Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 5, ratkaisuista

1. Olkoon $S \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ transitiivinen relaatio. Osoita, että $S^k \subseteq S$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

   Todistus. Jos S on transitiivinen, Lauseen 5.9.2 δ) mukaan on $S \circ S \subseteq S$.

   Induktiotodistus. 1) $k = 1$: $S^1 = S \subseteq S$. OK

   2) $k = n$ Induktio-oletus: Olkoon $S^n \subseteq S$ jollakin $n \geq 1$. Silloin relaation potenssin määritelmän, Lemman 6.2.4 ja Lauseen 5.9.2 δ) nojalla

$$S^{n+1} = S \circ S^n \subseteq S \circ S \subseteq S.$$

   Väite pätee siis arvolla $k = n+1$.

   Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

2. Onko matriisin

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   edustama relaatio transitiivinen?

   Ratkaisuksi useita vaihtoehtoja.

   a) Matriisista voi tutkia (aika työläs), onko sille voimassa seuraava kaikilla $i, j \in [10]$:

   jos $m_{ij} = 1$ ja $m_{jk} = 1$, niin myös $m_{ik} = 1$.

   b) Voi piirtää kuvion ja katsoa siitä konkreettisemmin. Kuvasta tulee kyllä melko sotku, kun nuolia on peräti 50.

   c) Käyttää transitiivisuuden aritmeettista matriisiehtoa: $\mathrm{SIGN}(M_R M_R) \leq M_R$:

```
» M = ...
» M2 = sign(M*M)
» M2 <= M       % pitäisi tulla vain ykköstä
» all(all(M2 <= M))
ans =
     1
```

   Yllä `M2` on matriisin neliö, jossa ei saisi olla yhtään ykköstä siellä, missä matriisissa `M`:kään ei ole. Ja näin onkin tässä, vertailu `M2 <= M` antaa vain ykkösiä sisältävän matriisin. Viimeinen käsky tarkastaa tämän seikan.

3. Olkoon $\mathbf{X} := \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ja $R := \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_3, x_1), (x_4, x_2)\}$. Muodosta transitiivinen sulkeuma $\overline{R}^t$

   a) suoraan päättelemällä,

b) laskemalla matriisin M_R avulla.

Ratkaisu. a) I vaihe: Otetaan pohjaksi joukko $R = R^1$ ja rakennetaan $\overline{R}^t$ lisäämällä tarvittavia.

II vaihe $R^2 = R \circ R$: lisätään (x_1, x_5), sillä (x_1, x_2), $(x_2, x_5) \in R$,

lisätään (x_3, x_2), sillä (x_3, x_1), $(x_1, x_2) \in R$,

lisätään (x_4, x_5), sillä (x_1, x_2), $(x_2, x_5) \in R$.

III vaihe $R^3 = R \circ R \circ R$: lisätään (x_3, x_5), sillä $(x_3, x_1) \in R$ ja (x_1, x_5).

Havaitaan nyt, että

$$\overline{R}^t = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_3, x_1), (x_4, x_2), (x_1, x_5), (x_3, x_2), (x_4, x_5), (x_3, x_5)\}.$$

b) Relaation matriisia korottamalla potensseihin ja laskemalla nämä yhteen (ks. Huomautus 6.2.7):

```
» MR = [0 1 0 0 0; 0 0 0 0 1; 1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 0];
» MR2 = sign(MR*MR)
» MR3 = sign(MR2*MR)
» MR4 = sign(MR3*MR)
» TRS = sign(MR + MR2 + MR3)              % koska MR4 oli nollamatriisi
» sign(TRS*TRS) <= TRS                    % tarkastus
```

tai vielä fiksummin logiikka-operaatioilla, ks. Matlab-demojen `BT`, tai rakentamalla erityinen transitiivisen sulkeuman laskeva funktio.

4. Olkoon $\mathbf{X}$ äärellinen joukko, jossa on n alkiota ja olkoon $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ relaatio. Todista:

   Jos $p \in \mathbb{N}$ ja $xR^{n+p}z$, niin xR^kz jollakin $k \in [n]$.

Todistus. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ mielivaltainen, samoin $(x, z) \in R^{n+p}$. Olkoon k *pienin* niistä luvuista $k \in \mathbb{N}$, joille $(x, z) \in R^k$.

Selvitä, miksi tällainen on olemassa!

Alaväite: Välttämättä $k \leq n$.

Alatodistus. *Antiteesi:* $k > n$. Silloin $k \geq n+1$. Koska xR^kz, on olemassa sellainen alkiojono

$$x \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{k-1} \to z =: y_k,$$

että xRy_1, y_1Ry_2, …, $y_{k-1}Ry_k$. Jonossa y_1, y_2, y_3, …, y_{k-1}, y_k on $k \geq n+1$ jäsentä. Joukossa $\mathbf{X}$ oli vain n alkiota, joten jonon jäsenissä y_m on ainakin yksi pari $y_i = y_j$, $i \neq j$. Jos esimerkiksi $i < j$, on tilanne

$$x \to y_1 \to \cdots \to y_i \to y_{i+1} \to \cdots \to y_{j-1} \to y_j = y_i \to y_{j+1} \to \cdots \to y_{k-1} \to y_k = z.$$

Mutta silloin jonossa voidaan ”oikaista”, siis jättää pois esimerkiksi pätkä $y_{i+1} \to \cdots \to y_{j-1} \to y_j = y_i$, jolloin saamme aidosti lyhemmän yhteyden $x \to z$:

$$x \to y_1 \to \cdots \to y_i \to y_{j+1} \to \cdots \to y_{k-1} \to y_k = z.$$

Silloin olisikin $xR^{k-m}z$ arvolla $m := j - i \geq 1$, mikä on ristiriita luvun k valinnan kanssa; sehän oli pienin! Siis k on jokin luvuista 1, 2, 3, …, n.

5. Olkoot $\mathbf{X}$ ja R kuten tehtävässä 4. Osoita kyseisen tehtävän avulla, että transitiivinen sulkeuma on laskettavissa äärellisenä yhdisteenä

$$\overline{R}^t = \bigcup_{k=1}^{n} R^k,$$

ja että voi olla aidosti $\cup_{k=1}^{n-1} R^k \subset \overline{R}^t$.

Todistus. a) Lauseen 6.2.5 alkuosan mukaan $\overline{R}^t = \cup_{k=1}^{\infty} R^k$. Täten riittää osoittaa, että äärelliselle n-alkioiselle joukolle

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \bigcup_{k=1}^{n} R^k.$$

1) Aina pätee $\bigcup_{k=1}^{n} R^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

2) Inkluusio toiseen suuntaan: Kyseinen ääretön yhdiste voidaan esittää muodossa

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} R^k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} R^k\right).$$

Niinpä riittää osoittaa, että jälkimmäinen ääretön yhdiste ei tuo mukaan yhtään uutta alkiota. Todetaan tämä näyttämällä, että jälkimmäinen yhdiste sisältyy edelliseen:

$$\bigcup_{k=n+1}^{\infty} R^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} R^k.$$

Mutta tässä astuu mukaan tehtävän 4 tulos:

Olkoon $(x, z) \in \cup_{k=n+1}^{\infty} R^k$ mielivaltainen. Silloin $(x, z) \in R^{n+p}$ jollakin $p \in \mathbb{N}$. Tehtävän 4 mukaan on olemassa $k \leq n$, jolle $(x, z) \in R^k$. Täten $(x, z) \in R^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} R^k$.

Siis kohta a) on todistettu.

b) Esimerkki: Olkoot $\mathbf{X} = \{x_1, x_2\}$ ja $R := \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$. Silloin $n = 2$ ja

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \overline{R}^t = \mathbf{X} \times \mathbf{X} \text{ eli } M_{\overline{R}^t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

mutta aidosti

$$\bigcup_{k=1}^{1} R^k = R \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X} = \overline{R}^t.$$

Keksi lisää esimerkkejä!

6. Mitkä seuraavista reaalilukujen joukossa määritellyistä relaatioista ovat ekvivalenssirelaatioita?

a) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x-y$ on luvun 3 kokonaislukupotenssi

b) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x+y$ on pariton tai $x = y$

c) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$

Määritä (myönteisissä tapauksissa) ekvivalenssiluokat.

Ratkaisut. a) Relaatiossaolo xRy tarkoittaa, että $x - y = 3^k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

Ei ole ekvivalenssi; itse asiassa se ei ole refleksiivinen, ei symmetrinen eikä transitiivinen! Yksikin näistä riittää perusteluksi, mutta käydään harjoituksen vuoksi läpi kaikki kohdat:

1) refleksiivisyys: xRx ei ole totta millään $x \in \mathbb{R}$, sillä $x - x = 0 < 3^k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

2) symmetrisyys: Olkoon xRy. Silloin $x - y = 3^k > 0$, joten $y - x < 0 \neq 3^p$ kaikilla $p \in \mathbb{Z}$. Siis ei ole yRx.

3) transitiivisuus: Oletetaan, että xRy ja yRz. Silloin $x - y = 3^m$ ja $y - z = 3^n$ joillakin m, $n \in \mathbb{Z}$. Jotta olisi xRz, olisi oltava esitys $x - z = 3^p$ jollakin $p \in Z$. Mutta

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 3^m + 3^n,$$

jonka ei tarvitse olla kolmosen potenssi! Relaatio ei liene transitiivinen.

VASTAESIMERKKI. $6R3$ ja $3R0$, sillä $6-3 = 3^1$, samoin $3-0 = 3^1$. Kuitenkin $6-0 = 6 \neq 3^p$ kaikilla $p \in \mathbb{Z}$. Siis ei ole $6R0$.

b) Ei ole ekvivalenssi. On kyllä refleksiivinen ja symmetrinen, mutta ei transitiivinen;

VASTAESIMERKKI: $1R2$ ja $2R3$, mutta ei ole $1R3$.

c) On ekvivalenssi. Ehtohan voidaan ilmaista myös muodossa $|x| = |y|$. Refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus lienevät selvät (perustele kuitenkin tarkasti).

Ekvivalenssiluokat: $R(x) = \{x, -x\}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

7. Mikä on se ekvivalenssirelaatio, joka määrää osituksen $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ joukkoon $\mathbf{X} := \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Ratkaisu. 1) Luettelona

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$,

2) Ehtona: $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x, y \in \mathbf{X}$ ja $[\max(x, y) \leq 3 \text{ tai } \min(x, y) \geq 4]$.