Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 11, ratkaisuista

1. Aseta 8 nollaa ja 8 ykköstä renkaaksi niin, että jokainen yhdistelmä 0000, 0001, ..., 1111 esiintyy täsmälleen kerran.

   Vihje: Tulkitse de Bruijnin jonon etsimiseksi sopivassa aakkostossa, sopivalle sanapituudelle.

   Ratkaisu. Tulkitaan de Bruijnin jonon etsimiseksi aakkostossa $S := \{0, 1\}$ sanapituudelle $n = 4$. Neljän pituisia sanoja on $N = 2^n = 16$ kpl. Tässä

   $\mathbf{X} = S^{n-1} = S^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$,

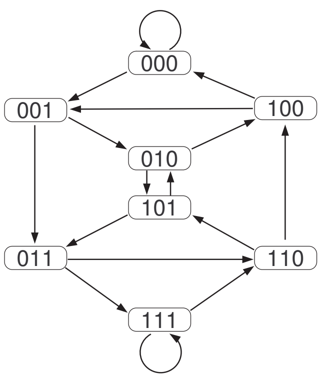
   $U = S^n = S^4 = \{0000, \ldots, 1111\}$, ja

   $\Psi : S^n \to (S^{n-1})^2$ on yhden kirjaimen siirros $\Psi(x_1x_2x_3x_4) = (x_1x_2x_3, x_2x_3x_4)$.

   Kuvataan kaikki 4-binääriluvut yllä kuvatulla tavalla:

$$
\begin{aligned}
\Psi(0000) &= (000, 000)\\
\Psi(0001) &= (000, 001)\\
\Psi(0010) &= (001, 010)\\
\Psi(0011) &= (001, 011)\\
\Psi(0100) &= (010, 100)\\
\Psi(0101) &= (010, 101)\\
\Psi(0110) &= (011, 110)\\
\Psi(0111) &= (011, 111)\\
\Psi(1000) &= (100, 000)\\
\Psi(1001) &= (100, 001)\\
\Psi(1010) &= (101, 010)\\
\Psi(1011) &= (101, 011)\\
\Psi(1100) &= (110, 100)\\
\Psi(1101) &= (110, 101)\\
\Psi(1110) &= (111, 110)\\
\Psi(1111) &= (111, 111)
\end{aligned}
$$

   Etsitään nyt Eulerin polku p, jolloin saadaan sellainen de Bruijnin jono, että kolmen numeron sarjat ovat solmuja ja neljän nuolia; ks. kuvio

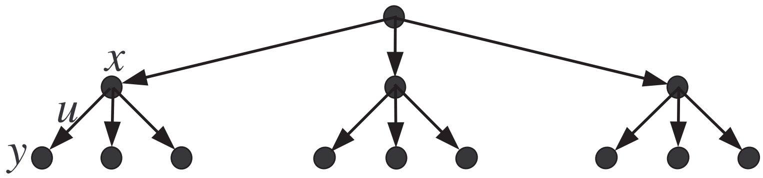


   Eräs ratkaisu on de Bruijnin jono: 0000100110101111(000). Muitakin ratkaisuja on!

2. Olkoon G äärellinen suunnattu juurellinen puu, jossa on k lehteä, h haarasolmua ja jokaisella haarasolmulla d kappaletta seuraajia. Osoita, että $(d-1)h = k-1$.

   Ratkaisu. Olkoon $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ juurellinen suunnattu puu, haaroilla d seuraajaa, haaroja h, lehtiä k.

   Esimerkiksi kun $d = 3$, $h = 4$ ja $k = 9$, on puu seuraavanlainen

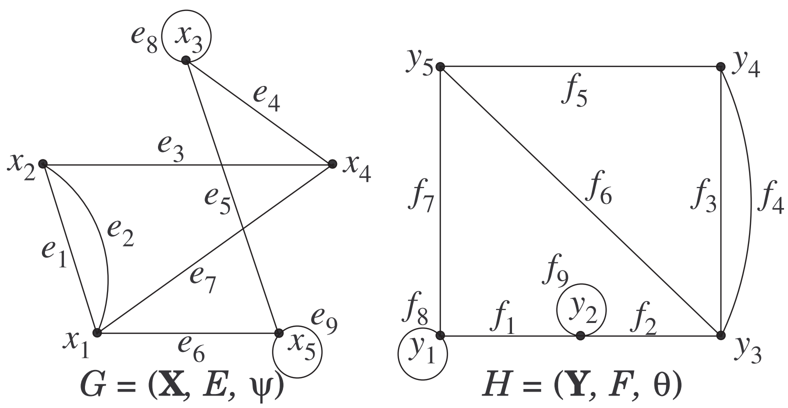


   Jokainen solmu on haara tai lehti, joten $\#\mathbf{X} = h + k$. Jos $u \in U$, on olemassa täsmälleen yksi haarasolmu x ja sen seuraaja y, joille $\Psi(u) = (x, y)$. Täten nuolia on $\#U = hd$ kappaletta. Koska puussa $\#\mathbf{X} = \#U + 1$, on

$$\#X = h + k = \#U + 1 = hd + 1,$$

   eli $(d-1)h = k-1$.

3. Näytä seuraavat verkot isomorfisiksi määritelmän mukaan, ts. keksi sopivat bijektiot solmujoukkojen ja kaarijoukkojen välille, sekä tarkasta sitten itse isomorfisuusvaatimus.



   Ratkaisu. Tutkimalla rinnakkaisen kaarten ja luuppien tilannetta päästään jyvälle: Määritellään $f(x_5) := y_2$ ja $f(x_3) := y_1$. Sitten päätellään $f(x_1) := y_3$ ja $f(x_2) := y_4$ ja lopuksi $f(x_4) := y_5$. Edelleen muodostetaan g:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & y_3 \\ f(x_2) & = & y_4 \\ f(x_3) & = & y_1 \\ f(x_4) & = & y_5 \\ f(x_5) & = & y_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g(e_1) & = & f_3 \\ g(e_2) & = & f_4 \\ g(e_3) & = & f_5 \\ g(e_4) & = & f_7 \\ g(e_5) & = & f_1 \\ g(e_6) & = & f_2 \\ g(e_7) & = & f_6 \\ g(e_8) & = & f_8 \\ g(e_9) & = & f_9 \end{array}$$

Tarkastus osoittaa, että isomorfisuus on totta:

$\Psi(e_1) = \{x_1, x_2\}$ ja $\Theta(g(e_1)) = \Theta(f_3) = \{y_3, y_4\} = \{f(x_1), f(x_2)\}$

$\Psi(e_2) = \{x_1, x_2\}$ ja $\Theta(g(e_2)) = \Theta(f_4) = \{y_3, y_4\} = \{f(x_1), f(x_2)\}$

$\Psi(e_3) = \{x_2, x_4\}$ ja $\Theta(g(e_3)) = \Theta(f_5) = \{y_4, y_5\} = \{f(x_2), f(x_4)\}$

$\Psi(e_4) = \{x_3, x_4\}$ ja $\Theta(g(e_4)) = \Theta(f_7) = \{y_1, y_5\} = \{f(x_3), f(x_4)\}$

$\Psi(e_5) = \{x_3, x_5\}$ ja $\Theta(g(e_5)) = \Theta(f_1) = \{y_1, y_2\} = \{f(x_3), f(x_5)\}$

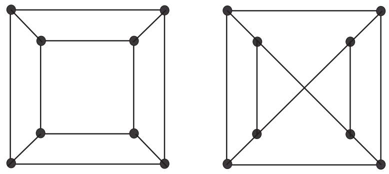
$\Psi(e_6) = \{x_1, x_5\}$ ja $\Theta(g(e_6)) = \Theta(f_2) = \{y_2, y_3\} = \{f(x_1), f(x_5)\}$

$\Psi(e_7) = \{x_1, x_4\}$ ja $\Theta(g(e_7)) = \Theta(f_6) = \{y_3, y_5\} = \{f(x_1), f(x_4)\}$

$\Psi(e_8) = \{x_3, x_3\}$ ja $\Theta(g(e_8)) = \Theta(f_8) = \{y_1, y_1\} = \{f(x_3), f(x_3)\}$

$\Psi(e_9) = \{x_5, x_5\}$ ja $\Theta(g(e_9)) = \Theta(f_9) = \{y_2, y_2\} = \{f(x_5), f(x_5)\}$

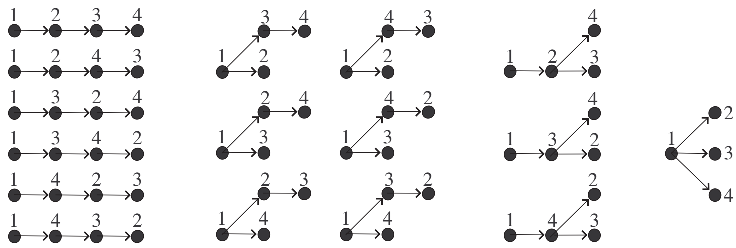
4. Ovatko seuraavat verkot isomorfiset?



Ratkaisu. Eivät, sillä esimerkiksi oikeanpuoleisessa on 5-pituisia suljettuja ketjuja, vasemmanpuoleisessa ei.

5. Piirrä kaikki suunnatut puut, joilla on solmut 1, 2, 3 ja 4 sekä juurena solmu 1. Kuinka monta eri isomorfiatyyppiä niitä on?

Ratkaisu.

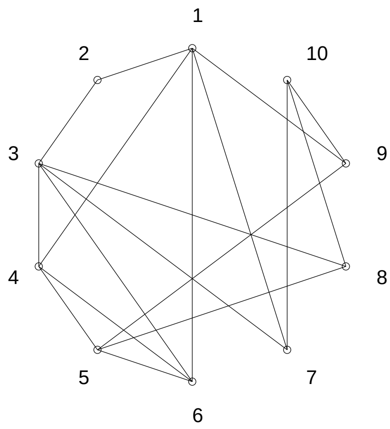


1. tyyppi, 6 kpl 2. tyyppi, 6 kpl 3. tyyppi, 3 kpl 4. tyyppi, 1 kpl

6. Onko seuraavan matriisin kuvaama verkko tasoverkko?

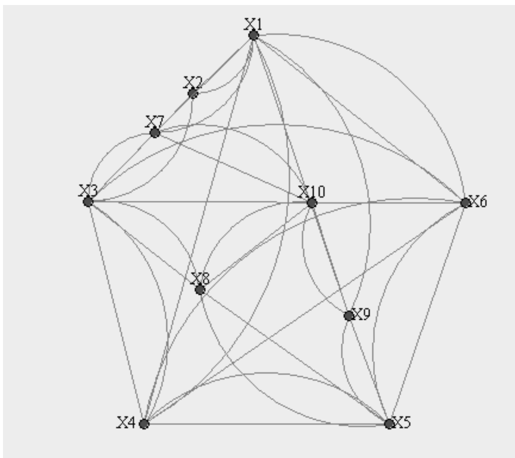
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu. Verkko on seuraavannäköinen:

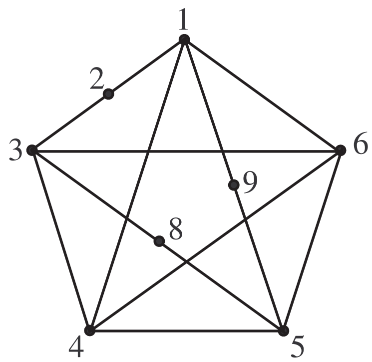


Osoitetaan Kuratowskin lauseen perusteella, että verkko ei ole tasoverkko: etsitään K_5:ksi supistuva aliverkko.

Olkoot $\mathbf{X} := \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ja $\mathbf{Y} := \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Siirellään solmuja sopivasti (voi esimerkiksi käyttää jotain piirto-ohjelmaa tai dynaamisen geometrian ohjelmaa kuten GeoGebra, tai vaikka nappeja ja lankoja etc.):

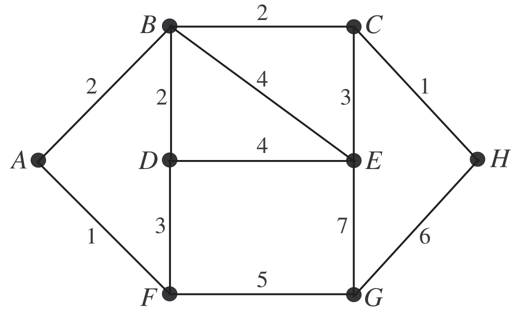


Nyt $d_G(y) \geq 4$ kaikilla $y \in \mathbf{Y}$ ja jokaisesta y on pääsy jokaiseen jotakin kautta $(2, 8, 9)$. Saadaan aliverkko



josta edelleen saadaan K_5 poistamalla 2-asteiset solmut 2, 8 ja 9. Kuratowskin lauseen perusteella se ei ole tasoverkko, koska on olemassa aliverkko, josta saadaan tietyillä sallituilla operaatioilla Kuratowskin verkko K_5 (tai $K_{3,3}$).

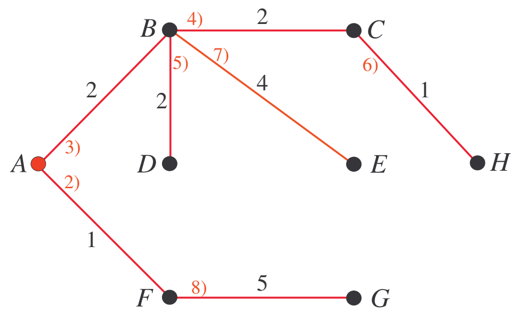
7. Etsi lyhimmät ketjut verkon



solmusta A muihin solmuihin.

Ratkaisu. Lyhimmät ketjut solmusta A muihin solmuihin saadaan Dijkstran menetelmällä kasvattamalla lähtösolmusta lähtien virittävä puu:

vaihe	solmut	kaari	paino
1)	solmu A		
2)	solmu F	$\{A, F\}$	1
3)	solmu B	$\{A, B\}$	2
4)	solmu C	$\{B, C\}$	2
5)	solmu D	$\{B, D\}$	2
6)	solmu H	$\{C, H\}$	1
7)	solmu E	$\{B, E\}$	4
8)	solmu G	$\{F, G\}$	5



Paino yhteensä 17. Lyhimmät ketjut solmusta A saadaan helposti virittävästä puusta, jossa on vain yksi reitti lähtösolmusta A kuhunkin solmuun:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	2	4	4	6	1	6	5

8. Etsi tehtävän 7 verkosta minimaalinen virittävä puu

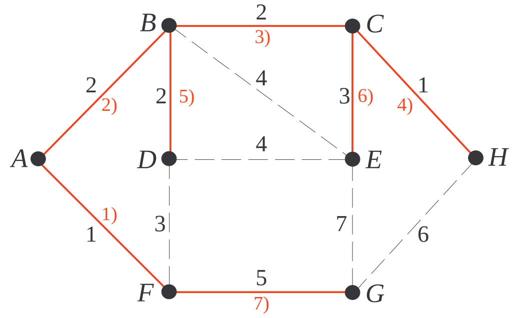
   a) Primin menetelmällä.

   b) Krushkalin menetelmällä.

Ratkaisu. a) Halvin virittävä puu saadaan Primin menetelmässä lähtemällä rakentamaan puuta halvimmasta kaaresta ja valiten puuhun lisäoksia aina halvimmasta päästä. Mukaan otetaan vaiheittain

vaihe	solmut	kaari	paino
1)	solmut A ja F	$\{A, F\}$	1
2)	solmu B	$\{A, B\}$	2
3)	solmu C	$\{B, C\}$	2
4)	solmu H	$\{C, H\}$	1
5)	solmu D	$\{B, D\}$	2
6)	solmu E	$\{C, E\}$	3
7)	solmu G	$\{F, G\}$	5
			16

Puun hinta on yhteensä 16.



b) Halvin virittävä puu saadaan Krushkalin menetelmässä lähtemällä rakentamaan puuta halvimmasta kaaresta ja valiten aina halvin mahdollinen, pitäen kuitenkin syntyvä aliverkko syklittömänä. Mukaan otetaan vaiheittain

vaihe	solmut	kaari	paino
1)	solmut A ja F	$\{A, F\}$	1
2)	solmut C ja H	$\{C, H\}$	1
3)	solmu B	$\{A, B\}$	2
5)		$\{B, C\}$	2
6)	solmu D	$\{B, D\}$	2
7)	solmu E	$\{C, E\}$	3
8)	solmu G	$\{F, G\}$	5
			16

Puun hinta on yhteensä 16.