Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 6, ratkaisuista

1. *Todista:* Jos $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ on kuvaus, niin

$$\mathcal{P}_f := \{\, f^{-1}(y) \mid y \in f(\mathbf{X}) \,\}$$

on joukon $\mathbf{X}$ ositus.

Kääntäen, jos $\mathcal{P}$ on joukon $\mathbf{X}$ ositus, on olemassa joukko $\mathbf{Y}$ ja kuvaus $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, joille $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$.

Todistukset. $\boxed{\Rightarrow}$ a) Jokaisella $y \in f(\mathbf{X})$ on $f^{-1}(y) \subseteq \mathbf{X}$ epätyhjä.

b) *Väite:* $\cup_{y \in f(\mathbf{X})} f^{-1}(y) = \mathbf{X}$.

Triviaalisti $\cup_{y \in f(\mathbf{X})} f^{-1}(y) \subseteq \mathbf{X}$. Jos $x \in \mathbf{X}$, niin $y' := f(x) \in f(\mathbf{X})$, jolloin $x \in f^{-1}(y')$. Siten myös $\mathbf{X} \subseteq \cup_{y \in f(\mathbf{X})} f^{-1}(y)$.

c) *Väite:* Joukot erillisiä. Olkoot kaksi joukkoa $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(z)$ joillekin $y, z \in \mathbf{X}$. Silloin $y \neq z$ ja funktion määritelmän mukaan $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) = \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Olkoon $\mathcal{P} = \{\, X_i \mid i \in I \,\}$ joukon $\mathbf{X}$ ositus, I jokin (indeksi)joukko. Silloin $\cup_{i \in I} X_i = \mathbf{X}$. Valitaan $\mathbf{Y} := I$ ja kuvaus $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$,

$$f(x) := i, \text{ aina kun } x \in X_i.$$

Silloin $X_i = f^{-1}(i)$ kaikilla $i \in \mathbf{Y}$, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$ ja

$$\mathcal{P} = \{\, X_i \mid i \in I \,\} = \{\, f^{-1}(y) \mid y \in \mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \,\}$$

2. Olkoon R relaatio joukossa $\mathbf{X}$. Osoita, että on olemassa suppein relaation R sisältävä ekvivalenssi, nk. *ekvivalenssisulkeuma*, $\overline{R}^e \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. *Vihje:* osoita ensin, että ekvivalenssien leikkaus on ekvivalenssi.

Ratkaisu. Selvästi koko $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ on relaation R sisältävä ekvivalenssi.

Apulause. Ekvivalenssien leikkaus on ekvivalenssi.

Olkoot $E_i \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ ekvivalenssirelaatioita. Silloin $E := \cap_{i \in I} E_i \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

1) refleksiivisyys: $\Delta_{\mathbf{X}} \subseteq E_i$ kaikilla $i \in I$, joten $\Delta_{\mathbf{X}} \subseteq E$ ja siis xEx kaikilla $x \in \mathbf{X}$.

2) symmetrisyys: Jos xEy, niin xE_iy kaikilla $i \in I$. Silloin yE_ix kaikilla E_i, koska E_i:t ovat symmetrisiä, ja siten yEx.

3) transitiivisuus: Olkoon xEy ja yEz. Silloin xE_iy ja yE_iz kaikilla i, ja siten xE_iz kaikilla $i \in I$. Siis xEz.

Osoitetaan nyt, että on olemassa suppein relaation R sisältävä ekvivalenssi ja että se on

$$\overline{R}^e := \cap \{\, E_i \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X} \,|\, R \subseteq E_i, E_i \text{ ekvivalenssi} \,\}.$$

1) Yllä oleva leikkaus on epätyhjä, sillä $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ kuuluu siihen, ja ainakin $\Delta_{\mathbf{X}} \subseteq E_i$ kaikilla i.

2) $R \subseteq \overline{R}^e$, sillä $R \subseteq E_i$ kaikilla i.

3) $\overline{R}^e$ on apulauseen nojalla ekvivalenssi.

Määrittelynsä perusteella $\overline{R}^e$ on myös suppein.

3. Onko jokin seuraavista joukon $\mathbf{X} = \{a, b, c, d\}$ relaatioista osittainen tai jopa totaali järjestys?

a) $R := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d)\}$

b) $S := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,d), (c,c), (c,d), (d,c), (d,d)\}$

c) $T := \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d)\}$

d) $U := \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d)\}$

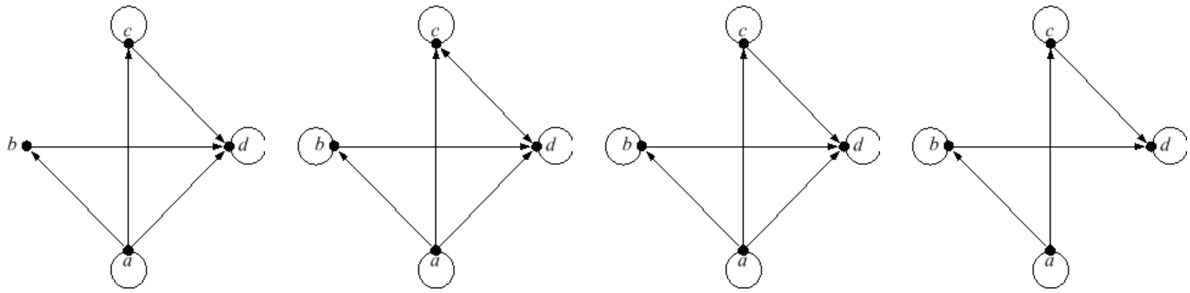
Piirrä järjestyksistä Hassen kaaviot.

Ratkaisut. a) Ei, sillä ei ole refleksiivinen; (b,b) puuttuu.

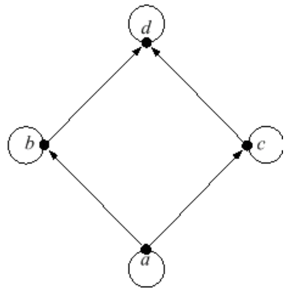
b) Ei, sillä ei antisymmetrinen; cSd ja dSc, mutta (ilmeisesti) $c \neq d$.

c) On osittainen järjestys.

d) Ei, sillä ei transitiivinen; aUc ja cUd, muttei aUd.



a) b) c) d)



4. **Todista Lause 7.2.5**: Olkoon $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ ekvivalenssirelaatio ja $x, y \in \mathbf{X}$. Tällöin

a) $x \in R(x)$

b) $[\, R(x) \cap R(y) \neq \emptyset \,] \;\Leftrightarrow\; [\, xRy \,]$

c) $[\, R(x) = R(y) \,] \;\Leftrightarrow\; [\, xRy \,]$.

Ratkaisut. a) Koska R on refleksiivinen, on xRx ja siten $x \in R(x)$.

b) Koska R on symmetrinen, on xRy ja yRx aina kun $x \in R(y)$. Siis:

1) Jos xRy, on $x \in R(y)$ ja $y \in R(x)$. Tällöin $x \in R(x) \cap R(y)$, joten $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$.

2) Olkoon $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$ ja $z \in R(x) \cap R(y)$. Silloin xRz ja yRz. Symmetrisyyden nojalla zRy ja transitiivisuudesta seuraa, että xRy.

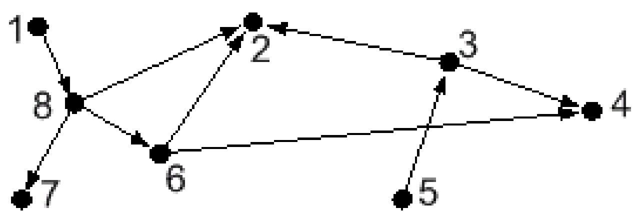
c) 1) Oletetaan, että xRy. Olkoon $z \in R(x)$, jolloin zRx. Silloin zRx ja xRy, joten transitiivisuuden nojalla zRy. Siis $z \in R(y)$ ja $R(x) \subseteq R(y)$. Vastaavasti $R(y) \subseteq R(x)$.

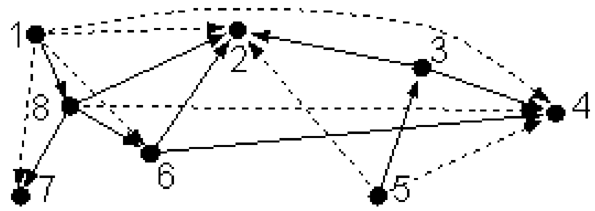
2) Olkoon $R(x) = R(y)$. Koska siis $y \in R(x)$, on xRy.

5. Onko seuraavan kaavion määrittelemä relaatio transitiivinen?

Jos tarpeen, lisää sellaiset nuolet, että tulee transitiivinen. Onko se järjestysrelaatio sitten, kun vielä lisätään silmukat kuhunkin alkioon (otetaan siis vielä refleksiivinen sulkeuma)?

Ratkaisut. Ei ole transitiivinen. Lisättävä $\{(1,2), (1,4), (1,6), (1,7), (5,2), (5,4), (8,4)\}$ (ks. kuvio). Relaatiosta tulee näin järjestys; siellä ei nimittäin ole missään nuolia kahteen suuntaan.





6. Olkoon $\mathbf{E} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funktio} \}$. Määritellään relaatio $\preceq \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{E}$,

$$[f \preceq g] \iff [g - f \text{ kasvava}].$$

Onko pari $(\mathbf{E}, \preceq)$ osittainen järjestys tai jopa täydellinen?

Ratkaisut. Yritetään osoittaa, että $\preceq$ on osittainen järjestys.

a) Refleksiivisyys. $f \preceq f$, sillä $f - f = 0$ on vakiofunktiona kasvava; siis tosi.

b) antisymmetrisyys: Pitäisi olla

$$[f \preceq g] \wedge [g \preceq f] \quad \Rightarrow \quad [f = g].$$

Mutta esimerkiksi funktioille $f = 0$ ja $g = 1$ ovat $f - g = -1$ ja $g - f = 1$ vakiofunktioina kasvavia, eli $f \preceq g$ ja $g \preceq f$. Mutta $0 = f \neq g = 1$, joten relaatio ei ole antisymmetrinen.

Täten se ei ole osittainen järjestys eikä myöskään täydellinen.

Ongelma Onko relaatio kuitenkin transitiivinen?

Kyllä on. Jos $f \preceq g$ ja $g \preceq h$, niin kasvavien funktioiden summana

$$h - f = h - g + g - f = (h - g) + (g - f)$$

on $h - f$ kasvava ja siten $f \preceq h$.

7. Olkoon $(\mathbf{E}, \leq)$ järjestetty joukko. Osoita, että

a) joukossa $\mathbf{E}$ on korkeintaan yksi pienin ja yksi suurin alkio.

b) osajoukolla $F \subseteq \mathbf{E}$ on korkeintaan yksi infimum ja supremum.

Ratkaisut. a) Olkoot p ja $q \in \mathbf{E}$ pienimpiä alkioita, ts. $p \leq e$ ja $q \leq e$ kaikilla $e \in \mathbf{E}$.

Silloin $p \leq q$, koska p on pienin, ja $q \leq p$, koska q on pienin. Antisymmetrisyyden nojalla $p = q$, ja pienimpiä on siten korkeintaan yksi.

Dualiteettiperiaatteen nojalla väite pätee myös suurimmalle alkiolle.

b) Olkoon $F \subseteq \mathbf{E}$ ja olkoot $p, q \in \mathbf{E}$ alkioita, jotka ovat joukon F ylärajojen joukon pienimpiä alkioita. Koska ylärajojen joukko on sekin järjestetty joukko, on kohdan a) nojalla $p = q$.

Vastaavasti perustellaan infimumin yksikäsitteisyys.