$$\partial_\varphi f(z_0) = \lim_{r \to 0+} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)}{re^{i\varphi}} .$$

yhtälöitä (3.5) seuraa, että $\partial_\varphi f(z_0)$ on aina olemassa ja että

$$\partial_\varphi f(z_0) = f_z(z_0) + f_{\bar z}(z_0)\, e^{-2i\varphi}.$$

Derivaatan $\partial_\varphi f(z_0)$ arvo on siis suunnasta $\varphi$ riippumaton, jos ja vain jos $f_{\bar z}(z_0) = 0$. Jos tämä pätee kaikissa pisteissä $z_0 \in G$, niin $f$ on konforminen ja käänteisesti. Konformikuvaukselle $f: G \to G'$ on voimassa

$$\partial_\varphi f(z_0) = f'(z_0)$$

kaikilla $z_0 \in G$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$.
Jos $\varphi = 0$, saadaan

$$\partial_0 f(z_0) = f_x(z_0).$$

Jos asetetaan $\varphi = \pi/2$, niin

$$\partial_{\frac{\pi}{2}} f(z_0) = -i\, f_y(z_0).$$

Koska oletuksen mukaan $|f_z(z_0)| \geq |f_{\bar z}(z_0)|$, saadaan kolmioepäyhtälöstä

$$|f_z(z_0)| - |f_{\bar z}(z_0)| \le |\partial_\varphi f(z_0)| \le |f_z(z_0)| + |f_{\bar z}(z_0)|,$$

joten

$$(5.1)\quad |\partial_{\varphi_1} f(z_0)| = \max_{\varphi\in\mathbb{R}} |\partial_\varphi f(z_0)| = |f_z(z_0)| + |f_{\bar z}(z_0)|$$

kun $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg \dfrac{f_{\bar z}(z_0)}{f_z(z_0)}$, sekä

$$(5.2)\quad |\partial_{\varphi_2} f(z_0)| = \min_{\varphi\in\mathbb{R}} |\partial_\varphi f(z_0)| = |f_z(z_0)| - |f_{\bar z}(z_0)|,$$

kun $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. (Jos $f_z(z_0) = 0$, niin $\partial_\varphi f(z_0) = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathbb{R}$.)
Kaavoista (5.1) ja (5.2) saadaan

$$(5.3)\quad J(z_0) = \max|\partial_\varphi f(z_0)| \min|\partial_\varphi f(z_0)|.$$

Näin ollen $J(z_0) > 0$ jos ja vain jos $\min|\partial_\varphi f(z_0)| > 0$.

Olkoon $\alpha$ derivaattakuvaus pisteessä $z_0$. Lauseen 1.1 mukaan $\alpha$ kuvaa yksikköympyrän $K(0,1)$ ellipsiksi, jonka isoakselin puolikkaan pituus on $\max|\partial_\varphi f(z_0)|$ ja pikkuakselin puolikkaan pituus on

$\min |\partial_\varphi f(z_0)|$. Näin ollen $J(z_0)$ saadaan kertomalla ellipsin $\alpha(K(0,1))$ akselien puolikkaiden pituudet keskenään. Huomaamme vielä, että summatun derivaatan maksimia vastaava suunta

$$(5.4) \qquad \varphi_1 = \tfrac{1}{2} \arg \frac{f_{\bar z}(z_0)}{f_z(z_0)}$$

kuvautuu isoakselille samoin kuin minimiä vastaava suunta $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ pikkuakselille.

Jos $f$ on konforminen, niin $\max |\partial_\varphi f(z_0)| = \min |\partial_\varphi f(z_0)|$. Erikoisesti on $\alpha(K(0,1))$ ympyrä. Koska derivaattakuvaus $\alpha$ on tällöin yhdenmuotoisuuskuvaus, on $f$ pienimmiltä osilta (im Kleinen) yhdenmuotoisuuskuvaus.

Sen mittaamiseksi, kuinka paljon mielivaltainen $f$ muuttaa kuvioiden muotoa im Kleinen, otetaan käyttöön <u>dilataatio-osamäärä</u>

$$D(z_0) = \frac{\max |\partial_\varphi f(z_0)|}{\min |\partial_\varphi f(z_0)|} = \frac{|f_z(z_0)| + |f_{\bar z}(z_0)|}{|f_z(z_0)| - |f_{\bar z}(z_0)|}$$

joka on määritelty kaikissa pisteissä, joissa $J(z_0) > 0$. Määritelmän perusteella on $D(z_0) \geq 1$; $D(z_0) = 1$ kaikilla $z_0 \in G$ jos ja vain jos $f$ on konformikuvaus.

Määritelmä. Jos $J > 0$ ja $D$ on rajoitettu alueessa $G$, niin $f$ on differentioituva kvasikonformikuvaus. Jos $D(z) \leq K$, niin $f$ on differentioituva $K$-kvasikonformikuvaus.

Differentioituvat 1-kvasikonformikuvaukset ovat siis konformisia ja kääntäen. Differentioituvat kvasikonformikuvaukset ovat olleet vanhin kauan tunnettuja (Grötsch 1928, Gauss n. 1800). Varsinaisen merkityksensä kvasikonformikuvaukset saavuttivat vasta silloin, kun määritelmä voitiin laajentaa koskemaan myös ei-differentioituvia kuvauksia (1936–1954; Lavrentiev, Ahlfors, Teichmüller, Pfluger, Bers etc.).

Hyvin erilaisilla kuvauksilla voi olla sama dilataatio-osamäärä; koska $D(z_0)$:n arvo ei riipu suunn natun derivaatan maksimin suunnasta $\varphi_1$. Tarkemman kuvan $f$:n lokaalista käyttäytymisestä antaa <u>kompleksidilataatio</u>

$$\mu = f_{\bar z} / f_z .$$

Kaavan (5.4) mukaan on $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg \mu(z_0)$. Dilataatio-osamäärän ja kompleksidilataation välillä vallitsee yhteys

$$(5.5) \qquad D = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|} .$$

Kompleksidilataatio on määritelty pisteissä $z_0 \in G$, joissa $f_z(z_0) \neq 0$. Koska $J(z_0) = |f_z(z_0)|^2 - |f_{\bar z}(z_0)|^2$, on tämä ehto täytetty, jos $J(z_0) > 0$.

Yhtälöstä (5.5) seuraa, että $f$ on differentioituva $K$-kvasikonformikuvaus, jos ja vain jos

$$|\mu| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1 .$$

Huomattakoon vielä, että ehto $D(z_0) \leq K$ on kaavan (5.3) nojalla yhtäpitävä ehdon

$$\max|\partial_\varphi f(z_0)| \min|\partial_\varphi f(z_0)| = J(z_0)$$

$$\min|\partial_\varphi f(z_0)| = \frac{J(z_0)}{\max|\partial_\varphi f(z_0)|}$$

$$D(z_0) = \frac{\max|\partial_\varphi f(z_0)|}{\min|\partial_\varphi f(z_0)|} = \frac{\max|\partial_\varphi f(z_0)|^2}{J(z_0)}$$



$$\max|\partial_\varphi f(z_0)|^2 \leq K\, J(z_0)$$

kanssa.

## 6. Gaussin perussuureet E, F ja G

Olkoon $f = u + iv$ alueen $G$ differentioituva ja kiertosuunnan säilyttävä homeomorfismi alueelle $G'$. Kaavasta (3.7) seuraa

$$\partial_\varphi f(z_0) = (f_x(z_0)\cos\varphi + f_y(z_0)\sin\varphi)\, e^{-i\varphi},$$

mistä sijoittamalla $f_x = u_x + iv_x$ ja $f_y = u_y + iv_y$ saadaan

$$|\partial_\varphi f(z_0)|^2 = (u_x(z_0)^2 + v_x(z_0)^2)\cos^2\varphi +$$

$$2\,(u_x(z_0)u_y(z_0) + v_x(z_0)v_y(z_0))\cos\varphi\sin\varphi +$$

$$(u_y(z_0)^2 + v_y(z_0)^2)\sin^2\varphi .$$

Ottamalla käyttöön merkinnät

$$E = E(z_0) = u_x(z_0)^2 + v_x(z_0)^2$$

$$F = F(z_0) = u_x(z_0)\,u_y(z_0) + v_x(z_0)\,v_y(z_0)$$

$$G = G(z_0) = u_y(z_0)^2 + v_y(z_0)^2$$

$$Q(dx, dy) = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

saadaan

$$|\partial_\varphi f(z_0)|^2 = Q(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Johdamme uudestaan joitakin suunnatun derivaatan ominaisuuksia käyttämällä neliömuotoa $Q$.

Neliömuodon determinantille saadaan arvoksi

$$EG - F^2 = (u_x v_y - u_y v_x)^2 = J^2,$$

joten $Q$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos $J > 0$. Näin ollen $\min |\partial_\varphi f(z_0)| > 0$ aina ja vain, kun $J(z_0) > 0$ (vrt. kaava (5.3)).

virhe

Lausekkeen $|\partial_\varphi f(z_0)|^2$ maksimi $M$ ja minimi $m$ saadaan etsimällä $Q(u,v)$:n ääriarvot joukossa $g(u,v) = u^2+v^2 = 1$. Ottamalla käyttöön Lagrangen kertoja $\lambda$ ääriarvokohdat löydetään

$$\begin{cases} u^2+v^2 \\ 2Eu + 2Fv - \lambda\, 2u = 0 \\ 2Fu + 2Gv - \lambda\, 2v = 0 \end{cases}$$



ratkaisemalla yhtälöryhmä (vrt. O. Lehto, Differentiaali- ja integraalilaskenta II )

$$(6.1)\quad \begin{cases} u^2+v^2-1 = 0 \\ Q_u(u,v) - \lambda\, g_u(u,v) = 0 \\ Q_v(u,v) - \lambda\, g_v(u,v) = 0 \end{cases}$$

$\lambda$:n $u$:n ja $v$:n suhteen. Kahdesta viimeistä yhtälöä saadaan muotoa

$$u = (Eu + Fv)/\lambda \quad , \quad v = (Fu + Gv)/\lambda \, ,$$

joten (kertomalla puolittain $u$:lla ja $v$:llä)

$$u^2 = (Eu^2 + Fuv)/\lambda \, , \quad v^2 = (Fuv + Gv^2)/\lambda .$$

Käyttämällä ensimmäistä yhtälöä saadaan

$$u^2 + v^2 = (Eu^2 + 2Fuv + Gv^2)/\lambda = 1 .$$

Jos kolmikko $(u_0, v_0, \lambda_0)$ toteuttaa (6.1):n, on piste $(u_0, v_0)$ ääriarvokohta ja

$$\lambda_0 = Eu_0^2 + 2Fu_0v_0 + Gv_0^2 = Q(u_0, v_0) .$$

Etsityt ääriarvot saadaan siis eliminoimalla (6.1):stä ensin $u$ ja $v$

ja ratkaisemalla tämän jälkeen $\lambda$.

Ryhmän (6.1) kahden viimeisen yhtälön muodostamalla ryhmällä

$$(6.2)\quad \begin{cases} (E-\lambda)u + Fv = 0 \\ Fu + (G-\lambda)v = 0 \end{cases}$$

on oltava ei-triviaaleja ratkaisuja $(u, v)$. Näin ollen ääriarvokohdat $\lambda$ löydetään asettamalla (6.2):n determinantti $= 0$ eli päädytään yhtälöön

$$(6.3)\quad \begin{vmatrix} E-\lambda & F \\ F & G-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Koska (6.3):lla on korkeintaan kaksi juurta, ovat ratkaisut välttämättä haetut ääriarvot $M$ ja $m$. Näille saadaan arvoiksi

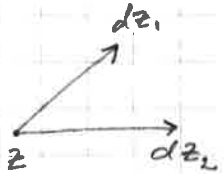
$$m = \tfrac{1}{2}(E+G - \sqrt{(E+G)^2 - 4J^2}$$

$$M = \tfrac{1}{2}(E+G + \sqrt{(E+G)^2 - 4J^2}.$$

Juuret ovat reaalisia, sillä

$$(E+G)^2 - 4J^2 = (E-G)^2 + 4F^2 \geq 0.$$

Dilataatio-osamäärälle saadaan




lauseke $D(z_0) = \sqrt{\frac{M}{m}}$. Tämä on tapana sieventää käyttämällä yhtälöitä

$$M + m = E + G, \quad Mm = J^2 = EG - F^2.$$

Tällöin on

$$1 \le \frac{M+m}{2\sqrt{Mm}} = \frac{E+G}{2J} = k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right),$$

mistä

$$D(z_0) = \sqrt{\frac{M}{m}} = k + \sqrt{k^2 - 1}.$$

## 7. Kulmien kuvautuminen

Tarkastellaan edellisen pykälän kuvausta $f : G \to G'$ ja oletetaan että $J > 0$ alueessa $G$. Silloin neliömuoto

$$Q(dx, dy) = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

on positiivisesti definiitti kaikissa alueen $G$ pisteissä.
Olkoot $dz_1 = dx_1 + i\,dy_1$ ja $dz_2 =$

$dx_2 + i\,dy_2$ kaksi pisteestä $z \in G$ lähtevää vektoria. Koska $Q$ on positiivisesti definiitti, voidaan määritellä $dz_1$:n ja $dz_2$:n sisätulo kaavalla

$$(7.1)\quad dz_1 \cdot dz_2 = E\,dx_1 dx_2 + F(dx_1 dy_2 + dx_2 dy_1) + G\,dy_1 dy_2 .$$

Erikoisesti on

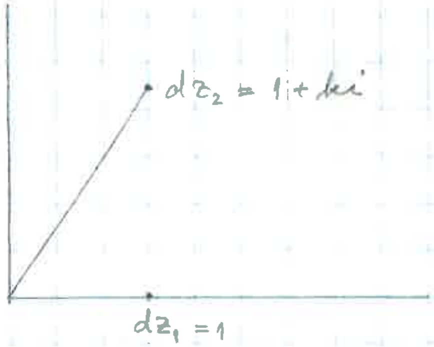
$$\| dz \|^2 = dz \cdot dz = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2 .$$

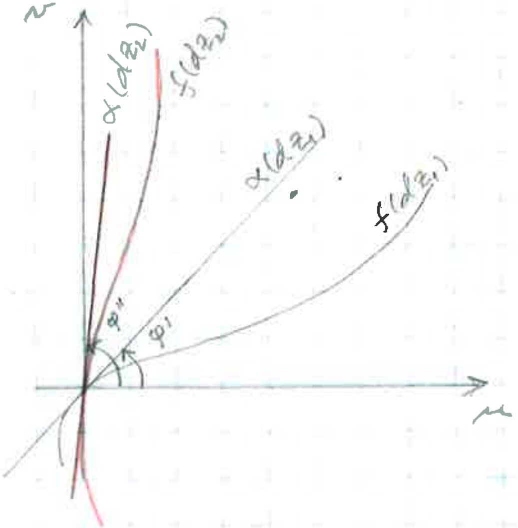
Kuvaus $f$ liittää siis jokaiseen pisteeseen $z \in G$ sisätuloavaruuden, jonka pisteitä $dz$ kutsutaan esim. tangenttivektoreiksi. Kahden tangenttivektorin $dz_1$ ja $dz_2$ välisen kulman kosini määritellään luonnollisesti asettamalla

$$\cos(dz_1, dz_2) = \frac{dz_1 \cdot dz_2}{\| dz_1 \| \| dz_2 \|} .$$

Schwarzin epäyhtälöstä $|dz_1 \cdot dz_2| \le \| dz_1 \| \cdot \| dz_2 \|$ seuraa, että

$$-1 \le \cos(dz_1, dz_2) \le 1 .$$






Jos valitaan $dz = \cos\varphi + i\sin\varphi$, niin

$$|\partial_\varphi f(z)| = \|\cos\varphi + i\sin\varphi\|,$$

joten $|\partial_\varphi f(z)|$ on euklidisen yksikkövektorin $\cos\varphi + i\sin\varphi$ normi tangenttitason sisätulon avulla laskettuna.

Lause 7.1. Kuvaus $f$ kuvaa sisätulon (7.1) avulla mitatun kulman yhtä suureksi euklidiseksi kulmaksi.

Todistus. Valitaan $z_0 \in G$. Siirtojen avulla voidaan tilanne normeerata siten, että $z_0 = f(z_0) = 0$.

Valitaan $dz_1 = 1$ ja $dz_2 = 1+ki$. $f$ kuvaa $dz_1$:n ja $dz_2$:n määräämät suorat säännöllisiksi käyriksi, $f$:n derivaattakuvaus $\alpha$ kuvaa $dz_1$:n ja $dz_2$:n näiden käyrien tangenteiksi origossa.

Kaavoista (3.2) saadaan $\alpha(dz_1)$:n kulmakertoimeksi

$$\tan\varphi' = \frac{v_x(z_0)}{u_x(z_0)}$$

sekä $\alpha(dz_2)$:n kulmakertoimeksi

$$\tan\varphi'' = \frac{v_x(z_0) + k\, v_y(z_0)}{u_x(z_0) + k\, u_y(z_0)}$$

Silloin on $\alpha(dz_1)$:n ja $\alpha(dz_2)$:n välisen kulman tangentille arvo

$$\tan(\varphi'' - \varphi') = \frac{\tan\varphi'' - \tan\varphi'}{1 + \tan\varphi' \tan\varphi''}$$

$$= \frac{k(u_x v_y - u_y v_x)}{u_x^2 + v_x^2 + k(u_x u_y + v_x v_y)} = \frac{k J}{E + k F}$$

Toisaalta on

$$\cos(dz_1, dz_2) = \frac{E + Fk}{\sqrt{E(E + 2Fk + Gk^2)}},$$

jolloin

$$\tan(dz_1, dz_2) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(dz_1, dz_2)} - 1}$$

$$= \frac{kJ}{E + kF}.$$

Väite seuraa mielivaltaisille tangenttivektoreille $dz_1$ ja $dz_2$ välittömästi. □

Tutkimme seuraavaksi, kuinka euklidisen kulman suuruus muuttuu kuvauksessa $f$. Valitaan $z_0 \in G$ ja tarkastellaan kulmia $\varphi$, joiden kärki on $z_0$:ssa ja joiden toinen kylki on kiinteä (esim. x-akselin suuntainen). Kulman $\varphi$ kyljet kuvautuvat säännöllisiksi käyriksi, jotka kulkevat pisteen $f(z_0)$ kautta. Näiden käyrien tangenttien välistä kulmaa $\omega(\varphi)$ kutsutaan $\varphi$:n <u>kuvaksi</u>. Jos vaaditaan, että $\omega(0) = 0$ ja että $\omega$ on $\varphi$:n kasvava funktio, niin $\omega(\varphi)$ on määritelty yksikäsitteisellä tavalla.

<u>Lause 7.2.</u> (Taari) Jos $\varphi > 0$, niin

$$\frac{1}{D(z_0)} \leq \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} \leq D(z_0).$$

Jos $D(z_0) > 1$, niin epäyhtälöt ovat aitoja. Jos $D(z_0) = 1$, niin $\omega(\varphi) = \varphi$.

<u>Todistus.</u> Edellisen todistuksen nojalla on

$$\tan \omega(\varphi) = \frac{J \tan \varphi}{E + F \tan \varphi},$$

$$\omega(\varphi) = \arctan \frac{J \tan \varphi}{E + F \tan \varphi},$$

joten $\omega$ on $\varphi$:n derivoituva funktio. Derivoimalla saadaan

$$(7.2) \quad \omega'(\varphi) = \frac{J}{Q(\cos \varphi, \sin \varphi)} = \frac{J}{|\partial_\varphi f(z_0)|^2},$$

Koska $J = \max |\partial_\varphi f(z_0)| \min |\partial_\varphi f(z_0)|$, on

$$\frac{1}{D(z_0)} = \frac{\min |\partial_\varphi f(z_0)|}{\max |\partial_\varphi f(z_0)|} \le \omega'(\varphi) \le \frac{\max |\partial_\varphi f(z_0)|}{\min |\partial_\varphi f(z_0)|} = D(z_0)$$

Jos $D(z_0) = 1$, on $\omega'(\varphi) = 1$ ja $\omega(\varphi) = \varphi$ kaikilla $\varphi$.

Olkoon $D(z_0) > 1$. Silloin $D(z_0)^{-1} \le \omega'(\varphi) \le D(z_0)$, missä yhtäsuuruudet ovat välillä $[0, 2\pi]$ voimassa ainoastaan kahdella eri arvolla. Koska $\omega'(\varphi)$ on $\varphi$:n jatkuva funktio, seuraa väite integroimalla. $\square$

<u>Korollaari</u> Jos $f$ on konforminen, niin $f$ säilyttää euklidiset kulmat.

<u>Todistus.</u> Konformisuus on määritelty ehdon $f_{\bar z} = 0$ avulla. Mutta silloin on

$D(z) = 1$ kaikissa pisteissä $z \in G$. □

Huomautus. Korollaarista seuraa myös Lauseesta 7.1. Cauchy–Riemannin yhtälöiden nojalla on näet $E = G$ ja $F = 0$, jolloin sisätulo (7.1) määrittelee euklidisen kulman.

Huomattakoon, että Lauseiden 7.1 ja 7.2 todistuksissa käytettiin $f$:n differentioituvuutta ainoastaan yhdessä pisteessä $z_0$.

Jos Lauseessa 7.2 oletetaan, että $f$ on $K$-kvasikonforminen, niin

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} \leq K$$

kaikille kulmille $\varphi$, joiden kärki on alueessa $G$. Kuvaus on siis melkein konforminen, t.s. kulmat muuttuvat rajoitetusti.

Korollaarille käänteinen tulos on myös voimassa:

Lause 7.3. Jos $\omega(\varphi) = \varphi$ kaikille alueen $G$ kulmille $\varphi$, niin $f: G \to G'$ on konforminen.

Todistus. Tarkastellaan kulmia $\varphi$, joiden yhteisenä kärkenä on annettu piste $z_0 \in G$. Kaavan (7.2) perusteella on

$$1 = \frac{J}{|\partial_\varphi f(z_0)|^2} \quad \text{kaikilla } \varphi,$$

joten erikoisesti $\max|\partial_\varphi f(z_0)| = \min|\partial_\varphi f(z_0)|$. Tällöin $D(z_0) = 1$, mist. väite seuraa. □

## 8. Riemannin geometriaa

Edellisessä pykälässä otimme differentiaituvan homeomorfismin $f = u + iv$ avulla käyttöön neliömuodon

$$(8.1) \quad ds^2 = Q(dx, dy) = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2,$$

missä

$$(8.2) \quad \begin{cases} E = u_x^2 + v_x^2 \\ F = u_x u_y + v_x v_y \\ G = u_y^2 + v_y^2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} EG - F^2 &> 0 \\ E &> 0 \\ G &> 0. \end{aligned}$$

Lähdemme nyt liikkeelle päinvastaiseen suuntaan. Oletetaan, että $E$, $F$ ja $G$ ovat alueessa $G$ määriteltyjä (yleensä jatkuvia) reaaliarvoisia funktioita siten, että $EG - F^2 > 0$ ja $E > 0$. Silloin neliömuoto (8.1) on positiivisesti definiittinen kaikissa $G$:n pisteissä, joten sen avulla voidaan määritellä sisätulo kaikille samasta pisteestä lähteville tangenttivektoreille $dz_1$ ja $dz_2$ (kts. kaava (7.1)). Näin ollen saadaan $E$:n, $F$:n ja $G$:n avulla mitta alueen $G$ kulmille.

$E$, $F$ ja $G$ määräävät toisaalta alueessa $G$ ns. <u>Riemannin metriikan</u> s. Kahden pisteen $z_1, z_2 \in G$ etäisyys määritellään seuraavasti: Jos $\gamma : I \to G$ on paloittain säännöllinen polku ($\gamma(t) = x(t) + i y(t)$), niin asetetaan

$$(8.3) \quad \int_\gamma ds = \int_0^1 \Big( E(\gamma(t))\, x'(t)^2 + 2F(\gamma(t))\, x'(t) y'(t) + G(\gamma(t))\, y'(t)^2 \Big)^{1/2} dt ,$$

jolloin (8.3) on $\gamma$:n <u>pituus</u> metriikan s. Tämän jälkeen asetetaan

$$s(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} ds,$$

missä $\gamma$ käy läpi kaikki paloittain säännölliset polut $z_1$:stä $z_2$:een. (Joka tapauksessa $s$ on pseudometriikka; ehto $s(z_1, z_2) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$ vaatisi lähempää tarkastelua.)

Kutsumme sisätulon (7.1) avulla mitattuja kulmia <u>kulmiksi Riemannin metriikassa</u> $s$. Kun $G$ varustetaan metriikalla $s$ ja sen määräämällä kulmanmitalla, niin puhutaan alueen $G$ <u>Riemannin geometriasta</u>. Jos $E = G$ ja $F = 0$, niin kulmat metriikassa $s$ ovat yhtäsuuria kuin euklidiset kulmat. Tunnettu esimerkki tällaisesta tilanteesta on yksikkökiekon epäeuklidinen metriikka (ns. Poincarén metriikka), joka määritellään kaavalla

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

Geodeettisina viivoina tässä metriikassa ovat kehää $|z| = 1$ vastaa

Voidaan olettaa, että $f$ on jatkuvasti derivoituva, sillä sim. määrittelyjä varten on jokatapauksessa oletettava, että $E$, $F$ ja $G$ ovat jatkuvia

$$\Gamma(t) = f(\gamma(t)) = u(\gamma(t)) + i\, v(\gamma(t))$$

$$\int_{f\circ\gamma} |dw| = \int_{\Gamma} |dw| = \int_0^1 |\Gamma'(t)|\, dt$$

$$\Gamma'(t) = u_x x' + u_y y' + i v_x x' + i v_y y'$$

$$= (u_x + i v_x) x' + (u_y + i v_y) y'$$

$$= f_x x' + f_y y'.$$



kohtisuorat ympyränkaaret.

Lause 8.1. Jos $f: G \to G'$ toteuttaa ehdot (8.2), niin $f$ kuvaa Riemannin metriikan $s$ kulmat yhtäsuuriksi euklidisiksi kulmiksi. Lisäksi

$$(8.4) \qquad \int_{\gamma} ds = \int_{f\circ\gamma} |dw|,$$

ja $s(z_1, z_2) \geq |f(z_1) - f(z_2)|$.

Todistus. Alkuosa on todistettu Lauseessa 7.1.

Olkoon $\gamma$ paloittain säännöllinen käyrä $z_1$:stä $z_2$:een. Silloin $f\circ\gamma: I \to G'$ on paloittain säännöllinen käyrä, jonka (euklidinen) pituus on

$$\int_{f\circ\gamma} |dw| = \int_0^1 \left|\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right| dt.$$

Laskemalla saadaan

$$\left|\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right| = |f_x(\gamma(t))\, x'(t) + f_y(\gamma(t))\, y'(t)|$$

$$= \left(Q(x'(t), y'(t))\right)^{1/2},$$

joten (8.4) pätee. Jos $f\circ\gamma$ on jana $[f(z_1), f(z_2)]$, niin

$$s(z_1, z_2) = \int_{f\circ\gamma} |dw| = |f(z_1) - f(z_2)|,$$

muulloin $\int_{f\circ\gamma} |dw| > |f(z_1) - f(z_2)|$. □

Koska $f$ on jatkuvasti derivoituva ja $J > 0$ alueessa $G$, on $f^{-1}: G' \to G$ jatkuvasti derivoituva. Jos $w_1, w_2 \in G'$ siten, että $[w_1, w_2] \subset G'$, niin asetetaan $\Gamma(t) = w_1 + t(w_2 - w_1)$. Silloin $\gamma(t) = f^{-1}(\Gamma(t))$ on sileä polku pisteestä $z_1 = f^{-1}(w_1)$ pisteeseen $z_2 = f^{-1}(w_2)$, jolle

$$\int_\gamma ds = \int_\Gamma |dw| = |f(z_1) - f(z_2)|.$$

Näin ollen pätee:

<u>Korollaari.</u> Jos $G'$ on kupera, niin $s(z_1, z_2) = |f(z_1) - f(z_2)|$ kaikilla $z_1, z_2 \in G$.

Lauseesta 8.1 johdetaan seuraava kysymyksen:

<u>Eksistenssiprobleema I.</u> Mitä ehtoja $E$:n, $F$:n ja $G$:n tulee täyttää, jotta olisi olemassa ehdot (8.2) täyttävä homeomorfismi $f = u + iv$?

Havainnollisesti kysymys on siitä, milloin tasoalueen "käyräviivainen koordinaatisto" voidaan differentioituvalla homeomorfismilla kuvata tavallisiksi suorakulmaisiksi koordinaatistoiksi.

Osoittautuu, että asetettu vaatimus on liian ankara. On edullisempaa aluksi tutkia, millä ehdoilla "käyräviivaisen koordinaatiston" määräämät kulmat voidaan kuvata yhtäsuuriksi euklidisiksi kulmiksi; pisteiden välimatkojen muuttumiseen ei sen sijaan kiinnitetä huomiota.

Olkoon $f: G \to G'$ differentioituva homeomorfismi. Silloin $f$ määrää kaavojen (8.2) avulla alueen $G$ Riemannin metriikan, jolle käytetään merkintää $s_f$. Sanomme, että $f$ on <u>konforminen</u> Riemannin metriikan $s$ suhteen (l. <u>$s$-konforminen</u>), jos $s$ ja $s_f$ määräävät saman kulmanmitan alueessa $G$.

<u>Eksistenssiprobleema 2.</u> Millä ehdoilla on olemassa $s$-konformisia homeomorfismeja $f = u + iv$ ?

Tiedetään, että E:n, F:n ja G:n jatkuvuus ei ole riittävä ehto (P. Hartman ja A. Winter (Amer. J. Math 75) 1953). Riittävää on, että E, F ja G ovat $\alpha$-Hölder-jatkuvia jollakin $0 < \alpha < 1$, ts. että funktiot toteuttavat muotoa $|H(z_1) - H(z_2)| \le M|z_1 - z_2|^\alpha$ olevat ehdot. (A. Korn 191 L. Lichtenstein 1916, S.-H. Chern (Proc. Amer. Math. Soc) 1955, L. Ahlfors (Ann. Acad. Sci. Fenn) 1955.)

Gauss suorittaessaan 1816 – 25 Hannoverin kuningaskunnan kolmiomittausta joutui elsistenssiprobleemaan 2 ja ratkaisi sen lokaalisti asettamalla E:lle, F:lle ja G:lle ankarat säännöllisyysoletukset (Kuusalon havainto?).

Lause 8.2. Jos $f_1 : G \to G'$ ja $f_2 : G \to G''$ ovat s-konformisia, niin $f_1 \circ f_2^{-1}$ $G'' \to G'$ on konforminen.

Todistus. Oletuksesta seuraa, että $f_1$ ja $f_2$ ovat jatkuvasti derivoituvia. Silloin $f_2^{-1}$ on jatkuvasti derivoituva, joten G:n s-kulmat ja G'':n euklidiset kulmat vastaavat bijektiivisesti toisiaan. Tällöin $f_1 \circ f_2^{-1}$ kuvaa $G''$:n euklidisen kulman yhtäsuureksi $G'$:n euklidiseksi kulmaksi. Väite seuraa Lauseesta 7.3. □

Jos $f : G \to G'$ on $s$-konforminen, niin kaikki $s$-konformiset homeomorfismit voidaan näin ollen esittää muodossa $h \circ f$, missä $h$ on $G'$:n konformikuvaus. Kääntäen ovat kaikki kuvaukset $h \circ f$, $h$ konforminen, $s$-konformisia (Lause 7.2).

Eksistenssiproblema 2:n ratkaisu voidaan käyttää Riemannin kuvausproblemaan: olkoon $G$ yhdesti yhtenäinen alue. Oletetaan, että on löydetty riittävän säännöllinen homeomorfismi $\varphi : D = \{z \mid |z| < 1\} \to G$. Konstruoidaan $s_\varphi$-konforminen homeomorfismi $h : D \to D$. Silloin $f = \varphi \circ h^{-1} : D \to G$ on konforminen.

<u>Lause 8.3.</u> Jos $s_1$ ja $s_2$ määräävät saman kulmamitan alueessa $G$, niin $ds_2 = \lambda(z)\, ds_1$, missä $\lambda(z) > 0$ kaikilla $z \in G$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $ds_i^2 = E_i\, dx^2 + 2F_i\, dx d$

$+ G_i dy^2$, $i = 1,2$. Valitaan $z_0 \in G$ ja olkoot $dz_1 = 1$ ja $dz_2 = 1 + ki$ kaksi $z_0$:n lähtevää tangenttivektoria. Koska $dz_1$:n ja $dz_2$:n välisellä kulmalla on sama arvo metriikoissa $s_1$ ja $s_2$ saadaan (kts. Lauseen 7.1 todistus)

$$\frac{k J_1}{E_1 + k F_1} = \frac{k J_2}{E_2 + k F_2}, \quad J_i = \sqrt{E_i G_i - F_i^2}$$

Koska yhtälö pätee kaikilla $k \in \mathbb{R}$ on (vrt. Möbius-kuvauksen $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ teoria) olemassa $\lambda^2 > 0$ siten, että $E_2 = \lambda^2 E_1$, $F_2 = \lambda^2 F_1$ ja $J_2 = \lambda^2 J_1$, mistä väite seuraa. □

Huomautus. Käänteinen tulos on ilmeinen: Jos $ds_2 = \lambda(z) ds_1$, niin $s_1$ ja $s_2$ määräävät saman kulmanmitan.

Korollaari. $f : G \to G'$ on $s$-konforminen, jos ja vain jos $ds = \lambda(z) ds_f$, $\lambda > 0$.

Siirtymällä kompleksiseen merkintään $dz = dx + idy$ ja $d\bar{z} = dx - idy$ saadaan $ds_f$:lle yksinkertainen lauseke:

Lause 8.4. $ds_f = |f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}|$

Todistus. Lauseen 8.1 todistuksen mukaan on

$$ds_f = (Q(dx, dy))^{1/2} = |f_x\, dx + f_y\, dy|$$

$$= |(f_z + f_{\bar z})\, dx + i\,(f_z - f_{\bar z})\, dy|$$

$$= |f_z\, dz + f_{\bar z}\, d\bar z| . \quad \square$$

Kirjoitetaan $ds_f$ muotoon

$$ds_f = |f_z|\,|dz + \mu\, d\bar z| ,$$

missä $\mu = f_{\bar z}/f_z$ on $f$:n kompleksidilataatio. Ehdon $J = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 > 0$ nojalla $|\mu| < 1$.

Lause 8.5. Jos

$$(8.5) \quad ds = \lambda(z)\,|dz + \mu(z)\, d\bar z| ,$$

$\lambda > 0$, $|\mu| < 1$, niin $ds$ määrittelee Riemannin metriikan. Kääntäen voidaan jokainen Riemannin metriikka

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

yksikäsitteisellä tavalla saattaa muotoon (8.5).

Todistus. Olkoon $ds = \lambda |dz + \mu d\bar{z}|$. Riittää näyttää, että $ds$ määrittelee Riemannin metriikan, kun $\lambda = 1$. Silloin on

$$ds^2 = (dz + \mu d\bar{z})(d\bar{z} + \bar{\mu} dz) =$$

$$(1+|\mu|^2 + 2\operatorname{Re}\mu)dx^2 + 4\operatorname{Im}\mu\, dx\,dy + (1+|\mu|^2 - 2\operatorname{Re}\mu)dy^2$$

Asetetaan $E = 1 + |\mu|^2 + 2\operatorname{Re}\mu$, $F = 2\operatorname{Im}\mu$ ja $G = 1 + |\mu|^2 - 2\operatorname{Re}\mu$. Silloin $E > 0$, $G > 0$ ja

$$EG - F^2 = (1+|\mu|^2)^2 - 4(\operatorname{Re}\mu)^2 - 4(\operatorname{Im}\mu)^2$$

$$= (1+|\mu|^2)^2 - 4|\mu|^2 = (1-|\mu|^2)^2 > 0,$$

joten $ds$ täyttää vaaditut ehdot.

Olkoon kääntäen $ds^2 = E dx^2 + 2F dx\,dy + G dy^2$. Pyritään määräämään $t = \lambda^2 > 0$ niin, että

$$ds^2 = t\left(\frac{E}{t}dx^2 + 2\frac{F}{t}dx\,dy + \frac{G}{t}dy^2\right)$$

ja

$$\frac{E}{t}dx^2 + 2\frac{F}{t}dx\,dy + \frac{G}{t}dy^2 = |dz + \mu d\bar{z}|^2$$

jollekin $\mu$, $|\mu|<1$. Todistuksen alkuosan mukaan on oltava

$$\frac{F}{t} = 2\,\mathrm{Im}\,\mu$$
$$\frac{E}{t} = 1+|\mu|^2+2\,\mathrm{Re}\,\mu$$
$$\frac{G}{t} = 1+|\mu|^2-2\,\mathrm{Re}\,\mu.$$

Koska $\mathrm{Re}\,\mu = (E-G)/4t$ ja $\mathrm{Im}\,\mu = F/2t$, on

$$\frac{E+G}{t} = 2+\frac{(E-G)^2+4F^2}{8t^2},$$

joten

$$t = \frac{E+G\pm 2J}{4}, \quad J^2 = EG-F^2,$$

ja

$$|\mu|^2 = \frac{E+G\mp 2J}{E+G\pm 2J}.$$

Ehdosta $|\mu|<1$ seuraa, että ainoastaan $t=(E+G+2J)/4$ kelpaa, jolloin

$$\mu = \frac{E-G}{E+G+2J} + i\,\frac{2F}{E+G+2J}. \quad \square$$

olkoon $ds = \lambda|dz + \mu d\bar{z}|$ Riemannin metriikka. Lauseen 8.3 korollaarin nojalla $f$ on $s$-konforminen, jos ja vain jos

$$\lambda' ds_f = \lambda'|f_z||dz + \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} d\bar{z}| = |dz + \mu d\bar{z}|$$

jollekin funktiolle $\lambda' > 0$. Lauseen 8.5 mukaan on tällöin oltava $\lambda'|f_z| = 1$ ja $\mu = f_{\bar{z}}/f_z$. Yhtenvetona saadaan

<u>Lause 8.6.</u> Homeomorfismi $f: G \to G$ on konforminen Riemannin metriikan $ds = \lambda|dz + \mu d\bar{z}|$ suhteen, jos ja vain jos $f$ toteuttaa <u>Beltramin differentiaaliyhtälön</u>

$$(8.6) \qquad f_{\bar{z}}/f_z = \mu .$$

Olemme tähän asti rajoittuneet differentioituviin homeomorfismeihin $f$. Tällöin $f$ on $K$-kvasikonforminen, jos ja vain jos (8.6):ssa $|\mu| < k = \frac{K-1}{K+1}$. Jotta voitaisiin todistaa, että annettua $\mu$:tä vastaa tällainen $f$ on lisäksi oletet

Esimerkki. Tarkastellaan pintaa $S$ avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Pinnan $S$ yhtälö parametrimuodossa olkoon

$$(*)\quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Rajoitetaan $u+iv$ alueeseen $G$ siten, että $(*)$ on homeomorfismi. Oletetaan, että funktiot $x$, $y$, ja $z$ ovat riittävän säännöllisiä, jolloin voidaan määritellä tangentti jokaiselle pinnan säännölliselle käyrälle. Näin ollen $S$:llä on määriteltävissä euklidinen kulman mitta.

Asetetaan

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$
$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

ja oletetaan, että $EG - F^2 > 0$ alueessa $G$. Silloin $E$, $F$ ja $G$ määrittelevät $G$:ssä Riemannin metriikan $ds$. Kuvaus $(*)$ kuvaa alueen $G$ $w$-kulman yhtäsuureksi euklidiseksi kulmaksi pinnalla $S$.

Klassillinen kartoitusongelma



tavan, että $\mu$ on $\alpha$-Hölderjatkuva, $0 < \alpha < 1$. Kuitenkaan tämä ehto ei ole välttämätön, koska differentioituvan $f$:n kompleksidilataation ei tarvitse olla edes jatkuva.

Differentioituvien $K$-kvasikonformisten kuvausten luokka ei ole suljettu: Jos $f_n \to f$ tasaisesti $G$:n kompakteissa osissa ja $f_n$:t ovat differentioituvia ja $K$-kvasikonformisia, niin $f$:n ei tarvitse olla edes differentioituva.

Mainitut kaksi seikkaa antavat aiheen olettaa, että tutkimamme kuvausluokka on epätäydellinen. Tämän takia luovutaan vaatimuksesta, että $f$:n on oltava differentioituva. Silloin yleiset kvasikonformikuvaukset saadaan (8.6):n yleistettyinä ratkaisuina, kun $\mu$ käy läpi kaikki mitalliset funktiot, joille $\|\mu\|_\infty < 1$. Karkeasti ottaen on $f$ tällöin differentioituva melkein kaikkialla ja toteuttaa yhtälön (8.6) melkein kaikkialla. Saadulle kuvausluokalle pätevät useat edellä todistamamme tulokset, esim. Lause 8.2.

on seuraava: Pinta $S$ on kuvattava konformisesti tasoalueelle $G'$. Toisin sanoen on löydettävä homeomorfismi $\Phi : S \to G'$, joka vie pinnan $S$ kulmat yhtä suurina alueen $G'$ kulmiksi. Jos $\Phi$ on tällainen kuvaus, niin kuvaus $\Psi : G \to G'$,

$$\Psi(u,v) = \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

on s-konforminen. Nähdään, että välttämätöntä ja riittävää $\Phi$:n löytämiselle on löytää s-konforminen homeomorfismi alueessa $G$. Tämä puolestaan on yhtäpitävää sille, että löydetään Beltramin differentiaaliyhtälölle $f_{\bar z} = \mu f_z$ homeomorfinen ratkaisu, kun

$$ds = \lambda |dz + \mu d\bar z| .$$

Beltramin yhtälön ratkaiseminen ja pinnan konformikuvauksen löytäminen ovat tässä mielessä samanarvoisia tehtäviä.



## II Kvasikonformiset kuvaukset tasossa

### 1. Säännölliset kvasikonformikuvaukset

Kuvaus $f : G \to G'$ on jatkuvasti differentioituva, jos $f_z$ ja $f_{\bar z}$ ovat olemassa ja jatkuvia $G$:ssä. (Derivaattojen $f_z$ ja $f_{\bar z}$ jatkuvuudesta seuraa, että $f$ on differentioituva).

Määritelmä (Grötzsch 1928) Jatkuvasti differentioituva homeomorfismi $f : G \to G'$ ($G$ ja $G'$ tasoalueita) on säännöllinen kvasikonformikuvaus, jos $J > 0$ alueessa $G$ ja

$$k_f = \sup_G |f_{\bar z} / f_z| < 1 .$$

Olkoon

$$K_f = \frac{1 + k_f}{1 - k_f} .$$

Aikaisemmin on määritelty dilataatio-osamäärä

$$D_f = \frac{\max|\partial_\varphi f|}{\min|\partial_\varphi f|} = \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|},$$

joten $K_f = \sup D_f(z)$. Koska $J_f = \max|\partial_\varphi f| \min|\partial_\varphi f|$, on

$$|\partial_\varphi f|^2 \leq K_f J_f$$

kaikille $\varphi$. Jos kääntäen

$$|\partial_\varphi f|^2 \leq K J_f \quad \text{kaikille } \varphi,$$

on $K_f \leq K$. Tällöin sanotaan, että $f$ on $K$-<u>kvasikonforminen</u>.

<u>Lause 1.1.</u> Säännöllisen kvasikonformikuvauksen $f$ käänteiskuvaus $f^{-1}: G' \to G$ on säännöllinen kvasikonformikuvaus ja $K_f = K_{f^{-1}}$.

<u>Todistus.</u> Koska $f$ on jatkuvasti differentioituva, on $f^{-1}$ käänteiskuvauslauseen nojalla jatkuvasti differentioituva ja $J_{f^{-1}} \cdot J_f = 1$, joten $J_{f^{-1}} > 0$.

Olkoon $g: G' \to G''$ differentioituva. Merkitään $h = g \circ f$ ja $w = f(z)$. Yhdistetty kuvaus $h = g \circ f$ on diffe-

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$$

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$$



rentiaituma ja sen derivaattakuvau saadaan yhdistämällä f:n ja g:n derivaattakuvaukset

$$dw = f_z\, dz + f_{\bar z}\, d\bar z$$

ja

$$dh = g_w\, dw + g_{\bar w}\, d\bar w .$$

Näin ollen

$$d(g \circ f) = g_w (f_z dz + f_{\bar z}\, d\bar z) + g_{\bar w}((f_z)^- d\bar z + (f_{\bar z})^- dz)$$

Koska $(f_z)^- = \bar f_{\bar z}$ ja $(f_{\bar z})^- = \bar f_z$, on

$$d(g \circ f) = (g_w f_z + g_{\bar w} \bar f_z)\, dz + (g_w f_{\bar z} + g_{\bar w} \bar f_{\bar z})\, d\bar z .$$

Saamme näin ollen seuraavat kaavat:

$$(1.1)\begin{cases} (g \circ f)_z = (g_w \circ f) f_z + (g_{\bar w} \circ f) \bar f_z \\ (g \circ f)_{\bar z} = (g_w \circ f) f_{\bar z} + (g_{\bar w} \circ f) \bar f_{\bar z} \\ g_w \circ f = \frac{1}{J_f} [(g \circ f)_z \bar f_{\bar z} - (g \circ f)_{\bar z} \bar f_z] \\ g_{\bar w} \circ f = \frac{1}{J_f} [(g \circ f)_{\bar z} f_z - (g \circ f)_z f_{\bar z}] \end{cases}$$

Jos valitaan $g = f^{-1}$, niin

$$(f^{-1})_w \circ f = \frac{\overline{f_z}}{J_f}$$

$$(f^{-1})_{\bar{w}} \circ f = -\frac{f_{\bar{z}}}{J_f}$$

Näin ollen

$$\frac{(f^{-1})_{\bar{w}}(f(z))}{(f^{-1})_w(f(z))} = -\frac{f_{\bar{z}}(z)}{\overline{f_z}(z)},$$

Koska $|\overline{f_z}| = |f_z|$, saadaan väite. □

<u>Lause 1.2.</u> Jos $f: G \to G_1$ on $K_1$-kvasikonforminen ja $g: G_1 \to G_2$ on $K_2$-kvasikonforminen, niin $g \circ f$ on $K_1 K_2$-kvasikonforminen.

<u>Todistus.</u> Kaavan I (5.1) mukaan on

$$\max|\partial_\varphi(g \circ f)| = |(g \circ f)_z| + |(g \circ f)_{\bar{z}}| \overset{(1.1)}{\leq}$$

$$|g_w||f_z| + |g_{\bar{w}}||f_{\bar{z}}| + |g_w||f_{\bar{z}}| + |g_{\bar{w}}||f_z| =$$

$$(|g_w| + |g_{\bar{w}}|)(|f_z| + |f_{\bar{z}}|) = \max|\partial_\varphi g| \cdot$$

$$\max|\partial_\varphi f| \leq K_2 J_g K_1 J_f = K_1 K_2 J_{g \circ f}. \; \square$$

Huomautus. Jos $f$ on 1-kvasikonforminen, on $k_f = 0$, jolloin $f_{\bar{z}} = 0$. Siis $f$ on konforminen. Kääntäen on konformikuvaus 1-kvasikonforminen.

Grötzschin probleema. Olkoon $Q$ neliö ja $R$ suorakulmio (sivut akselien suuntaiset). Jos $R$ ei ole neliö, niin ei ole olemassa konformikuvausta $Q \to R$, joka veisi kärkipisteet kärkipisteille (peiliperiaate). Grötzsch esitti ja ratkaisi 1928 seuraavan ongelman: On löydettävä jatkuvasti differentioituva homeomorfismi $Q \to R$, joka vie kärjet kärjille ja poikkeaa mahdollisimman vähän konformikuvauksesta.

Olkoot $R$ ja $R'$ suorakulmioita, joiden sivujen pituudet ovat $a, b$ ja $a', b'$. [Oletetaan, että $a : b \leq a' : b'$ (tarvittaessa vaihdetaan $a$ ja $b$ keskenään).] Tutkitaan jatkuvasti differentioituvia ja kiertosuunnan säilyttäviä homeomorfismeja $f : R \to R'$, jotka vie $a$-sivut $a'$-sivuiksi ja $b$-sivut


(Kuvaus $f$ on määritelty alueessa $G \supset \bar{R}$.)

Schwarzin epäyhtälö: Jos $f$, $g$, $f^2$ ja $g^2$ ovat integroituvia alueessa $G$, niin

$$\left(\iint_G fg\,dx\,dy\right)^2 \le \iint_G f^2\,dx\,dy \iint_G g^2\,dx\,dy .$$



$b'$-sivuiksi. Valitaan $0 \le y \le b$ ja tutkitaan janan $\gamma(t) = t + iy$, $0 \le t \le a$ kuvaa $f \circ \gamma$. Sen pituudella on arvo

$$\int_{f\circ\gamma} |dw| = \int_0^a \left|\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right| dt .$$

Koska

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f_z(\gamma(t))(x'(t) + iy'(t)) + f_{\bar z}(\gamma(t))(x'(t) - iy'(t))$$

ja $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$, on

$$a' \le \int_{f\circ\gamma} |dw| \le \int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\bar z}(x+iy)|)\,dx ,$$

joten

$$a'b \le \int_0^a \int_0^b (|f_z| + |f_{\bar z}|)\,dx\,dy$$

Kirjoittamalla

$$|f_z| + |f_{\bar z}| = \left(\frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|}\right)^{1/2} (|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2)^{1/2}$$

ja käyttämällä Schwarzin epäyhtälöä saadaan

$$(a'b')^2 \le \int_0^a\int_0^b \frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}\,dx\,dy \int_0^a\int_0^b (|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a\int_0^b D_f\,dx\,dy \int_0^a\int_0^b J_f\,dx\,dy$$

$$= a'b' \int_0^a\int_0^b D_f\,dx\,dy$$

Siis

$$\frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \le \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b D_f\,dx\,dy$$

Oikea puoli on $D_f$:n keskiarvo suorakulmiossa $R$. Lukua $a/b$ kutsutaan $R$:n <u>moduliksi</u> $M(R)$. Näin ollen

$$(1.2)\qquad \frac{M(R')}{M(R)} \le \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b D_f\,dx\,dy$$

kaikille kysymykseen tuleville kuvauksille $f$. Jos $\sup D_f = K_f$, on

$$(1.3)\qquad \frac{M(R')}{M(R)} \le K_f$$

Valitaan (1.2):ssa ja (1.3):ssa $f$:ksi affiini kuvaus, jolle $0 \mapsto 0$, $a \mapsto a'$ ja $ib \mapsto ib'$. Tällöin

$$(1.4) \quad f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) z + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right) \bar{z}$$

$$D_f = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)} = \frac{M(R')}{M(R)}$$

$$\frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b D_f \, dx\, dy = \frac{M(R')}{M(R)} = K_f ,$$

joten (1.2):ssa ja (1.3):ssa on voimassa yhtäsuuruus. On siis todistettu

Lause 1.3. Kaikista säännöllisistä kvasikonformikuvauksista $f: R \to R'$, jotka vievät kärjet kärjille, on affiinilla kuvauksella (1.4) pienin maksimidilataatio $K_f$ ja pienin dilataatio-suuremman $D_f$ keskiarvo $R$:ssä.

Lauseen 1.1 nojalla saadaan soveltamalla (1.3):a käänteiskuvaukseen $f^{-1}: R' \to R$:

$$\frac{M(R)}{M(R')} \leq K_f .$$

Päätellään: Suorakulmio $R$ voidaan kuvata $K$-kvasikonformisesti suorakulmiolle $R'$ siten, että kärjet menevät kärjiksi, jos ja vain jos

$$\frac{1}{K} \le \frac{M(R')}{M(R)} \le K.$$

Tästä seuraa, että $M(R) = M(R')$, jos ja vain jos $R$ ja $R'$ ovat konformisesti ekvivalentteja. Suorakulmion moduli säilyy siis invariantina konformikuvauksissa ja kvasi-invarianttina (muuttuu rajoitetusti) kvasikonformikuvauksissa.

<u>Käyräparven moduli</u>. $\Gamma$ olkoon parvi jatkuvasti differentioituvia käyriä $\gamma : I \to G$. Jos $\rho : G \to \mathbb{R}$ on ei-negatiivinen Borelin funktio, niin integraali

$$\int_\gamma \rho\,|dz| = \int_0^1 \rho(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

on määritelty (integraali voi saada arvon $+\infty$), sillä $\rho\circ\gamma$ on Borel-mitallinen.

olkoon $F(\Gamma)$ kaikkien niiden Borelin funktioiden $\rho \geq 0$ perhe, joille

$$\int_\gamma \rho |dz| \geq 1, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Lukua

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in F(\Gamma)} \iint_G \rho^2 \, dx\, dy$$

kutsutaan <u>käyräparven $\Gamma$ moduliksi</u> ($M(\Gamma)^{-1}$ on $\Gamma$:n <u>ekstremaalipituus</u>.) Huomataan, että $M(\Gamma)$ ei riipu alueesta $G \supset \Gamma$.

Jos ajatellaan, että $\Gamma$ koostuu tasapaksuista sähköjohdoista, niin $M(\Gamma)$ kuvaa $\Gamma$:n sähkönjohtokykyä: $M(\Gamma)$ on suuri, jos polut $\gamma \in \Gamma$ ovat lyhyitä tai niitä on paljon. Vastaavasti $M(\Gamma)$ on pieni, jos polkuja on vähän tai ne ovat pitkiä. Tätä valaisee seuraavat kaksi lausetta:

<u>Lause 1.4.</u> Jos $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, niin $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$.

Todistus. Olkoon $\rho \in F(\Gamma_2)$ ja $\gamma \in \Gamma_1$. Koska $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, on $\gamma \in \Gamma_2$, joten

$$\int_\gamma \rho |dz| \geq 1.$$

Silloin $\rho \in F(\Gamma_1)$ eli $F(\Gamma_2) \subset F(\Gamma_1)$. Näin ollen

$$\inf_{\rho \in F(\Gamma_2)} \iint_G \rho^2 dxdy \geq$$

$$\inf_{\rho \in F(\Gamma_1)} \iint_G \rho dxdy$$

eli väite. □

Olkoon $\Gamma$ käyräparvi. Jokaista $\gamma : I \to G$ kohti valitaan $\tilde{I} = [0, \tilde{t}] \subset I$ ja asetetaan $\tilde{\gamma} = \gamma | \tilde{I}$. Olkoon $\tilde{\Gamma}$ käyrien $\tilde{\gamma}$ parvi. Tällöin $\tilde{\Gamma}$ koostuu lyhemmistä käyristä kuin $\Gamma$.

Lause 1.5. $M(\tilde{\Gamma}) \geq M(\Gamma)$.

Todistus. Olkoon $\rho \in F(\tilde{\Gamma})$ ja $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$. Silloin

$$1 \leq \int_{\tilde{\gamma}} \rho |dz| = \int_0^{\tilde{t}} \rho(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt \leq$$

$$\int_0^1 \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma \rho\,|dz|,$$

joten $\rho \in F(\Gamma)$. Siis $F(\tilde{\Gamma}) \subset F(\Gamma)$, mistä väite seuraa. □

Olkoon $f: G \to G'$ säännöllinen $K$-kvasikonformikuvaus ja $\Gamma \subset G$ käyräparvi. Käyräparvella $\Gamma' = f(\Gamma)$ tarkoitetaan $G'$:n käyrien $f \circ \gamma$ joukkoa.

<u>Lause 1.6.</u> $\frac{1}{K} M(\Gamma) \le M(f(\Gamma)) \le K M(\Gamma)$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $\rho' \in F(\Gamma')$ ja

$$\rho = (\rho' \circ f)(K J_f)^{1/2}.$$

Koska $|\partial_\varphi f|^2 \le K J_f$ kaikilla $\varphi$, on

$$\int_\gamma \rho\,|dz| \ge \int_\gamma (\rho' \circ f) \max_\varphi |\partial_\varphi f|\,|dz|$$

$$\ge \int_{f\circ\gamma} \rho'\,|dw| \ge 1,$$

sillä $|dw| = |f_z\,dz + f_{\bar z}\,d\bar z| \le (|f_z| + |f_{\bar z}|)|dz| = \max_\varphi |\partial_\varphi f|\,|dz|$ ymt.

Grötzschin probleema). Näin ollen $\rho \in F(\Gamma)$. Kaavaa I(4.2) käyttämällä saadaan

$$\iint_{G'} (\rho')^2 \, du\, dv = \iint_{G} (\rho' \circ f)^2 J_f \, dx\, dy \geq \frac{1}{K} \iint_{G} \rho^2 \, dx\, dy,$$

joten

$$M(\Gamma) \leq K \inf \iint_{G'} (\rho')^2 \, du\, dv = K M(\Gamma')$$

Korvaamalla $f$ kuvauksella $f^{-1}$ ja vaihtamalla $\Gamma$ ja $\Gamma'$ keskenään saadaan $M(\Gamma') \leq K M(\Gamma)$. □

Valitsemalla $K = 1$ havaitaan, että käyräparven moduli on konforminen invariantti, joka on kvasi-invariantti kvasikonformikuvauksissa.

Olemme löytäneet kaksi tapaa, nelikulmion moduli ja käyräparven moduli, joilla voidaan mitata kuvauksen kvasikonformisuutta ilman, että kuvauksen osittaisderivaattoja olisi ekspli



[illegible] mainittu. Molempia voidaan käyttää määriteltäessä yleisiä kvasikonformikuvauksia.

Näytämme, että suorakulmion moduli itse asiassa on yhdensuuntaisia sivuja yhdistävien käyrien parven moduli.

Olkoon $R$ suorakulmio, jonka kärkinä ovat pisteet $0$, $a$, $a+ib$, $ib$, missä $a>0$ ja $b>0$. Olkoon $\Gamma$ kaikkien niiden säännöllisten käyrien $\gamma$ parvi, jotka yhdistävät $R$:n vaakasuorat sivut. $\Gamma$ sisältää näin ollen kaikki janat $\gamma(t) = x + it$, $0 \le x \le b$ ja $0 \le t \le b$.

Olkoon $\rho \in F(\Gamma)$. Fubinin lauseen nojalla on

$$\iint_R \rho^2 \, dx \, dy = \int_0^a \left( \int_0^b \rho^2 dy \right) dx .$$

Schwarzin epäyhtälöstä saadaan

$$\int_0^b \rho^2 dy \int_0^b 1^2 dy \geq \left( \int_0^b \rho \, dy \right)^2 ,$$

joten

$$\iint_R \rho^2 \,dx\,dy \geq \int_0^a \left( \frac{1}{b} \left( \int_0^b \rho \,dy \right)^2 \right) dx \geq \frac{a}{b},$$

koska

$$\int_0^b \rho \,dy = \int_\gamma \rho |dz| \geq 1 \quad , \quad \gamma(t) = x + it.$$

Näin ollen $M(\Gamma) \geq M(R)$. Valitaan $\rho = 1/b$. Silloin

$$\int_\gamma \rho |dz| = \frac{1}{b} \int_\gamma |dz| \geq \frac{1}{b} \cdot b = 1$$

kaikille $\gamma \in \Gamma$, joten $\rho \in F(\Gamma)$ ja

$$\iint_R \rho^2 \,dx\,dy = \frac{1}{b^2}\, ab = M(R).$$

Näin ollen $M(\Gamma) = M(R)$.

Jos $\infty \in C$, niin vastaavasti voidaan määritellä $\hat{C}$:n Jordan-käyrä. Tällöin kumpikaan $C$:n rajoittamista Jordan-alueista ei ole rajoitettu.

Pisteet $z_1, \dots, z_n \in \mathrm{Bd}\, G$ seuraavat toisiaan <u>positiivisessa kiertosuunnassa</u>, jos pisteet $\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_n)$ seuraavat toisiaan tässä järjestyksessä, kun $K$ kierretään kerran pisteestä $\varphi(z_1)$ lähtien positiiviseen kiertosuuntaan.

## 2. Nelikulmion moduli

<u>Jordan-käyrällä</u> $C$ tarkoitetaan ympyrän $K = \{z \mid |z| = 1\}$ kanssa homeomorfista tason joukkoa. Jordan-käyrä jakaa tason kahdeksi alueeksi. Näistä toinen on rajoitettu. Sitä kutsutaan $C$:n rajoittamaksi Jordan-alueeksi. Jordan-alue on yhdesti yhtenäinen.

<u>Riemannin kuvauslause.</u> Jos $G$ on Jordan alue, niin on olemassa homeomorfismi $\varphi : \bar{G} \to \bar{D}$ siten, että $\varphi : G \to D$ on konforminen ($D = \{z \mid |z| < 1\}$).

Jos $\varphi : G \to D$ on konformikuvaus, niin se voidaan jatkaa homeomorfismiksi $\varphi : \bar{G} \to \bar{D}$. Jos $z_1, z_2, z_3 \in \mathrm{Bd}\, G$ sekä $w_1, w_2, w_3 \in \mathrm{Bd}\, D$ seuraavat toisiaan pos. kiertosuunnassa, niin on olemassa yksi ja vain yksi homeomorfismi $\varphi : \bar{G} \to \bar{D}$, jolle $\varphi(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$ ja joka on konforminen $G$:ssä. Puhuttaessa $G$:n konformikuvauksesta Jordan-alueelle $G'$

voidaan siis tarvittaessa aina olettaa, että kuvaus on jatkettu homeomorfismiksi $\bar{G} \to \bar{G}'$. Lisäksi kolmella reunapisteellä voidaan vaatia olevan annetut kuvapisteet edellyttäen, että kolmikulmojen kiertosuunnat ovat yhteensopivia.

Nelikulmiolla $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ tarkoitetaan Jordan-aluetta $Q$, jonka reunalta on valittu neljä pos. kiertosuunnassa toisiaan seuraavaa pistettä $z_1, z_2, z_3$ ja $z_4$. Kaaria $\widehat{z_1 z_2}$ ja $\widehat{z_3 z_4}$ kutsutaan a-sivuiksi sekä kaaria $\widehat{z_2 z_3}$ ja $\widehat{z_4 z_1}$ b-sivuiksi.

Nelikulmion $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ homeomorfismilla nelikulmiolle $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ tarkoitetaan topologista kuvausta $\varphi: \bar{Q} \to \bar{Q}'$, jolle $\varphi(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Jos $\varphi: Q \to Q'$ on konforminen, niin $\varphi$:tä kutsutaan nelikulmion $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ konformikuvaukseksi nelikulmiolle $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$. Koska jo kolmen kärjen $z_1, z_2, z_3$ kuvapisteet $w_1, w_2, w_3$ määräävät konformikuvauksen yksikäsitteisesti, ei nelikulmiota yleensä voida konformisesti kuvata toiselle nelikulmiolle.

Jos $x_1, x_2, x_3, x_4$ on kasvava jono reaalilukuja, niin on olemassa yksi ja vain yksi Möbius kuvaus $g(z) = (az+b)/(cz+d)$, jolle

$$g(x_1) = -1/k, \quad g(x_2) = -1, \quad g(x_3) = 1, \quad g(x_4) = 1/k$$

missä $0 < k < 1$. Tällöin $g$ kuvaa ylemmän puolitason $H = \{w \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ itselleen.

Riemannin kuvauslauseesta seuraa, että nelikulmio $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ voidaan konformisesti kuvata yhdelle ja vain yhdelle nelikulmiolle $H(-1/k, -1, 1, 1/k)$ $0 < k < 1$. Elliptisten integraalien (kts. Ahlfors, Complex Analysis) avulla voidaan määritellä konformikuvaus nelikulmiolta $H(-1/k, -1, 1, 1/k)$ suorakulmiolle (siten, että $-1/k, -1, 1$ ja $1/k$ kuvautuvat kärjille).

Yhdistämällä kuvaukset voidaan siis jokainen nelikulmio kuvata konformisesti suorakulmiolle. Tällaista kuvausta kutsutaan *kanoniseksi kuvaukseksi* sekä suorakulmiota nelikulmion *kanoniseksi suorakulmioksi*.

(vrt. Lause 1.3)

Peiliperiaatteesta seuraa, että kaksi

suorakulmiota voidaan konformisesti kuvata toisilleen, jos ja vain jos ne ovat yhdenmuotoisia. Jos nelikulmion $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ kanonisen suorakulmion $R$ $a$-sivujen pituutta merkitään $a$:lla ja $b$-sivujen pituutta $b$:llä, niin $a/b$ on sama kaikille $Q$:n kanonisille suorakulmioille. Lukua

$$M(Q) = \frac{a}{b}$$

kutsutaan $Q$:n *moduliksi*. Se on konforminen invariantti.

## 3. Kvasikonformikuvauksen geometrinen määritelmä

Olkoon $f: G \to G'$ kiertosuunnan säilyttävä homeomorfismi. Olkoon $Q$ nelikulmio, $\bar{Q} \subset G$ ja $Q' = f(Q)$. Lukua

$$\frac{M(Q')}{M(Q)}$$

kutsutaan nelikulmion $Q$ *dilataatioksi*. Jos $f$ on konforminen, niin $Q$:n dilataatio on $= 1$. Lukua

$$K(G) = \sup_{\overline{Q} \subset G} \frac{M(Q')}{M(Q)}$$

kutsutaan f:n <u>maksimidilatatiolux</u>. Koska

$$M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = 1/M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1)),$$

on $K(G) \geq 1$.

<u>Määritelmä.</u> Kiertosuunnan säilyttävä homeomorfismi $f: G \to G'$ on <u>kvasikonforminen</u>, jos $K(G) < \infty$. Jos $K(G) \leq K < \infty$, niin f on K-kvasikonforminen.

<u>Lause 3.1.</u> Jos $f: G \to G'$ on K-kvasikonforminen, niin $f^{-1}: G' \to G$ on K-kvasikonforminen. Jos $g: G' \to G''$ on $K'$-kvasikonforminen, niin $g \circ f$ on $K'K$-kvasikonforminen.

<u>Todistus.</u> Ensimmäinen väite seuraa yhtälöstä

$$\frac{M(Q'(w_1, w_2, w_3, w_4))}{M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))} = \frac{M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1))}{M(Q'(w_2, w_3, w_4, w_1))},$$

missä $w_i = f(z_i)$ ja $Q' = f(Q)$.

Toisen väitteen todistamiseksi olkoon $Q$ nelikulmio, $\overline{Q} \subset G$, $Q' = f(Q)$ ja $Q'' = g(Q')$. Silloin

$$\frac{M(Q'')}{M(Q)} = \frac{M(Q'')}{M(Q')} \cdot \frac{M(Q')}{M(Q)} \leq K'K. \quad \square$$

Lause 3.2. Säännöllinen $K$-kvasikonformikuvaus $f: G \to G'$ on $K$-kvasikonforminen. Itse asiassa

$$(3.1) \quad K(G) \leq \sup_{z \in G} D(z)$$

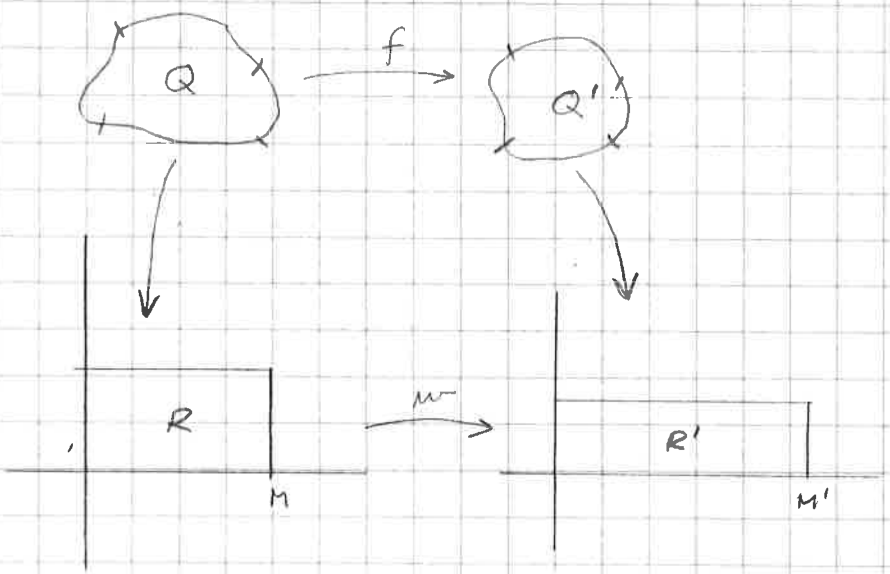
(Grötzschin epäyhtälö).

Todistus. Säännöllinen $K$-kvasikonformikuvaus on jatkuvasti differentioituva ja

$$D(z) = \frac{\max |\partial_\varphi f(z)|}{\min |\partial_\varphi f(z)|} \leq K$$

kaikilla $z \in G$. Riittää siis todistaa että

$$\frac{M(Q')}{M(Q)} \leq K$$




kaikille neliökulmioille $Q$, $\bar{Q} \subset G$.

Olkoon $Q$ neliökulmio, $\bar{Q} \subset G$, ja $Q' = f(Q)$. Kuvataan $Q$ konformisesti kanoniselle suorakulmiolle $R = R(0, M, M+i, i)$ ja $Q'$ suorakulmiolle $R' = R'(0, M', M'+i, i)$. Tällöin $M = M(Q)$ ja $M' = M(Q')$, joten riittää näyttää, että $M' \le KM$.

Olkoon $w : \bar{R} \to \bar{R}'$ kuvaus, joka saadaan yhdistämällä $f$ ja kanoniset kuvaukset $Q \to R$ ja $Q' \to R'$. Silloin $w : \bar{R} \to \bar{R}'$ on tasaisesti jatkuva ja $w : R \to R'$ säännöllinen $K$-kvasikonformikuvaus (Lause 1.2). Näin ollen

$$\max_{\varphi} |\partial_\varphi w(z)| \le K \min_{\varphi} |\partial_\varphi f(z)|$$

$$J(z) = \max |\partial_\varphi w(z)| \min |\partial_\varphi f(z)|$$

$$\ge \frac{1}{K} (\max |\partial_\varphi w(z)|)^2 \qquad \forall z \in R.$$

Koska $\partial_0 w(z) = w_x(z)$, on

$$J(z) \ge \frac{1}{K} |w_x(z)|^2 .$$

Olkoon $R_m = \{(x,y) \mid \frac{1}{m} \le x \le M - \frac{1}{m}, \frac{1}{m} \le y \le 1 - \frac{1}{m}\}$ ja $R'_m = w(R_m)$. Tasaisen

$$\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \int g^2$$

jatkuvuuden nojalla $R_m'$:in pinta-alalle on voimassa

$$m(R_m') \to m(R') = M',$$

kun $m \to \infty$. Toisaalta saadaan

$$m(R_m') = \iint_{R_m} J(z)\,dx\,dy \ge$$

$$\frac{1}{K}\int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}}\int_{\frac{1}{m}}^{M-\frac{1}{m}} |w_x(x+iy)|^2\,dx\,dy\ .$$

Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\int_{\frac{1}{m}}^{M-\frac{1}{m}} |w_x(x+iy)|^2\,dx \ge \frac{1}{M-\frac{2}{m}}\left(\int_{\frac{1}{m}}^{M-\frac{1}{m}} |w_x(x+iy)|\,dx\right)^2.$$

Oikean puolen integraali on käyrän $\gamma$,

$$\gamma(t) = w(t, y)\ , \quad \frac{1}{m} \le t \le M-\frac{1}{m},$$

pituus. Koska $\gamma$ yhdistää $R_m'$:n b-sivut, on

$$\int_{\frac{1}{m}}^{M-\frac{1}{m}} |w_x(x+iy)|\,dx \ge M' - O(\tfrac{1}{m}),$$

missä $O(\frac{1}{m}) \to 0$, kun $m \to \infty$.

yhdistämällä tulokset saadaan

$$m(R'_m) \geq \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{M - \frac{2}{m}} \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(M' - O\left(\tfrac{1}{m}\right)\right)^2.$$

Antamalla $m \to \infty$ saadaan

$$M' \geq \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{M} \cdot (M')^2$$

eli $M' \leq KM$. $\square$

Huomautus. (3.1):ssä pätee aina yhtäsuuruus.

## 4. Rengelin epäyhtälö

Ensimmäisen pykälän lopussa näimme, että suorakulmion moduli itse asiassa on erään käyräparven moduli. Osoitamme, että sama pätee kaikille nelikulmioille.

Olkoon $\Gamma$ parvi (paloittain) jatkuvasti differentioituvia käyriä $\gamma : I \to G$ ja $F'(\Gamma)$ kaikkien Borel-funktioiden $\rho' \geq 0$ perhe, joille

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \rho' |dz| = \alpha(\rho') > 0.$$

Jos asetetaan $\rho = \rho'/\alpha(\rho')$, niin

$$\int_\gamma \rho\,|dz| = \frac{1}{\alpha(\rho')}\int_\gamma \rho'\,|dz| \geq 1,$$

joten $\rho \in F(\Gamma)$.

<u>Lause 4.1.</u> $M(\Gamma) = \inf\limits_{\rho' \in F'(\Gamma)} \dfrac{\iint_G (\rho')^2\,dx\,dy}{\alpha(\rho')^2}$

<u>Todistus.</u> Jos $\rho' \in F'(\Gamma)$, niin $\rho'/\alpha(\rho') \in F(\Gamma)$ ja

$$\iint_G \rho^2\,dx\,dy = \frac{1}{\alpha(\rho')^2}\iint_G (\rho')^2\,dx\,dy.$$

Näin ollen

$$M(\Gamma) \leq \inf_{\rho' \in F'(\Gamma)} \frac{1}{\alpha(\rho')^2}\iint_G (\rho')^2\,dx\,dy.$$

Olkoon $\rho \in F(\Gamma)$. Koska $\alpha(\rho) \geq 1$, on

$$\frac{1}{\alpha(\rho)^2}\iint_G \rho^2\,dx\,dy \leq \iint_G \rho^2\,dx\,dy,$$

joten

$$M(\Gamma) \geq \inf_{\rho \in F(\Gamma)} \frac{1}{\alpha(\rho)} \iint_G \rho^2 \, dx\,dy$$

$$\geq \inf_{\rho' \in F'(\Gamma)} \frac{1}{\alpha(\rho')} \iint_G (\rho')^2 \, dx\,dy,$$

sillä $F(\Gamma) \subset F'(\Gamma)$. □

Olkoon $Q$ nelikulmio ja $\mathcal{C}_a$ sen $a$-sivuja yhdistävien käyrien parvi. Olkoon $f$ konforminen kuvaus suorakulmiolle $R = R(0, a, a+ib, ib)$. Koska $J_f = |f'|^2$, on

$$ab = \iint_Q |f'|^2 \, dx\,dy .$$

Jos $\gamma \in \mathcal{C}_a$, niin

(4.1) $$\int_\gamma |f'(z)||dz| \geq b,$$

missä pätee yhtäsuuruus, jos $f \circ \gamma$ on jana. Näin ollen

(4.2) $$M(Q) = \frac{a}{b} = \frac{\iint_Q |f'|^2 \, dx\,dy}{\left( \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_a} \int_\gamma |f'(z)||dz| \right)^2}$$

<u>Lause 4.2.</u> Jos $\mathcal{C}_a$ on nelikulmion $Q$ $a$-sivuja yhdistävien (paloittain säännöllisten) käyrien $\gamma : I \to Q$ parvi, niin

$$M(Q) = \underline{M}(\mathcal{C}_a).$$

<u>Todistus.</u> Kaavasta (4.1) seuraa, että $|f'| \in F'(\mathcal{C}_a)$, joten (4.2):n nojalla

$$M(Q) \geq M(\mathcal{C}_a).$$

Olkoon $\rho \in F'(\mathcal{C}_a)$ ja $\rho_1(f(z)) = \dfrac{\rho(z)}{|f'(z)|}$. Silloin

$$\iint_Q \rho^2 \, dx\,dy = \iint_R \rho_1(u+iv)^2 \, du\,dv$$

$$= \int_0^a \int_0^b \rho_1(u+iv)^2 \, du\,dv .$$

Jos $f \circ \gamma_u$ on pystysuora jana, niin

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{C}_a} \int_\gamma \rho |dz| \le \int_{\gamma_u} \rho |dz| = \int_0^b \rho_1(u+iv)\,dv$$

Käyttämällä Schwarzin epäyhtälöä saadaan

$$\iint_Q \rho^2\,dx\,dy \ge \int_0^a \frac{1}{b} \left( \int_0^b \rho_1(u+iv)\,dv \right)^2 du$$

$$\ge \frac{a}{b} \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_a} \int_\gamma \rho |dz| .$$

Näin ollen

$$M(Q) = \frac{a}{b} \le \frac{\iint_Q \rho^2\,dx\,dy}{\iint_{\gamma \in \mathcal{C}_a} \rho |dz|} . \ \square$$

Jos $\rho = 1$, niin $\rho \in F'(\mathcal{C}_a)$. Lukua

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{C}_a} \int_\gamma |dz| = s_a$$

kutsutaan <u>a-viivojen etäisyydeksi Q:ssa</u>. Vastaavalla tavalla voidaan määritellä <u>b-viivojen etäisyys $s_b$</u>.

On huomattava, että $s_a$ ja $s_b$ mitataan nelikulmion $Q$ sisällä.

Rengelin epäyhtälö. Jos $m(Q)$ on nelikulmion $Q$ pinta-ala, niin

$$\frac{(s_b(Q))^2}{m(Q)} \le M(Q) \le \frac{m(Q)}{(s_a(Q))^2}.$$

Yhtäsuuruus pätee jos ja vain $Q$ on suorakulmio.

Todistus. Koska

$$M(Q) = \inf_{\rho \in F'(C_a)} \frac{\iint_Q \rho^2 \, dx\, dy}{\left(\inf_{\gamma \in C_a} \int_\gamma \rho |dz|\right)^2}$$

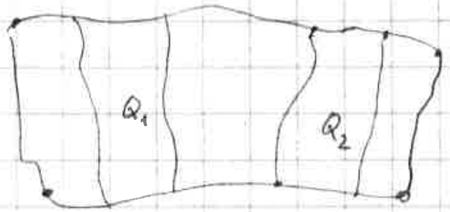
saadaan valitsemalla $\rho = 1$

$$M(Q) \le \frac{m(Q)}{(s_a(Q))^2}.$$

Vaihtamalla $Q$:n a-sivut ja b-sivut keskenään saadaan

$$1/M(Q) \le \frac{m(Q)}{(s_b(Q))^2}.$$

Jos $Q$ on suorakulmio, niin yhtäsuuruus on molemmissa epäyhtälöissä voimassa. Sivuutamme sen




todistamiseen, että yhtäsuuruus jommassa kummassa epäyhtälössä implikoi, että $Q$ on suorakulmio. □

Lause 4.3. (Modulin superadditiivisuus) Olkoon $Q_1, Q_2, \ldots$ jono (pistevieraita) nelikulmioita siten, että $\overline{Q}_n \subset \overline{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$. Jos jokaisen $Q_n$:n $a$-sivut sisältyvät $Q$:n $a$-sivuihin, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(Q_n) \leq M(Q).$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $Q$ on suorakulmio $R(0, M(Q), M(Q)+i, i)$. Silloin on $s_a(Q_n) \geq 1$, joten Rengelin epäyhtälön nojalla

$$\sum M(Q_n) \leq \sum m(Q_n) \leq m(Q) = M(Q). \square$$

Huomautus. Jos $Q$ on suorakulmio, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(Q_n) = M(Q)$$

jos ja vain jos jokainen $Q_n$ on suorakulmio ja $\sum m(Q_n) = m(Q)$.

Erikoisesti seuraa Lauseesta 4.3 modulin monotonisuus: Jos $Q_1 \subset Q_2$

ja $Q_1$:n a-sivut sisältyvät $Q_2$:n a-sivuihin, niin $M(Q_1) \le M(Q_2)$.

Olkoon $Q_1, Q_2, \dots$ jono nelikulmioita. Olkoot $Q_n$:n sivut $a_1^n, b_1^n, a_2^n, b_2^n$. Jono $Q_n$ suppenee sisältä kohti nelikulmiota $Q$, jos $\overline{Q}_n \subset \overline{Q}$ ja jokaista $\varepsilon$ vastaa $n_\varepsilon$ siten, että

$$\rho(a_i^n, a_i) < \varepsilon$$

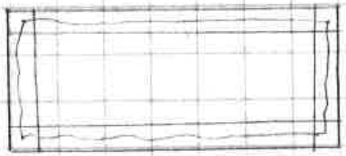
$$\rho(b_i^n, b_i) < \varepsilon ,$$

kun $n \ge n_\varepsilon$. ($a_1, b_1, a_2, b_2$ ovat $Q$:n sivut ja $\rho(A,B)$ joukkojen $A$ ja $B$ välimatka; oletamme että $Q$ on rajoitettu)

Lause 4.4. Jos nelikulmiojono $Q_n$ suppenee sisältä kohti nelikulmiota $Q$, niin

$$\lim_{n\to\infty} M(Q_n) = M(Q)$$

Todistus. Olkoon $f$ nelikulmion $Q$ konforminen kuvaus suorakulmiolle $R(0, M(Q), M(Q)+i, i)$. Silloin $f$ on tasaisesti jatkuva $\overline{Q}$:ssa, joten jono



$Q'_M = f(Q_M)$ suppenee sisältä kohti $R$:ää. Jokaista lukua $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \min(1/2, M(Q)/2)$ vastaa silloin $M_\varepsilon$ siten, että $Q'_M$:n sivut sijaitsee vastaavan $R$:n sivun $\varepsilon$-ympäristössä, kun $M \geq M_\varepsilon$. Silloin on

$$s_a(Q'_M) \geq 1 - 2\varepsilon$$

$$s_b(Q'_M) \geq M(Q) - 2\varepsilon .$$

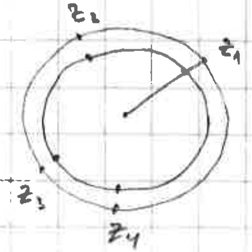
Koska $m(Q'_M) \leq M(Q)$, saadaan Rengelin epäyhtälöstä

$$\frac{(M(Q)-2\varepsilon)^2}{M(Q)} \leq M(Q'_M) \leq \frac{M(Q)}{(1-2\varepsilon)^2} .$$

Koska $M(Q'_M) = M(Q_M)$ $f$:n konformisuuden nojalla, saadaan väite. □

Lauseen 4.4 mukaan nelikulmion moduli on eräässä mielessä jatkuva.

Käyrää (pistejoukkoa) sanotaan *analyyttiseksi*, jos se on ympyrän $K$ kuva kuvauksessa, joka on analyyttinen $K$:n ympäristössä. Nelikulmio on *analyyttinen*, jos sen reuna on analyyttinen käyrä.




Lause 4.5. Jos $Q$ on nelikulmio, niin on olemassa jono analyyttisiä nelikulmioita $Q_m$, joka suppenee sisältä kohti $Q$:ta.

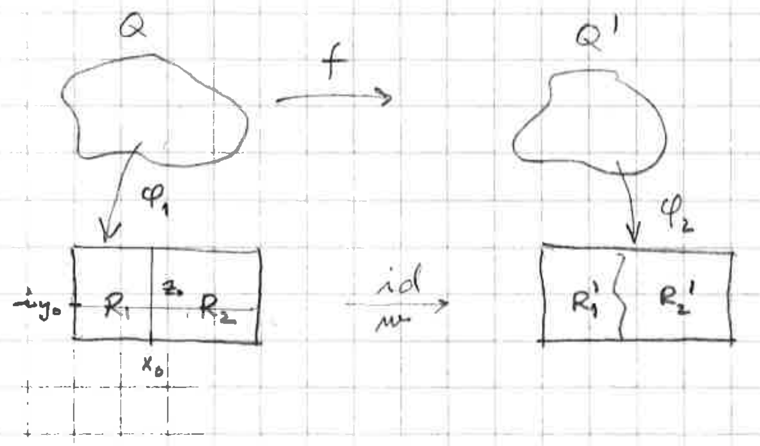
Todistus. Kuvataan $\overline{Q}$ konformisesti yksikkökiekon sulkeumalle $\overline{D}$ kuvauksella $f$. Olkoot $z_1, z_2, z_3, z_4$ nelikulmion $f(Q)$ kärjet. Olkoon $Q_m'$ nelikulmio, jonka muodostaa kiekko $|z| < 1 - \frac{1}{m}$ ja kärjistä $(1 - \frac{1}{m}) z_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Silloin $f^{-1}$:n tasaisen jatkuvuuden nojalla jono $Q_m = f^{-1}(Q_m')$ täyttää vaaditut ehdot. □

5. Perusominaisuuksia

Lause 5.1. 1-kvasikonformikuvaus on konforminen.

Todistus. Olkoon $f : G \to G'$ 1-kvasikonforminen ja $Q$ nelikulmio, $\overline{Q} \subset G$. Riittää näyttää, että $f$ on konforminen $Q$:ssa.

Olkoon $Q' = f(Q)$, jolloin $M(Q') = M(Q)$. Kuvataan $Q$ ja $Q'$ konformi-




sille kuvauksille $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ suorakulmiolle $R = R(0, M(Q), M(Q)+i, i)$. Kuvaus

$$w = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : R \to R$$

on 1-kvasikonforminen. Osoitetaan, että $w = id$, jolloin $f = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ on konforminen.

Valitaan $z_0 = x_0 + iy_0 \in R$ ja jaetaan $R$ suoralla $x = x_0$ suorakulmioiksi $R_1 = R_1(0, x_0, x_0+i, i)$ ja $R_2 = (x_0, M, M+i, x_0+i)$. Jos $R_i' = w(R_i)$, $i=1,2$, niin

$$M(R_1') + M(R_2') = M(R_1) + M(R_2) =$$

$$x_0 + (M - x_0) = M(R).$$

Lauseen 4.3. perusteella on $M(R_1')$ suorakulmio. Koska $M(R_1') = M(R_1) = x_0$ on $\operatorname{Re} w(z_0) = M(R_1') = x_0$. Vastaavaan tapaan voidaan osoittaa, että $\operatorname{Im} w(z_0) = y_0$. □

Lause 5.2. Olkoon $f_n : G \to G_n'$ jono $K$-kvasikonformisia kuvauksia, joka suppenee tasaisesti $G$ kompakteissa osissa kohti homeomorfismia $f : G \to G'$. Silloin $f$

on $K$-kvasikonforminen.

Todistus. Olkoon $Q$ nelikulmio, $\bar{Q} \subset G$. Riittää näyttää, että $M(f(Q)) \le K\, M(Q)$.

Olkoon $Q_n \subset Q$ Lauseen 4.5 todistuksessa konstruoitu jono. Koska jono $f_n$ suppenee tasaisesti $\bar{Q}$:ssa päätellään, että $f_k(Q_n) \subset f(Q)$, kun $k \ge k(n)$. Valitsemalla sopivat osajonot päästään tilanteeseen, jossa

$$f_n(Q_n) \subset f(Q), \quad n = 1, 2, \dots$$

Silloin nelikulmiot $f_n(Q_n)$ suppenevat sisältä kohti nelikulmiota $f(Q)$, joten Lauseen 4.4 nojalla on

$$\lim_{n\to\infty} M(f_n(Q_n)) = M(f(Q))$$

$$\lim_{n\to\infty} M(Q_n) = M(Q).$$

Koska $M(f_n(Q_n)) \le K\, M(Q_n)$, saadaan väite. □

Lause 5.3. Jos kiertosuunnan säilyttävä homeomorfismi $f: G \to G'$ toteuttaa ehdon $M(f(Q)) \le K\, M(Q)$ kai-

kaikille analyyttisille nelikulmioille $Q$, $\bar{Q} \subset G$, niin $f$ on $K$-kvasikonforminen.

Todistus. Olkoon $Q$ nelikulmio, $\bar{Q} \subset G$, ja $Q_n \subset Q$ Lauseen 4.5 todistuksessa konstruoitu jono. Silloin jono $f(Q_n)$ suppenee sisältä kohti nelikulmiota $f(Q)$, joten

$$\lim_{n \to \infty} M(f(Q_n)) = M(f(Q))$$

$$\lim_{n \to \infty} M(Q_n) = M(Q)$$

Koska oletuksen nojalla $M(f(Q_n)) \leq K M(Q_n)$, saadaan $M(f(Q)) \leq K M(Q)$, mistä väite seuraa. □

Olkoon $f$ nelikulmion $Q$ homeomorfismi nelikulmiolle $Q'$. Jos $f$ on $Q$:n sisällä $K$-kvasikonforminen, niin $f$:ää sanotaan nelikulmion $Q$ $K$-kvasikonformikuvaukseksi.

Lause 5.4. Jos $f$ on nelikulmion $Q$ $K$-kvasikonformikuvaus nelikulmiolle $Q'$, niin $M(Q') \leq K M(Q)$.

Todistus. Sovelletaan ed. lauseen todistusta nelikulmioon $\Delta$. $\square$

## III $\overline{\mathbb{R}}^n$:n kvasikonformikuvauksista

Avaruudella $\overline{\mathbb{R}}^n$ tarkoitetaan $n$-ulotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ yhden pisteen kompaktisointia $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Äärettömyyspisteen palloympäristöllä tarkoitetaan joukkoa

$$B^n(\infty, r) = \{x \mid |x| > r\} \cup \{\infty\}.$$

Äärellisen pisteen $x_0$ palloympäristöille käytetään merkintää

$$B^n(x_0, r) = \{x \mid |x - x_0| < r\}.$$

### 1. Polun pituus

Polulla tarkoitetaan jatkuvaa kuvausta $\alpha : \Delta \to \overline{\mathbb{R}}^n$, missä $\Delta \subset \mathbb{R}^1$ on väli. Polku on avoin (suljettu), jos $\Delta$ on avoin (suljettu) väli.

Polun jäljellä tarkoitetaan joukkoa $|\alpha| = \alpha(\Delta) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$.

Olkoon $\alpha : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}^n$ suljettu polku ja $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k = b$ välin $[a,b]$ jako. Lukua

$$l(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| ,$$

missä käydään läpi kaikki välin $[a,b]$ jaot, kutsutaan $\alpha$:n pituudeksi. Silloin $0 \le l(\alpha) \le \infty$, ja $l(\alpha) = 0$ jos ja vain jos $\alpha$ on vakiopolku. Jos $l(\alpha) < \infty$, niin $\alpha$ on suoristuva.

Jos $\infty \in |\alpha|$, niin $\alpha$ ei ole suoristuva (paitsi jos $\alpha(t) = \infty$ on vakiopolku, jolloin asetetaan $l(\alpha) = 0$).

Polku $\alpha$ on siis suoristuva, jos ja vain jos kuvaus $\alpha : \Delta \to \mathbb{R}^n$ on rajoitetusti heilahteleva, jolloin $l(\alpha)$ on $\alpha$:n kokonaisheilahtelu. Koska kokonaisheilahtelu on additiivinen välifunktio saadaan

Lause 1.1. Olkoon $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ suoristuva polku ja $a = t_0 \le \ldots \le t_k = b$ välin $[a,b]$ jako. Silloin

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} l(\alpha | [t_{i-1}, t_i]) .$$

Olkoon $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ suoristuva polku. Määritellään $\alpha$:n <u>pituusfunktio</u> $s = s_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ asettamalla

$$s_\alpha(t) = \ell(\alpha|[a,t]).$$

<u>Lause 1.2.</u> Suoristuvan polun $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ pituusfunktiolla $s$ on seuraavat ominaisuudet:

1) $a \le t_1 \le t_2 \le b \Rightarrow \ell(\alpha|[t_1,t_2]) = s(t_2) - s(t_1) \ge |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|$
2) $s$ on kasvava
3) $s$ on jatkuva
4) $s$ on abs. jatkuva, jos ja vain jos $\alpha$ on abs. jatkuva
5) $s'(t)$ ja $\alpha'(t)$ ovat olemassa m.k. ja $s'(t) = |\alpha'(t)|$ m.k.
6) $\ell(\alpha) \ge \int_a^b s'(t)\,dt = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$,

missä pätee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $s$ on abs. jatkuva.

<u>Todistus.</u> 1) ja 2) ovat ilmeisiä. 3) on uskottava, joten todistus sivuutetaan.

Jos $s$ on abs. jatkuva, niin 1):n nojalla myös $\alpha$ on abs. jatkuva. Olkaan kääntäen $\alpha$ abs. jatkuva. Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohden voidaan silloin löytää $\delta > 0$ siten, että

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha(b_i) - \alpha(a_i)| < \varepsilon$$

aina, kun välit $\Delta_i = [a_i, b_i] \subset \Delta$ ovat sisäpisteittään pistevieraita ja

$$\sum_{i=1}^{k} m(\Delta_i) < \delta$$

Olkoon $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ tällainen kokoelma. Koska

$$s(b_i) - s(a_i) = l(\alpha | \Delta_i),$$

on jokaisella välillä $\Delta_i$ jako osaväleihin $\Delta_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$ siten, että

$$\sum_j |\alpha(b_{ij}) - \alpha(a_{ij})| > s(b_i) - s(a_i) - \frac{\varepsilon}{k}.$$

Näin ollen

$$\sum_i |s(b_i) - s(a_i)| < \sum_{i,j} |\alpha(b_{ij}) - \alpha(a_{ij})| + \varepsilon$$

$$< 2\varepsilon,$$

joten $s$ on abs. jatkuva.

Diff. III:sta tiedämme: Koska $s$ on kasvava ja $\alpha$ rajoitetusti heilahteleva, niin derivaatat $s'(t)$ ja $\alpha'(t)$ ovat olemassa m.k.

Koska $\alpha$ on kuvaus $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m$, on $\alpha'(t) \in L(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^m)$,

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha_m'(t) \end{pmatrix},$$

$\alpha'(t)h = (\alpha_1'(t)h, \dots \alpha_m' h)$. Näin ollen $\alpha'(t) \in \mathbb{R}^m$ ja lineaarikuvauksen $\alpha'(t)$ normi on $=$ $\mathbb{R}^m$:n pisteen $\alpha'(t)$ normi. Lisäksi

$$\alpha'(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\alpha(t) - \alpha(t')}{t - t'},$$

joten 1):n perusteella on $|\alpha'(t)| \leq s'(t)$ aina, kun molemmat derivaatat ovat olemassa.

Olkoon $A$ kaikkien niiden pisteiden $t$ joukko, joille $s'(t)$ ja $\alpha'(t)$ ovat olemassa ja $|\alpha'(t)| < s'(t)$. Olkoon $A_k$ kaikkien pisteiden $t \in A$ joukko, joille

$$\frac{s(q) - s(p)}{q - p} \geq \left| \frac{\alpha(q) - \alpha(p)}{q - p} \right| + \frac{1}{k}$$

kaikilla $a \leq p \leq t \leq q \leq b$, joille $0 < p - q < \frac{1}{k}$.

olk. $p \le t \le q$, $t \in A$. Silloin

$$f(q) = f(t) + f'(t)(q-t) + (q-t)\,\varepsilon(q-t)$$
$$f(p) = f(t) + f'(t)(p-t) + (p-t)\,\varepsilon(p-t)$$

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = f'(t) + \frac{q-t}{q-p}\,\varepsilon(q-t)$$

$$- \frac{p-t}{q-p}\,\varepsilon(q-t).$$

Koska $\left|\frac{q-t}{q-p}\right| \le 1$ ja $\left|\frac{p-t}{q-p}\right| \le 1$, saadaan

$$\lim_{\substack{q \to t+ \\ p \to t-}} \frac{f(q)-f(p)}{q-p} = f'(t).$$



Koska $s$ ja $\alpha$ ovat differentioituvia kaikissa pisteissä $t \in A$, seuraa, että

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Osoittaaksemme, että $m(A) = 0$, riittää näyttää, että $m(A_k) = 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $k \in N$ ja jako

$$a = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_h = b$$

siten, että

$$\ell(\alpha) \le \sum |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| + \varepsilon/k$$

$$t_j - t_{j-1} < 1/k, \quad j = 1, \dots, h.$$

Asetetaan $\Delta_j = [t_{j-1}, t_j]$. Jos $\Delta_j \cap A_k \ne \emptyset$, niin

$$s(t_j) - s(t_{j-1}) \ge |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| + \frac{m(\Delta_j)}{k}.$$

Tällöin

$$m(A_k) \le \sum_{\Delta_j \cap A_k \ne \emptyset} m(\Delta_j) \le$$

$$k \sum_{j=1}^{h} \Big( (s(t_j) - s(t_{j-1})) - |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| \Big) =$$

$h : [a,b] \to [c,d]$ on kasvava, jos

$$a \le t_1 < t_2 \le b \Rightarrow h(t_1) \le h(t_2).$$



$$k\Big( l(\alpha) - \sum_j |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| \Big) \le \varepsilon.$$

Näin ollen $m(A_k) = 0$ ja 5) on todistettu.
Koska $l(\alpha) = s(b) = s(b) - s(a)$, seuraa 6) kohdista 4) ja 5) ja yleisesti reaalianalyysin tuloksesta

$$s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)\,dt$$

jos ja vain jos $s$ on abs. jatkuva. □

## 2. Parametrin vaihto

Polku $\alpha : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}^n$ saadaan polusta $\beta : [c,d] \to \overline{\mathbb{R}}^n$ kasvavalla (vähenevällä) parametrinvaihdolla, jos on olemassa kasvava (vähenevä) surjektio $h : [a,b] \to [c,d]$ siten, että $\alpha = \beta \circ h$. (Huomaa, että $h$ on välttämättä jatkuva.)
Polun $\alpha$ vastakkaisella polulla tarkoitetaan polkua $\alpha^{-1} = \overleftarrow{\alpha} : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}^n$, jolle

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(a+b-t).$$

Näin ollen $\alpha^{-1}$ saadaan $\alpha$:sta vähenevällä parametrinvaihdolla.

Lause 2.1. Jos $\alpha$ saadaan $\beta$:sta parametrinvaihdolla, niin $l(\alpha) = l(\beta)$.

Todistus. Olkoon $h : [a,b] \to [c,d]$ parametrinvaihdon välittävä kuvaus. Koska $h$ on tasaisesti jatkuva, vie $h$ välin $[a,b]$ "tiheän" jaon välin $[c,d]$ "tiheäksi" jaoksi. Väite seuraa näin ollen polun pituuden määritelmästä. □

Korollaari 1. $\alpha$ on suoristuva jos ja vain jos $\beta$ on suoristuva.

Korollaari 2. $l(\alpha) = l(\alpha^{-1})$.

Lause 2.2. Jos $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ on suoristuva, niin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty polku $\alpha^0 : [0, c] \to \mathbb{R}^n$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1) $\alpha$ saadaan $\alpha^0$:sta kasvavalla parametrin vaihdolla,

2) $l(\alpha^0 | [0,s]) = s$, $0 \le s \le c$, eli $s_{\alpha^0}(s) = s$.

Todistus. Olkoon $h = s_\alpha : [a,b] \to [0, c]$, missä $c = s_\alpha(b) = l(\alpha)$. Silloin $h$ on Lauseen 1.2 perusteella jatkuva ja kasvava bijektio. Olkoon $\alpha^0 : [0, c] \to \mathbb{R}^n$ polku,

Polku $\alpha^\circ$ on hyvin määritelty: jos $s = h(t_1) = h(t_2)$, niin $\alpha$ on vakio välillä $[t_1, t_2]$ ja voidaan asettaa

$$\alpha^\circ(s) = \alpha(t_1) = \alpha(t_2).$$



jonka määrittelee ehto $\alpha = \alpha^\circ \circ h$. Silloin

$$l(\alpha^\circ | [0, h(t)]) = l(\alpha | [0, t]) = s_\alpha(t) = h(t)$$

Lauseen 2.1 perusteella. Näin ollen $\alpha^\circ$ toteuttaa ehdot 1) ja 2).

Oletetaan, että $\alpha^\circ : [0, c] \to R$ toteuttaa ehdot 1) ja 2). Silloin (Lause 2.1)

$$c = l(\alpha^\circ) = l(\alpha).$$

Olkoon $\alpha = \alpha^\circ \circ h$, $h : [a, b] \to [0, c]$ kasvava parametrin vaihto. Ehdon 2) nojalla

$$s_\alpha(t) = l(\alpha | [a, t]) = l(\alpha^\circ | [0, h(t)])$$

$$= h(t),$$

joten $h = s_\alpha$. Näin ollen $\alpha^\circ$ on yksikäsitteisesti määrätty. □

Polkua $\alpha^\circ : [0, l(\alpha)]$ kutsutaan $\alpha$:n <u>normaaliesityksesi</u> (eli $\alpha$:n parametrisityksesi kaaren pituuden avulla)

<u>Lause 2.3.</u> Jos $\alpha$ saadaan suoristuvasta polusta $\beta$ parametrinvaihdolla, niin

$\alpha^0 = \beta^0$, jos parametrinvaihto $h$ on kasvava, ja $\alpha^0 = \overleftarrow{\beta^0}$, jos $h$ on vähenevä.

<u>Todistus.</u> Olkoon $\alpha = \beta \circ h$, $h$ kasvava. Silloin

$$\alpha = \alpha^0 \circ s_\alpha = \beta^0 \circ s_\beta \circ h .$$

Koska $s_\beta \circ h$ on kasvava, seuraa Lauseen 2.2 yksikäsitteisyysosasta, että $\alpha^0 = \beta^0$.

Olkoon $h$ vähenevä. Asetetaan $g(t) = l(\alpha) - t$, $0 \le t \le l(\alpha)$. Silloin

$$\alpha = (\beta^0)^{-1} \circ g \circ s_\beta \circ h ,$$

missä $g \circ s_\beta \circ h$ on kasvava. Koska

$$l\left((\beta^0)^{-1} | [0,t]\right) = l\left(\beta^0 | [l(\alpha) - t, l(\alpha)]\right)$$

$$= l(\alpha) - (l(\alpha) - t) = t,$$

saadaan jälleen $\alpha^0 = (\beta^0)^{-1}$. $\square$

Jos polku ei ole suljettu, niin normaaliesitystä ei voida määritellä. Kuitenkin kysymys polun pituudesta on mielekäs.

Polku $\alpha : \Delta \to \bar{R}^n$ on lokaalisti suoristuva, jos jokainen suljettu polku $\beta = \alpha | [c,d]$, $[c,d] \subset \Delta$, on suoristuva. Asetetaan

$$l(\alpha) = \sup_{\beta} l(\beta).$$

Jos $l(\alpha) < \infty$, niin $\alpha$ on suoristuva. Jos $|\alpha|$ sisältää sekä $\infty$:n että äärellisiä pisteitä, niin $\alpha$ ei ole lokaalisti suoristuva.

Lause 2.4. Olkoon $\alpha : ]a,b[ \to R^n$ avoin polku siten, että $\alpha$ on absoluuttisesti jatkuva jokaisella $]a,b[$:n suljetulla osavälillä. Silloin $\alpha$ on lokaalisti suoristuva ja

$$l(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt.$$

Todistus. Olkoon $[c,d] \subset ]a,b[$. Jos $\beta = \alpha | [c,d]$, niin (Lause 1.2)

$$l(\beta) = \int_c^d |\alpha'(t)| \, dt.$$

Väite seuraa integraalin täydellisestä additiivisuudesta. □

## 4. Käyräintegraali

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borelin joukko ja $\rho : A \to \bar{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ ei-negatiivinen Borelin funktio.

Jos $\alpha : [a,b] \to A$ on suoristuva suljettu polku, niin asetetaan

$$\int_\alpha \rho\, ds = \int_0^{l(\alpha)} \rho(\alpha^0(t))\, dt.$$

Huomautus. Tapauksessa $n = 2$ on kyseessä integraalin

$$\int_\alpha \rho(z)\,|dz|$$

yleistys. Jos näet oletetaan, että $\alpha^0$ on säännöllinen polku, on

$$\left| \frac{d}{ds} \alpha^0(s) \right| = 1$$

(vrt. Lause 1,2, kohta 5 ). Funktioteorian tulosten nojalla on

$$\int_\alpha \rho(z)\,|dz| = \int_{\alpha^0} \rho(z)\,|dz| = \int_0^{l(\alpha)} \rho(\alpha^0(s)) \left| \frac{d}{ds} \alpha^0(s) \right| ds.$$

Koska $\rho \circ \alpha^0$ on Borelin funktio, on esiintyvä integraali ainakin Lebesguen mielessä aina määritelty. (Jos oletettaisiin, että $\rho$ on pelkästään Lebesgue-mitallinen, ei funktio $\rho \circ \alpha^0$ olisi aina edes mitallinen.)

Kompleksianalyysin tapaan käytämme myös merkintää

$$\int_\alpha \rho \, ds = \int_\alpha \rho(x) \, |dx| .$$

Tällöin $x$:n voidaan ajatella tarkoittavan $|\alpha|$:n pistettä.

Jos $\alpha$ on lokaalisti suoristuva ja $|\alpha| \subset A$, niin asetetaan

$$\int_\alpha \rho \, ds = \sup_\beta \int_\beta \rho \, ds ,$$

missä $\beta = \alpha | [c,d]$, $[c,d] \subset \Delta$.

<u>Lause 4.1.</u> Jos $\alpha : [a,b] \to A$ on absoluuttisesti jatkuva, niin

$$\int_\alpha \rho \, ds = \int_a^b \rho(\alpha(t)) \, |\alpha'(t)| \, dt .$$

<u>Todistus.</u> Koska absoluuttisesti jatkuva

funktio on rajoitetusti heilahtelevа, on α suoristuva.

Jos $\alpha^0$ on $\alpha$:n normaaliesitys ja $s : [a,b] \to [0,c]$ parametrin vaihto, jolle

$$s(t) = \ell(\alpha \mid [0,t]),$$

niin $\alpha = \alpha^0 \circ s$. Koska (Lause 1.2) $s'(t) = |\alpha'(t)|$ m.k., on

$$\int_a^b \rho(\alpha(t))|\alpha'(t)|\,dt = \int_a^b \rho(\alpha^0(s(t)))\,s'(t)\,dt$$

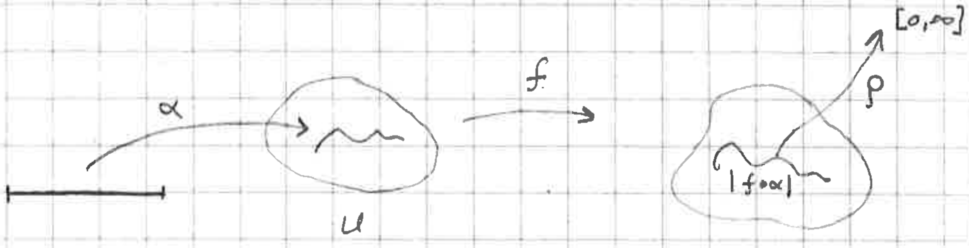
Koska $s$ on absoluuttisesti jatkuva (Lause 1.2), voidaan oikeanpuoleisessa integraalissa suorittaa muuttujan vaihto $s = s(t)$ (vrt. Lehto-Virtanen, III 2.6.), joten

$$\int_a^b \rho(\alpha(t))|\alpha'(t)|\,dt = \int_0^{\ell(\alpha)} \rho(\alpha^0(s))\,ds. \quad \square$$

Eo. lauseen nojalla funktioteoriassa käytetty käyräintegraalin määritelmä

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_0^1 f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt$$

voidaan yleistää kuhunkin polkuja






γ, jotka ovat absoluuttisesti jatkuvia.

## 5. Muuttujan vaihto

Olkoon $U \subset R^n$ avoin joukko, $f: U \to R^m$ jatkuva ja $\alpha$ $U$:n polku. Silloin $f \circ \alpha$ on $R^m$:n polku. Jos $f \circ \alpha$ on lokaalisti suoristuva ja $\rho : |f \circ \alpha| \to [0, \infty]$ on Borelin funktio, niin integraali

$$\int_{f \circ \alpha} \rho \, ds$$

on määritelty. Tutkimme, kuinka tätä integraalia voidaan arvioida $\alpha$:n yli otetulla käyräintegraalilla. Tätä varten tarvitsemme mitan sille, kuinka $f$ muuntaa $\alpha$:n kaarialkion $f \circ \alpha$:n kaarialkioksi.

Olkoon

$$L(x, f) = \limsup_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|},$$

$x \in U$. Jos $f$ on differentioituva pisteessä $x$, on $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + |h|\varepsilon(h)$. Koska $|f'(x)h| \leq |f'(x)||h|$, on $L(x, f) \leq |f'(x)|$. Itse asiassa on

$$L(x,f) = |f'(x)|,$$

sillä $|f'(x)h| = |f'(x)||h|$ pätee eräällä origon kautta kulkevalla suoralla.

<u>Lause 5.1.</u> Kuvaus $x \mapsto L(x,f)$ on Borelin funktio $U$:ssa.

<u>Todistus.</u> On näytettävä, että $E = \{x \in U \mid L(x,f) < a\}$ on Borelin joukko jokaisella $a \in \mathbb{R}^1$. Olkoon $E_j$ niiden pisteiden $x \in U$ joukko, joille

$$0 < |h| < \frac{1}{j} \;\&\; x+h \in U \Rightarrow \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq a - \frac{1}{j}$$

Koska $f$ on jatkuva, on jokainen $E_j$, $j = 1, 2, \ldots$, suljettu. Koska $E = \bigcup E_j$, on $E$ Borelin joukko. □

Jotta $f \circ \alpha$ olisi suoristuva $\alpha$:n ollessa suoristuva asetetaan seuraava määritelmä:

Olkoon $\alpha : \Delta \to \mathbb{R}^n$ suoristuva suljettu polku. Kuvaus $f : |\alpha| \to \mathbb{R}^m$ on <u>absoluuttisesti jatkuva polulla</u> $\alpha$, jos $f \circ \alpha^0$ on absoluuttisesti jatkuva välillä $[0, l(\alpha)]$.

Jätämme väliin seuraavan lauseen todistuksen. Tulos on sekä havainnollinen että uskottava.

<u>Lause 5.2.</u> Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : U \to \mathbb{R}^m$ jatkuva ja $\alpha : \Delta \to U$ lokaalisti suoristuva polku. Oletetaan, että $f$ on absoluuttisesti jatkuva jokaisella polulla $\alpha | [c,d]$, $[c,d] \subset \Delta$. Silloin $f \circ \alpha$ on lokaalisti suoristuva. Jos $\rho : |f\circ\alpha| \to [0, \infty]$ on Borelin funktio, niin

$$\int_{f\circ\alpha} \rho \, ds \le \int_{\alpha} \rho(f(x)) L(x, f) \, |dx| .$$

Jos oletetaan, että $f$ on $C^1$-kuvaus (jatkuvasti differentioituva), niin $f$ täyttää Lauseen 5.2 oletukset (väliarvolause). Tällöin saadaan

$$\int_{f\circ\alpha} \rho \, ds \le \int_{\alpha} \rho(f(x)) \, |f'(x)| \, |dx| .$$

<u>Konformikuvaus.</u> Yleistämällä I.1:n ideat koskemaan $\mathbb{R}^n$:n alueiden $D$ ja $D'$ välisen differentioituvan ku-

kuvauksen $f$ derivaattakuvausta päätellään: Derivaattakuvaus $f'(x)$ kuvaa origokeskisen $r$-säteisen pallon origokeskiseksi ellipsoidiksi, jonka pääakselin puolikkaan pituus on $r|f'(x)|$. Jos kuvaellipsoidi on pallo, niin

$$|f'(x)h| = |f'(x)||h| \quad \forall h$$

ja kääntäen. Tasossa tämä ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että kuvaus $f$ on konforminen (vrt. I.5).

<u>Määritelmä</u> Homeomorfismi $f: D \to D'$ on <u>konforminen</u>, jos $f$ on $C^1$ ja jos

$$|f'(x)h| = |f'(x)||h|$$

kaikille $x \in D$ ja $h \in \mathbb{R}^n$.

Jos $n \geq 3$, niin konformikuvausten teoria surkastuu, sillä tällöin jokainen konformikuvaus $f: D \to D'$ on ns. Möbius-kuvauksen rajoittuma. Erikoisesti tästä seuraa, että Riemannin kuvauslauseella ei ole yleistystä avaruuksiin $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Jos $f$ on konforminen, niin

$$L(x,f) = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} .$$

Erikoisesti on Lauseen 5.2 tilanteessa

$$\int_{f\circ\alpha} \rho\, ds = \int_\alpha \rho(f(x))\,|f'(x)|\,|dx| .$$

6. Polkuparven moduli

Polkuparvella $\Gamma$ tarkoitetaan kokoelmaa polkuja $\gamma : \Delta \to \overline{\mathbb{R}}^n$. Olkoon $F(\Gamma)$ kaikkien Borelin funktioitten $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ joukko, joille

$$\int_\gamma \rho\, ds \geq 1$$

kaikille lokaalisti suoristuville poluille $\gamma \in \Gamma$. Jokaiselle luonnolliselle luvulle $p$ asetetaan

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in F(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p .$$

Oletamme seuraavassa, että $\Gamma$ ei sisällä vakiopolkuja. Silloin $F(\Gamma) \neq \emptyset$, sillä $\rho = \infty \in F(\Gamma)$. Lukua $M_p(\Gamma)$ kutsutaan $\Gamma$:n $p$-*moduliksi*.

Merkitään $M_n(\Gamma) = M(\Gamma)$. Lukua $M(\Gamma)$ kutsutaan $\Gamma$:n *moduliksi* ja sen käänteislukua $\Gamma$:n *ekstremaalipituudeksi*.

*Lause 6.1.* $M_p$ on kaikkien $\overline{\mathbb{R}}^n$:n polkujen joukossa määritelty ulkomitta. Toisin sanoen

1) $M_p(\emptyset) = 0$

2) $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M_p(\Gamma_1) \le M_p(\Gamma_2)$

3) $M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i)$.

*Todistus.* Koska $0 \in F(\emptyset)$, on $M_p(\emptyset) = 0$. Jos $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, niin $F(\Gamma_1) \supset F(\Gamma_2)$, joten $M_p(\Gamma_1) \le M_p(\Gamma_2)$.

Viimeisen kohdan todistamiseksi voidaan olettaa, että $M_p(\Gamma_i) < \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\rho_i \in F(\Gamma_i)$ siten, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho^p < M_p(\Gamma) + \varepsilon/2^i .$$

olkoon $\rho = (\sum_i \rho_i^p)^{\frac{1}{p}}$. Koska $\rho \geq \rho_i$, on $\rho \in F(\Gamma)$. Silloin

$$M_p(\Gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \rho_i^p < \varepsilon + \sum_i M_p(\Gamma_i).$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan väite. $\square$

Lauseen 6.1 nojalla voidaan käyttää sanontaa "p-melkein kaikille poluille $\gamma \in \Gamma$".

Merkitään $\Gamma_1 < \Gamma_2$, jos $\Gamma_2$:n polut ovat "pitempiä" kuin $\Gamma_1$:n polut. Toisin sanoen, jos jokaisella $\Gamma_2$:n polulla $\gamma : \Delta \to \overline{\mathbb{R}}^n$ vastaa väli $\Delta_1 \subset \Delta$ siten, että $\gamma|\Delta_1 \in \Gamma_1$. Huomattakoon, että jos $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$, niin $\Gamma_1 < \Gamma_2$! Lauseiden II 1.4 ja 1.5 yhteinen vastine on silloin

<u>Lause 6.2.</u> Jos $\Gamma_1 < \Gamma_2$, niin $M_p(\Gamma_1) \geq M_p(\Gamma_2)$.

<u>Todistus</u> $F(\Gamma_1) \subset F(\Gamma_2)$. $\square$

Määritelmän mukaan niiden polkujen parven, jotka eivät ole lokaalisti suoristuvia, p-moduli on $= 0$.

Täsin samoin p-melkein kaikki polut ovat lokaalisti suoristuvia $p = 1, 2, \dots$. Tapauksessa $p = n$ pätee

Lause 6.3. Jos $\Gamma_r$ on $\Gamma$:n suoristuvien polkujen parvi, niin $M(\Gamma_r) = M(\Gamma)$.

Korollaari: $\bar{R}^n$:n ei-suoristuvien polkujen parven moduli on $= 0$. Täsin samoin melkein kaikki polut ovat suoristuvia.

Lauseen todistus sivuutetaan.

Huomautamme vielä, että jos on olemassa $x_0 \in \bar{R}^n$ siten, että $x_0 \in |\gamma|$ kaikilla $\gamma \in \Gamma$, niin $M(\Gamma) = 0$. Täsin samoin melkein kaikki polut eivät kulje $x_0$:n kautta.

## 7. Kvasikonformiset kuvaukset

Olkoon $A \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ ja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}^n$ jatkuva. Jos $\Gamma$ on parvi polkuja $\gamma : \Delta \to A$, niin parvea $\Gamma' = \{ f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma \}$ kutsutaan $\Gamma$:n kuvaksi kuvauksessa $f$.

Lause 7.1. Jos $f : D \to D'$ on konforminen, niin $M(\Gamma) = M(\Gamma')$ kaikille $D$:n polkuparville $\Gamma$.

Todistus. Olkoon $\rho' \in F(\Gamma')$ ja

$$\rho(x) = \rho'(f(x))\,|f'(x)| \quad , \ x \in D$$

$$\rho(x) = 0 \quad , \ x \notin D$$

Jos $\gamma \in \Gamma$ on lokaalisti suoristuva, on

$$\int_\gamma \rho\, ds = \int_\gamma \rho'(f(x))|f'(x)|\, dx$$

$$= \int_{f\circ\gamma} \rho'\, ds \geq 1 ,$$

joten $\rho \in F(\Gamma)$. Tällöin

$$M(\Gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n = \int_D \rho'(f(x))^n\, |f'(x)|^n$$

$$= \int_{D'} (\rho')^n \le \int_{\mathbb{R}^n} (\rho')^n ,$$

sillä $|J_f(x)| = |f'(x)|^n$ (avaruudessa $n = 2$ on $|J_f(x)| = |f'(x)|^2$ ja väite seuraa kaavasta I.4.2). Näin ollen $M(\Gamma) \le M(\Gamma')$. Koska $f^{-1}$ on konforminen, saadaan vastaavasti $M(\Gamma') \le M(\Gamma)$. □

Huomattakoon, että $p$-moduli ei ole konforminen invariantti, jos $p \ne n$. Tämä nähdään tarkastelemalla Lauseen 7.1 todistuksessa kuvausta $f(x) = kx$, $k > 0$ ja asettamalla $n$:n tilalle eksponentiksi $p$. Tällöin saadaan $M_p(k\Gamma) = k^{n-p} M_p(\Gamma)$.

Lauseen 7.1 nojalla on mielekästä määritellä kvasikonformiset kuvaukset homeomorfismeina $D \to D'$, jotka säilyttävät polkuparvien modulit kvasi-invarianteina.

Olkoot $D$ ja $D'$ $\overline{\mathbb{R}}^n$:n alueita ja $f : D \to D'$ homeomorfismi. Muodostetaan

$$K_I(f) = \sup_{\Gamma} \frac{M(\Gamma')}{M(\Gamma)}$$

$$K_O(f) = \sup_{\Gamma} \frac{M(\Gamma)}{M(\Gamma')} ,$$

missä käydään läpi kaikki $D$:n polkuparit $\Gamma$, joille $M(\Gamma)$ ja $M(\Gamma')$ eivät molemmat ole $= 0, \infty$. Erikoisesti ei $\Gamma$ tällöin voi sisältää vakiopolkua. Näin ollen pidämme edelleen voimassa oletuksen, jonka mukaan tarkastelemamme polkuparit eivät sisällä vakiopolkuja.

Määritelmä. Lukua $K_I(f)$ kutsutaan $f$:n sisädilataatioksi ja lukua $K_O(f)$ ulkodilataatioksi. Luku $K(f) = \max(K_I(f), K_O(f))$ on $f$:n maksimidilataatio. Jos $K(f) \le K < \infty$, niin $f$ on $K$-kvasikonforminen.

Ehto $K(f) \le K < \infty$ on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$M(\Gamma)/K \le M(\Gamma') \le K M(\Gamma)$$

kaikille $D$:n polkuparville $\Gamma$. Jos $K(f) < \infty$ sanotaan, että $f$ on <u>kvasikonforminen</u>.

Johdatus kvasikon-
formikuvauksiin
2.
RK

Johdatus kvasikon-
formikuvauksiin
3.
RK

Johdatus kvasikon-
formikuvauksiin
5.
RK

Johdatus kvasikon-
formikuvauksiin
4.
RK