Diskreetti matematiikka, syksy 2010
Harjoitus 12-13, ratkaisuista

1. Kuinka monta erilaista tapaa on 10 hengen seurueella istuutua pyöreän pöydän ympärille?

   Ratkaisu. Paikat identtisiä, istumajärjestys oleellinen, kun henkilöt nimettyjä, esim. 1,2,3,...,10. Tuloperiaatteella

1.	istuu mihin tahansa	= 1 tapa valita
2.	istuu muulle paikalle	= 9 tapaa valita
3.	istuu muulle paikalle	= 8 tapaa valita
4.	etc	.
5.		.
6.		.
7.		.
8.		.
9.		= 2 tapaa valita
10.	istuu viimeiselle paikalle	= 1 tapa

   Yhteensä siis $9! = 362880$ tapaa.

2. Olkoon $\mathbf{X} := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kuinka monta erilaista

   a) relaatiota

   b) symmetristä relaatiota

   c) refleksiivistä relaatiota

   on joukossa $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$?

   Ratkaisu. a) 5×5-matriisi, jokainen alkio voi olla 1 tai 0, joten erilaisia $2^{25} = 33554432$ kpl.

   b) Alakolmiomatriisi mukaanlukien diagonaali $= 15$ alkiota, joten $2^{15} = 32768$ kpl.

   c) Diagonaalilla ykköset, muut miten tahansa, joten $2^{20} = 1048576$ kpl.

3. Kokouksessa on 7 naista ja 4 miestä. Kuinka monta erilaista komiteaa joukosta voidaan valita, kun komiteassa on

   a) 3 naista ja 2 miestä?

   b) saman verran miehiä kuin naisiakin?

   c) 4 henkilöä, joista vähintään kaksi on naisia?

   d) 4 henkilöä, joista kaksi miehiä siten, että neiti puheenjohtaja ja herra sihteeri eivät molemmat ole komitean jäseninä?

   Ratkaisu. Tarjolla on siis yhteensä 7 naista ja 4 miestä.

   a) 3 naista, kaksi miestä: $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 210$.

   b) Lukumääräparit $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ mahdollisia, ja näitä on

1 mies 4:stä ja 1 nainen 7:stä	$\binom{4}{1}\binom{7}{1}$	=	$4 \cdot 7$	=	28
2 miestä 4:stä ja 2 naista 7:stä	$\binom{4}{2}\binom{7}{2}$	=	$6 \cdot 21$	=	126
3 miestä 4:stä ja 3 naista 7:stä	$\binom{4}{3}\binom{7}{3}$	=	$4 \cdot 35$	=	140
4 miestä 4:stä ja 4 naista 7:stä	$\binom{4}{4}\binom{7}{4}$	=	$1 \cdot 35$	=	35
Yhteensä					329

c) Mahdolliset lukumääräparit $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$, joita on

2 miestä 4:stä ja 2 naista 7:stä	$\binom{4}{2}\binom{7}{2}$	=	$6 \cdot 21$	=	126
1 mies 4:stä ja 3 naista 7:stä	$\binom{4}{1}\binom{7}{3}$	=	$4 \cdot 35$	=	140
0 miestä 4:stä ja 4 naista 7:stä	$\binom{4}{0}\binom{7}{4}$	=	$1 \cdot 35$	=	35
Yhteensä					301

d) 2-miehisiä komiteoita on yhteensä $\binom{4}{2}\binom{7}{2} = 6 \cdot 21 = 126$.

Näistä sellaisia, joissa puheenjohtaja ja sihteeri ovat mukana (vapaasti valittavissa yksi mies ja yksi nainen lisää) on

$$\binom{6}{1}\binom{3}{1} = 6 \cdot 3 = 18.$$

Siis kelvollisia kokoonpanoja yhteensä $126 - 18 = 108$.

4. Kuinka monella tavalla voidaan k palloa sijoittaa $n \leq k$ nimettyyn lokeroon, kun

   a) jokaiseen lokeroon tulee vähintään yksi pallo?

   b) lokeroon i tulee vähintään r_i palloa, $i \in \mathbb{N}$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_n \leq k$?

   Ratkaisu. k identtistä palloa, n nimettyä lokeroa.

   a) Olkoon n palloa jo asetettu eri lokeroihin, siis yksi kuhunkin. Asetetaan lisäksi loput $k - n$ palloa miten tahansa n lokeroon: eri tapoja on

   $$\binom{(k-n)+n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1} = K(k-1, n-1).$$

   b) Olkoon $r := \sum_{i=1}^{n} r_i \leq k$. Laitetaan aluksi r palloa lokeroihin niinkuin pitää, sitten $k - r$ mielivaltaisesti: eri tapoja on

   $$\binom{(k-r)+n-1}{k-r} = \frac{(k-r+n-1)!}{(k-r)!(n-1)!} = \binom{k-r+n-1}{n-1} = K(k-r+n-1, n-1).$$

5. Muodosta

   a) rekursiokaava, jonka ratkaisu on $a_n = 3n + 2$,

   b) differenssiyhtälö, jonka ratkaisu on $b_n = n^3$.

   Ratkaisu. a) Kun $a_n = 3n + 2$, on siis $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, $a_3 = 11$, jne.

   Peräkkäisten lukujen erotus taitaisi olla 3. Tämä näkyy yleisestikin:

   $$a_n - a_{n-1} = (3n + 2) - (3(n-1) + 2) = 3n + 2 - 3n + 3 - 2 = 3.$$

   Koska $a_0 = 2$, on rekursiokaava (tarkemmin sanottuna alkuarvotehtävä) normaalimuodossa

   $$a_n = a_{n-1} + 3,\ a_0 = 2.$$

b) Kun $b_n = n^3$, on $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 27$, $b_4 = 64$, jne.

Laskeskellaanpa taaksepäin-erotuksia:

$$\begin{aligned}
\nabla b_n &= b_n - b_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 \\
\nabla^2 b_n &= b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2} = n^3 - 2(n-1)^3 + (n-2)^3 = 6n - 3 \\
\nabla^3 b_n &= b_n - 3b_{n-1} + 3b_{n-2} - b_{n-3} = n^3 - 3(n-1)^3 + 3(n-2)^3 - (n-3)^3 = 6
\end{aligned}$$

Siis (eräs) differenssiyhtälö on $\nabla^3 b_n = 6$.

Tällä on kyllä muitakin ratkaisuja, ainakin kaikki jonot $b_n = n^3 + rn^2 + sn + t$. Alkuehdot rajoittavat kuitenkin niin, että jono $b_n = n^3$ on alkuarvotehtävän

$$\nabla^3 b_n = 6, \quad b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 8.$$

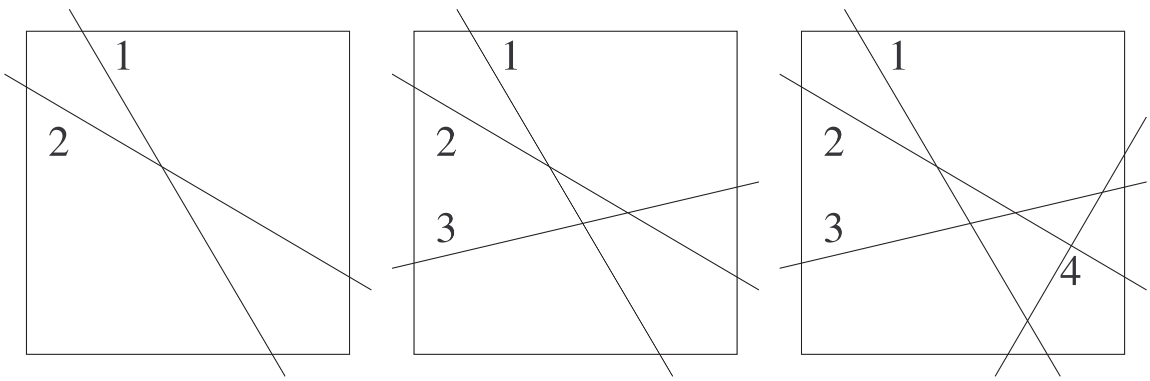
ainoa ratkaisu (ks. tarkemmin lineaarisen rekursiokaavan yksikäsitteisyys).

Maple-ratkaisu:

```
> Nabla := x -> unapply(x(n) - x(n-1), n);
> rsolve({(Nabla@@3)(b)(n) = 6, b(0) = 0, b(1) = 1, b(2) = 8},  b(n));
  -12 (n + 1) (1/2 n + 1) + 7 n + 6 + 6 (n + 1) (1/2 n + 1) (1/3 n + 1)
> simplify(%);
                                        3
                                       n
```

6. Neliön muotoiselle paperille piirretään n suoraa niin, että jokainen suorapari leikkaa toisensa, mutta mitkään kolme suoraa eivät leikkaa samassa pisteessä. Reunapisteessä leikkaamista ei oteta huomioon. Muodosta rekursiokaava, jonka ratkaisujono $(a_n)_{n\geq 0}$ ilmoittaa, kuinka moneen osaan neliö jakaantuu. Mikä on ratkaisujono?

Ratkaisu. a) Katsotaan aluksi kuvioiden avulla:



Päätellään:

0 suoraa,	1 alue	$=$	$1 + 0 = 1$
1 suora,	2 aluetta	$=$	$1 + 1 = 2$
2 suoraa,	4 aluetta	$=$	$2 + 2 = 4$
3 suoraa,	7 aluetta	$=$	$4 + 3 = 7$
4 suoraa,	11 aluetta	$=$	$7 + 4 = 11$

Yleisesti: Olkoon piirretty $n-1$ suoraa, jotka siis erottavat a_{n-1} aluetta. Kun piirretään n:s suora, se leikkaa edellisiä suoria $n-1$ pisteessä ja jakaa n aluetta kahtia. Alueita tulee siis lisää n kappaletta. Saamme rekursiokaavan

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad a_0 = 1.$$

Lasketaan vielä ratkaisujonoa: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, ...

b) Rekursiokaavan ratkaiseminen:

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad a_0 = 1.$$

Homogeeniyhtälön $h_n - h_{n-1} = 0$ karakteristinen yhtälö on

$$\alpha - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 1,$$

joten $h_n = A \cdot 1^n = A =$ vakiojono.

Yrite: $e_n = Bn^2 + Cn + D$ (ks. yritemenetelmä, Luku 5.3).

Sijoitetaan rekursioyhtälöön

$$e_n - e_{n-1} = n \quad \Longleftrightarrow \quad Bn^2 + Cn + D - (B(n-1)^2 + C(n-1) + D) = n$$

$$2Bn - B + C = n \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2B & = & 1 \\ -B + C & = & 0 \\ D & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} B & = & \frac{1}{2} \\ C & = & \frac{1}{2} \\ D & \in & \mathbf{R} \end{array} \right.$$

Valitaan $D = 0$. Siis eräs EHY:n ratkaisu on $e_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, ja siten EHY:n yleinen ratkaisu

$$a_n = h_n + e_n = A + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = A + \frac{1}{2}n(n+1).$$

Alkuehdon $a_0 = 1$ mukaan $A = 1$, ja lopulta $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

7. Ratkaise rekursiokaavat

a) $a_{n+1} - 3a_n = 0, \quad a_0 = 2,$

b) $a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 0.$

Ratkaisu. Yhtälöt ovat lineaarisia, vakiokertoimisia ja homogeenisia.

a) $a_{n+1} - 3a_n = 0$ eli $a_n - 3a_{n-1} = 0$. Sijoitus $a_n = \alpha^n$ sekä jakaminen termillä α^{n-1} antavat karakteristisen yhtälön

$$\alpha - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 3.$$

Yleinen ratkaisu on siten $a_n = A \cdot 3^n$.

Alkuehdoista $a_0 = A \cdot 3^0 = 2$ seuraa $A = 2$, joten

$$a_n = 2 \cdot 3^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

b) Rekursiokaavan $a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 0$ karakteristinen yhtälö on

$$\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = -2 \end{array} \right.$$

Yleinen ratkaisu on $a_n = A_1 \cdot 5^n + A_2 \cdot (-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

8. Ratkaise alkuarvotehtävä $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 2.$

Ratkaisu. Karakteristisen yhtälön ratkaisut:

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 = (\alpha - 3)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 3.$$

Kyseessä on kaksoisjuuri, joten yleinen ratkaisu: $a_n = A_1 3^n + A_2 n 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, A_1, $A_2 \in \mathbb{R}$. Alkuehdoista saadaan

$$\begin{cases} a_0 &= A_1 = 1 \\ a_1 &= 3A_1 + 3A_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 &= 1 \\ A_2 &= -1/3 \end{cases}$$

Täten lopullinen jono on

$$a_n = 3^n - \frac{1}{3} n 3^n = 3^n (1 - \frac{n}{3}), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

9. Ratkaise rekursiokaava $a_n = -2a_{n-2} - a_{n-4}$.

Ratkaisu. Kyseessä on homogeeninen rekursiokaava ja siihen liittyvä alkuarvotehtävä. Perusmuodosta

$$a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$$

saadaan karakteristinen yhtälö $\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = 0$, jolla on kaksinkertaiset juuret

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= i \\ \alpha_{3,4} &= -i \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$a_n = A_1 i^n + A_2 n i^n + A_3 (-i)^n + A_4 n (-i)^n, \ A_i \in \mathbb{C}.$$