Diskreetti matematiikka
2. kertauskuulustelun 8.12.2010 ratkaisuista (KA 13.6 / 20)

1. Kerro lyhyesti mutta täsmällisesti, mitä tarkoitetaan

   a) kombinatoriikassa kombinaatioilla, variaatioilla ja permutaatioilla. (3 pistettä)

   b) kahden suuntaamattoman verkon isomorfisuudella. (2 pistettä)

   Ratkaisut. (KA 3.1 / 5) Ks. määrittelyt luentomonisteesta.

2. a) Ratkaise rekursiokaava ja alkuarvotehtävä $a_{n+1} - 7a_n = 0$, $a_0 = 4$. (2 pistettä)

   b) Lukujono (a_n) koostuu luvuista $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, ja arvosta $n = 2$ lähtien kukin luku on sen välittömän edeltäjän ja välittömän seuraajan summa.
   Laske jonon 6 ensimmäistä lukua.
   Muodosta asianmukainen rekursiokaava ja yleinen ratkaisu. (3 pistettä)

   Ratkaisut. (KA 3.7 / 5) a) Rekursiokaava on lineaarinen, vakiokertoiminen ja homogeeninen. Sijoitus $a_n = \alpha^n$ vie karakteristiseen yhtälöön

$$\alpha - 7 = 0.$$

Yleinen ratkaisu on siis $a_n = A7^n$. Alkuehdosta: $a_0 = 4 = A \cdot 1$, joten ratkaisujono on

$$a_n = 4 \cdot 7^n.$$

b) Lukujonoa koskeva sääntö on kirjoitettavissa muotoon $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, joka saadaan lineaarinen, vakiokertoiminen homogeeninen rekursiokaava, uudelleen muotoiltuna

$$a_{n+1} - a_n + a_{n-1} = 0,$$

mistä on helppo laskea alkuarvojen avulla pyydetyt luvut, tässä jopa 10 alusta $1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1$.

Sijoitus $a_n = \alpha^n$ vie karakteristiseen yhtälöön $\alpha^{n+1} - \alpha^n + \alpha^{n-1} = 0$, josta jakamalla potenssilla α^{n-1} saadaan KY

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0.$$

Sen ratkaisujen $\alpha = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ avulla saadaan kysytty yleinen ratkaisu

$$a_n = A\left(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\right)^n + B\left(\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\right)^n.$$

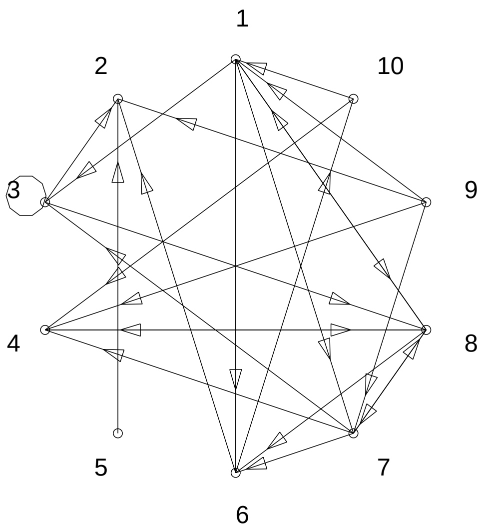
Maple antaa alkuarvotehtävän ratkaisun muodossa (alla ohje)

$$a_n = -1/3\,i\left(3/2\,\sqrt{3} + 3/2\,i\right)\left(1/2 + 1/2\,i\sqrt{3}\right)^n - 1/3\,i\left(-3/2\,\sqrt{3} + 3/2\,i\right)\left(1/2 - 1/2\,i\sqrt{3}\right)^n$$

```
[> rsolve({a(n) = a(n-1) + a(n+1), a(0)=1,a(1)=2} , a);
[> latex(%)
```

(minkä tulos on siirretty LaTeX-dokumenttiin lisäten alkuun $a_n =$)

3. Olkoot verkon G solmujoukko $\mathbf{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ja matriisi



$$M_G := \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

a) Onko verkossa Eulerin, onko Hamiltonin polkuja? (1 piste)

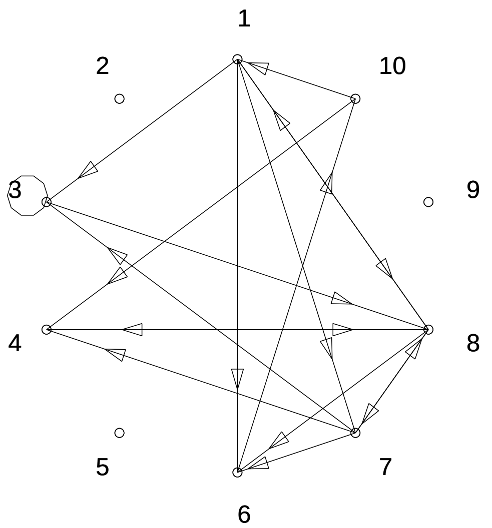
b) Onko verkko yhtenäinen, onko se vahvasti yhtenäinen? (2 pistettä)

c) Etsi verkon vahvasti yhtenäiset komponentit. (2 pistettä)

Ratkaisut. (KA 3.5 / 5) a) Ei ole Eulerin eikä Hamiltonin polkuja. Eulerin polun pitäisi sisältää nuoli $(5, 2)$ ja Hamiltonin polun kulkea solmun 5 kautta. Joka tapauksessa polun pitäisi alkaa solmusta viisi ja seuraavasta solmusta 2 ei päästä mihinkään!

b) Verkko on yhtenäinen, koska vastaava suuntaamaton verkko (kun nuolet latistetaan kaariksi) on yhtenäinen. Tämä nähdään esimerkiksi siten, että solmusta 1 on pääsy kaikkiin muihin solmihin. Verkko ei ole vahvasti yhtenäinen, koska esimerkiksi solmuun 5 ei ole yhtään polkua solmusta 1 (eikä mistään muustakaan, toki) .

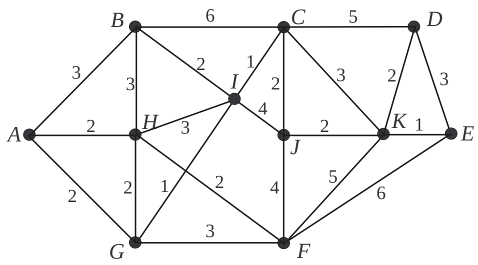
c) Suurin vahvasti yhtenäinen komponentti on solmujoukon $\{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ virittämä aliverkko H ja sen matriisi on (muihin solmuihin liittyvät nuolet on nollattu, ota huomioon matriisista vain yo. solmuja vastaavat rivit ja sarakkeet)



$$M_H := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Muut vahvasti yhtenäiset komponentit ovat pelkät yksiöiden $\{2\}$, $\{5\}$ ja $\{9\}$ muodostamat aliverkot.

4. Tarkastellaan eräitä verkkoalgoritmeja painotetussa verkossa



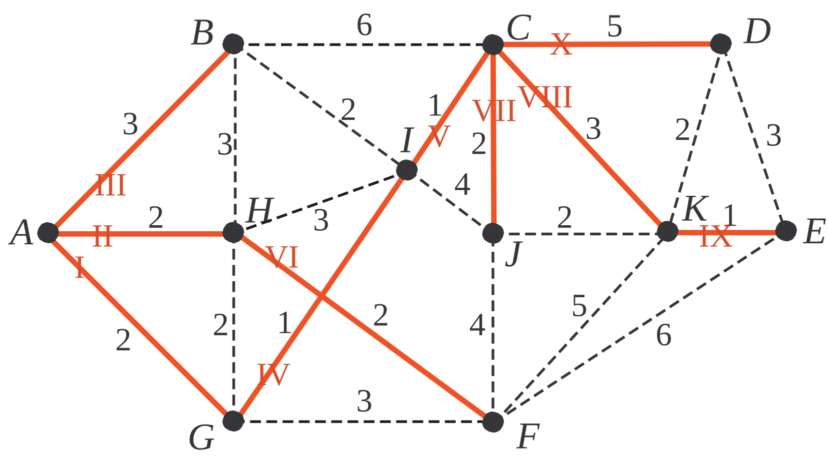
Valintatilanteissa noudata tuttua kriteeriä: valitse aina solmu, joka on aakkosissa mahdollisimman alussa. Piirrä puut kuvioihin, mutta näytä prosessin eteneminen selvästi myös taulukoimalla.

a) Etsi Dijkstran menetelmällä lyhimmät ketjut verkon solmusta A muihin solmuihin. Mikä on saatavan virittävän puun yhteispaino?

b) Etsi Primin menetelmällä minimaalinen virittävä puu. Mikä on sen yhteispaino?

Ratkaisut. (KA 3.3 / 5) a) Lyhimmät ketjut solmusta A muihin solmuihin saadaan Dijkstran menetelmällä kasvattamalla lähtösolmusta lähtien virittävä puu:

vaihe	solmut	kaari	paino	etäisyys A:sta
0	solmu A			
1	solmu G	$\{A, G\}$	2	2
2	solmu H	$\{A, H\}$	2	2
3	solmu B	$\{A, B\}$	3	3
4	solmu I	$\{G, I\}$	1	3
5	solmu C	$\{I, C\}$	1	4
6	solmu F	$\{H, F\}$	2	4
7	solmu J	$\{C, J\}$	2	6
8	solmu K	$\{C, K\}$	3	7
9	solmu E	$\{K, E\}$	1	8
10	solmu D	$\{C, D\}$	5	9
			22	



Tämän virittävän puun yhteispaino 22 yksikköä.

b) Halvin virittävä puu saadaan Primin menetelmässä lähtemällä rakentamaan puuta halvimmasta kaaresta ja valiten puuhun lisäoksia aina halvimmasta päästä. Mukaan otetaan vaiheittain

vaihe	solmut	kaari	paino
1)	solmut C ja I	$\{C, I\}$	1
2)	solmu G	$\{I, G\}$	1
3)	solmu A	$\{G, A\}$	2
4)	solmu H	$\{A, H\}$	2
5)	solmu B	$\{I, B\}$	2
6)	solmu F	$\{H, F\}$	2
7)	solmu J	$\{C, J\}$	2
8)	solmu K	$\{J, K\}$	2
9)	solmu E	$\{K, E\}$	1
10)	solmu D	$\{K, D\}$	2
			17

Puun hinta on yhteensä 17.