Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 7, ratkaisuista

1. Olkoot $(\mathbf{E}, \leq)$ ja $(\mathbf{F}, \preceq)$ epätyhjiä järjestettyjä joukkoja. Määritellään joukossa $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ relaatio L seuraavasti:

$$[\,(x,y)L(x',y')\,] \quad \Longleftrightarrow \quad [\,(x < x') \vee ((x = x') \wedge (y \preceq y'))\,]$$

Osoita, että L on osittainen järjestys joukossa $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

Kyseessä on nk. *leksikografinen järjestys* eli *aakkosjärjestys*.

Jos järjestykset $\leq$ ja $\preceq$ ovat täydellisiä, niin onko myös L täydellinen järjestys?

Ratkaisut. R) $(x,y)L(x,y)$, sillä $x = x$ ja $y \preceq y$.

A) Osoitetaan, että voi olla molemmat $(x,y)L(x',y')$ ja $(x',y')L(x,y)$ vain kun $(x,y) = (x',y')$.

Oletetaan, että $(x,y)L(x',y')$. Jos $x < x'$, niin ei voi olla $x' < x$ eikä $x' = x$, eikä siis myöskään $(x',y')L(x,y)$. Tällaisia tapauksia ei ole.

Jos taas $x = x'$ ja $y \preceq y'$, niin mikäli myös $(x',y')L(x,y)$, olisi $y' \preceq y$. Relaation $\preceq$ antisymmetrisyydestä seuraa silloin $y = y'$. Kaikkiaan siis $(x,y) = (x',y')$.

T) Olkoot $(x,y)L(x',y')$ ja $(x',y')L(x'',y'')$. Silloin on voimassa:

$x < x'$ tai ($x = x'$ ja $y \preceq y'$) ja
$x' < x''$ tai ($x' = x''$ ja $y' \preceq y''$).

Onko siis $(x,y)L(x'',y'')$? Koska $(x,y)L(x',y')$, on kaksi vaihtoehtoa:

1) Jos $x < x'$, on relaation $\leq$ transitiivisuuden nojalla $x < x''$.

2) Jos $x = x'$ ja $y \preceq y'$, on taas kaksi vaihtoehtoa:

a) Jos $x' < x''$, kuten edellä, $x < x''$.

b) Jos $x' = x''$ ja $y' \preceq y''$, niin $x = x' = x''$ ja $y \preceq y' \preceq y''$, ja siten $y \preceq y''$.

Siis $(x,y)L(x'',y'')$ ja relaatio on transitiivinen.

Väite: Jos molemmat komponenttirelaatiot ovat täysiä, niin myös tulo on täysi:

Olkoot (x,y) ja $(x',y') \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ mielivaltaisia. Nyt on $x = x'$, $x < x'$ tai $x' > x$.

Olkoon $x = x'$. Koska $\preceq$ on täysi, on $y \preceq y'$ tai $y' \preceq y$, ja siten $(x,y)L(x',y')$ tai $(x',y')L(x,y)$.

Kahdessa jälkimmäisessä relaatiot ovat vastaavasti $(x,y)L(x',y')$ tai $(x',y')L(x,y)$.

2. Osoita, että "olla yhtä mahtava kuin" on ekvivalenssirelaatio minkä tahansa perusjoukon potenssijoukossa.
Onko relaatio "olla korkeintaan yhtä mahtava kuin" puolestaan osittainen järjestys? Jos ei, niin miten siitä saataisiin sellainen?

Ratkaisut. Olkoon $\mathbf{X}$ perusjoukko. Väite tarkoittaa, että yhtämahtavuus $\simeq$ on ekvivalenssi joukossa $\mathcal{P}(\mathbf{X})$.

Ensinnäkin lähtötilanne on kelvollinen, $\simeq \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{X}) \times \mathcal{P}(\mathbf{X})$, joten $\simeq$ todella on relaatio joukossa $\mathcal{P}(\mathbf{X})$.

(E1) $\simeq$ on refleksiivinen: $A \simeq A$, koska identtinen kuvaus $\mathrm{Id} : A \to A$, $\mathrm{Id}(x) := x$, on näiden välinen bijektio.

(E2) $\simeq$ on symmetrinen: Jos $A \simeq B$, on olemassa bijektio $A \to B$. Sen käänteiskuvaus $B \to A$ on bijektio ja siten $B \simeq A$.

(E3) $\simeq$ on transitiivinen: Olkoot $A \simeq B$ ja $B \simeq C$. Silloin on olemassa bijektiot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$. Määrittelyistään johtuen nämä voidaan yhdistää funktioksi $g \circ f : A \to C$, joka bijektioiden yhdistettynä funktiona on bijektio. Siis $A \simeq C$.

Näin ollen $\simeq$ on ekvivalenssirelaatio potenssijoukossa.

Vastaavalla tavalla voidaan todistaa relaatiolle $\preceq$: ”olla korkeintaan yhtä mahtava kuin”, refleksiivisyys ja transitiivisuus (injektioiden kompositio on injektio). Antisymmetrisyys ei kuitenkaan sellaisenaan ole voimassa, esimerkiksi joukossa $\mathbf{Y} := \{1,2,3,4\}$ osajoukoille on $\{1,2\} \preceq \{2,4\}$ ja $\{2,4\} \preceq \{1,2\}$, vaikka $\{1,2\} \neq \{2,4\}$.

Asia korjautuu (vaikka toki idea hiukan muuttuukin) ottamalla käyttöön yhtämahtavuusrelaation määräämät ekvivalenssiluokat, ts. niputtamalla yhdeksi alkioksi kaikki keskenään samankokoiset (yhtämahtavat) joukot. Esimerkiksi yllä osajoukon $\{1,2\}$ määräämä ekvivalenssiluokka on joukko, jonka alkioina ovat kaikki joukon $\mathbf{Y} = \{1,2,3,4\}$ kaksialkioiset joukot. Joukon A määräämää ekvivalenssiluokkaa merkittiin $\simeq A$. Yllä siis

$$\simeq (\{1,2\}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}.$$

Merkitään joukon $\mathbf{X}$ osajoukkojen yhtämahtavuusrelaatiossa $\simeq$ määräämien ekvivalenssiluokkien *tekijäjoukkoa*, nk. *kardinaalilukuja*,

$$\mathcal{E} := \mathcal{P}(\mathbf{X})/\simeq\, = \{\simeq (A) \mid A \in \mathcal{P}(\mathbf{X})\}\,.$$

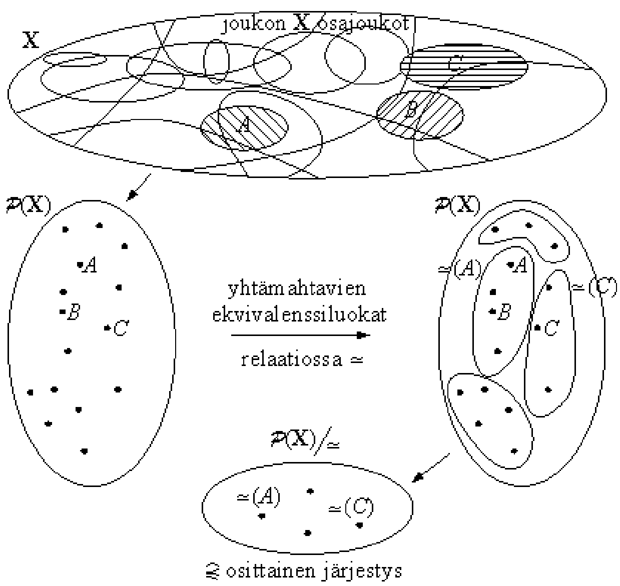
Varustetaan $\mathcal{E}$ relaatiolla $\hat{\preceq}$:

$$\mathcal{H} \,\hat{\preceq}\, \mathcal{K} \;\Leftrightarrow\; \exists\, H \in \mathcal{H}, \exists\, K \in \mathcal{K}, \text{joille } H \preceq K.$$

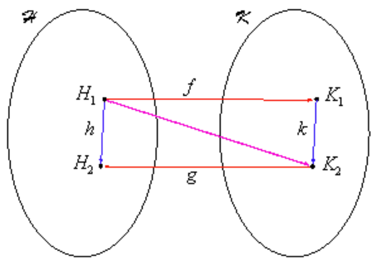
Väite. Pari $(\mathcal{E}, \hat{\preceq})$ on osittain järjestetty joukko.

Refleksiivisyys ja transitiivisuus siirtyvät koskemaan myös näitä ekvivalenssiluokkia. Antisymmetrisyyskin on nyt voimassa:

Oletetaan, että $\mathcal{H} \,\hat{\preceq}\, \mathcal{K}$ ja $\mathcal{K} \,\hat{\preceq}\, \mathcal{H}$ ja osoitetaan, että $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Tämä taas edellyttää, että löydämme näistä keskenään yhtä mahtavat alkiot $H \in \mathcal{H}$ ja $K \in \mathcal{K}$, siis sellaiset, joiden välillä on bijektio.



Oletuksesta seuraa, että on olemassa alkiot H_1, $H_2 \in \mathcal{H}$ ja K_1, $K_2 \in \mathcal{K}$, joille $H_1 \preceq K_1$ ja $K_2 \preceq H_2$. Tämä tarkoittaa, että on olemassa injektiot $f : H_1 \to K_1$ ja $g : K_2 \to H_2$. Kunkin ekvivalenssiluokan alkioiden välillä on bijektiot, siis erityisesti bijektiot $h : H_1 \to H_2$ ja $k : K_1 \to K_2$. Yhdistetty funktio $k \circ f : H_1 \to K_2$ on silloin injektio, samoin $h^{-1} \circ g : K_2 \to H_1$.



Välihuomautus. Samalla tuli sivutuotteena todistetuksi, että $\mathcal{H} \mathrel{\hat{\preceq}} \mathcal{K}$ jos ja vain jokaiselta $H \in \mathcal{H}$ on injektio jokaiselle $K \in \mathcal{K}$.

Loppusilaus saadaan seuraavasta yleisestä ongelmasta: Onko totta, että jos $A \simeq B$ ja $A \simeq B$, niin $A \simeq B$?

Tähän vastaa Cantorin, Schröderin ja Bernsteinin lause.

Lause (Cantor-Schröder-Bernstein). Jos A, $B \subseteq \mathbf{X}$ ja on olemassa injektiot $A \to B$ ja $B \to A$, niin on olemassa bijektio $A \to B$.

Todistus. Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to A$ injektioita. Määäritellään kaikilla $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl} C_1 & := & A \setminus g(B) \\ C_{n+1} & := & g\big(f(C_n)\big) \end{array}$$

Määritellään edelleen $C := \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ ja funktio $h : A \to B$,

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in C \\ g^{-1}(x), & \text{kun } x \in A \setminus C. \end{cases}$$

Selvästikin h todella on funktio, koska f on funktio ja g on injektio. Osoitetaan h bijektioksi.

1) h on injektio. Olkoot x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. Erotetaan kolme tapausta.

a) Jos $x_1, x_2 \in C$, funktion f injektiivisyyden nojalla myös $h(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = h(x_2)$.
b) Jos $x_1, x_2 \in A \setminus C$, funktion g injektiivisyyden nojalla $h(x_1) = g^{-1}(x_1) \neq g^{-1}(x_2) = h(x_2)$.
c) Jos lopuksi x_1 ja x_2 ovat eri joukoissa, olkoon esimerkiksi $x_1 \in C$ ja $x_2 \in A \setminus C$. Tällöin $x_1 \in C_n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, jolloin $h(x_1) \in f(C_n)$. Jos nyt olisi myös $h(x_2) \in f(C_n)$, niin

$$g(h(x_2)) = g(g^{-1}(x_2)) = x_2 \in g(f(C_n)) = C_{n+1},$$

mikä on vastoin oletustamme $x_2 \in A \setminus C$. Siis nytkin $h(x_1) \neq h(x_2)$.

2) h on surjektio. Olkoon $y \in B$ mielivaltainen. On osoitettava, että jollekin $x \in A$ on $h(x) = y$ (tai että alkukuvajoukko $h^{-1}(y) \neq \emptyset$).

Tapauksessa $y \in f(C_n)$ jollakin $n \in \mathbb{N}$ löytyy triviaalisti alkukuva joukosta $C_n \subseteq A$. Oletetaan siis, että $y \notin f(C_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, eli että $y \in B \setminus \cup_{n=1}^{\infty} f(C_n)$. Näytetään, että $g(y) \in A \setminus C$, ja että $h(g(y)) = y$.

Selvästi $g(y) \notin C_1$ joukon C_1 määrittelyn mukaan. Edelleen millään $n \in \mathbb{N}$ ei voi olla $g(y) \in C_{n+1}$, koska $C_{n+1} = g\big(f(C_n)\big)$ ja g oli injektio, seuraisi $y \in f(C_n)$. Siis $g(y) \in A \setminus C$ ja $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$.

Näin on konstruoitu bijektio $h : A \to B$.

3. Muodosta bijektio

   a) joukkojen $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$

   b) joukkojen $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Q}$

   välille. Tämä todistaa kyseiset joukot yhtämahtaviksi.

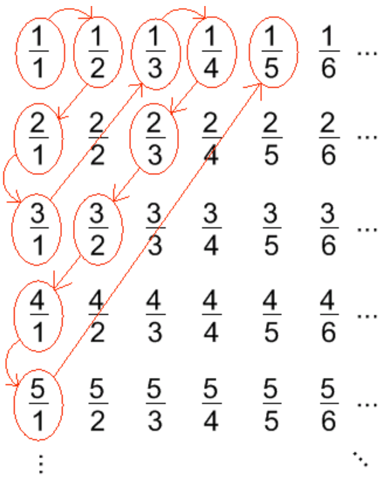
   Vihje. a) Ajattele joukkoja lukusuoralla.

   b) Asettele (positiiviset) rationaaliluvut (päättymättömään) taulukkomuotoon (Cantor).

   Ratkaisut. a) Määritellään $f(1) := 0$, $f(2n) = -n$, $f(2n+1) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$:	...	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	...
$\mathbb{Z}$:	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...

   b) Cantorin diagonaaliprosessi: Jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy (ainakin kerran) taulukossa



Cantorin diagonaaliprosessi

   Määritellään $f(1) = 0$. Luvut $2n$ kuvataan taulukkoon, luvut $2n+1$ vastaavaan negatiiviseen taulukkoon. Taulukossa ohitetaan ne luvut, jotka ovat jo esiintyneet.

4. Olkoot A ja $B \subseteq \mathbf{X}$. Ilmoita joukkojen A ja B karakterististen funktioiden avulla

   a) joukon $A \setminus B$ karakteristinen funktio.

   b) joukon $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ karakteristinen funktio.

   Ratkaisut. a) Koska $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap (\mathbf{X} \setminus B)$, saadaan Lausetta 10.6.1 soveltaen:

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A \cdot \chi_{\mathbf{X}\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B).$$

   b) Koska $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, on

$$\chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \chi_{(A\setminus B)} + \chi_{(B\setminus A)} = \chi_A(1-\chi_B) + \chi_B(1-\chi_A) = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B.$$

5. Yliopiston ylioppilaskunnan syyskekkerit pidettiin vanhempien ihmisten suosiossa olevassa tanssipaikassa. Yhteensä paikalla oli 100 osallistujaa, joista 60 oli miehiä ja loput naisia. Osallistujista alle kolmekymppisiä oli 30, joista 10 miehiä. Lisäksi tiedetään, että osallistujista vain 40 oli opiskelijoita, näistä 20 oli miehiä, 15 alle kolmekymppisiä ja 5 alle kolmekymppisiä miehiä. Kuinka monta osallistujista oli

   a) yli kolmekymppisiä naisia?

b) yli kolmekymppisiä ei-opiskelijanaisia?

Ratkaisu. Olkoot: $E := \{\text{osallistujat}\}$, $A := \{\text{miehet}\}$, $B := \{\text{ikä} < 30\}$ ja $C := \{\text{opiskelijat}\}$. Tällöin $\#E = 100$, $\#A = 60$, $\#B = 30$ ja $\#C = 40$. Edelleen tiedetään, että $\#(A \cap B) = 10$, $\#(A \cap C) = 20$, $\#(B \cap C) = 15$ ja $\#(A \cap B \cap C) = 5$. Käytetään summa- ja erotusperiaatetta: Yli kolmekymppisten naisten joukko on $\overline{A} \cap \overline{B}$ ja näistä muut kuin opiskelijat on $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Siis

a) $\#(\overline{A} \cap \overline{B}) = \#E - \#A - \#B + \#(A \cap B) = 100 - 60 - 30 + 10 = 20.$

b) $\#(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) =$
$\#E - \#A - \#B - \#C + \#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C) =$
$100 - 60 - 30 - 40 + 10 + 20 + 15 - 5 = 10.$

6. Kuinka monessa luvuista $1000, 1001, \ldots, 9999$ on peräkkäin kaksi samaa numeroa?

   Ratkaisu. Käytetään summa- ja erotusperiaatetta: määritellään joukot

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{n_1 n_2 n_3 n_4 \mid n_1 = n_2, n_1 \neq 0\} \\ A_2 &:= \{n_1 n_2 n_3 n_4 \mid n_2 = n_3, n_1 \neq 0\} \\ A_3 &:= \{n_1 n_2 n_3 n_4 \mid n_3 = n_4, n_1 \neq 0\}. \end{aligned}$$

   Kysymyksen vastaus on $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Nyt

   $\#A_1 = \#A_2 = \#A_3 = 9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 900,$

   $\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_3) = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = 90,$

   $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 9,$

   joten

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} \#A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \#(A_i \cap A_j) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 3 \cdot 900 - 3 \cdot 90 + 9 = 2439. \end{aligned}$$

7. Todista: Jos $\#\mathbf{X} = n$, niin $\mathbf{X}$ voidaan jakaa kahdeksi ekvivalenssiluokaksi $2^{n-1} - 1$ eri tavalla.

   Vihje: Induktiotodistus joukon alkiomäärän suhteen.

   Ratkaisu. *Ekvivalenssiluokkiin jako = ositus.*

   Jos $n = 1$, on asia selvä: kaksiosaisia osituksia ei ole, mutta niinpä $2^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0$.

   Olkoon siis $n \geq 2$. Joukon $\mathbf{X}$ 2-osaisia osituksia on $p(n, 2)$ kappaletta. Osoitetaan, että $p(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ arvoilla $n \geq 2$.

   1) $\boxed{n = 2}$: $p(2, 2) = 1 = 2^{2-1} - 1$, OK.

   2) $\boxed{n = k}$: Olkoon $p(k, 2) = 2^{k-1} - 1$ jollakin $k \geq 2$.

   3) $\boxed{n = k{+}1}$: Palautuskaavan ja induktio-oletuksen mukaan

$$p(k{+}1, 2) = 2p(k, 2) + p(k, 1) = 2 \cdot (2^{k-1} - 1) + 1 = 2^k - 1.$$

   Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla $n \geq 2$, ja siten alkuosan nojalla kaikilla $n \in \mathbb{N}$.