Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 3, ratkaisuista

1. Kuinka monta numeroa on luvun $391581 \cdot 2^{216193} - 1$ kymmenjärjestelmäesityksessä?

   Ratkaisu. Olkoon $x = 391581 \cdot 2^{216193}$. Silloin $\lg x = \lg 391581 + 216193 \lg 2 \approx 65086.17$. Siis
   $$65086 < \lg x < 65087 \iff 10^{65086} < x < 10^{65087},$$
   joten luvussa x on 65086 numeroa. Yllä olevan aidon epäyhtälön nojalla myös luvussa $x - 1$ on 65087 numeroa.

2. Todista osittelulain yleistys (Seurauksen 3.2.3 kohta D1'):
   $$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

   Ratkaisu. Tehdään induktiotodistus joukkojen määrän suhteen.

   1. $\boxed{n = 1}$ Triviaali. $\boxed{n = 2}$ tavallinen osittelulaki kahden joukon yhdisteelle, siis tosi.

   2. $\boxed{n = k}$ Oletetaan, että väite pätee yhdisteelle, jossa on $k \geq 2$ joukkoa, siis
   $$A \cap \left(\bigcup_{p=1}^{k} B_p \right) = \bigcup_{p=1}^{k} (A \cap B_p).$$

   3. $\boxed{n = k + 1}$ Olkoon joukkoja sitten $k + 1$. Yhdisteen liitännäisyyden nojalla $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \cup B_{k+1} = (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k) \cup B_{k+1}$, ja siten käyttäen tavallista osittelulakia
   $$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{p=1}^{k+1} B_p \right) &= A \cap \left(\left(\bigcup_{p=1}^{k} B_p \right) \cup B_{k+1} \right) = \left(A \cap \bigcup_{p=1}^{k} B_p \right) \cup (A \cap B_{k+1}) \\ &= \left(\bigcup_{p=1}^{k} (A \cap B_p) \right) \cup (A \cap B_{k+1}) = \bigcup_{p=1}^{k+1} (A \cap B_p). \end{aligned}$$

   Induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu.

3. Olkoot $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ ja $\mathbf{Z}$ joukkoja. Todista:
   a) Jos $A \subseteq \mathbf{X}$ ja $B \subseteq \mathbf{Y}$, niin $A \times B \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.
   b) $\mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cup (\mathbf{X} \times \mathbf{Z})$.

   Todistus. a) Olkoon $(x, y) \in A \times B$ eli $x \in A$ ja $y \in B$. Silloin $x \in \mathbf{X}$ ja $y \in \mathbf{Y}$, joten $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

   b) Logiikan laskusääntöjen mukaan (täydennä perustelut):
   $$\begin{aligned} (x, y) \in \mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) &\Leftrightarrow (x \in \mathbf{X}) \wedge (y \in \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathbf{X}) \wedge (y \in \mathbf{Y} \vee z \in \mathbf{Z}) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathbf{X} \wedge y \in \mathbf{Y}) \vee (x \in \mathbf{X} \wedge y \in \mathbf{Z}) \\ &\Leftrightarrow ((x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \vee ((x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Z}) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cup (\mathbf{X} \times \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

4. Olkoot
$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

   Laske a) $2A - 3B$, b) $A^T B$ ja c) $(AB^T)^T$.

   Ratkaisu Matlabilla.

```
» A = [2 -2 7;1 1 4 ]
A =
     2    -2     7
     1     1     4
» B = [2 -2 3;1 2 -4]
B =
     2    -2     3
     1     2    -4
» 2*A - 3*B
ans =
    -2     2     5
    -1    -4    20
» A'*B
ans =
     5    -2     2
    -3     6   -10
    18    -6     5
» (A*B')'
ans =
    29    12
   -30   -13
```

5. Laske totuusarvomatriiseille
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   lauseke $AB + C$

   a) Boolen aritmetiikalla

   b) käyttäen kokonaislukuaritmetiikkaa ja etumerkkifunktiota SIGN.

   Ratkaisut Matlabilla. a) Muodostetaan Boolen matriisitulon laskevat toistosilmukat ja sitten 'tai'

```
» A = [0 0 0 1 1; 1 1 0 0 1; 0 0 1 0 0; 1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0];
» B = [0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 1 0 0 0 0; 1 0 0 0 0; 0 1 0 0 1];
» C = [0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0; 1 0 1 0 1; 0 0 0 0 0; 1 0 0 1 1];
» tuloAB = zeros(5,5);
» for i = 1:5
 for j = 1:5
 tuloAB(i,j)= any(A(i,:) & B(:,j)');
 end
end
```

```
» tuloAB
tuloAB =
     1     1     0     0     1
     0     1     1     0     1
     1     0     0     0     0
     0     1     1     0     0
     0     0     0     0     0
» tuloAB | C
ans =
     1     1     0     0     1
     0     1     1     0     1
     1     0     1     0     1
     0     1     1     0     0
     1     0     0     1     1
```

b) Matlabin matriisitulolla ja yhteenlaskulla

```
» A*B
ans =
     1     1     0     0     1
     0     2     1     0     1
     1     0     0     0     0
     0     1     1     0     0
     0     0     0     0     0
» A*B + C
ans =
     1     1     0     0     1
     0     2     1     0     1
     2     0     1     0     1
     0     1     1     0     0
     1     0     0     1     1
» sign(A*B + C)
ans =
     1     1     0     0     1
     0     1     1     0     1
     1     0     1     0     1
     0     1     1     0     0
     1     0     0     1     1
```

6. Olkoon R joukko, jossa on ne kokonaislukuparit $(m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, joille on voimassa

$$2 \leq m \leq 4 \text{ ja } -1 \leq n \leq m.$$

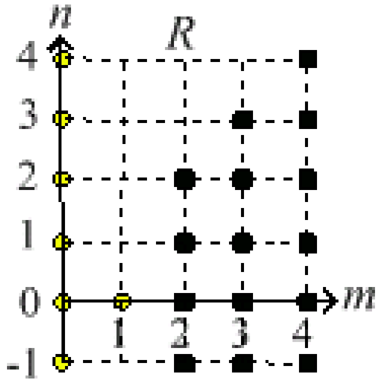
Esitä R a) luettelomuodossa, b) ehtomuodossa, c) graafisesti koordinaatistossa.

Ratkaisut. a) Luettelomuodossa

$$\begin{aligned} R &= \{(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3), \\ &\quad (4,-1),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\} \end{aligned}$$

b) Ehtomuodossa $R = \{\,(m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid 2 \leq m \leq 4 \wedge -1 \leq n \leq m\,\}$

c) Graafisesti koordinaatistossa

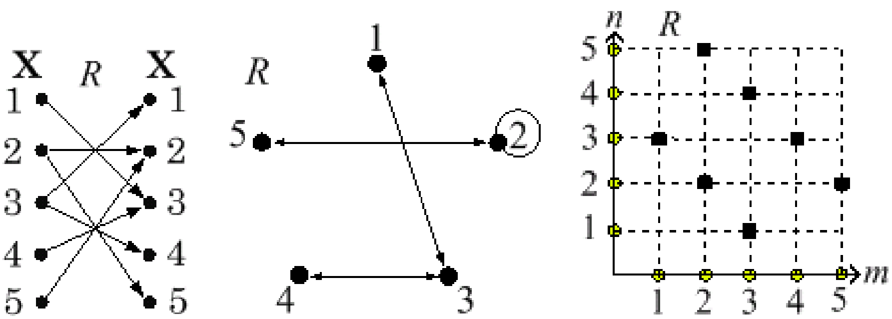


7. Esitä luettelona ja havainnollista luennoissa esitetyillä tavoilla nuolikaavioina joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ määritelty relaatio R, jossa

$$[\,x\,R\,y\,] \quad \Leftrightarrow \quad [\,x{+}y \in \{4, 7\}\,].$$

Ratkaisut. Luettelo: $R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\}$

Nuolikaaviot ja koordinaatisto:



Matriisi $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Olkoot $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ äärellisiä epätyhjiä joukkoja. Olkoon $\mathcal{R}$ joukon $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ kaikkien relaatioiden joukko ja

$$\mathcal{M} := \{\, M_R \mid R \in \mathcal{R} \,\}$$

niiden matriisien joukko. Olkoon $T := \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ ja $R, S \in \mathcal{R}$. Miten lasketaan vastaavien matriisien avulla

a) $M_{T \setminus R}$, b) $M_{R \cup S}$, c) $M_{R \cap S}$, d) $M_{R \setminus S}$?

Ratkaisu. Vastaavuus käy ilmi seuraavasta:

	Matriisi	Logiikka	Matlab
a)	$M_{T \setminus R}$	$\neg M_R$	`~MR`
b)	$M_{R \cup S}$	$M_R \vee M_S$	`MR | MS`
c)	$M_{R \cap S}$	$M_R \wedge M_S$	`MR & MS`
d)	$M_{R \setminus S}$	$M_R \wedge \neg M_S$	`MR & ~MS`