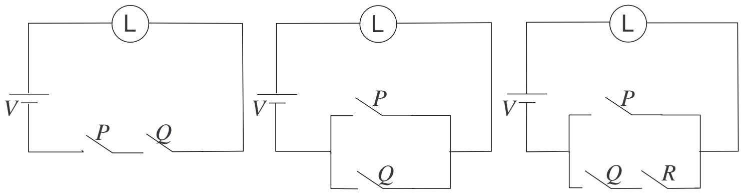
Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 2, ratkaisuista

1. Seuraavassa on kuvattu kolme virtapiiriä, joissa on paristo, sopiva lamppu L ja katkaisimia P, Q, R, joiden läpi virta kulkee (1) tai ei kulje (0). Lampun palaminen (1) riippuu katkaisimien asennoista logiikan sääntöjen mukaan.

   a) Muodosta kustakin piiristä ”totuusarvotaulukko”, josta näkyy millä kytkinten yhdistelmillä lamppu palaa ja millä ei.

   b) Mitkä logiikan yhdistetyt lauseet kuvaavat piirejä?



Ratkaisu. Ensimmäinen kuten $P \wedge Q$, toinen kuten $P \vee Q$. Kolmas kuten $P \vee (Q \wedge R)$:

P	Q	$P \wedge Q$	LAMPPU
1	1	1	palaa
1	0	0	ei pala
0	1	0	ei pala
0	0	0	ei pala

P	Q	$P \vee Q$	LAMPPU
1	1	1	palaa
1	0	1	palaa
0	1	1	palaa
0	0	0	ei pala

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	LAMPPU
1	1	1	1	1	palaa
1	1	0	0	1	palaa
1	0	1	0	1	palaa
1	0	0	0	1	palaa
0	1	1	1	1	palaa
0	1	0	0	0	ei pala
0	0	1	0	0	ei pala
0	0	0	0	0	ei pala

2. Millä reaaliluvuilla x on tosi lausefunktio

$$P(x)\colon x^2 - x \geq 2(x-5)?$$

Ratkaisu. Toisen asteen epäyhtälö $P(x)$ on totta kaikilla $x \in \mathbb{R}$; epäyhtälö muuntuu muotoon $x^2 - 3x + 10 \geq 0$ ja yhtälöllä $x^2 - 3x + 10 = 0$ on vain ei-reaaliset ratkaisut $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-31})$.

Ratkaisujoukko on siis $\mathbb{R}$.

3. Olkoot lausefunktiot $P(x)$, $Q(x)$ ja $R(x)$ määritelty kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$:

$P(x) : |x| \leq 3$
$Q(x) : x^2 + 4 > 2$
$R(x) : 2x^2 - x < 28$

Osoita, että $P(x) \equiv R(x)$, mutta $P(x) \not\equiv Q(x)$.

Ratkaisu. Pitää siis näyttää, että $P(x)$ on tosi jos ja vain jos $R(x)$ on tosi, kullakin arvolla $x \in \mathbb{Z}$. Nyt $P(x)$ on tosi täsmälleen joukossa

$$A_P := \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3 \} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}.$$

Epäyhtälöllä $R(x)$ on ratkaisut ($x^2 - x - 28 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3\,\frac{1}{2} \vee x = 4$)

$$A_R := \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3\,\frac{1}{2} < x < 4 \} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}.$$

Siis $A_P = A_R$, ja lauseet ovat samat kokonaislukujen joukossa (vaikkeivät olekaan reaalilukujen joukossa samat!).

Epäyhtälö $Q(x)$ taas on totta kaikilla $x \in \mathbb{Z}$, joten $A_Q = \mathbb{Z}$. Siis lauseet $P(x)$ ja $Q(x)$ eivät ole samat.

4. Muodosta kaksipaikkaisesta lausefunktiosta

$P(x, y) : x^2 - y^2 = 2$

kaikki erilaiset kvanttorien avulla saaatavat lauseet sekä määritä niiden totuusarvot.

Ratkaisu. Tarkastellaan lausefunktioita joukossa $\mathbb{R}^2$, ts.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{1}$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{2}$$
$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{3}$$
$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{4}$$
$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{5}$$
$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{6}$$
$$\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{7}$$
$$\exists\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 = 2 \tag{8}$$

Nyt epätosia ovat selvästi 1 ja 5, samoin puolestaan 4 ja 8 ovat tosia.

Epätosi on myös 2, sillä valitsemalla $x = 0$ nähdään, ettei ole reaalilukua y, jolle olisi $-y^2 = 2$.

Myös 3 on epätosi, sillä sen negaatio $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 \neq 2$ on tosi:

Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. valitaan esimerkiksi $y := |x| + 1$. Silloin $x^2 - y^2 = x^2 - x^2 - 2|x| - 1 < 0$.

Kohta 6 sensijaan on totta: Olkoon $y \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Silloin $x := \sqrt{2 + y^2}$ on reaaliluku, ja $x^2 - y^2 = 2$.

Kohta 7 taas on selvästikin epätosi.

Tosia siis vain 4, 6 ja 8.

5. Esitä *suora todistus* ja *epäsuora todistus* väitteelle:

> "Jos m on parillinen ja n pariton kokonaisluku, niin $m{+}n$ on pariton luku."

Opastusta: On useita tapoja, voidaan johtaa ristiriita oletuksen tai yhtä hyvin jonkin ulkoisen totuuden kanssa. Oletetaan tässä tunnetuksi seuraavat ulkoiset totuudet U ja V:

U: "Kokonaisluku n on parillinen, jos ja vain jos on olemassa kokonaisluku p, jolle $n = 2p$."

V: "Kokonaisluku n on pariton, jos ja vain jos on olemassa kokonaisluku p, jolle $n = 2p{+}1$."

Ratkaisu. a) *Suora todistus*.

Oletus. P: Luku m on parillinen ja luku n pariton.

Väitös. Q: Luku $m{+}n$ on pariton.

Todistus. Oletuksen P ja ulkoisten totuuksien U ja V mukaan on olemassa kokonaisluvut p ja q, joille

$$m = 2p \text{ ja } n = 2q + 1.$$

Lukujen laskusääntöjen avulla saadaan esitys

$$m + n = 2p + (2q{+}1) = 2(p{+}q) + 1,$$

missä $p{+}q \in \mathbf{Z}$. Ulkoisen totuuden V mukaan $m{+}n$ on pariton, eli Q on tosi.

b) *Epäsuora todistus.* Esitetään kaksi epäsuoraa vaihtoehtoa, puhdas ja "epäpuhdas":

Todistus 1. Oletetaan, että väite ei pitäisi paikkaansa, eli tehdään

> *Antiteesi.* $\neg Q$: $m{+}n$ ei ole pariton, eli on parillinen.
> Antiteesin ja ulkoisen totuuden U mukaan $m{+}n = 2k$ jollakin kokonaisluvulla k. Oletuksen P mukaan vastaavasti $n = 2q + 1$. Siis
>
> $$2k = m + n = m + (2q{+}1)$$
>
> eli ratkaisten
>
> $$m = 2k - (2q{+}1) = 2(k{-}q) - 1 = 2(k{-}q{-}1) + 1.$$
>
> Koska $k{-}q{-}1$ on kokonaisluku, olisi ulkoisen totuuden V mukaan m pariton luku ja siten P olisi epätosi.

Antiteesiä $\neg Q$ apuna käyttäen pystyttiin johtamaan ristiriita perusoletuksen P kanssa, joten antiteesin on oltava epätosi ja sen negaation $\neg\neg Q \equiv Q$ siis tosi.

Luku $m{+}n$ on siis pariton.

Todistus 2. Aloitetaan kuten todistuksessa 1:

> *Antiteesi.* $\neg Q$: $m{+}n$ ei ole pariton, eli on parillinen.
> Oletuksen P ja antiteesin mukaan $m = 2p$, $n = 2q + 1$ ja $m{+}n = 2k$. Silloin
>
> $$2k = m + n = 2p + (2q{+}1),$$
>
> mistä voidaan ratkaista
>
> $$k - p - q = \frac{1}{2}.$$
>
> Luku $k - p - q$ ei siis olisi kokonaisluku.

Vastaoletuksen avulla voitiin siis johtaa ristiriitainen tilanne: kokonaislukujen summa ei välttämättä ole kokonaisluku. Antiteesina esitetty väite $\neg Q$ on siis epätosi ja väite Q tosi.

Luvun $m+n$ on siis oltava pariton.

6. Olkoot P: "Katselen televisiota."

   Q: "Ratkaisen matematiikan kotitehtävät."

   R: "Opin matematiikkaa.".

   Onko seuraava päättely johdonmukainen?

   > *Katselen televisiota tai ratkaisen matematiikan kotitehtävät. Jos katselen televisiota, en opi matematiikkaa. Jos ratkaisen matematiikan kotitehtävät, en katsele televisiota. Siis opin matematiikkaa.*

   Mietipä ensin sillä terveellä talonpoikaisjärjellä (mistähän sitäkin saa?), tuntuuko päättely vedenpitävältä! Ratkaise sitten tehtävä Esimerkin 2.3.8 mallin mukaan: *Pue päättely jonoksi, jossa esiintyvät annetut (kolme) premissiä ja johtopäätös. Muodosta totuusarvotaulukko. Vaikeinta lienee sitten taulukon tulkitseminen!*

   Ratkaisu. Premissit ovat $P \vee Q$, $P \Rightarrow \neg R$ ja $Q \Rightarrow \neg P$, johtopäätös on R. Siis

$P \vee Q$	:	Katselen televisiota tai ratkaisen matematiikan kotitehtävät.
$P \Rightarrow \neg R$	:	Jos katselen televisiota, en opi matematiikkaa.
$Q \Rightarrow \neg P$	:	Jos ratkaisen matematiikan kotitehtävät, en katsele televisiota.
R	:	Opin matematiikkaa.

   Päättely on johdonmukainen jos ja vain jos lause

$$((P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow \neg R) \wedge (Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow R$$

   on tautologia, ts. tosi kaikilla peruslauseiden totuusarvoyhdistelmillä. Taulukon

					P_1	P_2	P_3	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$	J	$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \Rightarrow J$
P	Q	R	$\neg P$	$\neg R$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (\neg R)$	$Q \Rightarrow \neg P$		R	
T	T	T	E	E	T	E	E	E	T	T
T	T	E	E	T	T	T	E	E	E	T
T	E	T	E	E	T	E	T	E	T	T
T	E	E	E	T	T	T	T	T	E	$\boxed{E}$
E	T	T	T	E	T	T	T	T	T	T
E	T	E	T	T	T	T	T	T	E	$\boxed{E}$
E	E	T	T	E	E	T	T	E	T	T
E	E	E	T	T	E	T	T	E	E	T

   neljäs (yhtä hyvin kuudes) rivi osoittaa päättelyn epäjohdonmukaiseksi.

7. Näin ajateltiin jokunen vuosikymmen sitten:

   > *Jos ihmisen geenikartat tulevaisuudessa selvitetään, niin on mahdollista, että ihmisen perimää voidaan säädellä. Ihmisen geenikartat saadaan tulevaisuudessa selville tai biologian kehitys pysähtyy. Mutta biologian kehitys jatkuu. Siis ihmisen perimää voitaneen tulevaisuudessa säädellä.*

Oliko johdonmukaisesti päätelty?

Ratkaisu. Valitaan lauseiksi:

P: ”Ihmisen geenikartat selvitetään tulevaisuudessa.”
Q: ”Ihmisen perimää voidaan säädellä.”
R: ”Biologian kehitys pysähtyy.”

Premissit ovat $P \Rightarrow Q$, $P \vee R$ ja $\neg R$, johtopäätös Q.

Päättely on johdonmukainen jos ja vain jos lause

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee R) \wedge \neg R \Rightarrow Q$$

on tautologia, ts. tosi kaikilla peruslauseiden totuusarvoyhdistelmillä. Tätä varten tarvitsee tosiasiallisesti tarkastaa vain ne tilanteet, joissa vasen puoli on tosi – eli kaikki premissit tosia – sillä muulloin lause on tosi riippumatta oikean puolen totuusarvosta.

Totuusarvotaulukko

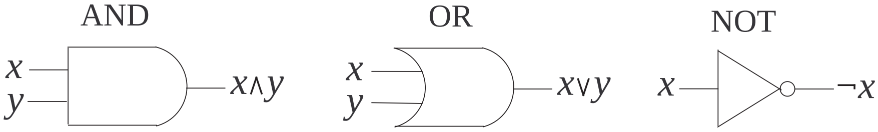
P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$P \vee R$	$\neg R$	Q
T	T	T	T	T	E	T
T	T	E	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$
T	E	T	E	T	E	E
T	E	E	E	T	T	E
E	T	T	T	T	E	T
E	T	E	T	E	T	T
E	E	T	T	T	E	E
E	E	E	T	E	T	E

Päättely on johdonmukainen, sillä premissit ovat tosia ainostaan rivillä 2, ja sillä rivillä johtopäätös on tosi.

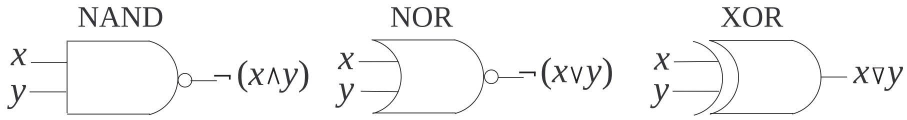
8. Tarkastellaan lopuksi nk. logiikkaportteja (logiikka $\leftrightarrow$ digitaalitekniikka, Claude Shannon 1938). Kun merkitsemme Tosi = 1 ja Epätosi = 0, saadaan vastaavuudet:

Kombinatoriset eli *loogiset piirit* ovat elektronisia systeemejä, joilla toteutetaan totuusfunktioita syöttämällä piiriin muuttujien arvot jännitetasoina (esim. $1 = 5V$ ja $0 = 0V$) ja tuloksena saadaan funktion arvoa vastaava jännite (joka voidaan edelleen syöttää muille piireille). Siis

Loogiset piirit rakennetaan *porteista*, joita ovat loogiset perusoperaatiot $\wedge$, $\vee$ ja $\neg$ eli AND, OR ja NOT. Lisäksi on portit operaatioille NAND, NOR ja XOR. Perusporttien piirrosmerkit ovat

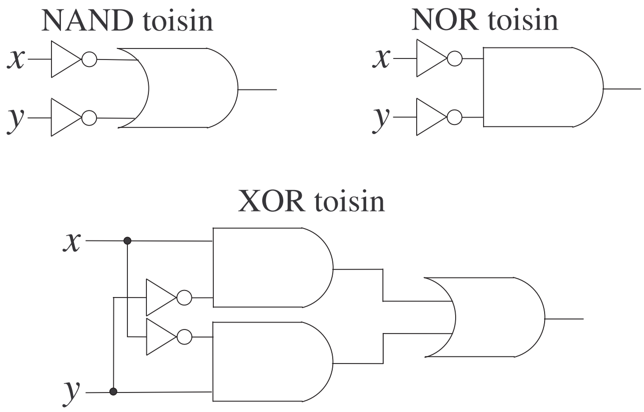


Osoita, että AND-, OR- ja NOT-porteilla voidaan toteuttaa myös portit NAND, NOR ja XOR,



missä $x\nabla y$ on toisensa poissulkeva ”tai”, siis ”joko tai”.

Ratkaisu. Portit NAND saadaan esimerkiksi seuraavasti:



Tässä on käytetty esitystä $x\nabla y \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$.