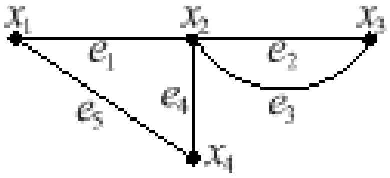
Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 8, ratkaisuista

1. Tarkastellaan oheista verkkoa $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$:



a) Määritä solmujen asteet.
b) Muodosta vastaavuuskuvaus Ψ.

Ratkaisut. a)

Solmu x	Asteluku $d_G(x)$
x_1	2
x_2	4
x_3	2
x_4	2

b)

Vastaavuuskuvaus $\Psi : E \to \mathbf{X}\&\mathbf{X}$
$\Psi(e_1) = \{x_1, x_2\}$
$\Psi(e_2) = \{x_2, x_3\}$
$\Psi(e_3) = \{x_2, x_3\}$
$\Psi(e_4) = \{x_2, x_4\}$
$\Psi(e_5) = \{x_1, x_4\}$

2. Tarkastellaan edelleen tehtävän **??** verkkoa G.

a) Määritä verkon pisin ketju ja pisin suljettu ketju.

b) Määritä pisin suljettu kaarijono.

Ratkaisut. Verkossa on viisi kaarta, joten sitä pitempiä ketjuja ei voi olla. Viiden pituisia ketjuja on monta ja ne kaikki ovat suljettuja; esimerkiksi solmusta x_1 lähteviä jo 4 kpl:

$$c_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) \quad c_2 = (e_1, e_3, e_2, e_4, e_5)$$
$$c_3 = (e_5, e_4, e_2, e_3, e_1) \quad c_4 = (e_5, e_4, e_3, e_2, e_1)$$

Muista solmuista lähtee vastaavat määrät erilaisia viiden pituisia suljettuja ketjuja. On myös kahden ja kolmen pituisia suljettuja ketjuja, sekä neljän pituisia avoimia ketjuja.

b) Pisintä suljettua kaarijonoa ei ole, voidaan muodostaa mielivaltaisen pitkiä vaikkapa tyyliin $(x_2, x_3, x_2, x_3, x_2, \ldots, x_3)$. Nämä eivät tietenkään ole ketjuja.

3. Muodosta tehtävän **??** verkolle yhteys- (eli vierekkäisyysmatriisi) ja vastaavuusmatriisi.

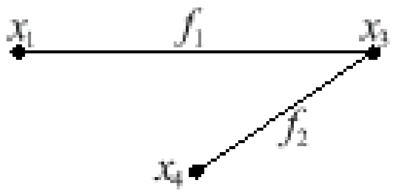
Ratkaisut.

$$M_G = \begin{array}{c} G \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad V_G = \begin{array}{c} G \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Määritä tehtävän **??** verkolle G solmujoukon $\{x_1, x_3, x_4\}$ virittämä aliverkko G'. Mikä on verkon G' komplementin yhteysmatriisi?

Ratkaisut. Solmujoukon $\{x_1, x_3, x_4\}$ välisiä kaaria on vain yksi, nimittäin e_5, sillä kaikki muut kaaret liittyvät solmuun x_2. Siis viritetty aliverkko on $G' = (\{x_1, x_3, x_4\}, \{e_5\}, \Psi')$, missä $\Psi'(e_5) = \Psi(e_5) = \{x_1, x_4\}$.

Komplementti on $G'' := (\{x_1, x_3, x_4\}, \{f_1, f_2\}, \Psi'')$, missä



$\Psi''(f_1) = \{x_1, x_3\}$
$\Psi''(f_2) = \{x_3, x_4\}$

Komplementin yhteysmatriisi on

$$M_{G''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ suuntaamaton verkko, jonka yhteysmatriisi on

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Onko G yksinkertainen?

b) Onko G täydellinen?

c) Mikä on verkon G komplementin matriisi?

Ratkaisut. Olkoon verkon solmujoukko $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots x_8\}$.

a) Verkko ei ole yksinkertainen, koska esimerkiksi solmussa x_2 on luuppi. Rinnakkaisia kaaria ei sentään ole.

b) Verkko ei ole täydellinen, koska esimerkiksi solmuihin x_1 ja x_3 ei liity kaarta.

c) Komplementin matriisi saadaan selville seuraavasti:

```
>> ones(size(M)) - (sign(M+eye(size(M))))
     0     0     1     0     0     1     0     0
     0     0     1     0     1     0     0     0
     1     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     1
     0     1     0     0     0     1     0     0
     1     0     0     0     1     0     1     0
     0     0     0     0     0     1     0     1
     0     0     0     1     0     0     1     0
```

Siis nollataan diagonaali ja aidosti postiiviset luvut, sekä vaihdetaan alkuperäisen matriisin nollat ykkösiksi.

6. Miten verkon yhteysmatriisista näkyy seuraavat asiat:

a) Mitkä ovat solmujen asteet?

b) Onko verkko yksinkertainen?

c) Onko verkko täydellinen?

Ratkaisut. a) Kaksinkertaistamalla diagonaali ja laskemalla sarakesummat:

```
>> sum(M + diag(diag(M)))
     5     7     7     6     5     4     7     5
```

b) Diagonaalilla nollat eikä missään ykköstä suurempia lukuja.

Matlabilla: Kaksinkertaistamalla diagonaali ja tarkastamalla ovatko kaikki matriisin alkiot enintään ykkösiä:

```
>> all(all(M + diag(diag(M)) <= 1))
ans =
     0
```

c) Diagonaalin ulkopuolella ei ole nollia.

Matlabilla: Lisätään diagonaalille ykköset ja tarkastetaan, että saadussa matriisissa on kaikkialla vähintäin ykkösiä.

```
>> all(all(M + eye(size(M)) >= 1))
ans =
     0
```

7. Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ yksinkertainen suuntaamaton verkko ja $G' = (\mathbf{X}, E', \Psi')$ sen komplementti. Olkoon verkossa G n solmua, joista vain yksi on parillista astetta. Kuinka monta paritonasteista solmua on verkossa G'?

   Ratkaisu. Nyt $\#\mathbf{X} = n$. Koska vain yksi on parillista astetta, on $n-1$ paritonta astetta. Lauseen 12.2.3 b) mukaan on luvun $n-1$ oltava parillinen, joten solmuja on kaikkiaan pariton määrä n. Koska G on yksinkertainen, täydentäisi komplementti sen yksinkertaiseksi täydelliseksi verkoksi, jossa solmujen asteluvut ovat $n-1$. Siten jokaiselle solmulle

$$d_G(x) + d_{G'}(x) = n-1.$$

   Olkoon nyt $y \in G$ se ainoa parillisasteinen solmu. Yhtälöstä $d_G(y) + d_{G'}(y) = n-1$ näkyy, että y on parillista astetta myös komplementissa. Toisaalta paritonasteisille x on myös $d_{G'}(x)$ pariton. Siis komplementissa on paritonasteisia solmuja $n-1$ (nimittäin samat kuin G:ssä!)