Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 5 (14.-15.10., to 16-18 M107, pe 12-14 M107)

1. Olkoon $S \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ transitiivinen relaatio. Osoita, että $S^k \subseteq S$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

2. Onko matriisin
$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
edustama relaatio transitiivinen?

3. Olkoon $\mathbf{X} := \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ja $R := \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_3, x_1), (x_4, x_2)\}$. Muodosta transitiivinen sulkeuma $\overline{R}^t$

   a) suoraan päättelemällä,

   b) laskemalla matriisin M_R avulla.

4. Olkoon $\mathbf{X}$ äärellinen joukko, jossa on n alkiota ja olkoon $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ relaatio. Todista:

   Jos $p \in \mathbb{N}$ ja $xR^{n+p}z$, niin xR^kz jollakin $k \in [n]$.

5. Olkoot $\mathbf{X}$ ja R kuten tehtävässä 4. Osoita kyseisen tehtävän avulla, että transitiivinen sulkeuma on laskettavissa äärellisenä yhdisteenä
$$\overline{R}^t = \bigcup_{k=1}^{n} R^k.$$
   Näytä lisäksi, että voi olla aidosti $\cup_{k=1}^{n-1} R^k \subset \overline{R}^t$.

6. Mitkä seuraavista reaalilukujen joukossa määritellyistä relaatioista ovat ekvivalenssirelaatioita?

   a) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x-y$ on luvun 3 kokonaislukupotenssi

   b) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x+y$ on pariton tai $x = y$

   c) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$

   Määritä (myönteisissä tapauksissa) ekvivalenssiluokat.

7. Mikä on se ekvivalenssirelaatio, joka määrää osituksen $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ joukkoon $\mathbf{X} := \{1, 2, 3, 4, 5\}$?