Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 10, ratkaisuista

1. Etsi virittävät puut suuntaamattomalle verkolle $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$, kun

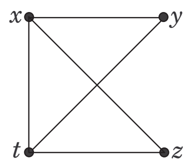
   $\mathbf{X} := \{x, y, z, t\}$,

   $E := \{\, \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, t\}, \{y, t\}, \{z, t\}\}$,

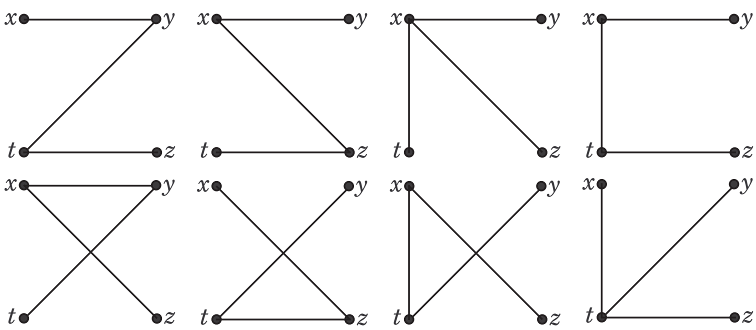
   ja Ψ on identtinen kuvaus.

   Ratkaisu. Virittäviä puita on kahdeksan erilaista, kun solmut pidetään nimettyinä.

   Esitetään aluksi verkko kaaviona:



   Kun solmut pidetään nimettyinä, erilaisia virittäviä puita on kahdeksan kappaletta:



   Lisäkysymys: Kuinka monta erilaista isomorfiatyyppiä näitä on? (vastaus: 2)

2. Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ suuntaamaton verkko, jossa on n solmua, m kaarta ja p yhtenäistä komponenttia. Osoita, että

$$m \geq n - p,$$

   ja että yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos G on metsä.

   Ratkaisu. Olkoot aliverkot $G_i = (\mathbf{X}_i, E_i, \Psi_i)$ verkon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ yhtenäiset komponentit, joita siis oli p kappaletta.

   a) Solmujoukot $\mathbf{X}_i$ muodostavat joukon $\mathbf{X}$ osituksen, samoin kaarijoukot E_i ovat pistevieraita ja $E = \cup E_i$. Koska kukin G_i on yhtenäinen, on Seurauksen 12.9.3 mukaan olemassa virittävät puut $H_i = (\mathbf{X}_i, F_i, \Gamma_i)$, joille $F_i \subseteq E_i \subseteq E$ ja $\Gamma_i = \Psi_i | F_i$.

   Silloin $\#\mathbf{X}_i = \#F_i + 1$ eli $\#F_i = \#\mathbf{X}_i - 1$, ja $\#E_i \geq \#\mathbf{X}_i - 1$, mistä (ositus!)

$$\#E = \sum_{i=1}^{p} \#E_i \geq \sum_{i=1}^{p} (\#\mathbf{X}_i - 1) = \#\mathbf{X} - p,$$

   eli $m \geq n - p$.

b) Jos $m = n - p$, niin edellisistä seuraa $\#E_i = \#\mathbf{X}_i - 1 = \#F_i$. Koska $F_i \subseteq E_i$ ja $\#E_i = \#F_i$, on (äärellisyyden nojalla) $E_i = F_i$. Mutta silloin G_i:t ovat puita ja siten G metsä.

Jos taas G on metsä, on Lauseen 12.8.4 mukaan $\#E = m = n - p = \#\mathbf{X} - p$.

3. Osoita, että äärellisessä suuntaamattomassa puussa, joka ei ole pelkästään yksi solmu, on ainakin 2 solmua, joiden aste on 1.

Ratkaisu. Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ äärellinen puu, $\#\mathbf{X} \geq 2$. Nyt jokaisen solmun aste on vähintäin yksi, sillä verkko oli yhtenäinen.

Antiteesi. Vähintäin 2-asteisia solmuja on ainakin $\#\mathbf{X} - 1$.

Olkoon $x_0 \in \mathbf{X}$ solmu, jolle $d_G(x_0) \geq 1$ ja muille solmuille $d_G(x) \geq 2$. Silloin Lauseiden 12.2.3 ja 12.8.4 mukaan

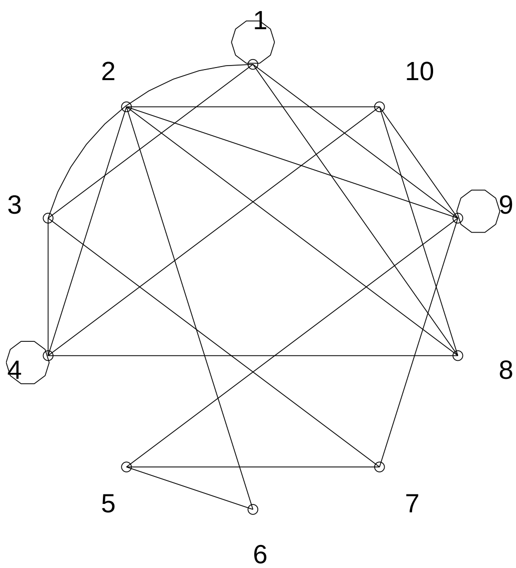
$$2\#E = \sum_{x \in \mathbf{X}} d_G(x) = d_G(x_0) + \sum_{x \neq x_0} d_G(x) \geq 1 + 2(\#\mathbf{X} - 1) > 2(\#\mathbf{X} - 1) = 2\#E.$$

Tämähän on vähintäänkin absurdia, joten antiteesi on väärä ja sen negaatio totta.

4. Etsi virittävät puut depth-first- ja breadth-first-menetelmillä suuntaamattomalle verkolle G, jonka matriisi on

$$M_G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Verkon kaavioesitys on (huomaa, että solmujen 1 ja 3 välillä on rinnakkaiset kaaret, solmusta 2 ei ole suoraa yhteyttä solmuihin 1 eikä 3!)

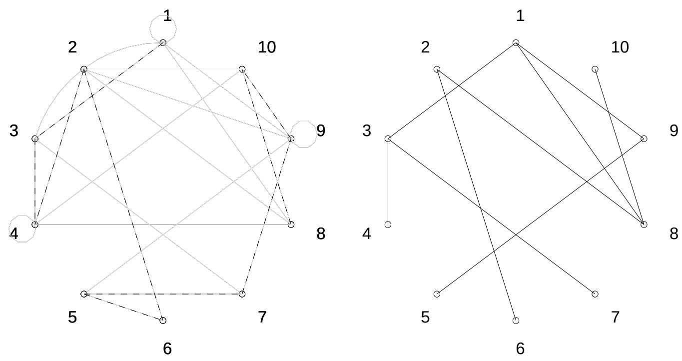


a) Syvyyshaku: päästään kaikkiin jopa ketjulla $\{1, 3, 4, 2, 6, 5, 7, 9, 10, 8\}$.

b) Leveyshaku: $1 \to 3, 8, 9$; $3 \to 4, 7$; $8 \to 2, 10$; $9 \to 5$; $2 \to 6$ tai sulkuversiona

1 [3[4, 7], 8[2[6],10], 9[5]]

Saadut virittävät puut kuvioina:



a) Syvyyshaku b) Leveyshaku

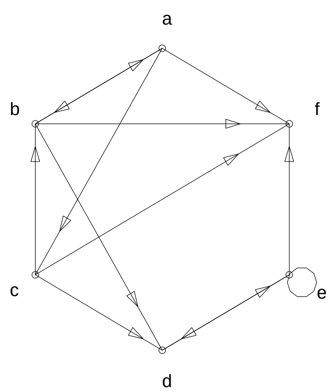
5. Olkoon $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ suunnattu verkko, jossa ei ole erillisiä solmuja, ja jossa on nuolet

$$\{(a, b), (a, c), (a, f), (b, a), (b, d), (b, f), (c, b), (c, d), (c, f), (d, e), (e, d), (e, e), (e, f)\}$$

a) Piirrä verkko nuolikaaviona.

b) Muodosta verkon G yhteysmatriisi.

Ratkaisu.



b) Verkon yhteysmatriisi on

$$M_G = \begin{array}{c} G \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6. Onko tehtävän 5 verkko G

   a) yksinkertainen tai täydellinen?

   b) yhtenäinen tai vahvasti yhtenäinen? Jos ei, määritä komponentit.

   c) Eulerin verkko?

   d) Hamiltonin verkko?

   Vihje: Yhtenäisyys: tarkastele vastaavaa suuntaamatonta verkkoa.
   Vahva yhtenäisyys: Tarkastele solmujoukon osajoukkojen virittämiä aliverkkoja.

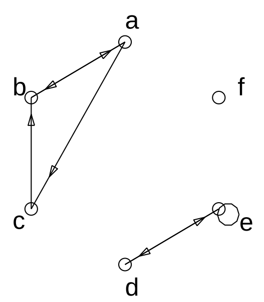
   Ratkaisut.

   a) Verkko ei ole yksinkertainen, sillä (e, e).

   Verkko ei ole täydellinen, sillä ei ole esimerkiksi (a, d) eikä (d, a).

   b) Verkko on yhtenäinen, mutta ei vahvasti yhtenäinen, sillä solmusta f ei päästä mihinkään.

   Vahvasti yhtenäiset komponentit ovat solmujoukkojen $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$ ja $\{f\}$ virittämät aliverkot:



   c) Ei ole Eulerin verkko, sillä esimerkiksi $d_G^+(a) = 3 \neq 1 = d_G^-(a)$. (Verkossa ei ole edes avoimia Eulerin polkuja.)

   d) Ei ole Hamiltonin verkko, sillä $d_G^+(f) = 0$. (Löytyy kuitenkin avoin Hamiltonin polku $\{b, a, c, d, e, f\}$.)

7. Olkoon G äärellinen suunnattu verkko yhteysmatriisina M. Osoita, että arvoilla $k \in \mathbb{N}$ tulomatriisin $(b_{ij})_{n\times n} := M^k$ alkio b_{ij} ilmoittaa erilaisten k-pituisten nuolijonojen $x_i \to x_j$ lukumäärän.

   Vihje: Rakenna induktiotodistus nuolijonon pituuden suhteen.

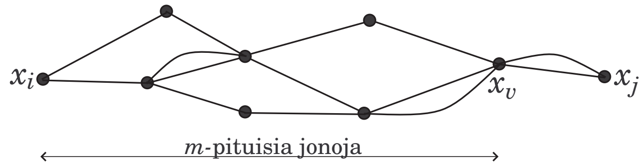
   Ratkaisu. Todistus induktiolla luvun k suhteen. Olkoon $M = (a_{ij})_{n\times n}$.

   1) $k = 1$: $(b_{ij}) = (a_{ij}) = M^1 = M$ ilmoittaa kaikki nuolet, eli 1-pituiset jonot.

   2) $k = m$. Olkoot väite tosi arvolla m, ts. $M^m = (b_{ij})$, missä

$$b_{ij} = \#\{m\text{-pituiset nuolijonot } x_i \to x_j\}.$$

   3) $k = m{+}1$. Olkoon $(c_{ij}) = M^{m+1} = M^m M$. Jokainen $m{+}1$-pituinen jono $x_i \to x_j$ koostuu m-pituisesta jonosta $x_i \to x_v$ jollekin välisolmulle x_v ja yhdestä nuolesta $x_v \to x_j$.



Käymällä näin läpi kaikki alkiot x_v saadaan tuloperiaatteen mukaan

$$\begin{aligned} c_{ij} = \sum_{v=1}^{n} b_{iv} a_{vj} &= \sum_{v=1}^{n} \#\{m\text{-pituiset } x_i \to x_v\} \cdot \#\{1\text{-pituiset } x_v \to x_j\} \\ &= \#\left\{(m+1)\text{-pituiset } x_i \to x_j\right\}. \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikilla $k \in \mathbb{N}$.