0)$ 2) äärellisen pituinen johdin:
ts. $z_1 \rightarrow z_2$



Alkion $l d\vec{L}$ saadaan:

$$\rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l d\vec{L} \times \vec{r}}{r^3}$$

jossa $|d\vec{L} \times \vec{r}| =$ suunnikkaan $d\vec{L}, \vec{r}$ ala
 $= 2 \times$ kolmion $d\vec{L}, \vec{r}$ ala
 $= 2 \times \frac{1}{2} r^2 d\alpha$ (kts. kuva:
 α :n kasvusuunta)

$$r = R / \cos \alpha$$

$$\rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{u}_\phi \cos \alpha d\alpha$$

Integroidaan α :n suhteen:

tarkastelupisteessä:

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{u}_\phi$$

Joten äärettömän pitkälle johtimelle
 $(\alpha_1 = -90^\circ, \alpha_2 = +90^\circ)$

$$\Rightarrow \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{u}_\phi$$

ts. Ampèren ja Laplacen laki ennustaa oikein Biot'n ja Savartin lain!

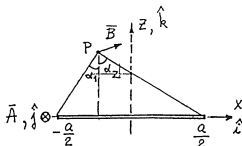
Sovellus:

Suoraan nauhaan jakautunut virta:

$$\vec{A} = A \hat{j} = \frac{I}{a} \hat{j}$$

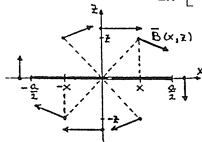
missä

I = koko virta ja
 a = nauhan leveys
 \hat{j} = nauhan & virran suunt. yksikkövektori



VOE:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 A}{2\pi} \left[\hat{i}(\alpha_2 - \alpha_1) + \hat{k} \ln \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \right]$$



- Lähestyttäessä nauhan tasoa nauhan kohdalla, ts. $|x| < a/2$, lähenee

$$(\alpha_2 - \alpha_1) \text{ arvoa } \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

- Nauhan yläpinnassa on siis:

$$\vec{B} = B_x \hat{i} = \frac{1}{2} \mu_0 A \hat{i}$$

- ja alapinnassa (symmetria):

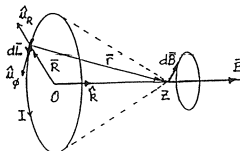
$$\vec{B} = B_x \hat{i} = -\frac{1}{2} \mu_0 A \hat{i}$$

- Nauhan ulkopuolella, nauhan tasossa: $B_x = 0$

- VOE: Normaalikomponentti nauhan tasossa, pisteessä x:

$$B_x = \frac{\mu_0 A}{2\pi} \ln \left| \frac{x - \frac{a}{2}}{x + \frac{a}{2}} \right|$$

4.2.3. Ympyräjohtimen kenttä akselilla

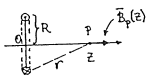


Käytetään sylinterikoordinaattistoja; akselina ympyrän akseli.

VOE:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} \hat{k}$$

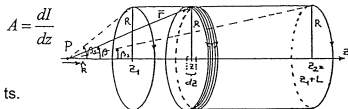
$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$



Sovellus:

Kenttä suoran solenoidin akselilla:

Määr. virtakate ympyrälierion vaipalla:



ts.

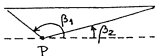
$$\vec{A} = A \hat{u}_\phi = \frac{NI}{L} \hat{u}_\phi$$

missä N = kierrosten määrä

VOE:

$$\vec{B}_p(z) = \frac{1}{2} \mu_0 A (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \hat{k}$$

(Jos $L \rightarrow \infty$, niin: $\vec{B} = \mu A \hat{k}$)

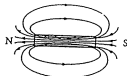
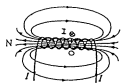


Kentän suunta = ?

Kenttäviivat:

- 1) suljettuja silmuikoita
- 2) tai jatkuvat ∞ :een.

S-päästä:

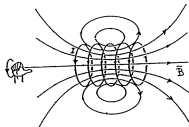
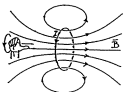
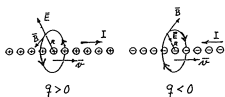


Oikean käden suuntasääntö:

(ts. sormet virran suuntaan..)

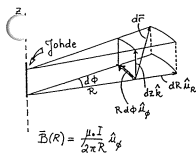


Kenttäkuvia:



211

$$B\Delta s = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R\Delta\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta\phi$$



Tämä voidaan yleistää: sylinterikoordinaatissa infinitesimaalisen siirtymä on:

$$d\vec{r} = dR\hat{u}_R + R d\phi\hat{u}_\phi + dz\hat{k}$$

ja siten:

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

4.3. Amperén kiertämälaki

4.3.1. Biot'n ja Savartin kentän kiertämä

Reitti-integraali:

Muistetaan:

pistevarauksen kentän sähkövoian pinnan läpi riippuu vain avaruuskuulmasta, jossa pinta näkyy kentän keskuksesta.

Vastaavasti (Biot'n ja Savartin lain

r^{-1} -muoto !):

Mielivaltaisen kenttäviivaympyrän kaarella magneettivuon tiheyden B ja kaarenpituuden Δs tulo riippuu vain kaarta vastavasta keskuskulmasta $\Delta\phi$ ts. kulmasta, jossa kaari näkyy kentän synnyttävästä johtimesta katsottuna ...

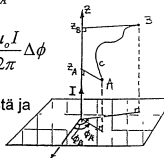
212

ja \vec{B} :n reitti-integraali $A \rightarrow B$ tietä c:

$$\int_A^B \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_A^B d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_B - \phi_A) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta\phi$$

(ts. riippuu vain ϕ_B :stä ja ϕ_A :sta !)



Magneettikentän voimakkuus ($= \vec{H}$)

Määr. Tyhjiössä: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Joten suoralle virtajohtimelle:

$$1) \vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi R} \hat{u}_\phi ; 2) \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi} \Delta\phi$$

Kiertämä $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = ?$

Sovitaan:



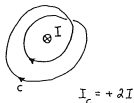
joten:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = nI = I_c = \text{kierretty sähkövirta!}$$

n = montako kertaa tie c kiertää johtimen:

- positiiviseen suuntaan $\rightarrow I_c > 0$
- negatiiviseen suuntaan $\rightarrow I_c < 0$

Esim.



Mutta nyt hieman hankalampaa, sillä:

- 1) kysymyksessä on vektorikentän \vec{J} (virrantiheyden) synnyttämä vektorikenttä \vec{H} ja
- 2) virran aiheuttaman magneettikentän suuntakysymykset mutkistavat tilannetta.

4.3.2. Aksiaalisymmetriset systeemit

Sylinterikoordinaatit: R, ϕ, z

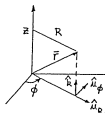
Aksiaalisymmetria:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(R, z)$$

Sylinterisymmetria:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(R)$$

$$= A_\phi(R)\hat{u}_\phi + A_z(R)\hat{k} + A_R(R)\hat{u}_R$$



Yleistys:

VOE: Ampéren kiertämälaki:

Staattisessa magneettikentässä magneettikentän voimakkuuden kiertämä = kierretty sähkövirta.

Käyttö:

Symmetrisen virtasysteemin \vec{B} määrittämiseen.

(Vrt. Gaussin laki \rightarrow symmetrisen varaussysteemin \vec{E} :n määrittäminen)
ts.

$$\psi_S = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi} \Omega_S$$

\rightarrow jos pinta S sulkee varaukset q sisäänsä, niin

$$\Omega_S = 4\pi \rightarrow \psi_S = q_S$$

Esim. Suora sylinterisymmetrinen virtajakauma

$$\rightarrow \text{virrantiheys: } \vec{J} = J(R)\hat{k}$$

VOE:

$$\vec{H} = H(R)\hat{u}_\phi, \text{ sillä:}$$

1) Ampéren ja Laplacen lain mukaan: $\vec{H} \perp \vec{J}$ ja

2) VOE: Lähteettömällä^{*)} sylinterisymmetrisellä kentällä ei ole radiaalista R -komponenttia ...

^{*)} sillä: $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ (§ 4.4.3.)

ts. kenttäviivat ovat ympyröitä, joilla symmetria-akseli on yhteisenä akselina.

Kierrettäessä pitkin ympyrää:

$$d\vec{r} = R d\phi \hat{u}_\phi,$$

joten kiertämä:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} H(R) R d\phi = 2\pi R H(R)$$

$$= I_c = I(R) \quad \text{= R-säteisen kanttäviiva-
ympyrän läpi
kulkeva virta}$$

→

$$\vec{H} = \frac{I(R)}{2\pi R} \hat{u}_\phi \quad \text{ts. suoran virtajohti-
men yleistyks!}$$

Huom.

Putken muotoisen (virta siis putken suuntaan) johtimen keskellä ei ole magneettikenttää: $\vec{H} = 0$.

(Vrt. johdepallon sisällä: $\vec{E} = 0$)

Esim.

Tarkastellaan äärettömän pitkää ympyrälieriötä, jossa on akselin suuntainen, tasainen virtajakautuma:

$$I = 2\pi J \int_0^{R_0} \frac{1}{2} R^2 = \pi R_0^2 J$$

ts.

$$\vec{J}(R) = \frac{I}{\pi R_0^2} \hat{k}, \quad \text{kun } R < R_0$$

ja

$$\vec{J}(R) = 0, \quad \text{kun } R > R_0$$

missä: I = koko johtimessa kulkeva virta

\hat{k} = akselin suuntainen yksikkövektori

R_0 = johtimen poikkileikkauksen säde

ts.

$$\vec{H}(R):$$

- 1) johteen sisällä yleensä $\propto R$
- 2) johteen ulkopuolella koko sähkövirran aiheuttama Biot'n ja Savartin kenttä.

Esim. Jos tunnetaan

$$J = J(R)$$

→ saadaan $I(R)$, sillä:

$$I(R) = \int_S \vec{J}(R) \cdot d\vec{S} = \int_S J(R) \hat{k} \cdot \left(\frac{2\pi R dR \hat{k}}{ds} \right) \\ = 2\pi \int_0^R J(R) R dR$$

(S = R-säteinen ympyräpinta)

Ja siten:

$$I(R) = \pi R^2 J = \frac{R^2}{R_0^2} I, \quad \text{kun } R \leq R_0$$

ja:

$$= \pi R_0^2 J = I, \quad \text{kun } R \geq R_0$$

Vastaavasti saadaan magneettikentän voimakkuudeksi:

$$\vec{H}(R) = \frac{I(R)}{2\pi R} \hat{u}_\phi =$$

$$= \frac{I}{2\pi R_0} \frac{R}{R_0} \hat{u}_\phi, \quad \text{kun } R \leq R_0$$

ja:

$$= \frac{I}{2\pi R} \hat{u}_\phi, \quad \text{kun } R \geq R_0$$

ts.

- 1) johteen sisällä $\propto R$
- 2) johteen ulkopuolella koko sähkövirran aiheuttama Biot'n ja Savartin kenttä.

Solenoidaalinen virtajakautuma

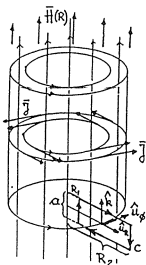
Virta kiertää kohti-suorasti symmetria-akselia:

$$\vec{J} = J(R) \hat{u}_\phi$$

$$\vec{H} = H(R) \hat{k}$$

ts. kenttäviivat ovat akselin suuntaisia suorina.

Sovelletaan Ampèren kiertämälakia kuvan silmukkaan c:



- a) akselin suuntaiset sivut (etäisyydet akselista R_1, R_2 ; pituudet = a):

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{r} = [H(R_1) - H(R_2)] a$$

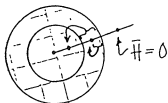
Joten, jos kuvan silmukassa c annetaan R_2 :n kasvaa $\rightarrow \infty$ ja merkitään $R_1 = R$, niin

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = a H(R) = a \int_R^\infty J(R) dR$$

ts.

$$H(R) = \int_R^\infty J(R) dR = A(R)$$

= virtakate, joka saadaan projisoimalla kaikki etäisyyttä R kauempana oleva virta radiaalisesti R-säteisen sylinterin vaipalle:



- b) radiaaliset sivut:

$$d\vec{r} \perp \vec{H} \rightarrow \int \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$$

- c) kierretty virta:

$$I_c = a \int_{R_1}^{R_2} J(R) dR$$

(Sillä:

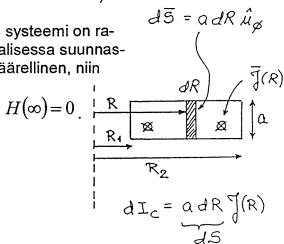
$$I_c = \int \vec{J}(R) \cdot d\vec{S},$$

ja nyt:

$$dS = a dR)$$

Jos systeemi on radiaalisessa suunnassa äärellinen, niin

=



Joten:

solenoidaalisisissa systeemisissä \vec{B} :n tietyllä etäisyydellä R symmetria-akselista määrää vain tätä kauempana oleva virta:

- a) solenoidaalisen systeemin ulkopuolella:

$$\vec{B} = 0$$

ja

- b) onton, solenoidaalisen systeemin keskellä olevassa virrattomassa tilassa

$$\vec{B} = \text{vakio.}$$

Esim.

Pitkä, suora solenoidi (§ 4.2.3.)

→ akselilla: $\vec{H} = A \hat{k}$

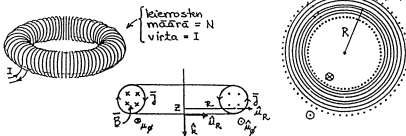
$$\left(\text{missä: } A = \frac{NI}{L} \right)$$

Nyt:

kenttä solenoidin keskialueessa

= homogeeninen ja solenoidin ulkopuolella kenttä on häviävän pieni.

Toridaalinen virtajakautuma



Toroidikäämi

= ympyrärengaan muotoon taivutettu, tiheään käämitty solenoidi

⇒

kenttäviivat ympyröitä, joiden akselina on symmetria-akseli.

[VOE:] Ampèren lakia mielivaltaiseen kenttäviivaympyrään c soveltaen:

$$\vec{H} = H(R, z) \hat{u}_\phi = \frac{I_c(R, z)}{2\pi R} \hat{u}_\phi,$$

missä $I_c(R, z)$ on ko. ympyrän c läpäisevä virta.

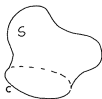
227

b) Stokesin lause

ts. **[VOE:]**

$$\oint_c \vec{U} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{U}) \cdot d\vec{S}$$

,missä pinta S on käyrän c reunustama mielivaltainen pinta.



[Huom.]

Jos käyrä c on esim. tasokäyrä, niin ⇒ pinta S voi olla esim.

- 1) käyrän sisään jäävä tasopinta tai
- 2) käyrän rajoittama avaruuspinta.

[Esim.]

$$\vec{U} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$$

Määritä \vec{U} :n kiertö, kun S = pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ylempi puolisko ja c sen reunakäyrä ...

228

Siispä:

$I_c(R, z) = NI$, kun ympyrä on toroidin sisäpuolella

ja

$I_c(R, z) = 0$, kun ympyrä on toroidin ulkopuolella.

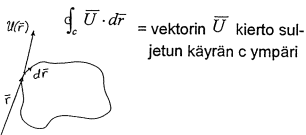
ts.

kenttä $\neq 0$ vain umpinaisessa tilassa!
(Vrt. Ideaalinen kondensaattori ja \vec{E})

[Lisäys:]

Vektorin kierto ja Stokesin lause

a) Vektorin kierto:



228

4.4. Magnetostaattisten kenttien yleiset lait

4.4.1. Yleiskatsaus (& kertausta)

a) Sähköstaattinen kenttä on pyörteetön lähdekenttä; varaukset ovat sähkökentän lähteitä:

• integraalimuodossa (Gaussin laki):

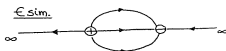
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_S$$

$$(\vec{D} = \epsilon \vec{E})$$

• differentiaalimuodossa (Maxwellin I laki):

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

Tämä merkitsee, että sähkökenttää voidaan esittää *kenttäviivoilla*, jotka alkavat posit. varauksista ja päättyvät negat. varauksiin tai äärettömyyteen:



b) Staattinen sähkökenttä on konservatiivinen \rightarrow pyörteetön:

• integraalimuodossa:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

• differentiaalimuodossa (Maxwellin III laki):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla V(\vec{r}) \end{aligned}$$

(kaikkialla).

Pyörteettömyys merkitsee, että sähköstaattisessa kentässä ei voi esiintyä umpinaisia kenttäviivoja, sillä olisi

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \neq 0$$

(c = umpinainen kenttäviiva)

c) Tässä luvussa osoitetaan, että: staattinen magneettikenttä on aina *lähteetön

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

* pyörrekenttä

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

4.4.2. Vektorikentän pyörteisyyden

Infinitesimaaliset kiertämät

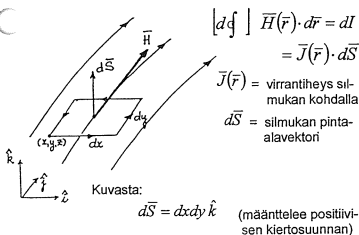
Ampèren kiertämälaki:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_c = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

(missä S on c:n rajoittama pinta)

= staattisen magneettikentän pyörteisyyttä koskeva integraalilaki.

Vastaavaan differentiaalilakiin päästään soveltamalla sitä infinitesimaaliseen silmukkaan (paikassa \vec{r}):



$$\left[d\oint \right] \vec{H} \cdot d\vec{r} = [\vec{H}(x, y, z) - \vec{H}(x, y + dy, z)] \cdot \hat{i} dx +$$

$$[\vec{H}(x + dx, y, z) - \vec{H}(x, y, z)] \cdot \hat{j} dy$$

$$\begin{aligned} &= - \left[H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right] - H_x \Big] dx + \left[H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right] - H_y \Big] dy \\ &= \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy = [\nabla \times \vec{H}]_z \left[\frac{d\vec{S}}{dS} \right]_z \end{aligned}$$

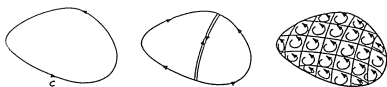
Joka voidaan kirjoittaa koordinaatistosta riippumattomaan muotoon:

$$\left[d\oint \right] \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

Kiertämien additiivisuus ja Stokesin lause:

Muutetaan edell. tulos integraalimuotoon:

- tarkastellaan kiertämää pitkin mielivaltaista, umpinaista tietä c
- jaetaan c kahdeksi silmukaksi ...



⇒ kiertämien summa $= \oint_c$, sillä silmukan jakava käyrä kuljetaan molempiin suuntiin ts. tulos: ± 0 .

→ jakoa voidaan jatkaa:
(numeroidaan silmukat 1, ...,)

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = \sum_i \oint_i \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

○ N mielivaltaisen suureksi → silmu-koista tulee infinitesimaalisia:

$$\left[d, \oint \right] \vec{H} \cdot d\vec{r} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S},$$

Saatiin:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})$$

ts.

○ Maxwellin IV lain staattisia kenttiä koskeva osa:

stationaarisen virtajakautuman luoman magneettikentän \vec{H} pyörteisyys jokaisessa pisteessä on yhtä suuri kuin virrantiheys.

Tuloksena nk. **Stokesin lause**:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

Vektorikentän kiertämä pitkin mielivaltaista umpinaista silmukkaa = tämän kentän pyörteisyyden vuo minkä tahansa sellaisen pinnan läpi, jonka reuna-ikäyränä tämä silmukka on.

Aikaisemmin saatiin:

$$\left[d, \oint \right] \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

ja nyt:

$$= (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

ts. magneettikentän pyörteisyys =

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})$$

4.4.3. Magneettikentän lähteettömyys

Vektoripotentiaali:

Muistetaan vektorilaskennan osuudesta, että vektorikenttä \vec{C} on lähteetön,

$$1) \text{ jos: } \oint_S \vec{C} \cdot d\vec{S} = 0$$

2) ts. (Gaussin lause I):

$$\int_V \nabla \cdot \vec{C} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{C} = 0$$

toisaalta

$$\boxed{\text{VOE:}} \quad \text{yleisesti: } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{K}) = 0$$

3) joten lähteetön kenttä \vec{C} voidaan lausua muodossa

$$\vec{C} = \nabla \times \vec{K},$$

missä \vec{K} on nk. vektoripotentiaali!

Magneetikentälle:

Ampère & Laplace:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{L} \times \vec{r}}{r^3}$$

josta sitten:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B}(\vec{r}) = \dots = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

VOE: On olemassa vektori-
kenttä $\vec{A}(\vec{r})$ siten, että

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

ts. staattinen magneetikenttä on roottori-
kenttä ja

$\vec{A}(\vec{r})$ = magneetikentän
vektoripotentiaali.

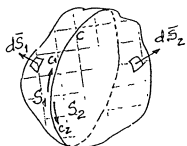
(Seuraa suoraan Ampèren ja Laplacen laista)

(Lähteetön kenttä: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
Toisaalta aina:
 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

joten:
 $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$.)

Roottorikentän lähteettömyys

Tarkastellaan kentän $\nabla \times \vec{A}$ vuota
mielivaltaisen umpinaisen pinnan S
läpi:



jaetaan pinta kahteen
osaan S_1 ja S_2 umpi-
naisella käyrällä c :

Huom.

c_1 & $c_2 = c$, mutta c_1 ja
 c_2 kuljetaan vastakkai-
siin suuntiin!

→

$$\oint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

STOKES:

$$= \underbrace{\oint_{c_1} \vec{A} \cdot d\vec{r}}_{= -\oint_{c_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}} = 0$$

GAUSSIN LAUSE:

$$\left(= \int \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})}_{=0} dV \right)$$

Joten:

roottorikenttä $\nabla \times \vec{A}$ on lähteetön.

→

Maxwellin II laki!

Siis:

Maxwellin II laki:

1) edellinen kaava esittää sen
integraalimuodossa:

$$(\Phi_S) = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

2) sama differentiaalimuodossa:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}(\vec{r})) = 0$$

ts.

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Määr.

Magneettivuon pinnan S läpi:

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \Phi_S \quad \vec{B} \cdot d\vec{S} = d\Phi$$

↑ ilmaisee pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärän

$$d\Phi_S > 0, \text{ kun } \vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{S}$$

ja

$$d\Phi_S < 0, \text{ kun } \vec{B} \uparrow \downarrow d\vec{S}$$

Magneettivuon yksikkö:

$$[\Phi] = 1 \text{ Tm}^2 = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ weber}$$

Esim.

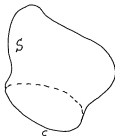
Homogeenisessa kentässä

$$\Phi_S = \vec{B} \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Joten $\int_S d\vec{S}$ (merkitään \vec{S}) riippuu vain pinnan S reunakäyrästä, ei pinnasta S itsestään.

Näin on määritelty yksikäsitteisesti SILMUKAN C PINTA-ALAVEKTORI

$$\vec{S} = \int_S d\vec{S}$$



missä integroidaan mielivaltaisen, silmukan c rajoittuvan pinnan yli.

Huom. Maxwellin II laki: Koska

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \text{ niin } \vec{B} \text{ on lähteetön:}$$

1) integraalilakina:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

2) differentiaalilakina:

$$\text{Maxwellin II laki: } \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Magneettikentän lähteettömyys merkitsee, että

- 1) "magneettivarauksia" ei ole olemassa,
- 2) kenttäviivoilla ei ole alkua eikä loppua, joten niiden on oltava umpinaisia silmukoita tai ulottuttava äärettömyyteen,
- 3) pinnan läpäisevä magneettivuon riippuu vain pinnan reunakäyrästä.

Yhteenveto

STAATTISILLE KENTILLE:

$$\text{Maxwell I} \quad \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$$\text{Maxwell II} \quad \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{Maxwell III} \quad \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{Maxwell IV} \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})$$

Tyhjiössä:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

ja:

$$\vec{H}(\vec{r}) = (1/\mu_0) \vec{B}(\vec{r})$$

4.5. Magneettikentän aiheuttamat voimat

4.5.1. Magneettisen voiman laki

Ampéren laki (§ 4.1.2.):

jos johtimessa kulkee virta I ja johtimen osa \vec{L} ($\vec{L} \uparrow \uparrow I$) on $\perp \vec{B}$

(ja, kun \vec{B} = homogeeninen), niin ko. johtimen osaan vaikuttava voima on muotoa:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

VOE: (kokeellisesti):

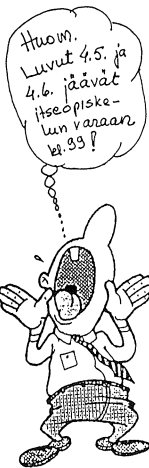
eo. lauseke ilmaisee \vec{F} :n oikein johtimen asennosta riippumatta.

→

Yleinen magneettisen voiman differentiaalilaki:

$$d\vec{F}_B = I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

esittää pisteessä \vec{r} olevaan virta-alkioon $I d\vec{r}$ vaikuttavaa voimaa.



Muistetaan:
Magneettivuo pinnan S läpi

$$\Phi_S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Jos B on vakio, niin saadaan:

$$\Phi_S = \vec{B} \cdot \int d\vec{S}$$

ja kun merkitään:

$$\int d\vec{S} = \vec{S}$$

= silmukan c pinta-alavektori

saadaan:

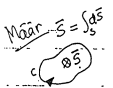
$$\Phi_S = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Huom.

Pinta-alavektori \vec{S} riippuu vain pinnan reunakäyrästä c , ei itse pinnasta S !!!

Lorentz'n laki

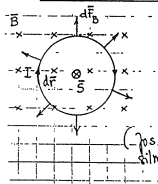
Muistetaan: yhden virrankuljettajan osuus virta-alkiossa on $q\vec{v}$, johon pisteessä \vec{r} olevaan hiukkaseen vaikuttavaksi voimaksi saadaan:



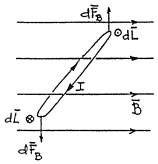
$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (\text{Lorentz'n laki}).$$

Voimavaikutukset silmukkaan

$$\vec{\Phi}_S = \vec{B} \cdot \vec{S}$$



- 1) \vec{B} homogeeninen & $\parallel \vec{S}$, kaikkialla $d\vec{F}_B$:t suuntautuvat ulospäin; silmukka laajentamaan silmukkaa (ts. kasvattamaan Φ_S :ää)
- (jos $\vec{B} \perp \vec{S}$, niin kenttä pyrkii supistamaan silmukkaa.)



- 2) Jos silmukka on vinossa: magnetiset voimat pyrkivät kaantamaan sen $\perp \vec{B}$ siten, että $\vec{B} \parallel \vec{S}$ [ts. Φ_S kasvaa]

- 3) VDE Jos \vec{B} on epähomogeeninen & $\vec{B} \parallel \vec{S}$, niin \vec{B} aiheuttaa voiman, joka vetää silmukkaa vahvemman kentän suuntaan. [ts. Φ_S kasvaa]

Joten: kaikki kolme vaikutusta: venytys, vääntö ja veto pyrkivät subrentamaan silmukon läpäisevää magnetivuota.

4.6.2. Virtasilmukkaan vaikuttava voima & vääntömomentti

Voima, jolla staattinen magn.kenttä vaikuttaa virtasilmukkaan:

$$\vec{F}_B = \oint d\vec{F}_B = I \oint [d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

(Integroitaessa polkuvektorin \vec{r} kärkeä kulkea pitkin johdinta, joten johdinalkio $d\vec{r}$ on samalla integroimismuuttujan differentiaali.)

Homogeenisessa magnetikentässä (ts. $\vec{B} = \text{vakio}$):

$$\vec{F}_B = I \left(\oint d\vec{r} \right) \times \vec{B} = 0 \quad \left[\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0} \vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = 0 \right]$$

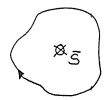
Vääntömomentti

Momentti, jolla staattinen magn.kenttä vääntää virtasilmukkaa origon suhteen:

$$\vec{M} = \oint d\vec{M} = \oint [\vec{r} \times d\vec{F}_B] = I \oint \vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

\vec{B} -vakio Homogeenisessa kentässä: 1) \vec{M} on riippumaton kiertopisteestä (koska $\vec{F}_B = 0$); 2) VDE! $\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B}$; missä \vec{S} on silmukon pinta-aluevektori. [$\vec{S} = \int_S d\vec{S}$]

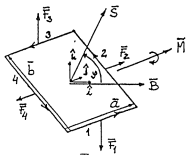
\leftarrow esim Tasosilmukka ...



Emme todista edellisen sivun ②-kohtaa yleisesti, mutta yhdessä erikoistapauksessa:

(249)

Suorakulmainen silmukka (sivut a ja b)



\vec{B} = vakio

Valitaan $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \vec{B} \\ \uparrow \uparrow \text{ silmukan} \\ \uparrow \uparrow \text{ toinen sivu} \end{array} \right.$

Numeroidaan sivut (kts. kuva):

- sivu 1: $\vec{a} = a\hat{j}$
- sivu 2: \vec{b}
- sivu 3: $-\vec{a}$
- sivu 4: $-\vec{b}$

Pinta-alavektori: $\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b}$

Sivuihin vaikuttavat voimat:

(yhdensuunt. sivuihin vaikuttavat voimat ovat yhtäsuuret, mutta vastakk. suuntaiset)

$$\vec{F}_1 = I \vec{a} \times \vec{B} = -I a B \hat{k}$$

$$= -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_2 = I \vec{b} \times \vec{B}$$

$$= I b B \hat{j} \cos \varphi = -\vec{F}_4$$

\vec{M} voidaan laskea mielivallaisen pisteen suhteen, esim. silmukan keskipisteen suhteen:

$$\vec{M}_1 = -\frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{F}_1 \dots; \vec{M}_3 = \frac{1}{2} \vec{b} \times (-\vec{F}_1) = \vec{M}_1$$

$$\vec{M}_2 = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{F}_2 = 0; \vec{M}_4 = -\frac{1}{2} \vec{a} \times (-\vec{F}_2) = \vec{M}_2 = 0$$

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 2\vec{M}_1 = -\vec{b} \times \vec{F}_1 = I a b \vec{B} \hat{j} \sin \varphi = I \vec{S} \times \vec{B}$$

Mielivaltainen silmukka

$$\vec{M} = I \left(\int d\vec{S} \right) \times \vec{B} = I \vec{S} \times \vec{B}$$

silmukan pinta-alavektori
riippuu vain pinnan reunakäynnästä c

o.k.
Tasosilmukalle!
(kun: \vec{B} = vakio)

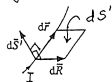
4.5.3. Magneettisen voiman energiaperiaate

(250)

Magneettisen voiman tekemä työ

Kun johdinalkio $I d\vec{r}$ liikkuu staattisessa magn.kentässä, siihen vaikuttava magneettinen voima $d\vec{F}_B(\vec{r})$ tekee työtä:

Jos johdinalkion infinitesimaalinen siirtymä = $d\vec{R}$, niin:



$$dW_B' = d\vec{R} \cdot [I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

$$= I \vec{B}(\vec{r}) \cdot (d\vec{R} \times d\vec{r})$$

$$= I \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}'$$

$$= I d\Phi'$$

(Tässä merkinnät W_B', \vec{S}', Φ' ovat

alkun $d\vec{r}$ siirtymään $d\vec{R}$ liittyvät työ, pinta-alavektori ja vuo ko. alan läpi).



Joten koko silmukan siirtymässä magn.kenttä tekee työn:

$$dW_B = \oint_C dW_B' = I \oint_C d\vec{R} \cdot [I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

$$= I \oint_C d\Phi'$$

(Integroimisreitin suunta = I:n suunta.)

missä $d\Phi'$ = ko. siirtymässä tapahtuva silmukan läpäisemän magneettivuon muutos.

Magneettisen voiman potentiaalienergia

Staatt. magn.kenttä → silmukan läpäisevä vuo riippuu silmukan paikasta, asemasta, koosta, muodosta = asemasta a

Kun silmukka liikkuu asemasta a lopuavastaan b , magn.kenttä tekee työn W_{ab}

$$W_{ab} = I \int_a^b d\Phi'$$

$$= I [\Phi(b) - \Phi(a)]$$

Eritiisesti, jos silmukka mielivaltaisesti kiipuen palaa alkuahtentoonsa $a \rightarrow W_{aa} = 0$ (25)

↪ magn.kentän oik.voima on konservatiivinen!

Määr sen yleistetty potentiaalienergiafunktio $= E_p = E_p(a) = -I\Phi(a)$

Jolloin magn.voiman tekemä työ:

$$W_{ab} = -\Delta E_p = E_p(a) - E_p(b)$$

Esim.

- \vec{B} homogeeninen (=vakio)
- jäykkä silmukka

$$\rightarrow E_p = -I\vec{S} \cdot \vec{B} = -ISB \cos\theta$$

$$E_p^{\min} = -ISB, \text{ kun } \vec{S} \uparrow\uparrow \vec{B}; \theta = 0$$

$$E_p = 0, \text{ kun } \vec{S} \perp \vec{B}; \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$E_p^{\max} = ISB, \text{ kun } \vec{S} \uparrow\downarrow \vec{B}; \theta = \pi$$

Silmukan kääntäessä työ riippuu vain kulmasta θ :

$$W = -\Delta E_p = ISB (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Jos silmukan kääntäessä $\theta = \text{vakio}$,
 niin kenttä ei tee työtä.

Virtasilmukan liike magnetikentässä

Energapenaak: voimat pyrkivät pienentämään systeemin potentiaalienergiaa.

↪ magnetiset voimat pyrkivät maksimoimaan magnetiivisen silmukan läpi.

Esim: Aikalaatu käämi magn.kentässä \rightarrow sitä on tietty tasapainoasento, johon kenttä pyrkii sitä kääntämään.

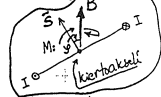
Esim

Jos \vec{B} on homogeeninen, niin tasapaino-
 asennossa $\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{B}$. (25)

Jos kiertotakeli \perp sekä \vec{B} että \vec{S} , niin käämiin vaikuttaa momentti:

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} \quad \text{ts. } M = ISB \sin\varphi,$$

missä kulma φ on poikkeama tasapaino-
 asennosta.



Jos käämi pääsee heilahtelumaan akselinsa suhteen, silloin tulee kiertokeiluri:

Muka-
huuhto:

$$M = J\alpha = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -ISB \sin\varphi$$

↪ käämiin hitausmomentti akselinsa suhteen.

Joten, kun φ on pieni $\rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \underbrace{\frac{ISB}{J}}_{=\omega^2} \varphi = 0$$

$\omega =$ kulmataajuus

ts. heilahtelu on likimain harmonista

Heilahtus-
aika:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{ISB}}$$

Kun vastusvoimat minimoidaan, heilahtelun tulisi olla ~ vaimenematonta.

Muita: nämä ovat vääriä ennusteita: käämiin heilahtelu vaimenee nopeasti!

Syy: esitetty magn.voiman laki pätee vain staattisessa tilassa.

jotain puuttuu vielä magn.vaiikutuksista?

↪ liikkuvan silmukan liittyessä uusi ilmiö: magnetiivinen induktio (BS) \rightarrow synnyttää silmukkaan induktiovirtaa, joka sysäyttää systeimin energiaa \rightarrow heilahtelu vaimenee...


4.5.4. Magnettimomentti

(253)

Määritelmä Homogeenisessa magn. kentässä magn. dipoloin vaikuttaa ^{netto}momentti (kokeellisesti määritelty):

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (\vec{m} = \text{dipolin magn. momentti})$$

Esim. jäykkä tasavirtasilmukka

$$\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B}; \text{ joten sen } \vec{m} = I \vec{S}$$


Additiivisuus

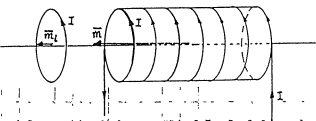
Kun \vec{B} = homogeeninen $\rightarrow \vec{M} = \sum \vec{M}_i$
 $\vec{M} = \sum (\vec{m}_i \times \vec{B})$ systemin osien
 $= (\sum \vec{m}_i) \times \vec{B}$ vauk. momentit!

ja siten $\vec{m} = \sum \vec{m}_i$ (m_x = syst. osien magn. momentti)

Esim.

Suora solenoidi; virta I, N kierrosta

$$\vec{m} = \sum \vec{m}_i = \sum I \vec{S}_i = N I \vec{S} \quad (\text{että } \vec{S}_i = \vec{S} \text{ kaikille } i=1, \dots, N)$$



Magnettisom dipolin liike magn. kentässä \rightarrow korvataan edell. luvun tuloksissa $I \vec{S}$ dipolin magn. momentilla \vec{m}

Oskilla on homog. magn. kentässä potent. energia:

$$E_p = \left[- \int M(\theta) d\theta \right] = -m B \cos\theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Jäykkä silmukka: $E_p = -I \vec{S} \cdot \vec{B} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ Myös tyylisesti! mag. neteille.

ja osion liikkeessä kenttä tekee työtä:

$$W = \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \right] = -\Delta E_p = m B (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

(254)

Esim.

magn. heilahtelu magn. kentässä (vrs. kaämi)

- induktiiviset tosin nyt hiukkoja verratuna: kaämin liikkumiseen.

Atomiariset hiukkaset

lähös pistemäisiä oskilla; joiden magn. momentti on niiden magnettisuutta kuvaava pusejva perusominaisuus.

$$E_p = E_p(r, \theta) = -\vec{m} \cdot \vec{B}(r) = -m B(r) \cos\theta$$

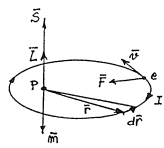
$\vec{B}(r)$ epähomogeeninen, mutta pienellä alueella oma \sim homogeeninen

- jos hiukkasen magn. momentti säilyttää suuntansa \vec{B} :n suhteen ($= \theta$), niin epähomog. kenttä vaikuttaa voimalla:

$$\vec{F} = -\nabla_r E_p(r, \theta) = m \nabla_r B(r) \cos\theta$$

\rightarrow vetää voimistuvan kentän suuntaan, jos $\vec{m} \uparrow \vec{B}$
 \rightarrow hylkii \rightarrow jos $\vec{m} \downarrow \vec{B}$

Vetyatomin magnettimomentti



Bohrin ja Sommerfeldin semiklassinen malli:

elektroni kiertää protonia klassisella mekaniikalla mukautetulla elliptisellä radalla protonin ja elektronin välinen sähköstaattinen vetovoiman ollessa.

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{m} = I \vec{S} \end{cases}$$

Bohrin kvantiteho, elektronin satoliikkeen liike-
 määrämomentin (impulssimomentin) $L = \vec{r} \times \vec{p}$ mah-
 dolliset arvot ovat: (255)

$$L = l\hbar = l \frac{h}{2\pi}, \quad l = 1, 2, \dots$$

($h =$ Planckin vakio...)

Tämä ehto valitsee kaikista klassisista elliptisistä
 mahdollisista, stationaarisista radoista (joilla elektroni ei säteile!).

Lisäksi L :n \vec{B} :n suuntaisen komponentti on kvan-
 titunut ja voi saada vain arvoja ($\vec{B} = B\hat{k}$)

$$L \cdot \hat{k} = L_z = m_l \hbar = m_l \frac{h}{2\pi}, \quad m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

Joten vektori L voi suuntautua $2l+1$ eri tavalla.



$$ds = \frac{1}{2} r (\omega dt) \rightarrow r\omega = 2 \frac{dS}{dt}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r m_e v \hat{s} = 2 m_e \frac{dS}{dt} = 2 m_e \frac{\vec{S}}{T}$$

($T =$ elektronin kiertoaika)

Elektronin kiertoliike
 \rightarrow sähkövirta $I = \frac{q}{T} = \frac{-e}{T}$

$$\vec{S} = \frac{T}{2m_e} \vec{L}$$

Rataliikkeestä aiheutuva magn. momentti: $\vec{m} = I \vec{S} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$

Näinollen Bohr'n vedotomilla on magneettikentässä
 potentiaalienergia, joka voi saada kulakin kvanttiluvun l
 avulla $2l+1$ erillistä arvoa:

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B} = \frac{e\hbar B}{2m_e} m_l \quad (m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l)$$

Perustilassa ($l=1$) radan energia on pienin.
 Tämän tilan lisäksi magneettikentässä silpoutuu kolmeksi lähekkä-
 iläiseksi, joiden energiat ovat (nastaten eri m -suuntia):

$$\left[\vec{B} = 0 \right] E_0 \rightarrow \left\{ E_0, E_0 \pm \frac{e\hbar}{2m_e} B \right\} \left[\vec{B} \neq 0 \right]$$

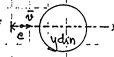
Mutta! Kokeet osoittavat, että (256)

- energiatilat silpoutuvat
- perustilan lähekkäisten arvojen erotus $= 0, K$.
- perustila silpoutuu kahdeksi

\hookrightarrow Bohr'n ennuste väärä:
 edellyttäisi arvoa $l = \frac{1}{2}$,
 jota ko. teoria ei tunneta.

Kvantimekaniikka:

perustilassa $L = 0$. (Bohr $L \neq 0$,
 sillä $L = 0$ tarkoittaisi: $\vec{r} \times \vec{p} = 0$)
 \hookrightarrow rataliikkeestä
 ei aiheudu magn. momenttia.



sen sijaan koko m aiheuttaa elektronin sisäisestä
 liike-määrämomentista, spinistä



spin kvanttiluku $s = \frac{1}{2}$

\hookrightarrow elektronin m voi suuntautua
 magn. kentässä kahdella eri
 tavalla
 \rightarrow elektronin avulla vain
 havaitut 2 arvoa.

4.6. Hiukkanen sähkömagneettisessa kentässä

(257)

4.6.1. Liikkeen yleiset ominaisuudet

Staatinen kenttä: $\vec{E}(r), \vec{B}(r)$

Pisteessä \vec{r} nopeudella \vec{v} liikkuvan hiukkanen

Liikkeyhtälö:
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E}(r) + q\vec{v} \times \vec{B}(r)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} ; q = \text{hiukkanen varaus}$$

Hiukkanen radan $\vec{r} = \vec{r}(t)$ a. kentäluvun diff. yhtälö

Aluehdot: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{v}_0 \rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t) = \dots$

Energaperiaate:

$$\vec{F}_B \perp \vec{v} \rightarrow W_B = 0 ; \vec{F}_E \text{ on konservatiivinen} \rightarrow V(r)$$

Energian säilymlaki:
$$E_k + qV(r) = E_0 = \text{vakio}$$

Sovelluksia:

Varauksellisten hiukkasten suhteilla, joita kiihdytetään ja ohjataan sähkö- ja magnetikentillä, on nykyaikaisessa tekniikassa ja tiedeessä paljon sovelluksia.

- Thomsonin koe $\rightarrow e^-$ (n. 1897)
- massaspektrometri \rightarrow ydinkenttien salviämisen
- kiihdyttimet \rightarrow nykyaikainen hiukkastyökone
- kuvaputket. (televisio, näyttöputke, tulika, oskilloskooppi...)
- magnetinen pulla \rightarrow plasmaa void. pitää koossa

Esim.

Maan magn. kenttä ohjaa kosmisen säteilyn nappalueille ja estää sitä pääsemästä Maan pinnalle. Säteily virittää ylämpien ilmakehän atomit, joiden purkauksena näkyy revontulina.

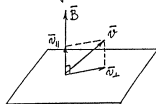
4.6.2. Hiukkanen homogeenisessa magnetikentässä

(258)

Energaperiaate $\rightarrow E_k = \text{vakio}$, joten p, v ja m vakioita.

Liikkeyhtälö:
$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Jaetaan nopeus \vec{v} kahteen komponenttiin, joista toinen on $\parallel \vec{B}$ ja toinen $\perp \vec{B}$:



$$\vec{F}_B = q(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B}$$

$$= q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$$

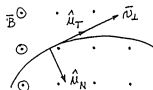
ts. magnetinen voima riippuu vain nopeuden kohti suorasta komponentista.

Liikkeyhtälö jakautuu:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} = m\vec{a}_{\parallel} = 0 & \rightarrow \vec{v}_{\parallel} = v_{\parallel}t + \vec{v}_{0\parallel} \quad (\text{tasainen liike kentän suunnassa}) \\ \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} = m\vec{a}_{\perp} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \end{cases}$$

Liikkeen projektiio kentän normaalitasossa:

Huom. $\vec{F}_B \perp \vec{v}_{\perp}$, $v_{\perp} = \text{vakio}$



Muistetaan peruskursseista (rataliike):

$$\begin{cases} m a_T = m \frac{dv_{\perp}}{dt} = 0 & [\vec{a}_{\perp} \perp \vec{v}_{\perp} \rightarrow \vec{a}_T = 0] \\ m a_N = \frac{mv_{\perp}^2}{R} = q v_{\perp} B & [a_{\perp} = a_N] \end{cases}$$

Joten liikkeen rata-nopeus $= v_{\perp} = \text{vakio}$.

Sitä seuraa, että liikkeen kaarevuussäde $= R = \text{vakio}$. Sen ratkaisu on ympyrä! Liikkeen projektiio kentän normaalitasossa on tasaista ympyräliikettä, jonka säde, kulmanopeus ja kiertotaika ovat:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB}$$

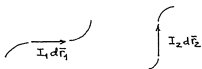
$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{qB}{m}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

4.7. Magneettisen vuorovaikutuksen ongelmat

1) Virta-alkioiden vuorovaikutus:

Esim. Päältäpäin katsottuna:



$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

1:n magneettivuon tiheys 2:n kohdalla:

$$d\vec{B}_1(\vec{r}_2) = 0,$$

joten myös sen aiheuttama voima häviää:

$$d\vec{F}_{21} = 0,$$

(missä 2 = kohde ja 1 = aiheuttaja)

3) Hiukkasten magneettinen vuorovaikutus

ts.

kun korvataan virta-alkiot $I_i d\vec{r}_i$ lausekkeilla $q_i \vec{v}_i$, niin ei lain luonnetästä muutu \Rightarrow hiukkasten magneettinen vuorovaikutus ei noudata voiman ja vastavoiman lakia (N III lakia)

Siispä:

varauksellisten hiukkasten muodostama mekaaninen systeemi ei noudata suuria säilymislakeja.

Särkyvätkö säilymislait? Ei toki:

Luonnon kokeellinen todellisuus ei muutu vain siksi, ettei jokin teoreettinen malli kuvaa sitä oikein.

Mutta: Newtonin mekaaninen systeemi menettää merkityksensä luonnon aieneillisten systeemien perusmallina.

Mutta:

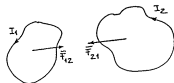
$$d\vec{B}_2(\vec{r}_1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{F}_{12} \neq 0$$

Vrt. Newtonin III laki ...

Näyttää johtavan koko Newtonin mekaniikan kriisiin... Hätäselitys: virta-alkiot eivät ole todellisia fysikaalisia olioita?

2) Virtapiirien vuorovaikutus:

ts. integroidaan virta-alkioiden väliset voima-alkiot kummankin piiriin yli:



\Rightarrow **VOE:**

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \dots = 0$$

ts.

N III on O.K. & suuret säilymis-lait voivat hetkeksi huokaista helpotuksesta.

Sähkömagneettisesti vuorovaikuttaviin hiukkasiin kuuluu aina kolmantena osapuolena sähkömagneettinen kenttä.

Alunperin: vain teoreettinen vuorovaikutuksen välittäjämekanismi

Mutta onkin:

itsenäinen fysikaalinen olio !

Kentällä on

energia, liikemäärä, impulssimomentti jakautuneina koko kenttään (ts. tietty tiheys kentän jokaisessa pisteessä).

Hiukkasten liikkeessä kentän energia, liikemäärä ja impulssimomentti muuttuvat:

yhdessä ne (hiukkaset + kenttä) muodostavat systeemin, jonka kokonaisliikemäärä, kokonaisenergia ja kokonaisimpulssimomentti säilyvät !

Huom.

Mekaanisesta systeemistä ei tarvitse luopua

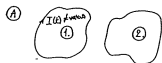
- sitä on laajennettava. Siihen on lisättävä *kentät* uusina rakenneosina.

SUMMARY:

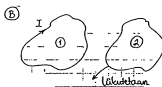
Varattuja hiukkasia ei voi lainkaan käsitellä paljaina kentättöminä olioina. Niitä ei voi "riisua" !

5. Sähködynamiikka**5.1. Sähkömagneettinen induktio****5.1.1. Kokeelliset perusteet**

Induktiovirta: (Faraday 1820 – 30) ts. havaitaan, että ohdinsilmukkaan 2 syntyy induktio-virta (ts. SMV), kun:



virta I muuttuu (esim. kytketään tai katkaistaan)



sitä liikutetaan 1 :n kentässä (Huom: 1 = joko virtapiiri tai magneetti)



virtapiiriä 1 liikutetaan.

Lenzin laki: (1834)

Induktiovirta vastustaa sen aiheuttavaa indusoivaa muutosta:

Esim. vahvistuvan magneettikentän aiheuttaman induktiovirran magneettikenttä heikentää kenttää.

Itseinduktio: (Henry 1832)

Jos virtasilmukassa (käämissä) sähkövirta muuttuu

- silmukkaan (käämiin) indusoivaa muutosta vastustava SMV

Sähkömagneettinen säteily:

Henry:

- sähkökipinä ⇒ induktioilmio virtapiirissä kymmenien metrien päässä
- salama ⇒ induktiovirtapulssi havaitaan yli 10 km päässä

Muistetaan:

Staatinnainen \vec{E} & \vec{B} pienenevät $\propto \frac{1}{r^2}$ ts. nopeasti !

Mutta:

Sähköpurkauksessa vapautuva energia leviää sähkömagneettisen kentän välityksellä paljon kauemmaksi. (kts. Henryn havainnot...)

Mutta miten?

- Maxwell 1865:** sähködynamiikan teoria: energia etenee kentässä sähkömagneettisena aaltoliikkeenä (esim. näkyvä valo)

Uutta: käänteinen induktio:

→ muuttuva \vec{E} synnyttää \vec{B} :n

- Hertz 1888:** tuotti ja vastaanotti sähkömagneettista aaltoliikettä värähtelypiirin avulla.

Perusprobleemat:

- 1) tunnetaan indusoiva muutos
→ indusoitua SMV & $I = ?$
- 2) tunnetaan indusoiva muutos
→ ympäristöön leviävä sähkö-
magn.aaltoliike & energiavirta = ?
- 3) tunnettu vaihtovirtapiiri
→ virta & tehonkulutus = ?

5.1.2. Faradayn ja Henryn laki

Induktiolaki: Faraday & Henry (kokeell.):

Kun silmukan läpäisevä magneettivuon muuttuu:

$\Phi(t) \rightarrow$ silmukkaan indusoituu:

SMV (= E), joka = - (magneettivuon muuttumisnopeus)

Itseinduktio:

Kun piirin $I(t)$ kasvaa $\rightarrow I_{ind}$, joka vastustaa virran kasvua!

Lentzin laki:

Jos umpinaiseen piiriin indusoituu SMV = E, ja piirin resistanssi on R, niin induktiovirta saadaan kaavasta

(Ohmin lakia käyttäen ja olettaen, että itseinduktio on pieni):

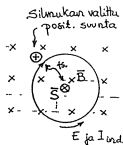
$$I = \frac{E}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

Seuraavaksi johdetaan Faradayn ja Henryn laki erikoistapauksessa ...

→

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Sisältää myös suuntasäännön:



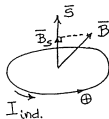
Jos $\vec{S} \uparrow \uparrow \vec{B}$ & \vec{B} kasvaa
niin $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ ja: $\Delta\Phi > 0$,
ts. silmukkaan indusoituu SMV, joka
pyrkii synnyttämään virran silmukan
negatiiviseen suuntaan, sillä $E < 0$!

Vastaavasti:

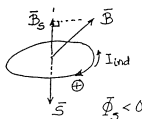
Jos $\vec{S} \uparrow \uparrow \vec{B}_x$ & \vec{B} heikkenee \rightarrow SMV $\uparrow \uparrow \oplus$

Jos $\vec{S} \uparrow \downarrow \vec{B}_x$ & \vec{B} kasvaa \rightarrow SMV $\uparrow \uparrow \oplus$

Jos $\vec{S} \uparrow \downarrow \vec{B}_x$ & \vec{B} heikkenee \rightarrow SMV $\uparrow \downarrow \oplus$



$\Phi_S > 0$



$\Phi_S < 0$

5.2. Induktio liikkuvassa johtimessa

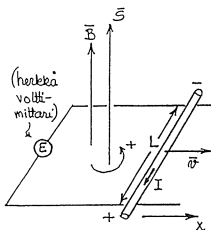
5.2.1. Suora sauva homogeenisessa kentässä

Kokeellinen laki:

sauva $\perp \vec{v} \perp \vec{B}$
(v = vakio)

Kokeell. havaitaan:
(tässä erikoistapauksessa):

- 1) SMV = E = vakio
(kun: $\leftrightarrow v =$ vakio)
- 2) jos $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$, niin virran suunta vaihtuu



$$3) E \propto L, v, B \quad \& \quad |E| = LvB$$

Mutta: E:n suunta = ?

Saadaan: $Lv = L \frac{dx}{dt} = \frac{dS}{dt}$
ts.

$$|E| = B \frac{dS}{dt} \quad \text{mutta suunta = ?}$$

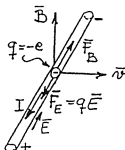
Yleisesti (kun $\vec{B} \uparrow \vec{S}$):

$$E = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(ts. Faradayn
ja Henryn laki)

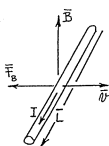
Tulkinta magneettisen voiman (ts. virrankuljettajien) avulla selitettynä:

- virrankuljettajan varaus = q , se liikkuu sauvan mukana
- joten siihen vaik. sauvan suuntainen magneettinen voima: $F_B = qvB$



Huom. Liikkuvaan johdesauvaan induktiovirta = I ,

joten ulkoinen magneettikenttä vaikuttaa siihen voimalla:



$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}$$

ts. $\vec{F}_B \uparrow \vec{v}$
→ se vastustaa sauva liikettä!

Sauvaa liikuteltaessa tehdään työtä tätä voimaa vastaan teholla:

$$P = \vec{F}_B \cdot \vec{v} = I\vec{L} \times \vec{B} \cdot \vec{v}$$

$$= ILBv = IE \quad (\text{missä: } LBv = E)$$

- = indusoituneen SMV:n tuottama teho!

- tämän seurauksena varaukset liikkuvat, sauva polarisoituu ja siihen syntyy sähkökenttä \vec{E} ja lopulta

- muodostuu tasapainotila, jossa virrankuljettajaan vaikuttavat vastakkaisuntaiset voimat ovat yhtä suuret:

$$F_E = F_B \quad \text{ts.} \quad qE = qvB$$

- ja sauvan kiskojen välisen osan päiden välillä jännite:

$$U = LE = LvB$$

(ts. kuten kok. havaittu)

Lentzin laki: Kun sauva liikkuu, niin piiriin ind. SMV ja virta I

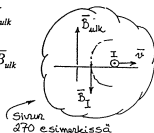
ja siten magn. kenttä \vec{B}_I :

- jos S pienenee:

$$\vec{B}_I \uparrow \vec{B}_{ulk}$$

- jos S kasvaa:

$$\vec{B}_I \downarrow \vec{B}_{ulk}$$



5.2.2. Liikkuva johdesilmukka staattisessa magneettikentässä

Edellisen yleistyös:

suora johdin & $\vec{B} = \text{vakio}$ → johdinsilmukan infinitesimaaliseen osaan dL indusoituu $SMV = dE$ ja

koko johtimeen indusoituvaa SMV = osien SMV:n summa

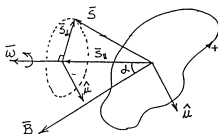
ts. laki pätee mielivaltaiselle johdinsilmukalle mielivaltaisessa staattisessa magneettikentässä. (Silmukan eri osat voivat liikkua eri tavoin!)

Silmukkaan indusoituvaa SMV:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Esim.

Pyörivä jäykkä johdinsilmukka homogeenisessa magneettikentässä:



mielivaltainen, jäykkä silmukka pyörii vakiokulmanopeudella $\bar{\omega}$ homogeenisessa magneettikentässä \bar{B} .

Magneettivuo silmukan läpi: $\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S}$, missä \bar{B} = vakio ja \bar{S} = silmukan pinta-alavektori, joka pyörii silmukan mukana, joten:

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{S}(t) \quad [\bar{S} = \bar{S}_{||} + \bar{S}_{\perp}]$$

(Kts. kuva)

Ajan nolakohta on valittu siten, että:

$$\cos(\bar{S}_{\perp}, \hat{u}) = \sin[90^\circ - (\bar{S}_{\perp}, \hat{u})] = \sin \omega t$$

ja merkitty SMV:n max.-arvoa:

$$S_{\perp} \omega B \sin \alpha = E_o$$

(se saavutetaan,

kun $\bar{S}_{\perp} \uparrow \hat{u}$ ts. $\omega t = 90^\circ$)

Havaitaan, että:

- 1) mielivaltaiseen johdinsilmukkaan \bar{S} joka pyörii jäykästi kiinteän akselin ympäri tasaisella kulmanopeudella $\bar{\omega}$ homogeenisessa magneettikentässä \bar{B} , syntyy sinimuotoinen vaihtojännite.

$$(E = E_o \sin \omega t)$$

Silmukkaan indusoituu SMV:

$$\underline{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\bar{B} \cdot \frac{d\bar{S}}{dt} = -\bar{B} \cdot \bar{\omega} \times \bar{S}(t)$$

$$\text{(missä: } \bar{S} = \int d\bar{S} \text{)}$$

$$= \bar{S}(t) \cdot \bar{\omega} \times \bar{B} = \bar{S}_{\perp}(t) \cdot \bar{\omega} \times \bar{B}$$

$$= \bar{S}_{\perp}(t) \cdot \hat{u} \omega B \sin \alpha$$

$$= S_{\perp} \cos(\bar{S}_{\perp}, \hat{u}) \omega B \sin \alpha$$

$$= E_o \sin \omega t \quad [\hat{u} \perp \bar{\omega}, \bar{B} \text{ -taso}]$$

ts. tietty suunta!

\bar{S}_{\perp} pyörii $\bar{\omega}$:n ympäri, joten kerran kierroksen aikana se on $\uparrow \hat{u}$; toisaalta:

$$\bar{S}_{\perp} \text{ ja } \hat{u} \perp \bar{\omega}.$$

- 2) jos $\bar{\omega} \uparrow \bar{B}$ tai $\bar{\omega} \uparrow \bar{S}$, niin SMV ei synny!

$\rightarrow \bar{S}$ -vektori kyllä pyörii, mutta kulma (\bar{S}, \bar{B}) = vakio ja siten silmukan läpäisevä magneettivuo = vakio ja inusoituva smv:

$$E = 0.$$

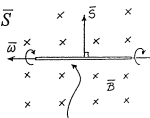
- 3) $(E_o)_{\max}$ saavutetaan, kun $\alpha = 90^\circ$ ja $\bar{S}_{\perp} = \bar{S}$

ts.

$$\bar{\omega} \perp \bar{B} \text{ ja } \bar{\omega} \perp \bar{S}$$

$$\Rightarrow E_{o,\max} = \omega S B$$

$$E = E_o \sin \omega t$$



ts. kun silmukka kuvassa vasemman suorassa

Sovelluksia:

- a) nopeasti pyörivää käämiä voidaan käyttää magneettikentän tutkimiseen:
 $\rightarrow \vec{B}$:n suunta & suuruus paikallisen funktiona.
- b) vaihtovirtageneraattori (§ 6.1.1.)
 (ilmiön tärkein tekninen sovellus).

5.2.3. Hallin ilmiö (Hall, 1879)

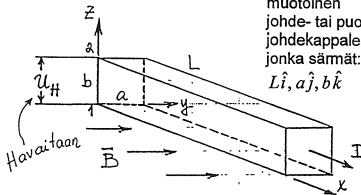
Virtajohdin polarisoituu magneettikentässä kohtisuoraan sekä virtaa että kenttää vastaan.

- 1) Havaitaan, että z-akselin suunnassa johteen ylä- ja alapintojen välille muodostuu jännite U_H nk. *Hallin jännite*.
- 2) Kokeellisesti saadaan: $U_H \propto IB$ ts.
 suhde $\frac{U_H}{IB}$ on kpl:lle ominainen vakio.
 (= nk. makroskooppinen Hallin laki)
- 3) Kokeellisesti todetaan, että U_H ei riipu kpl:n mitoista L ja b, mutta riippuu \vec{B} :n suuntaisen särmän pituudesta a:

$$U_H \propto \frac{1}{a}$$

Tarkastellaan ilmiötä käyttämällä seuraavaa erikoistapausta:

$$U_H = V_2 - V_1 \quad * \text{ pitkä, suorakulmisen särmion muotoinen johde- tai puolijohdekappale, jonka särmät: } Li, a\hat{j}, b\hat{k}$$



* kytetään jännite päitten välille
 \rightarrow mitataan x-akselin suuntaan syntyvä sähkövirta I .

* asetetaan kpl homogeeniseen magneettikenttään $\vec{B} = B\hat{j}$.

Yhdistetään 2 & 3:

$$U_H \propto \frac{IB}{a}$$

$$\text{Merkitään: } \frac{aU_H}{IB} = R_H$$

$$R_H = \text{aineen Hallin vakio}$$

Jos päätellään geometrian perusteella, että

- a) virtajakauma on tasainen ja
 b) Hallin jännitteen aiheuttaa homogeeninen Hallin sähkökenttä,

niin:

$$\vec{J} = \frac{I}{ab} \hat{i} \quad \& \quad \vec{E}_H = -\frac{U_H}{b} \hat{k}$$

Hallin vakio =

$$R_H = \frac{aU_H}{IB} = \frac{I}{B} \cdot \frac{ab}{I} \cdot \frac{U_H}{b} = \frac{E_H}{BJ}$$



Ottamalla huomioon vektorisuureiden suunnat, saadaan:

$$\vec{E}_H = -R_H \vec{J} \times \vec{B}$$

nk.

pisteittäinen Hallin laki

= kokeellisten lakien teoreettinen yleis-

tys; antaa \vec{B} :n, \vec{J} :n ja \vec{E}_H :n välisen yhteyden aineen kussakin pisteessä.

Sama virrankuljettajien avulla:

Ne liikkuvat sähkövirran mukana, niiden varaus, lukum. tiheys ja nopeus

$$= q, n, \vec{v}$$

$$\vec{J} = nq\vec{v}$$

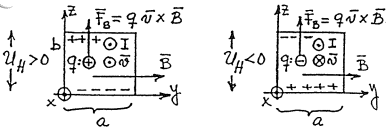
→ varauksiin vaikuttaa magn. voima:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{n} \vec{J} \times \vec{B}$$

Tarkastellaan tapauksia, joissa virrankuljettajat q ovat:

a) positiivisia

b) negatiivisia



ts. varauksenkuljettajien merkki määrää polaroitumisen suunnan

$$\rightarrow R_H : n \text{ ja } U_H : n \text{ merkin.}$$

Hallin ilmiö tarjosi kokeellisen keinon virrankuljettajien varauksen merkin määrittämiseen !

Varausten siirtyminen jatkuu, kunnes \vec{F}_B :n vaikutuksen q :hun kumoaa syntävä sähkökenttä, jonka sähkökentän voimakkuus = \vec{E}_H ,

ts. kun:

$$q\vec{E}_H + \frac{1}{n} \vec{J} \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{E}_H = -\frac{1}{nq} \vec{J} \times \vec{B} \rightarrow U_H$$

ts.

ko. ekvivalentti sähkökenttä on juuri Hallin kenttä !

Kun verrataan tulosta pisteittäiseen Hallin lakiin (s. 283), saadaan:

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

Havaittiin, että puolijohdeissa virrankuljettajien varaus voi olla joko positiivinen → p-tyyppinen puolijohde tai negatiivinen → n-tyyppinen puolijohde

Mutta: p-tyyppinen puolijohde vaikea selittää (kyseessä on elektroninen eikä ioni-johtavuus!)
→ tarvitaan: kvanttimekaniikka...

Saatiin:

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

ts.

R_H :n etumerkki määräa:

1) U_H :n etumerkin,

2) varauksenkuljettajan etumerkin.

5.2.4. Sähkömagneettisten lakien relaatiot

Kokeelliselta kannalta kolme erillistä sähkömagn. ilmiö-luokkaa:

- 1) Sähköstaattinen vuorovaikutus
 \leftrightarrow paikall. pysyvät (varatut) hiukkaset \leftrightarrow Coulombin laki
- 2) Magnetostaattinen vuorovaikutus
 \leftrightarrow liikkuvat (varatut) hiukkaset & paikallaan pysyvät johtimet
 \leftrightarrow Ampéren ja Laplacen laki
- 3) Sähkömagneettinen induktio
 \leftrightarrow liikkuvat johtimet, muuttuvat magn. kentät \leftrightarrow Faradayn ja Henryn lait

Teoreettinen tarkastelu \rightarrow eo. ilmiöiden / lakien välille yhteyksiä ...

289

Vastaavasti:

Johde liikkuu staattisessa magneettikentässä \rightarrow siihen indusoituu SMV

Muistetaan ilmiön tulkinta virrankul-

jettajiin vaikuttavan \vec{F}_B :n avulla (§ 5.2.1)

\Rightarrow myös magneettisten voimien ja induktiolain välillä on jokin yhteys.

Varattu hiukkanen liikkuu \rightarrow liikkuva (= paikallisesti muuttuva !) magneettikenttä.

Mutta: \vec{B} :tä voidaan muuttaa myös muuttamalla sen aiheuttavaa virtaa I ...

???

Esim. 1 & 2:

2 varauksellista hiukkasta, jotka liikkuvat rinnakkain samalla nopeudella:

- 1) K^1 :ssa (liikkuu kpl:den mukana) kumpikin on paikallaan \rightarrow vain sähköstaattinen vuorovaikutus.
- 2) K :ssa (laboratoriokoordinaatisto) molemmat liikkuvat \rightarrow molemmilla \vec{E} ja \vec{B} , joten myös magneettinen vuorovaikutus.

ts. hiukkasten vuorovaikutus jakautuu sähköiseen & magneettiseen vuorovaikutukseen eri tavoin riippuen käytettävästä koordinaatistosta !!!

Samoin: yhden hiukkasen sähkömagn. kenttä jakautuu eri tavoin \vec{E} :ksi ja \vec{B} :ksi eri koordinaatistoissa; K^1 :ssa (oma lepokoordinaatisto) vain \vec{E} !

290

Onko liikkuvalla ja muuttuvalla magneettikentällä eroa siinä olevan johdesilmukan kannalta?

\Rightarrow induktiolain perusteella eroa ei ole !

Joten:

paitsi liikkuvia systeemejä myös muuttuvia kenttiä koskevien lakien ja staattisien lakien välillä täytyy olla yhteys

ts.

jokin muunnosperiaate = ?

\Rightarrow

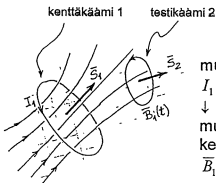
Suhteellisuusteoria:

sähkömagneettisen kentän Lorentz-muunnos ilmaisee nämä yhteydet...

5.3. Induktio muuttuvassa magneettikentässä

5.3.1. Johdinsilmukka muuttuvassa magneettikentässä

(\rightarrow ind. SMV = ?)



muuttuva virta:
 $I_1 = I_1(t)$
 \downarrow
 muuttuva magn. kenttä
 $\vec{B}_1 = \vec{B}_1(t) \propto I_1(t)$

Magn. vuo testikäämin 2 läpi:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}_2 \propto I_1(t)$$

5.3.2. Piirien induktiivinen kytketyminen

Keskinäisinduktanssi:

Sähkömagn. induktio kytkee lähekkäiset virtapiirit yhteen induktiivisesti:

Piiriin 1 virta $I_1 \rightarrow$ vuo Φ_2 piiriin 2 läpi:

$$\Phi_2 \propto I_1$$

$$\text{merkitään: } \Phi_2 = M_{21} I_1$$

2:een indusoituu virta I_2 ja merkitään sen aiheuttamaa vuota piiriin 1 läpi:

$$\Phi_1 = M_{12} I_2$$

Voidaan osoittaa

yleisesti, että: $M_{21} = M_{12} = M$

\rightarrow testikäämiin indusoituvalle SMV:lle (Faradayn ja Henryn lain mukainen) ennuste:

$$E_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt} \rightarrow \text{tarkistus mittaamalla...}$$

Huomioitava:

$$I_2 = I_2(t) \rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_2(t)$$

- \rightarrow
- indusoi SMV:n kenttäkäämiin 1 ja
 - aiheuttaa testikäämiin 2 itseinduktiojännitteen.

Kun otetaan a) ja b) huomioon; niin todetaan:

Faradayn ja Henryn laki O.K. !

Sovelluksia vaihtovirtatekniikassa:

(ts. muuttuva virta käämissä \rightarrow aiheuttaa induktiovirran virtapiiriin, käämiin ...)

* sähkömoottorit (§ 5.4.1. ja § 6.1.4.)

* muuntaja (§ 6.2.7.)

Tulkinta: induktiivinen kytketyminen on symmetrinen eli kumpaankin suuntaan yhtä voimakas.

Vakio:

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\Phi_1}{I_2}$$

= piirien keskinäisinduktanssi

$$[M] = 1 \frac{Wb}{A} = 1 \frac{J}{A^2} = 1 \frac{Vs}{A} = 1 \Omega s = 1 H = 1 \text{ henry}$$

Esim.

Muuntaja (§ 6.2.7.)

2 käämiä; yhteinen rautasydän

voimakas induktiivinen kytkentä
 \rightarrow energia siirtyy lähes häviöttä piiristä toiseen !

Keskinäisinduktanssin määrittäminen

a) kokeellisesti:

tunnetaan virta $I_1 = I_1(t)$, se indusoi piiriin 2 SMV:n:

$$E_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

↑
mitataan

↓
tunnetaan

→ saadaan M.

b) laskennallisesti:

$$\Phi_2 = \bar{B}_1 \cdot \bar{S}_2$$

ts.

lasketaan virran I_1 aiheuttama vuo

Φ_2 piiriin 2 läpi ja sitten:

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1}$$

297

$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{L_1}$$

$$S_2 = N_2 S_{1i}$$

↑

(S_2 :n lausekkeessa S_{1i} sillä:

$\bar{B}_1 \neq 0$ vain solenoidin 1 sisällä)

Saadaan:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_{1i}}{L_1}$$

Esim.

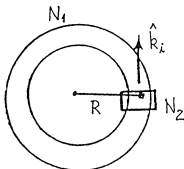
Ohut toroidikäämi 1 & sitä ympäröivä mielivaltainen käämi 2 :

a) $\bar{S}_{1i} \uparrow \bar{S}_{2i}$,

b) $\hat{k}_1 = \hat{k}_2$ (μ_0)

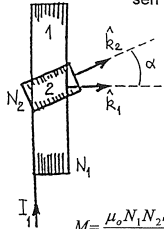
$$\bar{B}_1 \equiv \frac{N_1 I_1}{2\pi R} \hat{k}_1$$

$$\bar{S}_2 = N_2 S_{1i} \hat{k}_1$$



Esim.

Ympyränmuotoinen käämi 1 ja sen keskellä pieni solenoidi 2 :



$$\Phi_2 = \bar{B}_1 \cdot \bar{S}_2$$

$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \hat{k}_1$$

$$\bar{S}_2 = N_2 S_{2i} \hat{k}_2$$

(S_{2i} = yhden silmukan pinta-alavektori)

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_{2i} \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2}{2R_1}$$

(missä:

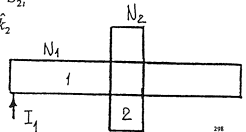
$$\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2 = \cos \alpha)$$

Esim.

Pitkä suora solenoidi 1 & sen keski-osan ympärillä mielivaltainen käämi 2 :

a) $S_{1i} \uparrow \uparrow S_{2i}$,

b) $\hat{k}_1 = \hat{k}_2$



Huom.

\bar{S}_2 :n lausekkeessa \bar{S}_{1i} , sillä $\bar{B}_1 \neq 0$ vain toroidin sisällä!

→

$$M = \frac{\mu_0 N_1}{2\pi R} N_2 S_{1i} \quad (\text{ts. } M \propto N_1 N_2)$$

Huom.

Ohut toroidi ($R \approx$ vakio):

$$M = \mu_0 N_1 N_2 S_{1i} / 2\pi R$$

Etumerkeistä:

Ensin on määriteltävä posit. kierto-suunta kummassakin silmukassa:

→

$$\bar{S}_1, \bar{S}_2 \quad \text{ts.} \quad \hat{k}_1, \hat{k}_2$$

Samalla on kiinnitetty SMV:ien ja I :jen etumerkit sekä silmukat läpäisevien Φ :den merkit.

Esim.

Valitaan posit. suunnat siten, että

$$I_1 > 0 \rightarrow \Phi_2 > 0$$

Silloin myös

positiivinen virta $I_2 \rightarrow \Phi_1 > 0$
ja

$$M > 0$$

Jos toisen piirin posit. kiertosuunta
vaihdetaan

$$\rightarrow M < 0$$

Usein kuitenkin annetaan $|M|$
ja tarkoitetaan eo. kiertosuunta-
valintaa.

Itseinduktiolaki

↳ muodattaa myös Faradayn ja Henryn lakia: itseinduktiojännite piirissä on yhtä suuri kuin piirin läpäisevän oman magneettivuon muuttumisnopeus.

silmuksen virta: $I = I(t)$

↳ silmuksen $\vec{B}(\vec{r}, t) \propto I(t)$

↳ silmuksen läpäisevä vuo: $\Phi(t) = \int \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \propto I(t)$
 $= LI(t)$

verrannollisuus-

kerroin: $L = \frac{\Phi(t)}{I(t)} = \frac{\text{silmuksen induktanssi}}{\text{omien väkien}}$

Itseinduktiolaki:

muuttuva virta \rightarrow aiheuttaa piirin virran muutoksia vastustavan SMV:n:

$$E_L = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Etumerkit:

Valitaan positiivinen kiertosuunta \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} 1) \vec{S}:n \text{ suunta} \\ 2) \Phi:n \text{ merkki} \end{array} \right.$
 $(\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S})$
 Kun posit. virta voimistuu (tai negatiivinen heikkenee) $\rightarrow \frac{dI}{dt} > 0$ ja $E_L < 0$
 (& päinvastoin).

Lain ilmaiseva ilmiön suunta siis noudattaa Lenzin lakia.

Induktanssi

(301)

Piirin induktanssi \leftrightarrow ilmaisee piirissä esiintyvien itseinduktioilmiöiden voimakkuuden.

Esim:
 \rightarrow tasavirtapiirissä virta kasvaa lopullisten arvoonsa sitä hitaammin, mitä suurempi piirin induktanssi (L) on.

Jos piirissä on käämi \rightarrow piirin magn.kenttä keskittyy käämiin:

\hookrightarrow piirin läpäisevä vuo \cong käämin läpäisevä vuo!

\hookrightarrow käämi määrää piirin induktanssin; puhutaankin: käämin induktanssista.

1) $L \propto N^2$ (kiemosten määrä käämissä; $a = \xi$)

2) Rautasydän moninkertaistaa \vec{B} :n, mutta \vec{B} :n virtariippuvuus muuttuuja siten:

$$L = \frac{\Phi(I)}{I} = L(I)$$

Vaikka piirissä ei ole käämiä, piirillä on silti magn.kenttä \rightarrow sen $L \neq 0$
 \rightarrow siksi virta ei koskaan katkeudu eikä katkea täysin hetkeksi.

Itseinduktio estää virran epäjatkuvat muutokset; sähkövirta on aina jätkevä ajan funktio:

$$I = I(t).$$

Induktanssiv määritys (302)

Esim

ympyräsilmutka.

L :n tarkka lasku edellyttäisi \vec{B} :n laskemista ympyrän tasossa piikan funktiona

likimäärin: $B \approx B$:n arvo silmukan keskipisteessä

$$\Phi = \vec{S} \cdot \vec{B}$$

ja siten: $\Phi \approx \pi R^2 B = \pi R^2 \frac{\mu_0 I}{2R}$
 $\rightarrow B \approx \frac{\mu_0 I}{2R}$
 $= \frac{1}{2} \mu_0 \pi R I$

Tästä saadaan silmukan induktanssille kärkeä arvo:

$$L = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{1}{2} \mu_0 \pi R = 2\pi^2 R \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \approx D \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$$

missä $D = 2R$

(ts: $D = 10 \text{ cm} \rightarrow L \approx 0,10 \mu\text{H}$) = silmukan halkaisija.

Esim.

käämi:

oma vuo $\approx N \times$ yhden silmukan läpäisevä vuo.
 $S = NS_i = N\pi R^2$
 käämin $B = N \frac{\mu_0 I}{2R}$
 $\Phi = \vec{S} \cdot \vec{B}$

\hookrightarrow käämin $L \propto N^2 \rightarrow L \approx N^2 D \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ $L = \frac{\Phi}{I}$

Esim.

toroidi

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi R}$$

ohut

toroidi:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi R} \quad (S = \text{poikkileikk. pinta-ala})$$

$R =$ renkaan säde

\hookrightarrow käämin poikki-leikkauksen halkaisija

ts edell:ltä sivulta: $a=2$

5.4. Indusoituva sähkökenttä

(303)

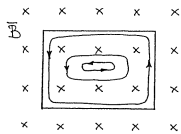
5.4.1. Pyörrevirrat

Aluksi

Yhtenäinen johdelehti \rightarrow muuttuvaan magn. kenttään

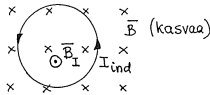
\rightarrow sähkömagn. induktion vaikutuksesta kiertäviä induktiovirtoja, nk. pyörrevirtoja.

esim Jos kenttä vahvistuu:



virt.

$$E = - \frac{d\Phi}{dt} \quad I = \frac{E}{R}$$



Miten kuvata tätä?

\rightarrow pyörrevirtojen suunta noudattaa Lenzin lakia.

ts. pyörrevirtojen vaikutukset pyrkivät kumoamaan muutoksen, joka sen aiheuttaa:

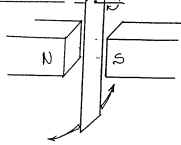
- ne jarruttavat johdelehti:n liikettä magn. kentässä
- " " magneetin liikettä johdelehti:n lähellä
- ne pyrkivät liikuttämään johdelehti:tä magneetin mukana
- " " " " magneettia johdelehti:n mukana

Sovelluksia:

1) Induktiojarru

- esim. tankkuusvaakojen heilahtelun vaimentamiseen
- junien jarruina (ei mekaanista kulumista, tas. säätö)

Periaate:



Laitetaan metallilevy heilahtelemaan magneetin napojen välille

\rightarrow jarruntuu voimakkaasti (erityisesti kenttään tullessaan & kentästä lähtiessään)

Yhtenäinen metallirengas käyttäytyy samoin

Mutta: katkaistu rengas & liuskoitettu levy jarruntuvat hitaasti; ei suuria pyörrevirtasilmukoita!

2) Induktiokytkin

pyörivä magneetti \rightarrow aiheuttaa akseloituihin johdelevyyn vääntömomentin \rightarrow levy pyrkii seuraamaan magneetin pyörimistä.

\rightarrow portaaton & pehmeä pyörimisliikkeen välikys.

esim

Auton nopeusmittari:

akselin pyörimisliike \rightarrow magneetin pyör. \rightarrow pyörrevirta-levyyn vääntömomentti / tasapainotus: jousen avulla ... (kiertyvä osoitin & kalibroitu asteikko).

Lämpövaikutukset

vaihtovirta \rightarrow suunnaltaan jatkuvasti vaihtelevia pyörrevirtoja

\rightarrow lehti:n kuumeneminen

esim

sähkömoottorit } \rightarrow rautasydämissä kehonhukkaa; siksi ne valmistetaan eristetyistä metalliliuskoista!
sähkögeneraattorit }
muuntajat }

(30)

Induktiouuni → metallin sulatukseen:

305

sulatettava metalli keraamiseen astiaan;
paksusta kuparijohtimesta käämi ympärille
→ suurtaajusvirta indusoi metalliin
pyörrevirtoja → metalli sulaa...

Pyörrevirtaliesi:

ei keittolevyjä - vain paikat esim kattilalle:
alla käämit, joihin kytketään suurtaajusvaihtovirta
→ indusoi kattiloihin kuumentavia pyörrevirtoja.

Mutta: esim jäätelö ei sulata lasiaastiassa
(ellet ole unohtanut lusikka mukaan!)

ts.
liesi itse ei kuumene (säästää energiaa).

Varoitava: sormusten, rannerenkaiden & -kellojen
käyttöä...
↳ turvallisuusrisi / vaiveuksia saada
tuotanto- & myynti-
lupia.

Induktioinen kytkeytyminen

yhtenäinen metalli kpl (pyörrevirtat!) kytketty
induktiivisesti läheltä olevaan vaihtovirtapiiriin:
→ piirin tehonkulutus lisääntyy.

Sovelluksia:

- metallinilmaisimet
- metalli kpl:den etsiminen luonnosta
- " " paljastamiseen lentomatkustajien vaatteista ja matkatavaroista.

5.4.2. Pistettäinen induktiolaki

306

Faradayn ja Henryn laki: $E = - \frac{d\Phi}{dt}$

↳ induktio johdinsilmukassa

Ei soveltu pyörrevirtoihin!

Mutta:
↳ smv = $E = \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} =$ sähkökentän vortekkuuden
kieräntä johdinsilmukan
määrittelemää umpinaista
tiestä pitkin (=c).

magn.vuo = $\Phi_S(t) = \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} =$ magn.vuon tiheyden
vuo silmukan
rajoittaman mielis-
válttaisen pinnan läpi.
(S)

Induktioilaki muotoon:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

yleistys nyt helppoa:
unohdetaan näin integraalin
rajoittamien johdinsilmukkaan.

Päädymään
tulkintaan:

muuttuva magneettikenttä $\vec{B}(\vec{r}, t)$
indusoi sähkökentän $\vec{E}(\vec{r}, t)$, jonka kieräntä
mielivaltaista suljettua tiestä pitkin = tien
rajanaman alueen läpäisevän magn.vuon
muutumisnopeus.

Esim. pyörrevirta-
silmukka johde-
kappaleessa

Maxwellin III laki

(307)

Muistetaan Stokesin lause & vektorikentän \vec{H} kontinuiteti-
maalinen kiertämä:

$$\oint [d\vec{\ell}] \vec{H} \cdot d\vec{r} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad \text{ts. ollaan kiertässä paikassa!}$$

Joten induktiolaki saadaan muotoon:

$$\oint [d\vec{\ell}] \vec{E} \cdot d\vec{r} = \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

↑ osittaisderivointi, sillä nyt
olla kiertässä paikassa.

ja siten:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad \text{Maxwell III}$$

↑
 pisteittäinen eli
differensiaalinen induktiolaki

laki ennustaa tunnetun
muuttuvan magn. kentän
indusoiman
sähkökentän voimakkuuden (& pyörrevirrat)
johdekepl:ssa:

magn.-vuon tiheyden muuttumisnopeus
määrää
indusoituvan sähkökentän pyör-
teisyyden kussakin pisteessä
erikseen.

Yleistys: johdeaineen läsnäolo ei vaikuta tontti!

Tulkinta:

(308)

Muuttuva magn. kenttä \rightarrow indusoi pyörteisen
sähkökentän
mahdollisesti
(riippumatta johteesta, jossa se sitten
voisi aiheuttaa pyörrennoja.)

Tämä
Faradayn ja Henryn
lain yleistetty tulkinta = Maxwellin III laki

Sovellus: beetatroni

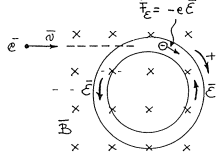
hiukkaskiihtytin, jossa elektroneja kiihdytetään
muuttuvan magn. kentän indusoiman
rengasmaisen sähkökentän avulla!

↳ $B: 0 \rightarrow B_{\max}$ siten elektronisuihku ulos...

- mm. • fyysikan tutkimukseen
- sädehoitoon

- periaate: Wideröe, 1927
- rakensi: Kerst 1941

Betatroni



Betatroni on hiukkaskiihdytin, jossa käytetään hyväksi indusoitunutta SMV:ää.

Onlo lasiputki, joka on $\perp \vec{B}$.

Korkeajännittellä (esim 50000V) kiihdytetyt elektronit ohjataan lasiputkeen \rightarrow ympyräradalle:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Elektronisuihku void.

käsitää suljetuksi virtapiiriksi \rightarrow jos sen läpi menevää magn.vuota kasvatetaan \rightarrow syntyy lisa-SMV:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} : \Delta B > 0 \rightarrow \Delta \Phi > 0 \rightarrow E < 0$$

ts. indusoituu rengasmaisen

$$\text{sähkökenttä } \vec{E} \rightarrow \vec{F}_e = q\vec{E} = -e\vec{E}$$

\uparrow ts. elektronien nopeus kasvaa

Vuon.muuutos valitaan sellaiseksi, että radalla pysyy vakiosäde

$$B : 0 \rightarrow B_{max}$$

ts. r:n kaavassa pidetään $\frac{v}{B}$ vakiona!

Sitten pienentämällä äkillisesti magn.kenttää, voidaan elektronisuihku poikkeuttaa pois radaltaan.

Elektronit saavat erittäin suuren nopeuden ja suuren liike-energian (klass. kaava: $v = \sqrt{\frac{2qE}{m}}$ ei päde enää).

Esim.

$$\begin{cases} \Delta E = +400V / \text{kiertos} \\ 250000 \text{ kierrosta} \times 400V \rightarrow 100 \times 10^6 eV \end{cases}$$

Sovelluksia: sädehoito, fysiikan tutkimus, etc.

5.5. Aineen vaikutus magn.kenttään

5.5.1 Magnetoitumislaki

Ket magn.kenttään \rightarrow ket magnetoituu \rightarrow oma magn.kenttä.
 Ilseimmille aineille magnetoituminen on heikkoa.

Mulla: ferromagn. aineiden magnetoituminen voimakasta:
 \rightarrow moninkertaistaa \vec{B} :n, muotoilee kentän uudelleen, joi magneettiksi (magneettinen hysteresesi-ilmiö).

Kokeellisesti:

Täytetään toroidikaämi heikosti magnetoitu-
 valla aineella:

$$\frac{L_0}{L} = \mu_r = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

- L_0 = tyhjän käämin induktanssi
- L = täytetyn " "
- Φ_0 = tyhjän virran tyhjiään käämiin luoma magn.vuoto
- Φ = sama täytetylle käämille

ts. täyteaineelle ommainen vakio = aineen suhteellinen permeabiliteetti

ESIM. TOROIDILLE $H = \frac{NI}{2\pi R}$

Tästä saadaan nk.

magnetoitumislaki:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_r \vec{B}_0(\vec{r}) = \mu_r \mu_0 \vec{H}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r})$$

μ = täyteaineen permeabiliteetti

Heikosti magnetoituvat aineet jakautuvat kahteen ryhmään:

1) paramagn. aineet, $\mu_r > 1$, vahvistavat magn.kenttää
 esim. nestemäinen happi: $\mu_r = 1.00347$.

2) diamagn. aineet, $\mu_r < 1$, heikentävät kenttää
 esim. orgaaniset aineet (löyhä poikkeus)
 • vismutti: $\mu_r = 0.999835$

Määr aineen magneettisuskeittäisyys

$$\chi = \mu_r - 1$$

(paramagn. / $\sim 10^{-4} - 10^{-5}$; diamagn. / $\sim 10^{-5} \dots -10^{-6}$)

Ferromagnetismi

(3/11)

Voimakkaasti magnetoituvia aineita:

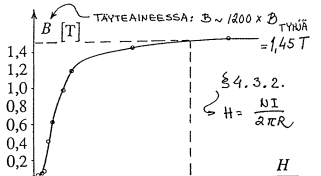
- rauta, nikkeli, koboltti, gadolinium
- yhdisteitä ja metalliseoksia (sis. usein em. aineita)

Lämmittämässä muuttuvat tietyssä lämpötilassa (nk. Curie-piste) paramagn. aineiksi:

- rauta (770 °C), nikkeli (358 °C), koboltti (1131 °C).

Eivät noudata edell. sivun ^{yksinkertaista} magnetoitumislakia:

Jos toroidin täyteaine on aluksi magnetitumaton ja annetaan virran käämissä kasvaa nollostä alkaen, saadaan nk. neitseellinen käyrä $B = B(H)$:

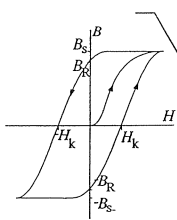


B kasvaa, kunnes saavuttaa kylläystasaron B_s

§ 4.3.2.
 $H = \frac{NI}{2\pi R}$

Kun sitten pienennetään virtaa, B pienenee hitaammin kuin se kasvoi. (Syy: hystereesi-ilmiö).

Kun sitten $I = 0$ ja $H = 0$, niin $B = B_R =$ nk. remanenssi.



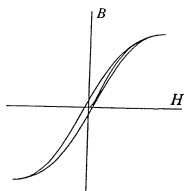
$H = 10^3 \text{ A/m}$
 ts. $B_{TYHÄÄ}$ olisi $= \mu_0 H = 1,2 \times 10^{-3} \text{ T}$
 Täyteaineen B häviää vasta tietyllä vastakkais-suuntaisella virralla: tällöin $H = H_k =$ nk. koersitiivivoima

Virran taas kasvaessa vastaavat vaiheet \rightarrow hystereesi silmukka

Kovat magneetit

(3/12)

- hystereesi silmukka leveä; H_k suuri (edell. sivun kuva)
- tarvitaan esim magneett. muisteihin



Pehmeät magneetit

- hystereesi silmukka kapea
- magnetoituminen suuraa nopeasti magnetointivirtaa
- käytetään vaihtovirtasovellusten sähkömagneeteissa (muuntajat, sähkömoottorit ja -generaattorit, etc.)

5.5.2. Magneettikenttä aineessa

Aineen magnetoituminen & sen vaikutus magn. kenttään tarkasteltavissa samaan tapaan kuin eristeen sähköinen polarisoituminen & sen vaikutus sähkökenttään.

Stationaarisen virtajärjestelmän magneettikenttä suunnilla etäisyydellä on dipolikenttä & sen määrää systeemin magneettimomenti \vec{m} .

\rightarrow jatkuvan aineen pisteessä \vec{r} : $d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}) d^3r$
 $\vec{M}(\vec{r}) =$ magnetointuma & magneettimomentti tiheys

Magnetoitumasta aiheutuva magn. kenttä = tietyn stationaarisen virtajärjestelmän kenttä.

\rightarrow kpl:n sisäinen virta & sen pinnalla pintavirta = näennäinen virtajakauma

Kenttä = aidon virtajakauman ja em. näennäisen virtajakauman yhdessä aiheuttama kenttä tyhjiössä.

5.3. Aineen magneettinen rakenne

(3/3)

Ampère: magnetoituvan aineen rakenneosina jonkinlaisia alkeisvirtasilmukoita, joiden suuntautumuksesta seuraa aineen magneettisuus...

Elektronit, atomit, molekyylit → alkeisvirtasilmukoiden ratkaisuko?

Paljon monimutkaisempaa.

Tarvitaan kvanttimekaniikkaa:

- elektronin spin
- elektronien rataliike
- Paulin kieltoeänti → $\frac{1}{2}$ parill. määrä elektroneja → $m=0$
 $\frac{3}{2}$ pariton → $m = \pm$ välimäärä sen parittoman magn. mom.
- myös yhteisellä magneettimomentilla (mutta vain $\sim 10^3 \times$ elektronin magneettimomentista)

Paramagnetismi

- mag. kenttä pyrkii käänt. atomien magn. momentit suuntautukseen (vrt. eristeiden sähköinen polaroituminen)

Diamagnetismi

- eristeaineet, joiden $m=0$, ovat diamagneettisia.
- rataliikkeessä olevat elektronit void ajatella alkeisvirtasilmukoiksi, joilla ei ole resistanssia.
- kun kpl tuodaan mag. kenttään → syntyy induktiovirta, joka Lenzin lain mukaisesti heikentää ulk. kenttää.
- esiintyy kaikissa aineissa, mutta paramagn. peittää sen.

Ferromagnetismi

- kiint. aineen kiderakenne → atomien vuorovaikutus → atomaaristen magn. momenttien laajamittainen järjestäytyminen → magneettisia alkeisalueita.
- ulk. mag. kenttä suuntaa em. alkeisalueiden magneettimomentteja ja suurentaa alueita → aine magnetoituu voimakkaasti.

6.3.5. Magneettikentän energia

(1/4)

Käämin energia: Purissa SMV = $E(t)$ ja käämi (L, R); pörrissä kulkee virta = $I(t)$

↳ käämin tehonkulutus = lähteen tehontuotto

$$\frac{P_R}{P_U} = P_E \rightarrow U(t) I(t) = E(t) I(t)$$

$$\frac{P_R}{P_U} = (RI + L \frac{dI}{dt}) I = RI^2 + L \frac{dI}{dt} I$$

$$= RI^2 + \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} LI^2) = P_R + P_L$$

↳ aina > 0 ,
(aita, jatkuva
tehonkulutusta)

↳ > 0 , kun I kasvaa.
 < 0 , kun I pienenee.

↳ ts. käämi voi sekä ottaa vastaan että luovuttaa energiaa

Kun aikavälillä $t_1 \rightarrow t_2$,
virta muuttuu $I_1 \rightarrow I_2$, käämi ottaa vastaan energian:

$$W_L = \int_{t_1}^{t_2} P_L dt = \int_{I_1}^{I_2} d(\frac{1}{2} LI^2) = \frac{1}{2} LI_2^2 - \frac{1}{2} LI_1^2$$

Tulkinto:

$$\text{käämillä on energia: } E_L = \frac{1}{2} LI^2$$

Muistetaan (?):

$$L = \frac{\Phi(t)}{I(t)} ; \Phi(t) = \text{käämin läpäisevä oman kentän magn. vu.}$$

$$I(t) = \text{käämin virta.}$$

$$\text{joten: } E_L = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{\Phi^2}{2L}$$

↳ Käämin mag. kenttä toimii sen energivarastona?!

ts. käämin energia = sen mag. kentän energia: $E_L = E_B$

tasavirta kytketty käämiin sitä hitaammin, mitä enemmän energiaa käämiin magn. kenttä pystyy varastoimaan ts. mikä suurempi induktanssi L käämilla on: $I = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

vaihtovirta → käämi vuoroin varastoi, vuoroin purkaa energiaa → keskim. tehonkulutus = 0.

Magnetiikkentän energiatiheys:

Yleisemmin: magnetiikkentän energia pkaautunut kenttään tietyllä tavalla = ?

Magn. kentän energia = $E_B = \int_V w_B(\vec{r}) d^3r$ (integrointi yli koko kentän)

NOE

$$w_B = w_B(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \text{magn. kentän energiatiheys}$$

Nrt.

Sähkökentän energiatiheys = $w_E = w_E(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$ (S. 2.10.2.)

Huom analogia:

- kpl varasto liike-energia = $\frac{1}{2} m v^2$
- kondensaattori varasto sähköenergiaa = $\frac{1}{2} C U^2$
- käämi varasto magn. energiaa = $\frac{1}{2} L I^2$

Esim. Kun virta saavuttaa vakioarvon, on $\frac{dI}{dt} = 0$. Käämiin magn. kenttään varastoitunut energia = $\frac{1}{2} L I^2$. Jos virtaa nyt otetaan pienentää → tämä energia purkautuu purkien estämään muutosta ts. purkien kasvattamaan virtaa.

7. Maxwellin lait

7.1. Kääntäinen induktio

7.1.1. Puhtava peruslaki

Maxwellin I laki

perusta: Coulombin laki

Gaussin laki (integraalilaki): $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{r}) dV = Q_S$

sähkövuo umpinaisen pinnan läpi pinnan sisään sulkema kokonaisvaraus

sovelletaan äärettömän alueeseen (differeniaalilaki):

$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ (MI)
 sähkövuon tiheyden lähtekisyys varaus tiheys
 kussakin pisteessä erikseen

Maxwellin II laki

perusta: Ampèren ja Laplacen laki

integraalilaki: $\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$

magnetiikkavuo jokaisen umpinaisen pinnan läpi = 0

sovelletään äärettömän alueeseen (diff. laki):

$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$ (MII)
 magn. vuon tiheyden lähtekisyys kaikkialla = 0

Maxwellin III laki

317

perustana: Coulombin laki
↳ staatt. sähkökenttä on konservatiivinen

integraalilaki: $\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$
sähkökentän voimakkuuden
jokainen kiertämä häviää.

sovell. infinitesim.
silmukoihin (diff. laki): $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$
staattinen sähkökenttä
on pyörteetön.

Toinen lähtökohhta: Faradayn ja Henryn induktiolaki

↳ muuttuva magn. kenttä → pyörteisen sähkökentän!

integr. lakina: $\oint \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$
indusoituneen
sähkökentän voimak-
kuuden kiertämä
kiertävän magn.
nuon muuttumis-
nopeus

sovell. infinit. silmukkaan
(diff. laki): $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$ (MIII)
indusoituneen sähkökentän
pyörteisyyttä
magn. nuon tiheyden
muuttumisnopeus
kussakin pisteessä
joka kullakin hetkenä.

Huom

MIII:n erikoistapauksina yllä olevat
staattisia kenttiä koskevat lauseet!

Maxwellin IV laki

318

perustana: Ampèren ja Laplace'n laki
↳ Ampèren kiertämälaki

integr. lakina: $\oint \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I_c$
staattisen magn.
kentän kiertämä
voimakkuuden
kiertetty
virta

sovell. infinitesim.
silmukkaan (diff. laki): $\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r})$
staatt.
magn. kentän
voimakkuuden
pyörteisyyttä
virtatiheys
kussakin
pisteessä erikseen.

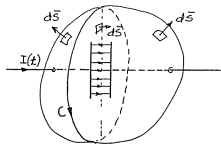
Maxwellin oivallus:

- eo. muodossa MIV on puutteellinen!
- se koskee vain staatt. kenttiä.
- M. päätelt: sähkömagn. induktiolla oltava
käänteisilmä: magneto sähköinen induktio

↳ ts. muuttuva sähkökenttä → pyörteisen
magn. kentän?

7.1.2 Amperin ja Maxwellin laki

(319)



Vaihtovirta: $I = I(t)$
 & pinnissa on kondensaattori
 ↳ ongelmia!

Amperin kiertämälaki:

\vec{H} :n kiertämä johdinta ympäröivää tieta pitkin = johtimessa kulkeva virta eli virran tiheyden vuo mielivaltaisen, silmukan reunustaman pinnan läpi.

Vaihtokäyt nyt vaihtovirta, lalei silti o.k. jos johdin todella läpäisee pinnan.

Mulla: jos pinta S kulkee kondensaattorilevyjen välisistä aito sähkövirrta sen läpi = 0, mutta $I(t) \rightarrow$ kondensaattorin $q(t)$ sähkövuon muuttuu...
 Kuitenkin: kiertämälaki on riippumaton pinnan valinnasta

VOE integr. laki: $\oint_C \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t)) \cdot d\vec{S}$

yleistys: pinnan läpäisevä virta = "leimetty virta" = varauksen liikkeestä johtuvan aidon sähkövirran ja sähkövuon muuttumisesta aiheutuvan kenttävirran summa

diff. lakina:

(MIV) $\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t)$
 H:n pyörteisyys "yleistetty virrantiheys" kussakin pisteessä ja kussakin aikapaikassa

Huom: MIV: 1) erikoistapauksena staatt. magn. kenttä koskevat lait. (320)

3) sisältää M:n idean: muuttuva sähkökenttä \rightarrow pyörteinen magn. kenttä!
 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t)$
 $\left[\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \right]$

7.2. Sähkömagn. aaltoliike

7.2.1. Maxwellin ennuste

MIV puhtaasti teoreettisin perustein (MI-III:lla kokeell. pohja)
 ↳ testaus: tutkaimalla MIV:n antamia ennusteita!

Esim muuttuva magn. kenttä \rightarrow muuttuva sähkökenttä ja siten, etc.

tasapainossa:

ilmiöt muodostavat jatkuvasti värähtelevän sähkömagn. kentän, jossa sähkö- ja magn. kentät ovat toistensa induksioita.

= sähkömagn. aaltoliikkeen idea (tarkemmin: Aaltoliikeoppi)

MIV ennustaa sähkömagn. kentässä etenevän aaltoliikkeen nopeuden (riippumaton λ :sta?):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$c = 3 \times 10^8$ m/s = valonnopeuden suunnilleen
 ↳ osoittautuu, että valo on sähkömagn. aaltoliikettä!

7.2.2. Hertzin testit

Sähkömagn. aaltoliikettä void. synnyttää Maxwellin yhtälöiden osittamalla tavalla:

↳ käyttämällä värähtelypureja, joilla on muuttuva sähkömagn. kenttä

Maxwell ennusti s.m. aaltopojen olemassaolon 1864

Hertz 1888 tuotti & vast. otti s.m. aaltoja (lyhyitä radioaaltoja, $\lambda \sim 5\text{m}$)

- etenevät valon nopeudella (suoraviivaisesti)
 - heijastuvat
 - taittuvat
 - polarisoituvat
 - diffraktioituvat
- } samalla tavoin, kuin val!

Nykyisin:

sähkömagn. vakioiden & valonnopeuden välinen yhteys katsotaan niin varmaksi, että sitä käytetään perustana määrittelyssä muuta luonnovakioita tai yksiköitä:

1983: määr. $c = 299\,792\,458\text{ km/s}$

↳ 1 metri = matka, jonka valo kulkee tyhjiössä $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekunnissa!

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times (2.99792458 \times 10^8)^2} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$
$$= 8.85418782 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \text{ tai } \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

Samoin: aineen makroskooppiset optiset ominaisuudet kytkeytyvät niiden sähköisiin ja magneett. ominaisuuksiin,...

(321)

7.3. jälkhuomautuksia

(32)

Maxwellin yhtälöt \rightarrow tunnetut sähkömagn. ilmiöt tyhjiössä & ainessa!

↳ valon nopeudelle künkä ennuste

Kysymys: millaisessa koordinaatistossa M:n yhtälöt pätevät?

ts. onko olemassa jokin erityinen koordinaatisto, jossa valon nopeus on M:n ennusteen mukainen?

↳ tämä määritteli absoluuttisessa liirossa olevan koordinaatiston!

Silloin: mielivaltaisen koord:n nopeus selviää mittaamalla valon nopeutta ko. koordinaatistossa

Michelsonin ja Morleyn koe \rightarrow Maan liikkeeseen absol. nopeus = ?

↳ negat. tulos!

Ulainen suhteellisuusperiaate pätee myös sähködynamiikan ilmiöihin

\rightarrow valonnopeus = absoluuttinen luonnovakio, joka on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistossa

↳ suppeampi suhteellisuusteoria \Rightarrow Lorentz-muunnos

[Vrt. klass. fysiikka \rightarrow Galilei-muunnos (absoluuttinen aika)]

... Osittautuu, että M:n yhtälöt ovat Lorentz-invariantteja!
... ts. suhteellisuusteorian edellyttämää muotoa! Epärelativistisessa fysiikassa ongelmia...

Magneettiset monopolit:

323

M:n yhtälöiden epäsymmetria:

sähkövaraus \rightarrow sähkökenttä,
jonka lähtökä varaukset ovat

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_S$$

Mutta:

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$$

\neq magn.kenttä on
aina lähtetön

\neq "magn. varauksia" ei ole olemassa?

Tai:

jospa ko. hiukkasia (joilla on magn. varaus)
ei vain vielä ole keksitty?

Ne olisivat nk. magneettisia monopoleja
ja toimisivat magn.kentän lähtöinä...

\hookrightarrow niiden magn.kenttä olisi magneettiseen
Coulombin lain mukainen.

Teoria \rightarrow mm. niiden massa & magneett.
alkisvarauksen suuruus on voittu
ennustaa.

Kokeet?

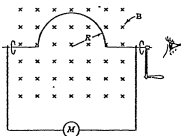
mahdollisuus löytää tällaisia hiukkasia
on jatkuvasti esillä
hiukkasfysiikan kokeellisissa tutkimuksissa...

Sillä
kaukka
tällä kertaa!

1. Metallilevy (säde = a) pyörii kulmanopeudella ω levyä vastaan kohtisuoran akselin suhteen homogeenisessa magneettikentässä B . Osoita, että levyn keskustan ja reunan välisen potentiaaliero on $\omega a^2 B/2$, kun magneettikenttä on pyörimisakselin suuntainen.



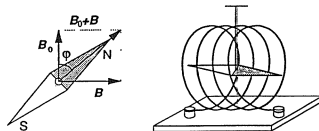
2. Jäykkään johdelankaan on taivutettu puoliympyrä, jonka säde R on 10 cm. Lankaa pyöritetään kulmanopeudella $\omega = 10$ rad/s homogeenisessa magneettikentässä, jonka vuontiheys on 0,1 T (kts. kuva). Laske indusoitua sähkömotorinen voima. Laske myös piirissä kulkeva induktiovirta, kun ampeerimittarin M resistanssi on 0,1 Ω ja piiriin muu resistanssi on mitätön.



3. 1,25 mm paksuinen ja 15,0 mm levyinen kuparinauha, jossa kulkee 100 A virta, on kohtisuorassa 1,75 T magneettikenttää vastaan. Määritä
a) Hall-ilmion aiheuttama poikittainen sähkökenttä ja
b) ko. sähkökentän johdinelektronien kohdistama poikittainen voima.
4. 0,20 mm paksu johdinlevy, jossa kulkee 150 mA virta, asetetaan kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Laske magneettivuon tiheys, kun levyyn syntyvä Hallin jännite levyn laitojen välillä on 40 mV. Johtimessa olevien vapaiden elektronien tiheys on $7,1 \times 10^{23}$ kpl/m³.
5. Ympyränmotoisessa käämissä on 50 kierrosta ja sen säde on 15 cm. Käämin keskelle sen akselin suuntaiseksi asetetaan lyhyt solenoidi, jossa on 500 kierrosta ja jonka poikkileikkauksen pinta-ala on 15 cm².
a) Määritä käämin ja solenoidin keskinäisinduktanssi.
b) Solenoidissa kulkee sinimuotoinen vaihtovirta, jonka huippuarvo on 1,2 A ja taajuus 50 Hz. Millainen sähkömotorinen voima käämiin indusoituu?

4.5.5. Sähkövirran mittaaminen magneettisten voimien avulla
Magneettineulagalvanometri. Ensimmäiset magneettista vuorovaikutusta hyväksi käyttävät galvanometrit perustuivat momenttiin, jolla virran synnyttämä magneettikenttä vaikuttaa magneettineulaan. Magneettineula asetettiin solenoidin keskelle, jossa kenttä on homogeeninen. Siihen vaikuttava momentti voidaan määrittää staattisesti tai dynaamisesti, #4.1.1. Se on verrannollinen käämissä kulkevaan virtaan, joten yhden tunnetun virran aiheuttama momentti riittää menetelmän kalibrointiin.

Aluksi käytettiin menetelmää, jossa solenoidin akseli asetettiin kohtisuoraan Maan magneettikenttää vastaan. Kun virta johdetaan solenoidiin, mag-



Kuva 4.32: Magneettineulagalvanometri.

neettineula kiertyy kulman φ asettuen kentän $B_{\text{maa}} + B_I$ suuntaiseksi, jolloin on $\tan \varphi = \frac{B_I}{B_{\text{maa}}} \sim I$. Menetelmä sopii myös kääntäen Maan kentän magneettivuon tiheyden määrittämiseen solenoidin tunnetun kentän avulla.

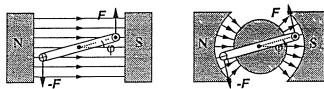
Tangenttibussoli on suomalaisen J. J. Nervanderin kehittämä mittari, joka perustuu tähän menetelmään. Siinä on lyhyt monikierruksinen käämi ja pienikokoinen magneettineula sen keskellä.

Tarkoissa tutkimuksissa käytettiin momentin staattista määrittystä kimmoisan ripustuslangan tai jousen kiertymän avulla. Tällöin neula asetettiin kenttään siten, että sen kiertymän nolla-asema oli kohtisuorassa kenttää vastaan. Kun virta kytkettiin, kentän aiheuttama kiertymä kmmottiin kiertämällä langan ripustustelintä päinvastaiseen suuntaan. Tällöin magneettineulan asento kentässä oli mittantilanteessa aina sama, eivätkä kentän suuretkaan epähomogeenisuudet rikkoneet momentin verrannollisnntta sähkövirtaan.

Kiertokäämigalvanometri. 1900-lvulla kiertokäämigalvanometri, jossa virran ja magneetin osat oli vaihdettu, syrjäytti varhaisemmat menetelmät. Siinä virta ohjataan herkästi kiertyvään käämiin, joka on kiinteän kestomagneetin napojen välissä. Käämin kiertokseli on kenttää vastaan kohtisuora. Kun virtaa ei kulje, käämi on nolla-asemassaan, jossa sen taso on kenttäviivojen snntainen. Kun virta kulkee, magneettikenttä vääntää käämiä virtaan verrannollisella momentilla. Kiertyminen jännittää käämiin kytkettyä jouta, knnes kentän ja jousen aiheuttamat momentit ovat tasapainossa. Käämin mukana kiertyvä osoitin näyttää virran kalibroidnnta kiinteältä asteikolta.

Jos magneettikenttä on homogeeninen, sen aiheuttama vääntömomentti on $M_B = NISB \cos \varphi$, missä φ on käämin kiertymä, (4.99), (4.102). Jonsi vääntää käämiä kohti mittarin nolla-asemaa harmonisella momentilla $M_D = -D\varphi$, missä D on jousen direktionmomentti, #I:6.4.3. Mitattava virta I aiheuttaa sellaisen kiertymän φ , että momentit ovat tasapainossa,

$$M_B + M_D = 0 \text{ eli } NISB \cos \varphi = D\varphi. \quad (4.113)$$



Kuva 4.33: Kiertokäämigalvanometri.

Tällaisen mittarin asteikko perustun verrannollisnntteen $I \sim \frac{\varphi}{\cos \varphi}$. Virran mnttos dI aiheuttaa sitä pienemmän kiertymän $d\varphi$, mitä snrempi virta on, joten mittarin herkkyys $\frac{d\varphi}{dI}$ pienenee virran kasvaessa. Tämä pnnte voidaan korjata mnttoilemalla magneetin kohtisovi ja asettamalla käämin sisälle lieriön muotoinen rautakappale. Näin kenttä saadaan säteittäiseksi niin, että käämin akselin suuntaiset sivut ovat aina yhtä voimakkaassa, akselia kohti suuntautuvassa kentässä. Kentän aiheuttama vääntömomentti on tällöin $M_B = NISB$ kiertokulmasta riippumatta, ja tasapainossa on $NISB = D\varphi$. Mittarin kiertokulma on nyt verrannollinen virtaan, $\varphi \sim I$, ja mittarin herkkyys on sama koko käyttöalueella.

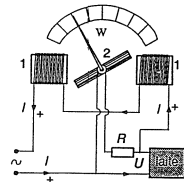
Homogeenisessa magneettikentässä käämin nolla-aseman on välttämättä oltava sellainen, että sen magneettimomentti on kohtisuorassa kenttää vastaan. Erisnnttaiset virrat aiheuttavat tällöin erisuuntaisia poikkeamia. Säteittäisessä magneettikentässä on samantekevää, mikä käämin asento valitaan nolla-asemaksi, kunhan se on alueella, jossa kenttä vielä on tarkasti säteittäinen. Se on tällöin mahdollista valita alueen reunalla, jolloin lnnonollisesti galvanometriin voidaan kytkeä vain tietyt suuntaisia virtoja. Mittarin käytötnale tulee knitenkin tällä tavoin laajemmaksi.

Kiertokäämigalvanometri oli ratkaiseva tekninen edistysaskel. Sen rakennetta voidaan helposti mnnnntella. Se voidaan snnnnikella mittaamaan suuria tai pieniä virtoja, ja sen periaate tekee mahdolliseksi mnkana kuljetettävien helpokäyttöisten galvanometrien rakentamisen.

Herkimmissä galvanometreissa käämi riippun kimmoisan johdinlangan varassa, jonka kiertyminen aiheuttaa nolla-asemaan palauttavan momentin. Kiertymä mitataan valonsäteellä, joka heijastuu käämin mukana kiertyvästä peilistä. Tällaisilla peiligalvanometreilla voidaan mitata nauoampeerien snnrnsuokkaa olevia virtoja.

Wattimittari. Kiertokäämigalvanometrasta saadaan wattimittari, knn magneetti korvataan sähkömagneetilla. Kiinteässä ja kiertyvässä käämissä kulkevien virtojen I_1 ja I_2 vuorovaikutns aiheuttaa käämiin vääntömomentin, joka verrannollinen knmpaanikin virtaan. Mittarin näyttämön saadaan näin verrannolliseksi virtojen tuloon $\varphi \sim M \sim I_1 I_2$.

Tällä periaatteella toimivaa mittaria sanotaan *dynamometrik-*si. Sillä voidaan suoraan mitata sähkölaitteen knlnttama teho. Tällöin toinen käämi kytketään laitteen napoihin ja toisen läpi johdetaan laitteen läpi kulkeva virta. Tällöin mittarin näyttämä on verrannollinen laitteen tehon kulntnkseen $\varphi \sim UI = P$. On selvää, että "jännitekäämin" vastuksen on oltava snnri, "virtakäämin" vastuksen pieni. Dynamometri mittaa yhtä hyvin vaihtovirtalaitteen keskimääräistä tehoa (6.51).



1. Virtakäämi 2. Jännitekäämi
Kuva 4.34. Wattimittari.

Ballistinen galvanometri. Kiertokäämimittarin periaatetta voidaan soveltaa myös lyhyen virtausyksikön kuljetaman varauksen mittaamiseen. Ballistinen galvanometri on snnnnikeltun nimenomaan tällaista mittansta varten. Sillä voidaan määrittää esim. kondensattorin varaus antamalla kondensattorin prnkantna galvanometrin läpi. Tämä mittans vahvistaa kokeellisesti staattisen varauksen ja sähkövirran välisen yhteyden.

Mittaustilanteessa ballistinen galvanometri on aluksi tasapainossa nollasemassa. Virtasäilyksen kulkessa galvanometrin käämissä magneettikentän aiheuttama momentti $M = NI(t)SB$ antaa käämiin äkkinaisen vääntösy-
säyksen. Tämän säilyksen vaikutuksesta käämi lähtee kiertymään kimmoisan
riputuslankansa varassa. Sen kiertoliikkeen amplitudi mitataan.

Käämin kiertoliikkeen liikeyhtälö on

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi + NI(t)SB, \quad (4.114)$$

missä J on käämin hitausmomentti kiertoakselin suhteen. Äkillisen virtapuls-
sin $I = I(t)$ vaikutusta voidaan kuvata impulssimomenttiperiaatteen integraa-
linuodon avulla, #I:4.3.4. Sen mukaan käämin saama liikemäärämomentti
kiertoakselin suhteen, #I:6.2.5., on yhtä suuri kuin virtapulsin aiheuttaman
momentin impulssi eli

$$L = J\omega = \int_{\Delta t} M(t) dt = - \int_{\Delta t} D\varphi dt + NSB \int_{\Delta t} I(t) dt, \quad (4.115)$$

missä ω on käämin saama kulmanopeus. Oikean puolen ensimmäinen inte-
graali on merkityksellömän pieni, kun virtasäilyksen kesto on hyvin lyhyt,
eikä käämi ehdi kiertyä sen aikana nolla-asemasta. Jos virran ja varauksen
välillä on ajateltu yhteys, sähkövirran integraali on sama kuin sen kuljettama
varaus $\int_{\Delta t} I(t) dt = Q$. Impulssimomenttiperiaatteesta siis seuraa käämin
saamalle alkukulmanopeudelle lauseke $\omega = \frac{NSB}{J}Q$.

Tämän jälkeen, kun virtaa ei enää ole, käämin liikeyhtälö on $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi$,
joka esittää harmonista kiertoliikettä. Siinä taas energiaperiaate voidaan kirjoit-
taa energian säilymlaiksi

$$\frac{1}{2} J \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} D\varphi^2 = \text{vakio} \quad (4.116)$$

Energia on alkuhetkellä sama kuin ääriasemassa, $\frac{1}{2} J\omega_0^2 = \frac{1}{2} D\phi^2$. Tästä voi-
daan ratkaista heilahduksen amplitudi

$$\phi = \sqrt{\frac{J}{D}} \omega_0 = \frac{NSB}{\sqrt{JD}} Q. \quad (4.117)$$

Aikaisemmin todettua heilahdellun voimakasta vähenemistä, #4.5.3., ei
tässä esiinny, koska käämin virtapiiri on poikki kondensaattorin kohdalta eikä
induktiovirtaa sen tähden synny. Olennaista tässä tuloksessa on amplitudin
verrannollisuus virtapulsin kuljettamaan varaukseen, jonka tässä varsinaisesti
määrittellee virran integraali,

$$\phi \sim Q = \int I(t) dt. \quad (4.118)$$

Virran ja varauksen yhteyden testaamiseksi kondensaattorin varaus on en-
sin mitattava sähköstaattisesti. Heilahdusamplitudin verrannollisuus sähkösta-
attisesti mitattuun varaukseen vahvistaa varauksen ja galvanometrillä mit-
tatuun virran integraalin ekvivalenssin.

4.6.3. Thomsonin koe

Aikaisemmin sähkökenttien yhteydessä on tarkasteltu Thomsonin kokeen al-
kusoaa, jossa määritetään katodisädesuihkon poikkeama homogeenisessa säh-
kökentässä. Täydellisessä Thomsonin kokeessa tarkastellaan katodisäteiden
käyttäytymistä sekä sähkö- että magneettikentässä.

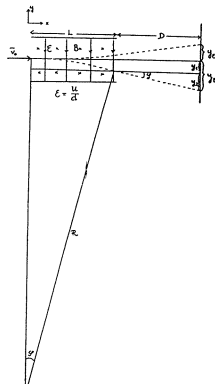
Kokeen perustyyppissä katodisäde-
suihku ohjataan tilaan, jossa on ristikkäiset sähkö- ja magneettikent-
tä. Suihkon alkuperäinen suunta ja molemmat kentät ovat kaikki toisiaan
vastaan kohtisuorassa. Thomson osoitti, että katodisäteet käyttäytyivät ikään kuin ne olisivat negatiivisesti varautuneita hiukkasia. Suihkon osumakohta varjostimella noudatti Newtonin II lain mukaisen liikeyhtälön antamia ennusteita.

Pelkän magneettikentän aiheuttama poikkeama voidaan laskea samalla tavalla kuin aikaisemmin, #2.4.2., pelkän sähkökentän aiheuttama. Yksinkertaisimmassa tarkastelussa magneettikenttää pidetään homogeenisena ja jyrkästi levyjen väliin rajoittuvana. Jos katodisäteet ovat negatiivisesti varautuneita hiukkasia, niiden liike kentässä on tasaista ympyräliikettä, kentän ja varjostimen välisessä tilassa tasaista ja suoraviivaista.

Suihkon poikkeama varjostimella voidaan jakaa kahteen osaan $y_B = y_1 + y_2$. Poikkeama magneettikentässä on $y_1 = R(1 - \cos \varphi)$, missä $R = mv_0/(qB)$ on rataympyrän säde ja φ on suihkun piirtämää kaarta vastaava keskuskulma, $\sin \varphi = L/R$, ja L on kenttäalueen pituus x -akselin suunnassa. Poikkeama kentän ja varjostimen välisessä alueessa on $y_2 = D \tan \varphi$, missä D on tämän alueen pituus x -akselin suunnassa.

Kun kulma φ on pieni, on $\epsilon = \sin \varphi = L/R \ll 1$, voidaan käyttää potens-
sisarjojen mukaisia likiarvoja

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \epsilon^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2, \quad \tan \varphi = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \approx \epsilon \Rightarrow$$



Ku a 4.37 Thomsonin toinen koe.

$$y_B = R(1 - \cos \varphi) + D \tan \varphi = \frac{1}{2} R \varphi^2 + D \varphi$$

$$= \frac{L}{R} \left(\frac{1}{2} L + D \right) = \frac{qBL}{mv_0} \left(\frac{1}{2} L + D \right) = \frac{B}{\mathcal{E}} v_0 y_{\mathcal{E}}, \quad (4.132)$$

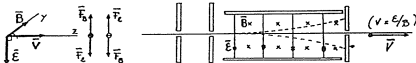
missä $y_{\mathcal{E}}$ on pelkän sähkökentän aiheuttama poikkeama (2.59).

Kokeessa tuntemattomia suureita ovat hiukkasten varauksen ja massan suhde q/m ja niiden alkunopeus v_0 . Kaikki muut poikkeamien $y_{\mathcal{E}}$ ja y_B lausekkeissa esiintyvät suureet tunnetaan koejärjestelyn perusteella. Kun nämä poikkeamat mitataan, saadaan hiukkasten alkunopeus $v_0 = (\mathcal{E}/B)(y_B/y_{\mathcal{E}})$ määrittetyksi, jonka jälkeen varauksen ja massan suhde voidaan laskea kumman tahansa poikkeaman, (2.59) tai (4.132) perusteella.

Thomson julkaisi tuloksensa vuonna 1897, joten elektroni kokeellisesti tunnistettuna oliona täytti v. 1987 90 vuotta.

4.6.4. Nopeudenvalitsin

Thomsonin kokeen kaltaisessa koejärjestelyssä voidaan erityisesti asettaa sähkö- ja magneettikenttä toisiaan vastaan kohtisuoraan siten, että ne vaikuttavat vastakkaisuuntaisilla voimilla kenttään kohtisuoraan saapuviin hiukkasiin. Tällöin sähkökentän voimakkuus \mathcal{E} , magneettivuon tiheys B ja hiukkasten nopeus v muodostavat tässä järjestyksessä oikeakätisen vektorikolmikoon.



Kuva 4.38. Nopeudenvalitsin.

Sähkökentän voimakkuus ja magneettivuon tiheys voidaan säätää sellaisiksi, että sähköinen ja magneettinen voima ovat yhtä suuret ja kumoavat toisensa vaikutukset. Tämä on helppoa toteuttaa tarkkailemalla, milloin suihku ei poikkea alkuperäisestä suunnastaan lainkaan. Liike-yhtälön (4.120) sähkökentän suuntaisen komponentin perusteella tämä tapahtuu ehdolla

$$m\ddot{x} = q\mathcal{E} - qvB, \quad \ddot{x} = 0 \Rightarrow q\mathcal{E} = qvB \Rightarrow v = \frac{\mathcal{E}}{B}. \quad (4.133)$$

Tällaista koejärjestelyä sanotaan nopeudenvalitsimeksi. Hiukkaset, jotka tulevat nopeudenvalitsimeen nopeudella $v = \mathcal{E}/B$, kulkevat suoraan sen läpi. Jos nopeus on suurempi, magneettinen voima voittaa ja hiukkanen poikkeaa sen suuntaan. Hiukkaset, joiden nopeus on pienempi poikkeavat sähkökentän

määräämään suuntaan. Nopeudenvalitsin valikoi varauksellisia hiukkasia pelkästään niiden nopeuden perusteella riippumatta niiden varauksesta ja massasta. Sillä voidaan siten erottaa sekalaisesta hiukkassuihkusta kaikki samalla nopeudella $v = \mathcal{E}/B$ kulkevat hiukkaset.

Tätä periaatetta voidaan soveltaa myös Thomsonin kokeessa saapuvien hiukkasten alkunopeuden määrittämiseen. Se on tärkeä suihkun preparointimenetelmä kaikissa varauksellisia hiukkasia käyttävissä tutkimuksissa.

4.6.5. Massaspektrometri

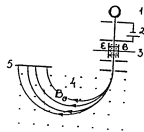
Hiukkasten radan säde magneettikentässä on verrannollinen niiden massan ja varauksen suhteeseen. Magneettikenttää voidaan sen tähden käyttää erottelemaan toisistaan hiukkasia niiden massan ja varauksen suhteella. Tämä on tärkeä menetelmä erityisesti saman kemiallisen aineen erimassaisien atomien ja molekyylien erottelämiseksi.

Francis Aston rakensi vuonna 1919 ensimmäisen massaspektrometrin, jolla voitiin erottaa alkuaineen eri isotootit. Ensimmäisen isotooppihavainnon oli kuitenkin tehnyt J. J. Thomson. Tutkiessaan hiukkasten ratoja ja sähkö- ja magneettikentissä hän havaitsi massaltaan kolmenlaisia neonatomeja, ^{20}Ne , ^{21}Ne ja ^{22}Ne . Tämä oli ensimmäinen kokeellinen osoitus siitä, että ydin koostuu lähes samanmassaisista protoneista ja neutroneista.

Massaspektrografian keksiminen oli yksi ratkaiseva askel kemian fyysikaalisen perustan luomisessa. Nykyisin se on fysiikan ja kemian perusmenetelmiä. Sen avulla analysoidaan tutkittavien aineiden isotooppikoostumusta. Sitä voidaan käyttää myös puhtaiden isotooppinäytteiden valmistukseen.

Massaspektrometrin toimintaan kuuluvat seuraavat vaiheet

1. Ionilähde. Näyte höyrystetään ja höyry ionisoidaan.
2. Kiihdytys. Ionit kiihdytetään sopivalla kiihdytysjännitteellä. Voidaan käyttää myös pelkkää termistä kiihdytystä, toisin sanoen kuumennusta, jolloin ionit saavat eri nopeuksia tilastollisen jakaumalain mukaisesti.
3. Nopeudenvalitsin. Ionit ohjataan ristikkäisten sähkö- ja magneettikenttien läpi, jotka valikoivat suihkusta kaikki nopeudella $v = \mathcal{E}/B$ liikkuvat hiukkaset.
4. Magneettinen erottelu. Samalla nopeudella liikkuvat ionit saapuvat homo-



Kuva 4.39. Massaspektrometri.

geeniseen magneettikenttään, jossa ne liikkuvat ympyrä ratoja pitkin. Hiuk-
 kasan radan säde on $R = (m/q)(v/B_0)$ Suihku siis jakaantuu massan ja
 varauksen suhteen mukaisiin osiin.

5. *Rekisteröinti.* Kentässä erottuneet suihkut osuvat esim. filmille, jossa sui-
 hkujen osamakohdat näkyvät mustumina. Kutakin sulhetta m/q vastaa oma
 "massaspektriiviivansa". Mustumien suhteelliset voimakkuudet ilmaisevat iso-
 toppein suhteelliset runsaudet

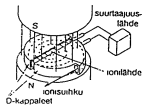
4.6.6. Sykliset hiukkaskiihdyttimet

Kiihdytetyt hiukkassuihkut ovat nykyaikaisen fysiikan keskeisiä tutkimusväli-
 neitä. Niitä käytetään tutkittaessa säteilyn vaikutusta aineeseen sekä aineen
 atomaarista ja subatomaarista rakennetta. Ne ovat atomi-, ydin- ja hiukkasfy-
 siikan perusvälineitä. Sen lisäksi niitä käytetään mm. lääketieteellisiin hoito-
 tarkoituksiin. Hiukkassuihkuja synnytetään kiihdyttämällä hiukkasia sähkö-
 kentillä, jolloin magneettikenttiä tarvitaan suihkujen ohjaamiseen. Syklisisä
 kiihdyttimissä hiukkassuihkut kiertävät ympyrä rataa palaten aina uudelleen
 samaan kiihdyttävään sähkökenttään. Tällä tavalla niiden energiaa voidaan
 jatkuvasti lisätä tiettyyn, laitteen rakenteesta riippuvaan, ylärajaan saakka.

Syklotroni. Syklotroni on en-
 simmäinen ja yksinkertaisin kehä-
 kiihdytin. Ensimmäisen syklotronin
 rakensivat *Ernest Lawrence* ja
Stanley Livingstone vuonna 1932
 Berkeleyssä Kaliforniassa. En-
 simmäisellä mallikoneella saatiin
 80 keV:n protonisuihku. Seuraa-
 vinen kymmenen vuoden aikana ra-
 kennettiin suurempia syklotroneja,
 joilla päästiin aina n. 10 MeV:n protonisuihkuihin.

Syklotroniin kuuluu kaksi puolilavointa D-kirjaimen muotoista metalliko-
 teloa, jotka ovat suuren sähkömagneetin napojen välisessä homogeenisessa
 ja muuttumattomassa magneettikentässä. D-kappalet on suljettu koteloon,
 jossa syklotronin käytön aikana on tyhjiö. Laitteen keskellä D-kappaleten
 välisessä raossa on ionilähde kiihdyttävien ionien tuottamiseksi.

D-kappaleten välillä on suuritaajuuksinen vaihtojännite, joka synnyttää
 niiden väliseen rakoon suunnaltaan vaihtuvan sähkökentän. Tämä jännite
 toimii kiihdytysjännitteenä. Magneettikenttä kääntää hiukkaset yhä uudelleen
 takaisin raossa olevaan sähkökenttään. Jännitteellä on vakiotajuus, joka on
 tahdistettu hiukkasten kierrostaajuuden $f = \frac{qB}{2\pi m}$ kanssa, (4.127). Siten se



Kuva 4.40. Syklotroni.

vaihtaa suuntaa samassa tahdissa kuin hiukkaset kiertävät ja kiihdyttää samaa
 hiukkassyhmää yhä uudelleen.

Maksimijännitteen U_0 hetkellä liikkelle lähtenyt hiukkanen saa joka puolen
 kierroksen jälkeen lisää energian $\Delta E_k = U_0 q$. Radan säde R , (4.127), kasvaa
 energian kasvaessa. D-kappaletien säde R_0 ja kentän magneettivuon tiheys B
 määräävät nopeudet, joita hiukkasille voidaan laitteessa antaa,

$$v = \omega R < \omega R_0 = \frac{qBR_0}{m} \quad (4.134)$$

Voimakkaan sähkömagneetin kentässä magneettivuon tiheys on tyypilli-
 sesti suuruusluokkaa $B \approx 1$ T. Protonin varauksen ja massan suhde on
 $q/m \approx 10^8$ As/kg. Protonien kiihdyttämiseksi 5 MeV:n energiaan ($v \approx 0,1c$)
 tarvitaan siten laite, jonka säde on luokkaa $R \approx 0,3$ m. Niin kauan kuin
 hiukkasten nopeus pysyy paljon pienempänä kuin valonnopeus, niiden kier-
 rostaajuus on vakio, joten syklotronissa voi olla samanaikaisesti hiukkasia kai-
 kissa eri kiihdytyksen vaiheissa. Sen sijaan on siten lähes jatkuva, koostuen
 hiukkassyhmistä, jotka seuraavat toisiaan kierrosajan välein.

Synkrosyklotroni. Kun syklotronilla pyritään saavuttamaan suurempia kiih-
 dytysenergioita, kohdataan *tahdistusongelma*. Hiukkasten massa kasvaa suh-
 teellisuusteorian ennusteen mukaisesti energian lisääntyessä. Tällöin niiden
 kierrostaajuus homogeenisessa magneettikentässä pienenee. Kun liikeenergia
 alkaa olla merkittävä osa niiden kokonaisenergiasta, hiukkaset joutuvat eri
 vaiheeseen kiihdyttävän vaihtokentän kanssa, eikä kenttä enää kiihdytä niitä.

Synkrosyklotronissa tämä puute on korjattu siten, että kiihdytyskentän
 taajuus hidastuu samassa tahdissa kuin hiukkasten kierrostaajuus. Näin voi-
 daan kuitenkin kiihdyttää vain yhtä hiukkassyhmää kerrallaan. Protonisuih-
 kun energia on näin saatu kasvamaan n. 800 MeV:iin, joka on jo lähes sama
 kuin protonin lepoenergia. Tämä energia riittää jo eräisiin hiukkasreaktio-
 ihin. 1940-luvun lopussa ja 1950-luvun lopussa rakennetut synkrosyklotronit
 merkitsivätkin kokeellisen hiukkasfysiikan alkua. Synkrosyklotronilla saavu-
 tettavaa maksimienergiaa rajoittavat kentän voimakkuus ja kentän koko.

Synkrotoni. Tarvittavan *magneetin koko* asettaa käytännöllisen rajan synk-
 rosyklotronilla saavutettaville energioille. Synkrotonissa hiukkaset kulkevat
 koko ajan samaa umpinaista rataa.

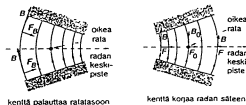
Laitteessa on yhden jättiäis-
magneetin asemesta joukko pie-
nempiä magneetteja, joiden kent-
tiä vahvistetaan hiukkasten kiih-
tyessä niin, että radan kaarevuus-
säde pysyy samana. Radan säde ja
magneettikentän suurin magneetti-
vuon tiheys määräävät saavutetta-
van energian.



Kuva 4.41. Synkrotroni.

Kehäkiihdyttimissä on välttämätöntä, että kiihdytysjännitteen taajuus
noudattaa hiukkasten kierrostaajuutta. Suurilla taajuuksilla hiukkasten no-
peus on lähes sama kuin valonnopeus eikä se enää muutu energian lisääntyessä.
Kiinteällä radalla kiertävien hiukkasten kierrostaajuus pysyy tällöin samana.
Ohjaavan magneettikentän on sen sijaan tällöin koko ajan vahvistuttava, jotta
se pystyisi pitämään energialtaan – ja liikemassaltaan – jatkuvasti kasvavat
hiukkaset radallaan. Hiukkasen radan säteen lausekkeesta $R = mv/(qB)$ il-
menee, että magneettivuon tiheyden on kasvatettava massaan verrannollisena.

AG-synkrotroni. Kiihdytyksen ja ohjauksen tahdistuksen lisäksi kehäkiih-
dyttimissä on huolehdittava hiukkassuihkujen *fokusoinnista*, kiihdytettävän
hiukkassryhmän pitämisestä koossa samalla radalla. Magneettikentän muodon
on oltava sellainen, että se palauttaa radalta vähän poikkeavat hiukkaset takai-
sin. Varhaisemmissa synkrotroneissa kaikkien ohjausmagneettien kenttä oli
samantyyppinen ja siten suunniteltu, että se korjasi samanaikaisesti poikkeaa-
mat sekä liiketasosta että radan oikeasta säteestä.



Kuva 4.42. Vahvan fokusoinnin periaate.

Suurissa nykyaikaisissa nk. AG-synkrotroneissa sovelletaan *vahvan fokusoin-*
nin periaatetta, joka keksittiin 1950-luvulla. Ohjausmagneetit vuorottelevat
siten, että joka toinen korjaa poikkeamia ratatasosta, joka toinen radan sä-
dettä. Kiihdytintyyppin nimitys viittaa tähän vuorotteluun: AG = alternating
gradient eli vuorotteleva riippuvuus radan säteestä. Magneettikentät ovat voi-
makkaita epähomogeeniset, jolloin magneetit voivat olla kooltaan pienempiä
kuin aikaisemmissa malleissa.

Oheista kaavakuvista, 4.42, jotka esittävät ohjausmagneettien poikkileik-
kautsika radan normaalitasossa, ilmenee näiden kahden erilaisen fokusoinnin
periaate. Kenttä, jonka magneettivuon tiheys kasvaa kohti radan keskipistet-
tä, aiheuttaa ratatasosta poikkeaviin hiukkasiin palauttavan voiman. Kenttä,
jossa magneettivuon tiheys kasvaa ulospäin radan keskipisteestä, aiheuttaa
oikeaa rataa ulompänä liikkuvaan hiukkaseen suuremman ja sisempänä kier-
tävään pienemmän voiman kuin tarvitaan pitämään hiukkasta ympyräradalla.
Siksi se korjaa kummassakin tapauksessa radan sädettä oikeaan suuntaan.

Yhdysvaltojen kansallisen laboratorion, Fermilabin nk. tevatroni Chica-
gossa valmistui vuonna 1983. Sillä saavutetaan 500 GeV:n energia, mutta
siihen ollaan asentamassa uusia magneettia, jotka tekevät mahdolliseksi ener-
gian kaksinkertaistamisen 1 TeV:ksi. CERNin SPS (Conseil Européen pour la
Recherche Nucléaire, Super Proton Synchrotron) Genevessä on protonikiihdy-
tin, jolla saavutetaan 400 GeV:n energia.

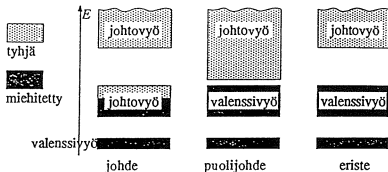
Säteilykorjaus. Tarkasteltaessa hiukkasen liikettä sähkö- ja magneettikent-
tissä on jätetty huomioon ottamatta, että kiihdyvässä liikkeessä oleva varaus
lähettää sähkömagneettista säteilyä. Energiaa poistuu systeemistä, ja rata
muuttuu. Kaikkiin rataa koskeviin ennustuksiin on tehtävä säteilykorjaus.

Kun kiihdytykset ovat pieniä, säteilykorjaus on mitätön. Hiukkassuih-
kujen lineaarisessa kiihdytyksessä sähkökentän avulla sillä ei ole merkitystä.
Suuren kiihdyttiinien magneettikentissä hiukkaset sen sijaan säteilevät normaali-
kiihdytyksensä ansiosta nk. *synkrotronisäteilyä*.

Tavallisissa syklotroneissa, joissa hiukkasten nopeudet ovat epärelativistisi-
sia, synkrotronisäteily on hyvin heikkoa. Sitä varten hiukkasten liikettä niissä
voidaan käsitellä ottamatta huomioon säteilykorjausta. Synkrotroneissa,
joissa hiukkasten energiat ovat moninkertaisia niiden lepoenergioihin verratta-
ina ja joissa hyvin voimakkailla magneettikentillä aiheutetaan suuria normaali-
kiihdytyksiä, myös synkrotronisäteily on hyvin voimakasta. Hiukkasten
pitäminen ympyräradalla vaatii niissä sen tähden paljon energiaa.

Suuria synkrotroneja on rakennettu 1970-luvulta lähtien varta vasten synk-
rotronisäteilyn tuottamiseksi tutkimuskäyttöön. Tällaisista laitteista saadaan
voimakasta säteilyä hyvin laajalla aallonpituusalueella, joka ulottuu lyhytaalto-
toisen röntgensäteilyn alueelle asti. Kustakin radan pisteestä lähtevä säteily
keskittyy sitä kapeammaksi suihkuksi, mitä suurempi hiukkasten nopeus on.
Sen hajoama voi olla vain muutamia kulmasekunteja. Säteily on lisäksi lä-
hes täydellisesti lineaarisesti polarisoitunutta. Näiden ominaisuuksien vuoksi
synkrotronisäteily on avannut monia uusia tutkimusmahdollisuuksia esim. ai-
neen atomirakenteen tutkimuksessa.

Elektronit ja aukot. Hallin ilmiö tarjosi ensimmäisen kokeellisen keinon¹² virrankuljettajien varauksen merkin määrittämiseen. Mittaamalla Hallin vakio saadaan määritetyksi myös virrankuljettajien tiheys johtimessa. Näin todetaan erityisesti, että puolijohteissa virrankuljettajien varaus voi olla joko positiivinen tai negatiivinen. Puolijohteet luokituvat tällä perusteella p- ja n-tyypeiksi. Kun kysymyksessä kuitenkin on elektroninen eikä ionijohtavuus, tämä on yllättävä havainto. Se on ristiriidassa elektronien klassisen hiukkasmallin kanssa vielä ilmeisemmin kuin Ohmin laki, #3.4.3., eikä sen kvantti-



Kuva 5.8. Johde, puolijohde ja eriste.

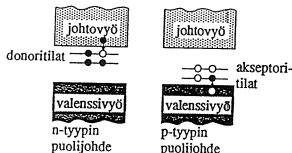
mekaaninen selitys ole samalla tavalla yksinkertainen, #3.4.4.

Kvanttimekaanisesti tarkasteltaessa kiteisen aineen elektronien mahdolliset energiat muodostavat *energiaväliä*. Kuhunkin vyöhön kuuluvien tilojen lukumäärä on kiteen atomien lukumäärän pieni monikerta. Tilojen energiat ovat niin lähekkäiset, että niiden voidaan katsoa täyttävän jatkuvasti vyön ala- ja yläreunan välisen energia-alueen. Vyöt vastaavat tietyllä tavalla kiteen atomien elektronikuoria. Elektronit täyttävät ne Paulin kieltoasäännön mukaisesti siten, että sisäkuoria vastaavat alemmat vyöt ovat täynnä ja vain ylin vyö voi olla vajaa perustilassa.

Jos ylin vyö on vajaa, se on *johtovyö*, ja aine on normaalijohde. Johtovyön elektroneja voidaan käsitellä likimäärin elektronikaasuna laatikossa ja selittää näin metallisen johtavuuden pääpiirteet, #3.4.4. Jos ylin vyö on täysi, se on *valenssiyö*. Täyden vyön elektronit eivät voi kuljettaa sähkövirtaa. Elektronien virittäminen merkitsee niiden nostamista valenssiyöstä ylempään tyhjiään vyöhön. Tämän jälkeen sekä virityt että vajaaksi jääneen valenssiyön elektronit voivat toimia virrankuljettajina. Jälkimmäisessä tapauksessa sanotaan, että virrankuljettajina toimivat *aukot*.

Tämä johtavuuden mekanismi selittää, miksi puolijohteiden johtavuus p¹³raanee lämpötilan noudettaessa, päinvastoin kuin johteiden, ja miksi erilaiset ulkoiset herätteet kuten säteily lisää niiden johtavuutta. Virittämiseen tarvitaan vähintään ensimmäisen vyövälin energia. Jos lämpötila on liian matala, elektronit eivät pääse virittymään eikä aine voi johtaa sähköä ilman ulkoisia herätteitä. Riittävän matalassa lämpötilassa puolijohteista tulee eristeitä. Jos ensimmäinen vyövälin on liian suuri, aine pysyy eristeenä kaikissa lämpötiloissa, joissa se pysyy kiinteänä.

Eristeiden ja puolijohteiden välillä ei siis ole selvää rajaa eikä periaatellista eroa. Johtavuuden perusteella aineet jakautuvat ensisijaisesti kahteen luokkaan, johteisiin ja puolijohteisiin (=eristeisiin), joita erottaa niiden resistiiv-



Kuva 5.9. Epäpuhtausjohtavuus.

visyöiden erilainen riippuvuus lämpötilasta. (Kolmannen luokan muodostavat suprajohteet, joilla on vielä aivan erilainen johtavuuden mekanismi.)

Vieraisiin atomeihin puolijohteen kidehilassa voi liittyä erillisiä elektronien tiloja, joiden energia on vyövälinä. Jos nämä tilat ovat täysiä, niiden elektronit virittyvät yläpuoliseen tyhjiään vyöhön johdinelektroneiksi paljon helpommin kuin valenssiyön elektronit. Jos ne ovat vajaita, ne tarjoavat valenssiyön elektroneille paljon helpomman tilaisuuden virittyä ja jättää jälkeensä virtaa kuljettavia aukkoja. Tällainen *epäpuhtausjohtavuus* on edellisessä tapauksessa selvästi n-tyyppistä, jälkimmäisessä p-tyyppistä.

Tämä kyllä selittää puolijohteiden virrankuljetuksen kaksi eri tyyppiä, mutta sellaisenaan se ei vielä tee ymmärrettäväksi sitä, miksi aukot käyttäytyvät – kuten Hallin ilmiö osoittaa – ikään kuin ne olisivat positiivisesti varautuneita hiukkasia, joihin magneettinen voima vaikuttaa, eivätkä niin kuin aukot muuten täydessä hiukkasjoukossa. Tämäkin kyllä selittyy kvanttimekaanisesti, mutta selitys perustuu monen elektronin systeemin perusteellisempaan käsittelyyn, jossa myös elektronien keskinäiset vuorovaikutukset otetaan jollakin tavalla huomioon.