Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 4, ratkaisuista

1. Olkoon $\mathbf{X} = \{a, b, c, d, e\}$ ja $\mathbf{Y} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mitkä seuraavista relaatioista ovat funktioita, mitkä niistä injektioita, surjektioita, bijektioita? Määritä bijektioiden käänteiskuvaukset.

   a) $F := \{(a, 4), (b, 1), (c, 3), (d, 1), (e, 3), (e, 4)\}$
   b) $G := \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 5), (e, 4)\}$
   c) $H := \{(a, 5), (b, 2), (c, 3), (e, 4)\}$
   d) $I := \{(a, 5), (b, 1), (c, 3), (d, 1), (e, 4)\}$

   Ratkaisut.

   a) F ei ole kuvaus (eikä siis muutakaan), koska e kuvautuisi kahdelle.

   b) G on kuvaus, bijektio, $G^{-1} = \{(1, b), (2, a), (3, c), (4, e), (5, d)\}$

   c) H ei ole kuvaus, sillä alkiolla d ei ole kuvaa.

   d) I on kuvaus. Se ei ole injektio, sillä b ja d kuvautuvat alkiolle 1, eikä surjektio, sillä alkiolle 2 ei kuvaudu mitään.

2. Olkoon $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ kuvaus, A_1, $A_2 \subseteq \mathbf{X}$ ja B_1, $B_2 \subseteq \mathbf{Y}$. Osoita, että

   a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,

   b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   Voiko kohdassa a) inkluusio olla aito?

   Ratkaisu. a) Olkoon $y \in f(A_1 \cap A_2)$. On olemassa $x \in A_1 \cap A_2$ siten, että $f(x) = y$. Mutta silloin $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Siis $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

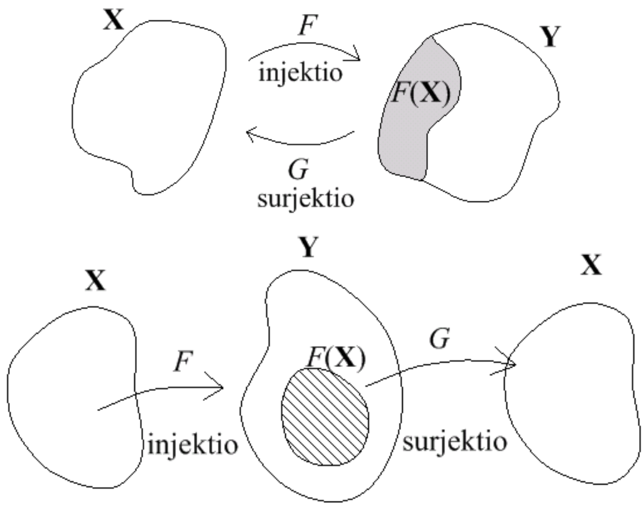
   b) Jos $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, niin $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Tällöin $f(x) \in B_1$ tai $f(x) \in B_2$. Näin ollen $x \in f^{-1}(B_1)$ tai $x \in f^{-1}(B_2)$ eli $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   Siis $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   Kohdan a) inkluusio voi olla aito: Valitaan esimerkiksi joukot A_1 ja $A_2 \subseteq \mathbf{X}$ niin, että niiden leikkaus on tyhjä, mutta molemmista joku alkio kuvautuu samalle $y \in \mathbf{Y}$. Ehkä yksinkertaisin tällainen esimerkki: $\mathbf{X} := \{1, 2\}$, $A_1 := \{1\}$, $A_2 := \{2\}$, $\mathbf{Y} := \{3\}$ ja $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $f(1) := f(2) := 3$. Silloin $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, mutta $f(A_1) \cap f(A_2) = \{3\}$.

3. Olkoon $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ injektio ja $G : F(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ surjektio. Mitä arvelet ilmauksesta $G \circ F$, siis mitä ominaisuuksia sillä on?

Ratkaisut. Seuraavat kuviot voivat auttaa



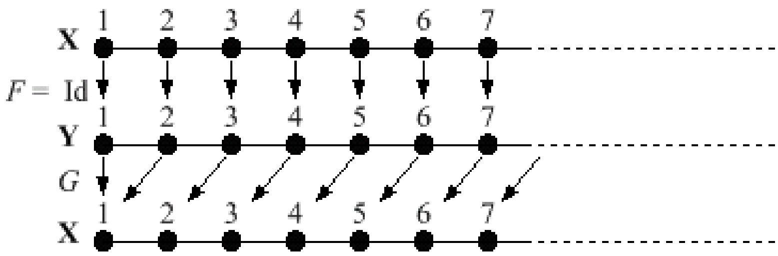
$G \circ F$ on ensiksikin kuvaus $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$.

$G \circ F$ on surjektio, sillä $(G \circ F)(\mathbf{X}) = G(F(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$, koska G oli surjektio.

Onko $G \circ F$ bijektio?

a) On, jos $\mathbf{X}$ on äärellinen, silloinhan joukoissa $\mathbf{X}$ ja $F(\mathbf{X})$ on yhtä monta alkiota (eli $\mathbf{X} \simeq F(\mathbf{X})$, ks. Luku 10).

b) Ei yleisesti, sillä G voi olla olematta injektio, ks. kuva alla.



4. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että minkä tahansa $n+1$:n luonnollisen luvun joukossa on ainakin kaksi, joiden erotus on jaollinen luvulla n.

Ratkaisu. Olkoon $A = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$, $a_i \in \mathbb{N}$. Jaetaan kukin luku a_i jakoyhtälön mukaisesti luvulla n:

$$a_i = nq_i + r_i, \quad r_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Olkoon mahdollisten jakojäännösten joukko $B := \{0, 1, \dots, n-1\}$, jossa on siis vain n alkiota. Määritellään $f : A \to B$, $f(a_i) := r_i$. Koska $\#A = n + 1 > n = \#B$, on laatikkoperiaatteen nojalla $r_i = r_j$ joillekin $i \neq j$. Silloin

$$a_i - a_j = (q_i - q_j)n + r_i - r_j = (q_i - q_j)n,$$

eli $n \mid (a_i - a_j)$.

5. Oletetaan, että ihmisten välinen tuttavuus on molemminpuolista. Osoita, että jokaisessa $n \geq 2$ henkilön joukossa on ainakin kaksi, joilla on yhtä monta tuttavaa.

Ratkaisu. Olkoot henkilöt $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ ja mahdolliset tuttavien määrät $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Määritellään $f : H \to M$,

$$f(h_i) := \text{"}h_i\text{:n tuttavien määrä joukossa } H\text{"}.$$

Emme vielä pääse käyttämään laatikkoperiaatetta! Mutta, on kaksi eri mahdollisuutta:

a) Joukossa on henkilö h_k, joka ei tunne ketään. Tällöin myöskään häntä ei tunne kukaan. Silloin f onkin kuvaus $H \to M_1 := \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Nyt $\#M_1 = n - 1$.

b) Kaikki tuntevat ainakin yhden muista. Silloin f on kuvaus $H \to M_2 := \{1, \ldots, n-1\}$ ja $\#M_2 = n - 1$.

Molemmissa tapauksissa laatikkoperiaatteen mukaan on olemassa kaksi eri henkilöä h_i, h_j, joille $f(h_i) = f(h_j)$, eli näillä on yhtä monta tuttavaa.

6. Osoita, että relaatio $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ on transitiivinen jos ja vain jos $R \circ R \subseteq R$.

Todistus. Molempiin suuntiin:

$\boxed{\Rightarrow}$ *Oletus:* Olkoon R transitiivinen.

Väitös: $R \circ R \subseteq R$.

Todistus. Olkoon $(x, z) \in R \circ R$. Silloin on olemassa sellainen $y \in R$, että xRy ja yRz. Transitiivisuuden nojalla xRz eli $(x, z) \in R$. Siis $R \circ R \subseteq R$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Oletus:* Olkoon $R \circ R \subseteq R$.

Väitös: R on transitiivinen.

Todistus. Olkoon xRy ja yRz. Silloin relaatioiden yhdistämisen määritelmän nojalla $(x, z) \in R \circ R$. Koska $R \circ R \subseteq R$, on $(x, z) \in R$ eli xRz. Siis R on transitiivinen.

7. Olkoon $\mathbf{X}$ äärellinen joukko ja $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Miten sen matriisista näkee, onko relaatio

a) refleksiivinen, b) symmetrinen, c) antisymmetrinen, d) transitiivinen, e) täysi,

f) $R^{-1} \circ R$ refleksiivinen?

Ratkaisu taulukkona:

	Ominaisuus	Matriisi	Toinen ilmaus
a)	refleksiivinen	$M_R(i, i) = 1$	diagonaalilla ykköset
b)	symmetrinen	$M_R = M_R^T$	matriisi symmetrinen
c)	antisymmetrinen	$[a_{ij} = a_{ji} = 1] \Rightarrow [i = j]$	"tosi epäsymmetrinen"
d)	transitiivinen	$[a_{ij} = a_{jk} = 1] \Rightarrow [a_{ik} = 1]$	
e)	täysi	$M_R \vee M_R^T$ TOSI	$a_{ij} = 1$ tai $a_{ji} = 1$ kaikilla i, j
f)	$R^{-1} \circ R$ refleksiivinen	$\wedge_{i=1}^{n}(\vee M(i, :)) = T$	ei nollarivejä $(*)$

$(*)$ perustelu:

$$\begin{aligned}
R^{-1} \circ R \text{ refleksiivinen} \quad &\Leftrightarrow \quad (x, x) \in R^{-1} \circ R \text{ kaikilla } x \in \mathbf{X} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \exists\, y \in \mathbf{Y} \text{ s.e. } xRy \wedge yR^{-1}x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, \exists\, y \in \mathbf{Y} \text{ s.e. } xRy
\end{aligned}$$

8. Olkoon relaation R matriisi

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Onko relaatio

a) refleksiivinen, b) symmetrinen, c) antisymmetrinen, d) transitiivinen, e) täysi, f) $R^{-1} \circ R$ refleksiivinen?

Ratkaisu: Olkoon perusjoukko $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ja matriisin rivit ja sarakkeet tässä järjestyksessä.

a)	on	diagonaalilla on ykköset
b)	ei	esimerkiksi $M_R(3,2) \neq M_R(2,3)$
c)	ei	esimerkiksi $M_R(3,1) = M_R(1,3) = 1$
d)	ei	esimerkiksi $x_1 R x_3$ ja $x_3 R x_2$, mutta $x_1 \not R x_2$
e)	ei	esimerkiksi $x_1 \not R x_2$ ja $x_2 \not R x_1$
f)	on	joka rivillä on ykkösiä