
Diskreetti matematiikka, syksy 2010

Harjoitus 4 (7.-8.10., to 16-18 M107, pe 12-14 M107)

Tiistaina 5.10. ei liikuntapäivän takia ole luentoa.

1. Olkoon $\mathbf{X} = \{a, b, c, d, e\}$ ja $\mathbf{Y} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mitkä seuraavista relaatioista ovat funktioita, mitkä niistä injektioita, surjektioita, bijektioita? Määritä bijektioiden käänteiskuvaukset.

a) $F := \{(a, 4), (b, 1), (c, 3), (d, 1), (e, 3), (e, 4)\}$

b) $G := \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 5), (e, 4)\}$

c) $H := \{(a, 5), (b, 2), (c, 3), (e, 4)\}$

d) $I := \{(a, 5), (b, 1), (c, 3), (d, 1), (e, 4)\}$

2. Olkoon $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ kuvaus, $A_1, A_2 \subseteq \mathbf{X}$ ja $B_1, B_2 \subseteq \mathbf{Y}$. Osoita, että

a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,

b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Voiko kohdassa a) inklusio olla aito?

3. Olkoon $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ injektio ja $G : F(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$ surjektio. Mitä arvelet ilmauksesta $G \circ F$, siis mitä ominaisuuksia sillä on?

4. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että minkä tahansa $n + 1$:n luonnollisen luvun joukossa on ainakin kaksi, joiden erotus on jaollinen luvulla n .

5. Oletetaan, että ihmisten välinen tuttavuus on molemminpuolista. Osoita, että jokaisessa $n \geq 2$ henkilön joukossa on ainakin kaksi, joilla on yhtä monta tuttavaa.

6. Osoita, että relaatio $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ on transitiivinen jos ja vain jos $R \circ R \subseteq R$.

7. Olkoon \mathbf{X} äärellinen joukko ja $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Miten sen matriisista näkee, onko relaatio

a) refleksiivinen

b) symmetrinen

c) antisymmetrinen

d) transitiivinen

e) täysi

f) $R^{-1} \circ R$ refleksiivinen?

8. Olkoon relaation R matriisi

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Onko relaatio

a) refleksiivinen

b) symmetrinen

c) antisymmetrinen

d) transitiivinen

e) täysi

f) $R^{-1} \circ R$ refleksiivinen?