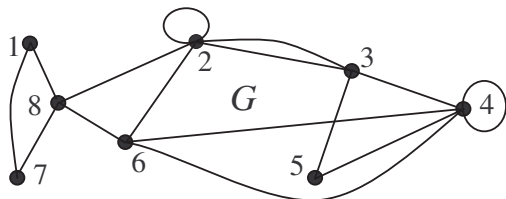


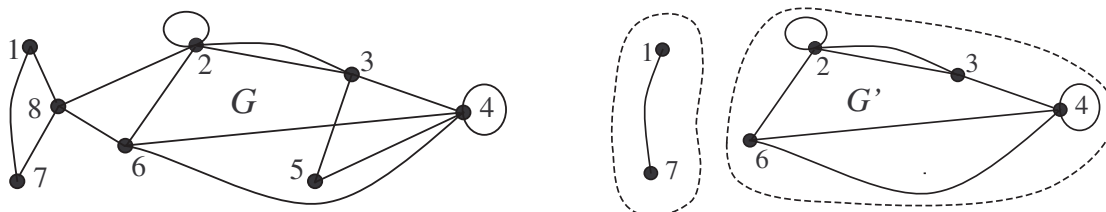
1. Määritä alla olevasta verkosta G seuraavat asiat:

a) solmujoukon $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ virittämä aliverkko G' .

b) aliverkon G' yhtenäiset komponentit, sekä piirrä tilanteista kaavioesitys.



Ratkaisu. a) ja b) Solmujoukon $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ virittämä aliverkko G' ja sen yhtenäiset komponentit ovat verkon G kuvion vieressä:



2. Muodosta tehtävän 1 verkkojen G ja G' yhteysmatriisit.

Ratkaisu. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ja $X' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$. Säilyttäen solmujärjestys saadaan

```
>> M = [
0 0 0 0 0 0 1 1;
0 1 2 0 0 1 0 1;
0 2 0 1 1 0 0 0;
0 0 1 1 1 2 0 0;
0 0 1 1 0 0 0 0;
0 1 0 2 0 0 0 1;
1 0 0 0 0 0 0 1;
1 1 0 0 0 1 1 0]
>> Indik = logical([1 1 1 1 0 1 1 0])
Indik =
     1     1     1     1     0     1     1     0
>> Mpr = M(Indik,Indik)
     0     0     0     0     0     1
     0     1     2     0     1     0
     0     2     0     1     0     0
     0     0     1     1     2     0
     0     1     0     2     0     0
     1     0     0     0     0     0
```

3. *Todista Lause 12.5.4:* Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ äärellinen suuntaamaton verkko, $x, y \in \mathbf{X}$ ja c ketju $x \rightarrow y$. Osoita, että verkossa G on yksinkertainen ketju $x \rightarrow y$, joka voidaan valita niin, että se sisältää vain ketjun c kaaria.

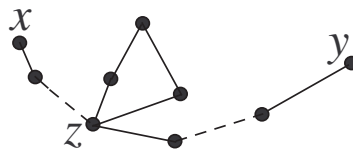
Todistus. Kootaan kaikki pelkästään ketjun c kaarista koostuvat ketjut $x \rightarrow y$ joukoksi

$$A := \{d \mid d \text{ ketju } x \rightarrow y \text{ ja } \langle d \rangle \subseteq \langle c \rangle\}.$$

Silloin $A \neq \emptyset$, sillä ainakin $c \in A$. Koska G on äärellinen, koostuu ketju c äärellisen monesta kaaresta. Koska joukossa A siten on äärellisen pituisia ketjuja, on siellä myös pituudeltaan lyhin (joita voi kyllä olla useita). Valitaan jokin lyhin $D \in A$.

Väite. D on yksinkertainen.

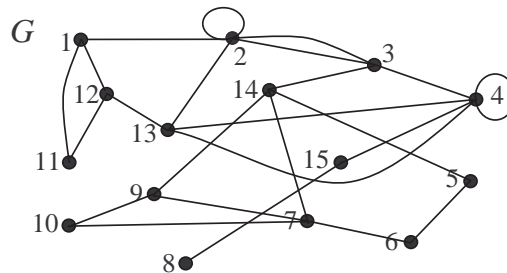
Vastaoletus. On olemassa solmu $z \in G$, jonka kautta D kulkee kahdesti.



Jättämällä pois väliin jäävät kaaret saataisiin aidosti D :tä lyhempi ketju $D' x \rightarrow y$, joka niinkään koostuu ketjun c kaarista, ja kuuluisi joukkoon A .

Tämä on ristiriidassa D :n valinnan kanssa. Siis D on yksinkertainen c :n kaarista koostuva ketju $x \rightarrow y$.

4. Suuntaamattoman verkon kaari on *silta*, jos sen poistaminen epäyhtenäistää verkon (tai oikeastaan sen yhtenäisen komponentin, johon kaari kuului).
- a) Määritä seuraavan verkon yhtenäiset komponentit:



b) Jos löydät sillan, poista se ja määritä sitten jäljellä olevan verkon G' yhtenäiset komponentit.

Ratkaisut. a) Verkko osoittautuu yhtenäiseksi, eli se on itse ainoa yhtenäinen komponenttinsa. Tämä voidaan nähdä esimerkiksi muodostamalla ketjuekvivalenssiluokka $S(1)$, johon kuuluvat kaikki solmut.

Voidaan myös etsiä virittäviä puita: depth-first antaa: 1 2 3 4 13 12 11 [12 13 4] 15 8 [15 4 3] 14 5 6 7 9 10 [9 7 6 5 14 3 2 1]

Breadth-first antaa:

1 \rightarrow [2, 11, 12]

2 \rightarrow [3, 13]

3 → [4, 14]

4 → [15]

14 → [5, 7, 9]

15 → [8]

5 → [6]

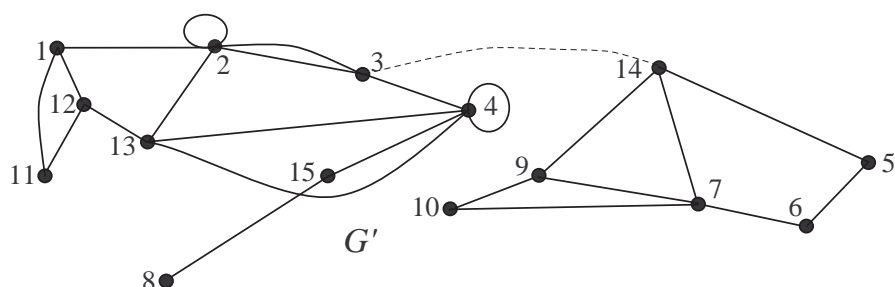
7 → [10]

tai hieman selkeämmin (!): 1 [2 [3 [4 [15 [8]], 14 [5 [6, 7 [10], 9]], [13]]], [11], [12]

b) Kaari {3, 14} on silta. Sen poisto jakaa verkon kahteen komponenttiin, jotka ovat solmujoukkojen {1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 15} ja {5, 6, 7, 9, 10, 14} virittämät.

Syvyyshaku: 1 2 3 4 13 12 11 [12 13 4] 15 8 [15 4 3 2 1], mihin tyssää.

Toinen komponentti alkaen solmusta 5: 5 6 7 9 10 [9] 14 [9 7 6 5].

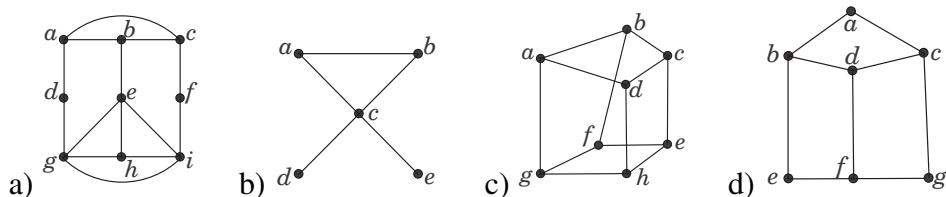


Kaari {4, 15} on silta, sen poistaminen jättää niinkään kaksi yhtenäistä komponenttia, solmujoukkojen {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14} ja {8, 15} virittämät.

Myös kaari {8, 15} on silta, sen poistaminen jättää niinkään kaksi yhtenäistä komponenttia, solmujoukkojen {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} ja {8} virittämät.

5. Onko seuraavissa verkoissa avoimia ja/tai suljettuja Hamiltonin ketjuja?

Jos on, etsi yksi sellainen, muutoin perustele kantasi.



Ratkaisut. Suljettuja Hamiltonin ketjuja on verkoissa a) ja c). Avoimia on verkoissa a), c) ja d). Etsi pyydetyt ketjut.

a) Esimerkiksi $(a, b, c, f, i, e, h, g, d, a)$ on suljettu Hamiltonin ketju.

Myös avoimia on, mitäpä?

b) Ei voi olla edes avointa Hamiltonin ketjua, sillä

- 1) ketjun olisi lähdettävä solmusta d (tai e),
- 2) ketjun pitäisi kulkea seuraavaksi solmun c kautta,
- 3) tällöin ei enää voitaisi käydä sekä solmussa a että solmussa e (tai d).

c) Esimerkiksi $(a, b, c, d, h, e, f, g, a)$ on suljettu Hamiltonin ketju.

d) Suljettuun Hamiltonin ketjuun kuuluisivat $\{a, b\}$, $\{b, e\}$, $\{e, f\}$, $\{f, g\}$, $\{g, c\}$ ja $\{c, a\}$, koska ne liittyvät kaksiasteisiin solmuihin. Jos esimerkiksi lähdettäisiin solmusta a , on mentävä solmuihin b tai c .

Olettaen että menemme b :hen, on siitä mentävä e, f, g, c, a ja solmussa d ei pystytä käymään. Vastaavasti meno solmusta a solmuun c johtaa samanlaiseen. Siis suljettua Hamiltonin ketjua ei ole.

Avoin Hamiltonin ketju on esimerkiksi (d, b, e, f, g, c, a) .

6. Selvitä piirroksin ja ”kirjanpidolla”, miten etenee tehtävän 5 verkossa a)

a) syvyyshaku- eli depth-first-menetelmä.

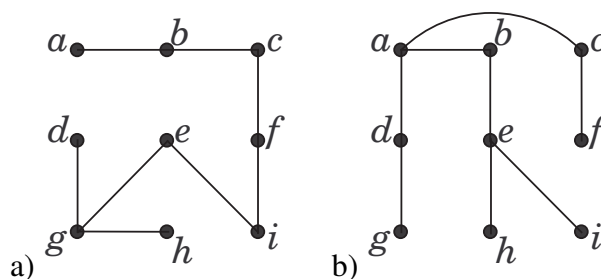
b) leveyshaku- eli breadth-first-menetelmä.

Valinnaistilanteissa valitse solmu joka on aakkosjärjestyksessä ensin.

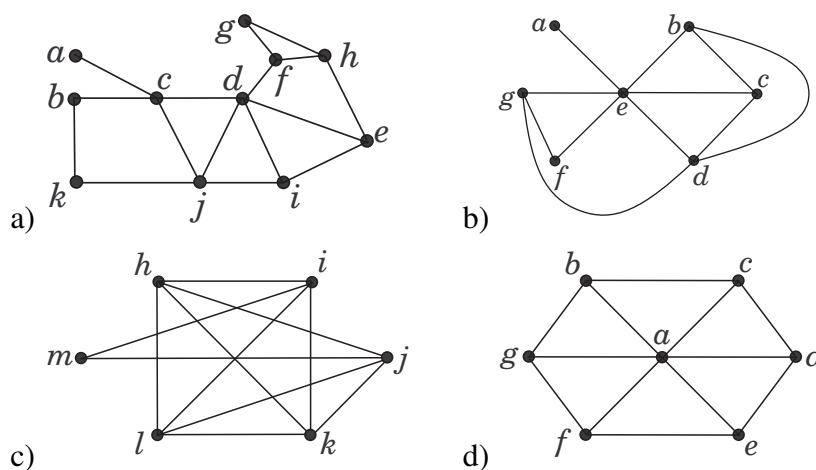
Ratkaisut. Lähtien solmusta a ja valiten aina aakkosjärjestyksessä:

depth-first: $a b c f i e g d [g] h$

breadth-first: $a [b [e [h, i]]], [c [f]], [d [g]]$



7. Onko seuraavissa verkoissa avoin ja/tai suljettu Eulerin ketju? Jos on, etsi yksi sellainen, muutoin perustele kantasi.



Ratkaisut. a) ei ole kumpikaan, sillä paritonasteisia solmuja on 6, ei 0 eikä 2.

b) Ei ole kumpikaan, sillä paritonasteisia solmuja on 4, ei 0 eikä 2.

c) Verkko on yhtenäinen ja kaikki solmut ovat parillisasteisia, joten on Eulerin verkko. Suljettu Eulerin ketju esimerkiksi $(h, i, k, j, m, i, l, j, h, k, l, h)$.

d) Ei kumpikaan, sillä paritonasteisia on 6, ei 0 eikä 2.