Metriset avaruudet

Tuomas Sorvali

Joensuun yliopisto
Matematiikan laitos
1994

Sisältö

I Geometria

1. Aksioomat ja mallit

Geometria rakentuu kahdesta peruskäsitteestä: *pisteistä* ja *suorista*. Näitä yhdistää toisiinsa ns. *insidenssi* eli *kohtaaminen* ("piste P on suoralla l" eli "suora l kulkee pisteen P kautta" eli $P \in l$). Pisteitä, suoria ja insidenssiä liittää toisiinsa joukko *perussääntöjä* eli *aksioomeja*. Kohta tarkasteltavassa insidenssigeometriassa on esim. seuraava aksiooma: Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty suora l, joka kulkee P:n ja Q:n kautta.

Vaikka käytämme merkintää $P \in l$, kun piste P on suoralla l, ei suoran tarvitse olla pisteistä koostuva joukko joukko-opillisessa mielessä. Merkintä on perusteltu, koska esimerkeissä yleensä suora todella koostuu pisteistä. Yhtä hyvin pisteiden ja suorien voidaan myös ajatella suhtautuvan toisiinsa kuten kirjat ja hyllyt kirjastossa. Kirja A ja hylly l kohtaavat eli ovat insidenttejä, jos A on hyllyllä l. Kuitenkaan hylly ei koostu kirjoista vaan yleensä lastulevystä. Tämä malli ei toteuta eo. insidenssigeometrian aksioomaa, sillä kaksi kirjaa A ja B ei yleensä sijaitse samalla hyllyllä. Itse asiassa tässä mallissa "piste" (=kirja) P määrää yksikäsitteisesti "suoran" (=hyllyn) l, jolle $P \in l$.

Esimerkki 1.1. Joukon S relaatio $\sim$ on *ekvivalenssi*, jos kaikille S:n alkioille a, b ja c on voimassa seuraavat ehdot:

(i) $a \sim a$ (refleksiivisyys)

(ii) $a \sim b \implies b \sim a$ (symmetrisyys)

(iii) $a \sim b$ & $b \sim c \implies a \sim c$ (transitiivisuus)

Tässä ovat peruskäsitteinä alkiot ja joukot. Niitä yhdistää toisiinsa perussuhde "alkio kuuluu joukkoon". Ekvivalenssi on relaatio, joka toteuttaa aksioomat (i)–(iii). □

Geometrian alkuvaiheissa (Eukleides n. 330–275 eKr.) ajateltiin yleisesti, että aksiooma oli reaalimaailmaa koskeva toteamus, jonka voimassaolo oli itsestään selvä. Aksioomat olivat siis maailmankaikkeudessa vallitsevia perustotuuksia.

Eukleideen Alkeissa esitetyistä aksioomeista yhtä ei yleisesti voitu hyväksyä tällaiseksi itsestäänselvyydeksi. ("Suoran l ulkopuolella olevan pisteen P kautta kulkee täsmälleen yksi suoran l suuntainen suora.") Tämän viidennen aksiooman (ns. *paralleeliaksiooman*) voimassaoloa ei suinkaan epäilty, mutta sen voimassaoloa ei pidetty samalla tavalla "ilmeisenä" tai "itsestäänselvänä" kuin muiden aksioomien. Tästä johtuu, että yli kahden tuhannen vuoden ajan viidennen aksiooman voimassaolo yritettiin todistaa muiden aksioomien avulla. Vasta 1800-luvulla (Nikolai Ivanovitš Lobatševski 1792–1856, János Bolyai 1802–1860) selvisi, että nämä yritykset eivät voineet onnistua. Löydettiin nimittäin esimerkkejä, jotka toteuttivat kaikki muut Eukleideen aksioomat paitsi viidettä. Viidennen aksiooman "voimassaolo" maailmankaikkeudessa ei nykyfysiikan käsitysten mukaan ole myöskään itsestäänselvää tai todennäköistä.

Nykyisen ajattelutavan mukaan geometria ei ole luonnontiede. Geometria ei siis kerro reaalimaailmasta yhtään mitään. Jos geometriassa otaksutaan jonkin aksiooman olevan voimassa, niin se tarkoittaa vain sitä, että halutaan tutkia järjestelmiä, joilla on ko. ominaisuus. Esimerkin 1.1 aksioomat (i)–(iii) eivät todellakaan kerro maailmankaikkeuden tilasta yhtään mitään. Ne kertovat vain sen, että niillä ominaisuuksilla varustetun relaation tutkiminen on osoittautunut hyödylliseksi. Eukleideen tavatonta kaukonäköisyyttä osoittaa, että hän ymmärsi tämän ja otti viidennen aksiooman mukaan aksioomajärjestelmäänsä. Hänen mielestään oli siis hyödyllistä tutkia geometriaa, jolla on tämä ominaisuus.

Kohtaamme kohta geometrioita, joissa Eukleideen viides aksiooma ei päde. On osoittautunut erittäin hyödylliseksi tutkia myös tällaisia geometrioita.

Matematiikassa aksioomat esitetään yleensä *määritelminä*. Näistä loogisen päättelyn (="terveen talonpoikaisjärjen") avulla johdettuja tuloksia kutsutaan *lauseiksi*, *teoreemoiksi*, *propositioiksi*, *lemmoiksi* jne. Päättelyä, jolla lauseen tms. voimassaolo ko. järjestelmässä osoitetaan, kutsutaan *todistukseksi*.

Yleisesti ottaen aksioomien valinta on muuten vapaata, kunhan mukaan ei tule aksioomeja, jotka johtavat loogiseen ristiriitaan. Esimerkin 1.1 aksioomiin (i)–(iii) ei voida lisätä esim. aksioomaa

(iv) $a \sim b \implies b \nsim a$ (antisymmetrisyys).

Tämä on sinänsä mielekäs aksiooma, sillä reaalilukujen järjestysrelaatio $a < b$ ("pienempi kuin") toteuttaa sen.

Järjestelmään on turha lisätä aksioomaa, joka on muiden looginen seuraus. On esimerkiksi turha lisätä aksioomaa

(v) $a \nsim b \implies b \nsim a$

Esimerkin 1.1 järjestelmään, sillä (v) on lause ko. järjestelmässä. Sille voidaan esittää seuraava (epäsuora) todistus: Oletetaan, että $a \nsim b$. Antiteesi $b \sim a$. Mutta silloin olisi (ii):n perusteella $a \sim b$. Ristiriita. Siis (v) pätee.

Aksioomajärjestelmän tulisi lisäksi olla täydellinen siinä mielessä, että jokainen järjestelmän kannalta "mielekäs lause" voidaan todistaa joko oikeaksi tai vääräksi.

Ai

(huom! kohdista 1–3 ei tarvitse välittää naistutkimuksesta, sillä ne edustavat patriarkaalista naisia alistavaa maailmanjärjestystä

Ihannetapauksessa aksioomat siis

1) ovat keskenään *ristiriidattomia*,
2) ovat toisistaan *loogisesti riippumattomia*,
3) muodostavat *täydellisen* järjestelmän.

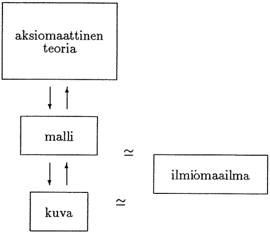
Ainoa ehdoton vaatimus on kuitenkin ristiriidattomuus. Täydellisyyden tai riippumattomuuden puuttuminen on järjestelmän kannalta lähinnä kauneusvirhe.

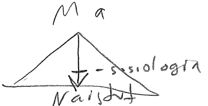
Loogikot ovat osoittaneet (Kurt Gödel 1906–1978), että aritmetiikkaa ei voida aksiomatisoida siten, että ko. kolme ehtoa olisi yhtä aikaa voimassa. Geometriassa on ehkä mahdollista laatia järjestelmiä, jotka jossain mielessä toteuttavat nämä ehdot (kts. esim. Rolf Nevanlinna: Geometrian perusteet, WSOY 1973).

Aksioomajärjestelmän *mallilla* tarkoitetaan yksinkertaisesti esimerkkiä, joka toteuttaa ko. järjestelmän. Tavallinen xy-taso koordinaattiakseleineen, pisteineen ja suorineen on malli, joka toteuttaa kaikki Eukleideen aksioomat, myös viidennen. Tästä mallista voidaan piirtää *kuvia*, ja käyttää niitä päättelyn apuna. Vaikka viides aksiooma toteutuu tässä mallissa, ei se suinkaan ole muiden looginen seuraus. Se ei näet ole voimassa kaikissa malleissa, jotka toteuttavat kaikki muut Eukleideen aksioomat. Mallin olemassaolo sen sijaan osoittaa, että Eukleideen aksioomat ovat keskenään ristiriidattomia (edellyttäen että pidämme xy-tasoa ristiriidattomana, vrt. em. Gödelin tulos).

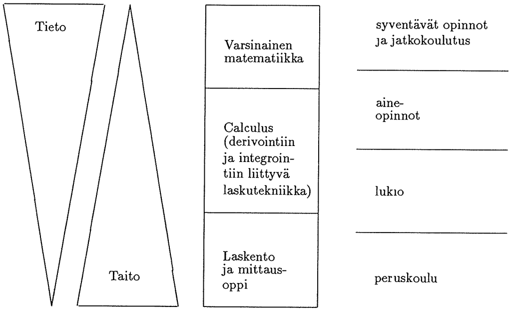
Huomautettakoon lopuksi, että Eukleides käytti sanaa "postulaatti" samassa merkityksessä kuin nykyisin käytetään sanaa "aksiooma".

Matemaattinen teoria yleensä ja geometria erityisesti on seuraavan kaavion tavalla kolmikerroksinen:





Matematiikan opiskelua eri tasoilla kuvaa puolestaan seuraava kuvio:



Kuvioiden piirtäminen ja kuvien mittaaminen on keskeinen osa geometrian alkeiden opiskelua koulussa. Se tulisi järjestää siten, että havaitut lainalaisuudet johdattavat oppijan kohti abstraktia mallia ja aksiomaattista teoriaa.

2. Abstrakti geometria

Edellisen pykälän mukaan geometria koostuu (epätyhjästä) pisteiden joukosta, (epätyhjästä) suorien joukosta ja näitä yhdistävästä insidenssistä eli kohtaamisesta ("piste P on suoralla l", "suora l kulkee pisteen P kautta", $P \in l$). Yksinkertaisin tilanne on varmasti se, jossa on vain yksi piste ja yksi suora eivätkä nämä ole insidenttejä. Koska tästä tilanteesta ei ole mitään muuta sanottavaa, haluamme sulkea tämäntapaiset trivialiteetit pois. (Kirjasto, jossa on vain yksi kirja ja yksi hylly eikä kirja ole hyllyllä, on mielenkiinnoton kirjaston hoidon kannalta.) On osoittautunut hyödylliseksi asettaa seuraava määritelmä, jossa luovumme abstraktista insidenssin käsitteestä ja ajattelemme tavalliseen tapaan suoran koostuvan pisteistä. Mitään loogista perustetta tälle ei ole, muttan ei myöskään mitään loogista estettä.

Määritelmä 2.1. *Abstrakti geometria* $\mathcal{A}$ koostuu joukosta $\mathcal{S}$, jonka alkioita kutsumme *pisteiksi*, sekä kokoelmasta $\mathcal{L}$ joukon $\mathcal{S}$ epätyhjiä osajoukkoja, joita kutsumme *suoriksi*, siten että seuraavat ehdot (aksioomat) ovat voimassa:

(i) Jokaista kahta pistettä A, $B \in \mathcal{S}$ vastaa ainakin yksi suora $l \in \mathcal{L}$, jolle $A \in l$ ja $B \in l$.

(ii) Jokaisella suoralla on vähintään kaksi eri pistettä.

Joissakin abstraktin geometrian malleissa suorat näyttävät suorilta, toisissa käyriltä. Kaareutuvat mallit ovat lähempänä fysikaalista todellisuutta kuin suoraviivaiset.

Sopimus: Malleja koskevia tuloksia kutsumme *propositioiksi*, aksiomaattista teoriaa koskevia tuloksia *lauseiksi*.

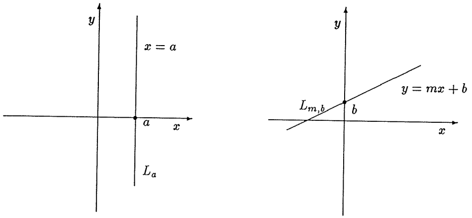
Propositio 2.2. *Olkoon* $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. *Määritellään suorien joukko seuraavasti: Jokainen muotoa*

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\},$$

a vakio, oleva $\mathbb{R}^2$:n osajoukko on vertikaalinen (=pystysuora) suora. Muotoa

$$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\},$$

m ja b vakioita, olevat $\mathbb{R}^2$:n osajoukot ovat ei-vertikaalisia suoria. Olkoon $\mathcal{L}_E$ kaikkien vertikaalisten ja ei-vertikaalisten suorien joukko. Silloin $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ on abstrakti geometria.



KUVA 2.1. $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$

Todistus. (i) On osoitettava, että mitä tahansa kahta eri pistettä $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ vastaa suora $l \in \mathcal{L}_E$, joka kulkee P:n ja Q:n kautta. Tämä tehdään tarkastelemalla kahta eri tapausta.

Tapaus 1: $x_1 = x_2$. Olkoon $a = x_1 = x_2$. Silloin suora $l = L_a \in \mathcal{L}_E$ kulkee P:n ja Q:n kautta.

Tapaus 2: $x_1 \neq x_2$. Valitaan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ja} \quad b = y_2 - mx_2.$$

Silloin $y_2 = mx_2 + b$ ja $y_1 = mx_1 + b$, joten P ja Q ovat suoralla $l = L_{m,b} \in \mathcal{L}_E$.

(ii) Vielä helpompi on osoittaa, että jokaisella suoralla on kaksi eri pistettä. $\square$

Abstraktin geometrian mallia $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ kutsutaan *euklidiseksi tasoksi* tai *karteesiseksi tasoksi* (René Descartesin (1596–1650) mukaan, joka otti käyttöön koordinaattiakselit tasossa).

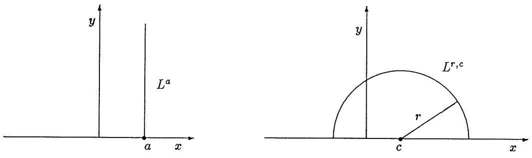
Propositio 2.3. *Olkoon $\mathcal{S} = \mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Määritellään suorien joukko seuraavasti: Jokainen muotoa*

$$L^a = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x = a\},$$

a vakio, oleva $\mathbb{H}$:n osajoukko on I-tyypin suora. Muotoa

$$L^{r,c} = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - c)^2 + y^2 = r^2\},$$

$r > 0$ ja c vakioita, olevat $\mathbb{H}$:n osajoukot ovat II-tyypin suoria. Olkoon $\mathcal{L}_H$ kaikkien I- ja II-tyypin suorien joukko. Silloin $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ on abstrakti geometria.



KUVA 2.2. $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$

Todistus. (i) On osoitettava, että mitä tahansa kahta eri pistettä $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$, missä $y_1 > 0$ ja $y_2 > 0$, vastaa suora $l \in \mathcal{L}_H$, joka kulkee P:n ja Q:n kautta.

Tapaus 1: $x_1 = x_2$. Olkoon $a = x_1 = x_2$. Silloin suora $l = L^a \in \mathcal{L}_H$ kulkee P:n ja Q:n kautta.

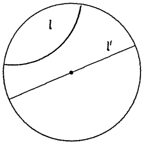
Tapaus 2: $x_1 \neq x_2$. Valitaan (harj. teht.)

$$\begin{aligned} c &= \frac{y_2^2 - y_1^2}{2(x_2 - x_1)} + \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} \\ r &= \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \end{aligned}$$

mistä seuraa, että P ja Q ovat suoralla $l = L^{r,c} \in \mathcal{L}_H$.

(ii) Jokaisella suoralla $l \in \mathcal{L}_H$ on ilmeisesti kaksi eri pistettä. $\square$

Abstraktin geometrian mallia $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ kutsutaan *hyperboliseksi tasoksi* tai *Poincarén tasoksi* (Henri Poincarén (1854–1912) mukaan). Geometriselta kannalta samanarvoinen hyperbolinen taso saadaan valitsemalla $\mathcal{S} = \mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ja suorien joukoksi $\mathcal{L}_D$ kaikki $\mathbb{D}$:n halkaisijat ja $\mathbb{D}$:n reunaa vastaan kohtisuorat ympyränkaaret (Kuva 2.3).



KUVA 2.3. $\mathcal{D} = \{\mathbb{D}, \mathcal{L}_D\}$

Kolmas abstraktin geometrian malli saadaan tarkastelemalla *yksikköpalloa*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

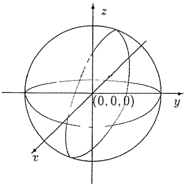
kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. *Tasolla* $\mathbb{R}^3$:ssa tarkoitetaan muotoa

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$$

olevaa joukkoa, missä a, b, c ja d ovat vakioita, joille $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Jos $d = 0$, niin taso kulkee origon $(0, 0, 0)$ kautta. Yksikköpallon S^2 *isoympyrällä* tarkoitetaan S^2:n ja jonkin origon kautta kulkevan tason leikkausympyrää. Jos $\mathcal{C}$ on isoympyrä, niin $\mathcal{C}$:llä on näin ollen esitys

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid ax + by + cz = 0\},$$

missä $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.



KUVA 2.4. Isoympyröitä

Propositio 2.4. *Olkoon pisteiden joukkona $\mathcal{S} = S^2$ ja suorien joukkona $\mathcal{L}_R$ yksikköpallon S^2 kaikkien isoympyröiden $\mathcal{C}$ joukko. Silloin $\{ S^2, \mathcal{L}_R \}$ on abstrakti geometria.*

Todistus. (i) Olkoot $P = (x_1, y_1, z_1) \in S^2$ ja $Q = (x_2, y_2, z_2) \in S^2$ kaksi eri pistettä. On löydettävä isoympyrä $\mathcal{C}$, jolle $P \in \mathcal{C}$ ja $Q \in \mathcal{C}$. Toisin sanoen on löydettävä reaaliluvut a, b ja c siten, että $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ja

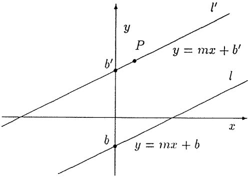
$$(*) \qquad \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0. \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmässä $(*)$ on kolme tuntematonta a, b ja c, mutta vain kaksi yhtälöä, sillä on aina (itse asiassa ääretön määrä) ei-triviaaleja (so. $a^2+b^2+c^2 > 0$) ratkaisuja. Toisin sanoen P:n ja Q:n kautta kulkee aina ainakin yksi isoympyrä $\mathcal{C}$.

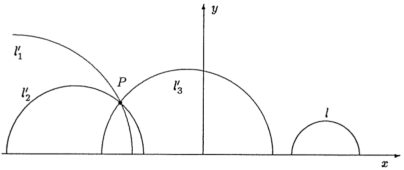
(ii) Jokaisella isoympyrällä $\mathcal{C}$ on ainakin kaksi eri pistettä. □

Abstraktin geometrian mallia $\mathcal{R} = \{ S^2, \mathcal{L}_R \}$ kutsutaan *Riemannin palloksi* Bernhard Riemann'in (1826–1866) mukaan. Hän kirjoitti tutkimuksensa "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" vuonna 1854.

Määritelmä 2.5. Abstraktin geometrian suorat l_1 ja l_2 ovat *yhdensuuntaisia* eli *paralleelejä*, jos joko $l_1 = l_2$ tai $l_1 \cap l_2 = \emptyset$. Tällöin merkitään $l_1 \parallel l_2$. Sanonta: Suora l_1 on suoran l_2 *suuntainen.*



KUVA 2.5



KUVA 2.6

Tarkastellaan abstraktin geometrian suoraa l ja sen ulkopuolella olevaa pistettä P. Kysymys: Kulkeeko pisteen P kautta suoran l suuntaisia suoria? Vastaus saadaan tarkastelemalla abstraktin geometrian malleja $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{R}$:

1. Jos P ja l ovat tavallisessa euklidisessa xy-tasossa $\mathcal{E}$, niin P:n kautta kulkee täsmälleen yksi l:n suuntainen suora (Kuva 2.5).

2. Tarkastellaan suoraa l ja pistettä $P \notin l$ hyperbolisessa tasossa $\mathcal{H}$. Pisteen P kautta kulkee nyt ääretön määrä suoran l suuntaisia suoria. (Kuvassa 2.6 P:n kautta kulkevat suorat l_1', l_2' ja l_3' ovat suoran l suuntaisia.)

3. Tarkastellaan Riemannin palloa $\mathcal{R}$. Koska kaksi yksikköpallon mielivaltaista isoympyrää leikkaa aina kahdessa pisteessä (Kuva 2.4), jokainen pisteen P kautta kulkeva suora l' leikkaa suoran l. Näin ollen suoran l suuntaisia suoria ei ole lainkaan olemassa.

Eukleideen viides aksiooma pätee ainoastaan abstraktin geometrian mallissa $\mathcal{E}$. Mallissa $\mathcal{H}$ etsittäviä suoran l suuntaisia suoria on rajaton määrä, mallissa $\mathcal{R}$ ei sitä vastoin lainkaan. Mallin $\mathcal{E}$ kaltaista geometriaa kutsutaan *euklidiseksi*, muita *epäeuklidisiksi*. $\mathcal{H}$:n kaltaiset epäeuklidiset geometriat ovat *hyperbolisia*, $\mathcal{R}$:n kaltaiset *elliptisiä*. Kuvailevasti voidaan sanoa, että euklidisessa geometriassa suorat eivät kaareudu, jolloin on tilaa täsmälleen yhdelle l:n suuntaiselle suoralle annetun pisteen $P \notin l$ kautta. Hyperbolisessa geometriassa suorat kaareutuvat "ulospäin", jolloin tilaa tällaisille l:n suuntaisille suorille jää paljon. Elliptisessä geometriassa suorat kaareutuvat "sisäänpäin" eikä tilaa yhdensuuntaisille suorille ole lainkaan. Tämä riittäköön selittämään, miksi Eukleideen viides aksiooma, avaruuden kaareutuminen ja suhteellisuusteoria liittyvät läheisesti yhteen. Viides aksiooma saa "suorat näyttämään suorilta".

3. Insidenssigeometria

Tarkastellaan vielä abstraktin geometrian elliptistä mallia $\mathcal{R}$. Määrääkö kaksi pistettä P ja Q yksikäsitteisesti suoran l, joka kulkee näiden kautta? Yleensä näin on, sillä jos P, Q ja origo O eivät ole samalla suoralla, on olemassa täsmälleen yksi taso pisteiden P, Q ja O kautta ja siis myös täsmälleen yksi mallin $\mathcal{R}$ suora P:n ja Q:n kautta.

Pisteitä $P \in S^2$ ja $Q \in S^2$ sanotaan *antipodaalisiksi*, jos P, Q ja O ovat samalla suoralla. Jos tällöin $P = (x, y, z)$, niin $Q = (-x, -y, -z)$. Maapallolla esim. pohjoisnapa ja etelänapa ovat antipodaalisia.

Propositio 3.1. *Jos P ja Q ovat S^2:n antipodaalisia pisteitä, niin P:n ja Q:n kautta kulkee äärettömän monta $\mathcal{L}_R$:n suoraa (so. S^2:n isoympyrää).*

Todistus. Kuva 2.4. $\square$

Abstraktin geometrian mallit $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{H}$ poikkeavat mallista $\mathcal{R}$ sikäli, että $\mathcal{E}$:ssä ja $\mathcal{H}$:ssa kahden eri pisteen kautta kulkee aina vain yksi suora. On hyödyllistä rajoittua geometrioihin, jotka toteuttavat tämän ehdon.

Määritelmä 3.2. Abstrakti geometria $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ on *insidenssigeometria*, jos seuraavat ehdot (aksioomat) ovat voimassa:

(i) Jos $P \in \mathcal{S}$ ja $Q \in \mathcal{S}$ ovat eri pisteitä, niin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty suora $l \in \mathcal{L}$, joka kulkee P:n ja Q:n kautta.

(ii) On olemassa kolme eri pistettä $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ ja $C \in \mathcal{S}$, jotka eivät ole samalla suoralla.

Aksiooma (ii) voidaan muotoilla toisin käyttämällä kollineaarisuus-käsitettä.

Määritelmä 3.3. Pistejoukko $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ on *kollineaarinen*, jos on olemassa suora $l \in \mathcal{L}$, jolle $\mathcal{P} \subset l$. Pisteet $A, B, C, \ldots$ ovat *kollineaarisia*, jos joukko $\{A, B, C, \ldots\}$ on kollineaarinen.

Aksiooma (ii) on yhtäpitävä seuraavan aksiooman (ii)$'$ kanssa:

(ii)$'$ On olemassa kolme pistettä $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ ja $C \in \mathcal{S}$, jotka eivät ole kollineaarisia.

Propositio 3.4. *Euklidinen taso $\mathcal{E}$ on insidenssigeometria.*

Todistus. Lukiomatematiikkaa. $\square$

Propositio 3.5. *Hyperbolinen taso $\mathcal{H}$ on insidenssigeometria.*

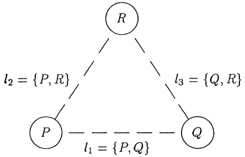
Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Olkoot l_1 ja l_2 suoria insidenssigeometriassa. Oletetaan, että joukossa $l_1 \cap l_2$ on vähintään kaksi eri pistettä. Määritelmän 3.2 kohdasta (i) seuraa silloin, että $l_1 = l_2$. Pisteiden P ja Q, $P \neq Q$, kautta kulkevalle suoralle käytetään merkintää $\overleftrightarrow{PQ}$. Olemme todistaneet seuraavan lauseen:

Lause 3.6. *Insidenssigeometrian suorat l_1 ja l_2 ovat joko yhdensuuntaisia tai ne leikkaavat toisensa täsmälleen yhdessä pisteessä.* $\square$

Edellisen lauseen mielekkyys tulee ilmi vertaamalla sitä abstarktin geometrian malliin $\mathcal{R}$.

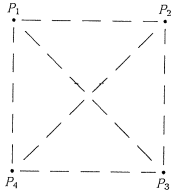
Insidenssigeometriasta voidaan esittää malleja, joissa on vain äärellisen monta pistettä ja äärellisen monta suoraa. Yksinkertaisinta näistä *äärellisistä* eli *finiittisistä geometrioista* edustaa seuraava kolmen pisteen ja kolmen suoran malli: Olkoon $\mathcal{S} = \{P, Q, R\}$ ja $\mathcal{L} = \{\{P,Q\}, \{P,R\}, \{Q,R\}\}$. Kyseessä on selvästi abstrakti geometria, sillä (i) jokaista kahta pistettä vastaa aina suora, joka kulkee niiden kautta, sekä (ii) jokaisella suoralla on vähintään kaksi eri pistettä. Malli $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ on insidenssigeometria, sillä (i) kahden eri pisteen kautta kulkee yksi ja vain yksi suora, sekä (ii) on olemassa kolme eri pistettä, jotka eivät ole kollineaarisia. Kuva 3.1 esittää tätä mallia.



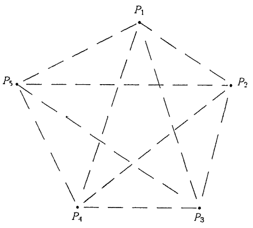
KUVA 3.1. Yhdensuuntaisia suoria ei ole lainkaan (elliptinen malli).

Äärellisten geometrioiden olemassaolo on yllättävää. Niitä esittävien mallien rakentelu on hyvää harjoittelua. Kuvan 3.2 neljän pisteen ja kuuden suoran malli on euklidinen. Kuvassa 3.3 on esitetty malli, jossa on 5 pistettä ja 10 suoraa. Huomaa, että tässä mallissa esim. suorat $\{P_1, P_4\}$ ja $\{P_2, P_5\}$ eivät leikkaa, sillä $\{P_1, P_4\} \cap \{P_2, P_5\} = \emptyset$. Kyseessä on siis hyperbolinen malli.

Äärellisillä malleilla ei ole havaintoon perustuvaa ominaisuutta "suoran kahden pisteen *välissä* on aina muita suoran pisteitä".



KUVA 3.2.
Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi tämän suoran suuntainen suora (euklidinen malli).



KUVA 3.3.
Suorat $\{P_4, P_5\}$ ja $\{P_3, P_4\}$ ovat suoran $\{P_1, P_2\}$ suuntaisia ja kulkevat pisteen P_4 kautta (hyperbolinen malli).

4. Metrinen geometria

Eukleideen geometrian eräänä puutteena voidaan pitää, ettei hän aksiomatisoinut käsitettä "suoran l piste Q on pisteiden $P \in l$ ja $R \in l$ *välissä*". Tämän käsitteen aksiomatisoinnin suoritti vasta David Hilbert (1862–1943) teoksessaan "Grundlagen der Geometrie" vuonna 1899. Aksiomatisointi ei kuitenkaan ole aivan yksinkertainen. Tehtävä hoituu helpommin, jos ensin otetaan käyttöön etäisyysfunktio ja määritellään ns. metrinen geometria. Huomaa etäisyysfunktion ja ns. metriikan välinen ero.

Määritelmä 4.1. Joukon $\mathcal{S}$ *etäisyysfunktiolla* d tarkoitetaan funktiota, joka liittää jokaiseen pisteparriin $(P, Q) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ reaaliluvun $d(P, Q)$ siten, että seuraavat ehdot (aksioomat) ovat voimassa:

(i) $d(P, Q) \geq 0$ kaikilla P, $Q \in \mathcal{S}$,

(ii) $d(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$,

(iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$ kaikilla P, $Q \in \mathcal{S}$.

Euklidisessa tasossa $\mathcal{E}$ on olemassa "luonnollinen" etäisyysfunktio: Jos $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$, niin asetetaan

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Lukua $d_E(P, Q)$ kutsutaan pisteiden P ja Q *euklidiseksi etäisyydeksi.* Huomautettakoon heti, että $\mathcal{E}$:ssä voidaan määritellä muitakin etäisyysfunktiota. Yksinkertaisin mahdollinen on seuraava: Asetetaan $d(P, Q) = 1$, kun $P \neq Q$, ja $d(P, P) = 0$

kaikille P. Tämä määritelmä antaa etäisyysfunktion missä tahansa joukossa $\mathcal{S}$, siis myös esim. euklidisessa tasossa.

Euklidisessa tasossa on ns. yhtenevyyskuvausten ryhmä. Tämä koostuu tason siirroista, tason kierroista, tason peilauksista jonkin suoran suhteen ja näiden yhdisteistä. Jos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on tällainen yhtenevyyskuvaus, niin

$$(*) \qquad d_E(P,Q) = d_E\big(f(P), f(Q)\big)$$

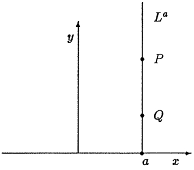
kaikille P, $Q \in \mathbb{R}^2$.

Hyperbolisessa tasossa on myös luonnollinen yhtenevyyskuvausten ryhmä ja etäisyysfunktio siten, että $(*)$:ä vastaava invarianssi on voimassa. Emme kuitenkaan voi tässä perustella tätä emmekä johtaa tätä kautta kyseisen etäisyysfunktion lauseketta.

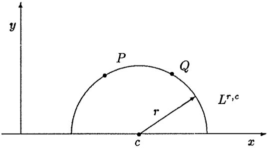
Määritelmä 4.2. Olkoot $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ hyperbolisen tason $\mathcal{H}$ pisteitä. *Hyperbolinen etäisyys* d_H määritellään seuraavasti (Kuva 4.1):

(i) $d_H(P,Q) = \left|\ln \dfrac{y_2}{y_1}\right|$, jos $x_1 = x_2$

(ii) $d_H(P,Q) = \left|\ln \dfrac{\frac{x_1-c+r}{y_1}}{\frac{x_2-c+r}{y_2}}\right|$, jos P, $Q \in L^{r,c}$.



(i)



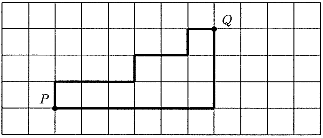
(ii)

KUVA 4.1

Vaikka hyperbolinen etäisyys näyttää keinotekoiselta, täyttää se selvästi etäisyysfunktiolle Määritelmässä 4.1 asetetut vaatimukset. Jos piste P pidetään paikallaan ja annetaan pisteen Q lähestyä x-akselia pitkin suoraa $L^{r,c}$ (tai tapauksessa (i) pitkin suoraa L^a), niin $y_2 \to 0$ ja $d_H(P,Q)$ kasvaa rajatta. Hyperbolisen tason reuna, x-akseli, on siis "äärettömän kaukana" hyperbolisen tason pisteistä. Jos Q liikkuu hyperbolisen etäisyyden suhteen tasaisella nopeudella pitkin suoraa $L^{r,c}$ (tai pitkin suoraa L^a) kohti x-akselia, hidastuu liike meidän silmissämme nopeasti eikä Q koskaan saavuta x-akselia. Jos Q sen sijaan liikkuu euklidisen etäisyyden suhteen tasaisella nopeudella, niin Q saavuttaa x-akselin tuota pikaa. Tämä auttaa ymmärtämään, miten maailmankaikkeuden "geometrisella rakenteella" on keskeinen merkitys sen asukkaiden käsityksiin ajasta ja paikasta.

Hyperbolisen etäisyyden luonnollisuus ja todellinen merkitys voidaan tuoda esiin vasta kompleksianalyysin antamien keinojen avulla.

Palataan euklidiseen tasoon. Euklidinen etäisyys ei suinkaan kaikissa tilanteissa ole luonnollisin mahdollinen. Esimerkiksi ruutukaava-alueella kahden pisteen välimatka katuja pitkin kuljettaessa muodostuu x-koordinaattien erotuksesta ja y-koordinaattien erotuksesta riippumatta siitä, millä tavalla pisteitä yhdistävä lyhin murtoviiva valitaan.



KUVA 4.2.
Kaksi lyhintä murtoviivaa pisteestä P pisteeseen Q.

Määritelmä 4.3. Olkoot $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ euklidisen tason $\mathcal{E}$ pisteitä. *Taksiautoetäisyys* d_T määritellään seuraavasti:

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Propositio 4.4. *Taksiautoetäisyys on joukon $\mathbb{R}^2$ etäisyysfunktio.*

Todistus. Koska itseisarvo on aina ei-negatiivinen, on $d_T(P,Q) \geq 0$ kaikille P ja Q.

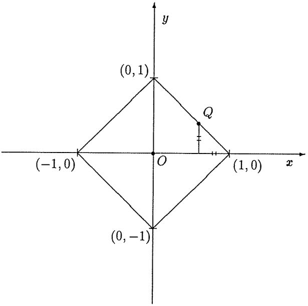
Kaikille $P \in \mathbb{R}^2$ on $d_T(P,P) = 0$. Oletetaan kääntäen, että $d_T(P,Q) = 0$. Silloin on $|x_1 - x_2| = 0$ ja $|y_1 - y_2| = 0$, joten $P = Q$.

Koska $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ja $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$, on $d_T(P,Q) = d_T(Q,P)$ kaikille P, $Q \in \mathbb{R}^2$. □

Millainen on piste $O = (0, 0)$ keskinen ympyrä

$$K_T = \{ Q \mid d_T(O, Q) = 1 \}$$

taksiautotasossa $\{ \mathbb{R}^2, d_T \}$?



KUVA 4.3. Ympyrä taksiautotasossa

Joka tapauksessa pisteet $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ ja $(0, -1)$ ovat tällä ympyrällä. Taksiautoympyrä on euklidinen neliö, jonka kärkinä ovat em. neljä pistettä. Tarkkaan ottaen tämän perustelemiseksi tulee osoittaa kaksi asiaa: (1) Jokainen neliön piste Q toteuttaa ehdon $d_T(Q, O) = 1$, sekä (2) jokainen ehdon $d_T(Q, O) = 1$ toteuttava piste Q on neliöllä. Perustelu kumpaankin kohtaan on yksinkertaista (analyyttistä) geometriaa (Kuva 4.3).

Geometrian kehittämisen kannalta on osoittautunut hyödylliseksi varustaa insidenssigeometrian suorat asteikolla, joka mittaa suoran pisteiden etäisyyttä toisistaan. Jokaisesta suorasta tehdään siis "viivoitin" (George David Birkhoff (1884–1944): "A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor", 1932).

Määritelmä 4.5. Olkoon l suora insidenssigeometriassa $\{ \mathcal{S}, \mathcal{L} \}$. Oletetaan, että d on joukon $\mathcal{S}$ etäisyysfunktio. Funktio $f\colon l \to \mathbb{R}$ on suoran l *viivoitin* eli *koordinaattijärjestelmä*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(i) f on bijektio,

(ii) jokaiselle pisteparille P, $Q \in l$ pätee

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q). \tag{$*$}$$

Yhtälöä $(*)$ kutsutaan *viivoitinyhtälöksi* ja lukua $f(P)$ pisteen P *koordinaatiksi* funktion f suhteen.

Esimerkki 4.6. Tarkastellaan suoraa $L_{2,3}$: $y = 2x + 3$ euklidisessa tasossa $\mathcal{E}$, joka on varustettu euklidisella etäisyydellä d_E. Jos $Q = (x, y) \in L_{2,3}$, niin asetetaan $f(Q) = \sqrt{5}x$. Silloin f on suoran $L_{2,3}$ viivoitin. *Todistus.* (i) on selvä. (ii) Olkoon $P = (x_1, y_1) \in L_{2,3}$ ja $Q = (x, y) \in L_{2,3}$. Silloin $y_1 = 2x_1 + 3$ ja $y = 2x + 3$, joten

$$\begin{aligned} d_E(P, Q) &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (2x_1 - 2x)^2} \\ &= |x_1 - x|\sqrt{5} = |f(P) - f(Q)|. \end{aligned}$$

Esimerkiksi pisteen $R = (1, 5)$ koordinaatti f:n suhteen on $f(R) = \sqrt{5}$. □

On huomattava, että piste P voi sijaita usealla eri suoralla. Jos $P \in l_1 \cap l_2$, suoralla l_1 on viivoitin f_1 ja suoralla l_2 on viivoitin f_2, niin P:n koordinaatit $f_1(P)$ ja $f_2(P)$ ovat täysin riippumattomia toisistaan. Jos suoralla l on yksikin viivoitin, niin sillä on automaattisesti ääretön määrä viivoittimia (mikä nähdään myöhemmin).

Määritelmä 4.7. Etäisyysfunktiolla d varustettu insidenssigeometria $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ toteuttaa *viivoitinpostulaatin* (eli viivoitinaksiooman), jos jokaisella suoralla $l \in \mathcal{L}$ on viivoitin. Tässä tapauksessa $\mathcal{M} = \{\, \mathcal{S}, \mathcal{L}, d \,\}$ on *metrinen geometria.*

Jos suoralla l on viivoitin $f\colon l \to \mathbb{R}$, niin l ja $\mathbb{R}$ ovat pistejoukkoina yhtä mahtavia. Jokaisella metrisen geometrian suoralla on siis ylinumeroituvasti ääretön määrä pisteitä. Äärellinen (eli finiittinen) geometria ei siis voi koskaan olla metrinen geometria.

Metrisen geometrian käyttöönotolla on se etu, että voimme suoran l viivoittimen $f\colon l \to \mathbb{R}$ avulla sanoa, milloin piste $Q \in l$ on pisteiden $P \in l$ ja $R \in l$ välissä. Reaaliluku y on lukujen x ja z välissä, jos $(y - x)(y - z) < 0$. Näin ollen Q on P:n ja R:n välissä, jos $\big(f(Q) - f(P)\big)\big(f(Q) - f(R)\big) < 0$. Tähänkin palataan myöhemmin.

Jotta $\{\, \mathcal{S}, \mathcal{L}, d \,\}$ olisi metrinen geometria, on jokaista suoraa $l \in \mathcal{L}$ varten löydettävä funktio $f\colon l \to \mathbb{R}$, joka on bijektio ja joka toteuttaa yhtälön $(*)$. Itse asiassa f:n bijektiivisyys seuraa surjektiivisuudesta.

Lemma 4.8. *Olkoon $l \in \mathcal{L}$ ja $f\colon l \to \mathbb{R}$ surjektio siten, että kaikille P, $Q \in l$ on voimassa $|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$. Silloin f on l:n viivoitin.*

Todistus. Riittää osoittaa, että f on injektio. Olkoon $f(P) = f(Q)$. Silloin

$$d(P, Q) = |f(P) - f(Q)| = 0,$$

joten $P = Q$ Määritelmän 4.1 aksiooman (ii) perusteella. □

Propositio 4.9. *Euklidinen taso $\mathcal{E}$ euklidisella etäisyydellä d_E varustettuna on metrinen geometria.*

Todistus. Olkoon l suora. On löydettävä l:lle viivoitin. Tarkastellaan kahta eri tapausta.

1. Jos $l = L_a$ on pystysuora suora, niin $P \in L_a$ aina ja vain, kun $P = (a, y)$ jollekin $y \in \mathbb{R}$. Määritellään $f \colon l \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(P) = f(a, y) = y.$$

Silloin f on surjektio. Jos $P = (a, y_1)$ ja $Q = (a, y_2)$, niin

$$|f(P) - f(Q)| = |y_1 - y_2| = d_E(P, Q).$$

Lemman 4.8 nojalla f on l:n viivoitin.

2. Jos $l = L_{m,b}$, niin $P = (x, y) \in L_{m,b}$ aina ja vain, kun $y = mx + b$. Määritellään $f \colon L_{m,b} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(P) = f(x, y) = x\sqrt{1 + m^2}.$$

Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Etsitään $P = (x, y) \in L_{m,b}$ siten, että $f(P) = t$. Olkoon $x = t/\sqrt{1 + m^2}$ ja $y = mt/\sqrt{1 + m^2} + b$. Silloin $y = mx + b$, joten $P = (x, y) \in L_{m,b}$. Lisäksi $f(P) = t$, joten f on surjektio.

Olkoot $P = (x_1, y_1) \in L_{m,b}$ ja $Q = (x_2, y_2) \in L_{m,b}$. Silloin $|f(P) - f(Q)| = |x_1 - x_2|\sqrt{1 + m^2}$. Toisaalta

$$\begin{aligned} d_E(P, Q) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} \\ &= |x_1 - x_2|\sqrt{1 + m^2}. \end{aligned}$$

Lemman 4.8 nojalla f on l:n viivoitin. $\square$

Euklidinen taso $\mathcal{E}$ tarkoittaa tästä lähtien metristä geometriaa

$$\mathcal{E} = \{\, \mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E \,\}.$$

Seuraava tehtävä on osoittaa, että hyperbolinen taso hyperbolisella etäisyydellä d_H varustettuna on metrinen geometria. Tätä varten palautetaan mieleen hyperboliset funktiot

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$
$$\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad \operatorname{sech} t = \frac{1}{\cosh t}.$$

On tapana käyttää merkintää $\sinh^2 t = (\sinh t)^2$ jne. Seuraavat peruskaavat on helppo todistaa laskemalla:

Lemma 4.10. *Jokaisella arvolla $t \in \mathbb{R}$ on voimassa:*

(i) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$,

(ii) $\tanh^2 t + \operatorname{sech}^2 t = 1$. □

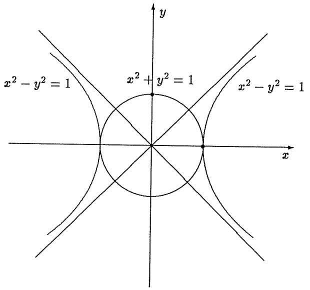
Tasokäyrä, jolla on parametriesitys

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

on yksikköympyrä $x^2 + y^2 = 1$. Vastaavasti tasokäyrä

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t$$

on hyperbeli $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 1$ (Kuva 4.4).

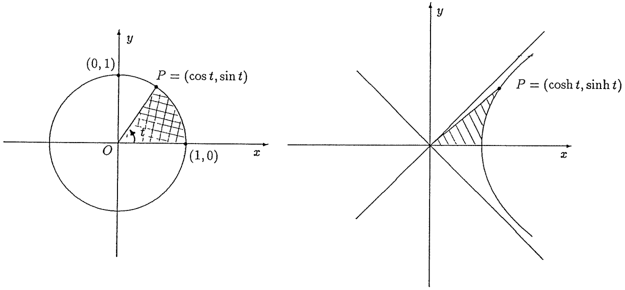


KUVA 4.4

Tarkastellaan parametrin t geometrista merkitystä. Ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tapauksessa t on pisteen $P = (\cos t, \sin t)$ vaihekulma. Merkitään a:lla sektorin P, O, $(1,0)$ pinta-alaa. Silloin

$$\frac{t}{2\pi} = \frac{a}{\pi},$$

joten $a = t/2$. Viivoitetun sektorin pinta-ala Kuvassa 4.5 on siis $t/2$. Hyperbelin $x^2 - y^2 = 1$ pinta-alatulkinta on sama. Jos $P = (\cosh t, \sinh t)$, $t > 0$, on hyperbelin piste, niin vastaavan viivoitetun sektorimaisen alueen pinta-ala on $t/2$. Tämän osoittaminen on integraalilaskentaan kuuluva tehtävä.



KUVA 4.5. Viivoitettujen sektoreiden pinta-ala on $t/2$.

Mielenkiintoista on huomata (Lemma 4.10(ii)), että puoliympyrällä $x^2+y^2=1$, $y>0$, on parametriesitys

$$x = \tanh t, \quad y = \operatorname{sech} t.$$

Tällöin arvo $t=\infty$ vastaa pistettä $(1,0)$ ja arvo $t=-\infty$ vastaa pistettä $(-1,0)$. Piste $(\tanh t, \operatorname{sech} t)$ piirtää puoliympyrän kertaalleen pisteestä $(-1,0)$ pisteeseen $(1,0)$, kun t kasvaa $-\infty$:stä $+\infty$:ään.

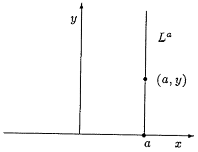
Määritelmä 4.11. Olkoon $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ insidenssigeometria ja d joukon $\mathcal{S}$ etäisyysfunktio. Suoran $l\in\mathcal{L}$ *parametrisoinnilla* tarkoitetaan bijektiota $\alpha\colon \mathbb{R}\to l$, jolle yhtälö $|p-q| = d\big(\alpha(p),\alpha(q)\big)$ pätee kaikilla arvoilla p, $q\in\mathbb{R}$.

Lause 4.12. *Jos α on suoran l parametrisointi, niin $\alpha^{-1}\colon l\to\mathbb{R}$ on l:n viivoitin.* $\square$

Propositio 4.13. *Hyperbolinen taso $\mathcal{H}$ hyperbolisella etäisyydellä d_H varustettuna on metrinen geometria.*

Todistus. Olkoon $l\in\mathcal{L}_H$ suora. On löydettävä l:lle viivoitin. Tarkastellaan kahta eri tapausta.

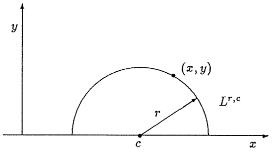
1. Tapaus $l = L^a$ (Kuva 4.6). Määritellään parametrisointi $\alpha_a\colon \mathbb{R} \to L^a$ asettamalla $\alpha_a(t) = (a, e^t)$. Kun t kasvaa $-\infty$:stä $+\infty$:ään, (a, e^t) piirtää L^a:n pisteestä $(a, 0)$ lähtien ylöspäin, joten α_a on todella L_a:n parametrisointi. Sen käänteiskuvaus $f_a(a, y) = \ln y$ on haettu viivoitin.



KUVA 4.6

2. Tapaus $l = L^{r,c}$ (Kuva 4.7). Etsimme jälleen parametrisointia $\beta\colon \mathbb{R} \to L^{r,c}$. Käyttämällä hyväksi em. puoliympyrän parametriesitystä päädytään funktioon

$$\beta(t) = (c + r \tanh t, r \operatorname{sech} t) = (x, y).$$



KUVA 4.7

Sen osoittamiseksi, että β on todella $L^{r,c}$:n parametrisointi todetaan aluksi, että

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2(\tanh^2 t + \operatorname{sech}^2 t) = r^2,$$

joten β kuvaa $\mathbb{R}$: suoralle $L^{r,c}$.

Ratkaistaan t yhtälöistä

$$x = c + r \tanh t, \quad y = r \operatorname{sech} t.$$

Sijoittamalla $\tanh t$:n ja $\operatorname{sech} t$:n määrittelevät lausekkeet saadaan yhtälöt muotoon

$$x - c = r\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^t}, \quad y = \frac{2r}{e^t + e^{-t}},$$

joten

$$x - c = \frac{y}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Siis

$$2(x-c)e^t = y(e^{2t}-1)$$

eli

$$y(e^t)^2 - 2(x-c)e^t - y = 0,$$

mistä saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla

$$e^t = \frac{(x-c) \pm r}{y}.$$

Koska $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ ja $y \neq 0$, on $(x-c)^2 < r^2$ eli $[(x-c)+r][(x-c)-r] < 0$. Näin ollen

$$(x-c)+r > 0 \quad \text{ja} \quad (x-c)-r < 0.$$

Koska $e^t > 0$ ja $y > 0$, on ainoa ratkaisu

$$e^t = \frac{(x-c)+r}{y} \quad \text{eli} \quad t = \ln\frac{(x-r)+r}{y}.$$

Näin ollen $\beta\colon \mathbb{R} \to L^{r,c}$ on bijektio ja sen käänteiskuvaus on

$$f(x,y) = \ln\frac{(x-c)+r}{y}.$$

Osoitetaan lopuksi, että f toteuttaa Määritelmän 4.5 viivoitinyhtälön $(*)$. Olkoot $P = (x_1, y_1) \in L^{r,c}$ ja $Q = (x_2, y_2) \in L^{r,c}$. Silloin

$$|f(P) - f(Q)| = \left|\ln\frac{x_1 - c + r}{y_1} - \ln\frac{x_2 - c + r}{y_2}\right| = d_H(P,Q). \quad \square$$

Hyperbolisella tasolla $\mathcal{H}$ tarkoitetaan tästä lähtien metristä geometriaa $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H\}$.

Propositio 4.14. *Euklidinen taso taksiautoetäisyydellä varustettuna on metrinen geometria.*

Todistus. Jos l on pystysuora suora L_a, määritellään $f(a,y) = y$. Jos l on ei-pystysuora suora $L_{m,b}$, määritellään $f(x,y) = (1+|m|)x$. Molemmissa tapauksissa kuvaus $f\colon l \to \mathbb{R}$ on suoran l viivoitin (harjoitustehtävä). $\square$

Mallia $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$ kutsutaan *taksiautotasoksi*. On mielenkiintoista huomata, että metriset geometriat $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$ ja $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$ perustuvat samaan insidenssigeometriaan $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$. Jos jokin insidenssigeometria voidaan jollakin tavalla tehdä metriseksi geometriaksi, voidaan se yleensä tehdä metriseksi geometriaksi monella eri tavalla.

Edellä annettiin insidenssigeometrialle etäisyysfunktio ja etsittiin jokaiselle suoralle viivoitin. Metrinen geometria voidaan myös määritellä antamalla viivoittimet:

Lause 4.15. *Olkoon $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ insidenssigeometria. Oletetaan, että on olemassa bijektio $f_l\colon l \to \mathbb{R}$ jokaiselle suoralle $l \in \mathcal{L}$. Silloin on olemassa joukon $\mathcal{S}$ etäisyysfunktio d siten, että $\{\mathcal{S},\mathcal{L},d\}$ on metrinen geometria ja jokainen $f_l\colon l \to \mathbb{R}$ on viivoitin.*

Todistus. On määriteltävä $d(P,Q)$ jokaiselle pisteparille P, $Q \in \mathcal{S}$. Jos $P = Q$, asetetaan $d(P,Q) = 0$. Jos $P \neq Q$, olkoon $l \in \mathcal{L}$ se yksikäsitteisesti määrätty suora, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta (Määritelmä 3.2) . Olkoon $f_l\colon l \to \mathbb{R}$ tähän suoraan liittyvä bijektio. Määritellään $d(P,Q) = |f_t(P) - f_t(Q)|$. Silloin d on joukon $\mathcal{S}$ etäisyysfunktio. Lisäksi d määriteltiin siten, että se toteuttaa Määritelmän 4.5 viivoitinyhtälön $(*)$. $\square$

On itse asiassa joskus vaikea ratkaista, tekeekö annettu etäisyysfunktio d insidenssigeometriasta $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ metristä geometriaa. Lause 4.15 näyttää, että metrinen geometria on helpompi määritellä antamalla kaikki viivoittimet $f_l\colon l \to \mathbb{R}$. Etäisyysfunktion d konstruoinnissa ei silloin ole mitään vaikeutta. Lopuksi yhteenveto:

Malli	Suoratyypit	Standardiviivoittimet
Euklidinen taso $\mathcal{E}$	$L_a = \{(a,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $L_{m,b} = \{(x,y) \mid y = mx + b\}$	$f(a,y) = y$ $f(x,y) = x\sqrt{1+m^2}$
Hyperbolinen taso $\mathcal{H}$	$L^a = \{(a,y) \mid y > 0\}$ $L^{r,c} = \{(x,y) \mid (x-c)^2 + y^2 = r^2,\ y > 0\}$	$f(a,y) = \ln y$ $f(x,y) = \ln \dfrac{x-c+r}{y}$
Taksiauto-taso $\mathcal{T}$	$L_a = \{(a,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $L_{m,b} = \{(x,y) \mid y = mx + b\}$	$f(a,y) = y$ $f(x,y) = x(1+\lvert m\rvert)$

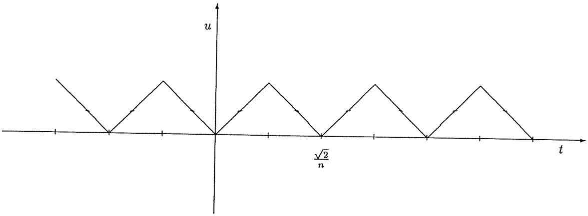
Esimerkki 4.16. Tarkastellaan ns. sahanteräfunktiota aluksi tasossa, jonka koordinaatteja merkitään t:llä ja u:lla.

Sahanteräfunktio f_n, jolla on välillä $[0,\sqrt{2}]$ täsmälleen $n \in \mathbb{N}$ hammasta, määritellään ehdoilla

(i) $f_n(t) = |t|$, kun $|t| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2n}$,

(ii) f_n on jaksollinen ja sen jakso on $\sqrt{2}/n$, ts. kaikilla arvoilla $t \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ on voimassa

$$f_n\left(t + k\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = f_n(t).$$



KUVA 4.8. Sahanteräfunktio $u = f_n(t)$

Ehdoista (i) ja (ii) seuraa, että

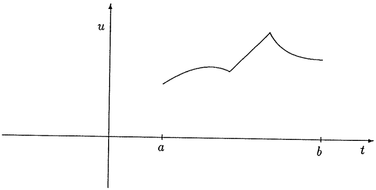
$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2n} \qquad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R},$$

joten $f_n \to 0$ tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä, kun $n \to \infty$. Näin ollen sahanterän $u = f_n(t)$ hampaiden lukumäärä välillä $[0, \sqrt{2}]$ kasvaa rajatta, mutta hampaan korkeus lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$.

Läheneekö sahanterän $u = f_n(t)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$, pituus välin $[0, \sqrt{2}]$ pituutta, kun $n \to \infty$?

Yhden hampaan pituus on $2/n$, joten koko sahanterän $u = f_n(t)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$, pituus on $n \cdot (2/n) = 2$. Välin $[0, \sqrt{2}]$ pituus on sen sijaan $\sqrt{2}$. Sahanterän pituus ei siis riipu lainkaan hampaiden lukumäärästä n. Onko tämä ristiriita?

Olkoon yleisesti $u = g(t)$ jatkuva käyrä, jonka derivaatta $u = g'(t)$ on paloittain jatkuva välillä $[a, b]$ (Kuva 4.9).



KUVA 4.9. Jatkuva käyrä $u = g(t)$, jonka derivaatta on paloittain jatkuva.

Käyrän $u = g(t)$ pituus on

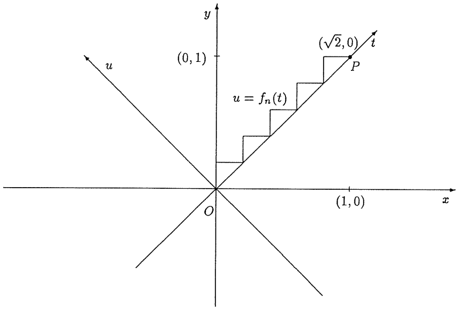
$$l(g) = \int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2}\, dt.$$

Olkoon $f(t) = 0$ ja tarkastellaan käyrien $u = f(t)$ sekä $u = f_n(t)$ pituuksia välillä $[0, \sqrt{2}]$:

$$l(f) = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 0^2}\, dt = \sqrt{2}$$
$$l(f_n) = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + f_n'(t)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (\pm 1)^2}\, dt = 2.$$

Jotta voitaisiin päätellä, että $l(f_n) \to l(f)$, olisi integraalilaskennan teorian mukaisesti lausekkeen $\sqrt{1 + f_n'(t)^2}$ supettava esim. tasaisesti kohti lauseketta $\sqrt{1 + f'(t)^2}$ välillä $[0, \sqrt{2}]$. Analyysi 5:ssä tarkastellaan tasaista suppenemista yleisempiä suppenemisen muotoja, joiden vallitessa $l(f_n) \to l(f)$, kun $n \to \infty$. Sen sijaan tasainen suppeneminen $f_n \to f$ ei millään tavalla vaikuta käyrän $u = f_n(t)$ pituuden $l(f_n)$ käyttäytymiseen, kun $n \to \infty$. Integraalilaskennan valossa ei siis ole löydetty minkäänlaista ristiriitaa.

Tarkastellun sahanteräfunktion $u = f_n(t)$ pituus antaa xy-tason pisteiden $O = (0,0)$ ja $P = (1,1)$ taksiautoetäisyyden, kun valitaan t-akseliksi suora $y = x$ ja u-akseliksi suora $y = -x$ (Kuva 4.10).



KUVA 4.10. $d_T(O,P) = l(f_n)$

Tämä osoittaa, ettei euklidista etäisyyttä $d_E(O,P)$ saada taksiautoetäisyyden $d_T(O,P)$ rajatapauksena, jos pisteitä O ja P yhdistävän muotoviivan sivujen lukumäärä kasvaa rajatta. □

5. Erikoisviivoittimista

Metrisen geometrian $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ suoran l viivoitin $f\colon l \to \mathbb{R}$ voidaan valita siten, että se saa arvon nolla halutussa pisteessä ja on positiivinen halutulla osalla ko. suoraa. Tämän osoittamiseksi todistetaan ensin seuraava yleinen tulos.

Lause 5.1. *Olkoon $f\colon l \to \mathbb{R}$ suoran l viivoitin metrisessä geometriassa $\mathcal{M}$. Jos $a \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ siten, että $\varepsilon^2 = 1$, niin kuvaus $h_{a,\varepsilon}\colon l \to \mathbb{R}$,*

$$h_{a,\varepsilon}(P) = \varepsilon f(P) - a,$$

on suoran l viivoitin.

Todistus. Lemman 4.8 nojalla riittää näyttää, että $h_{a,\varepsilon}$ on surjektio ja että yhtälö

$$|h_{a,\varepsilon}(P) - h_{a,\varepsilon}(Q)| = d(P, Q)$$

pätee kaikille P, $Q \in l$.

Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Koska $f\colon l \to \mathbb{R}$ on surjektio, on olemassa $R \in l$ siten, että

$$f(R) = \frac{t+a}{\varepsilon}.$$

Mutta silloin on

$$h_{a,\varepsilon}(R) = \varepsilon f(R) - a = \varepsilon\,\frac{t+a}{\varepsilon} - a = t,$$

joten $h_{a,\varepsilon}$ on surjektio.

Olkoot P, $Q \in l$. Silloin

$$\begin{aligned}|h_{a,\varepsilon}(P) - h_{a,\varepsilon}(Q)| &= \bigl|\varepsilon f(P) - a - \bigl(\varepsilon f(Q) - a\bigr)\bigr| \\ &= |\varepsilon|\,|f(P) - f(Q)| = |f(P) - f(Q)| = d(P, Q). \quad \square\end{aligned}$$

Valitaan $a = 0$ ja $\varepsilon = -1$ Lauseessa 5.1. Silloin saadaan viivoitin $h_{0,-1}\colon l \to \mathbb{R}$, jolle

$$h_{0,-1}(P) = -f(P)$$

kaikille $P \in l$. Tämä viivoitin vaihtaa siis f:n positiivisen osan negatiiviseksi ja negatiivisen osan positiiviseksi. Oletetaan, että $f(P_0) = 0$. Voimme silloin määritellä *suoran l peilauksen* $\sigma_{P_0}\colon l \to l$ pisteen P_0 suhteen yhtälöllä

$$h_{0,-1}\bigl(\sigma_{P_0}(P)\bigr) = f(P).$$

Pisteen P *peilikuva* pisteen P_0 suhteen on se yksikäsitteisesti määrätty l:n piste $\sigma_{P_0}(P)$, jolle $f(\sigma_{P_0}(P)) = -f(P)$ eli $\sigma_{P_0}(P) = f^{-1}(-f(P))$.

Jos valitaan $a \neq 0$ ja $\varepsilon = 1$, niin viivoitin $h_{a,1}$ saadaan f:stä siirtämällä origo P_0 pisteeseen P_1, jolle $f(P_1) = a$. Toisin sanoen voimme määritellä suoran l *siirron* $s_a\colon l \to l$ luvun a verran yhtälöllä

$$h_{a,1}(s_a(P)) = f(P).$$

Tällöin $s_a(P)$ on se yksikäsitteisesti määrätty suoran l piste, jolle $f(s_a(P)) = f(P) + a$. Siis

$$s_a(P) = f^{-1}(f(P) + a).$$

Lause 5.2. *Olkoot A ja B metrisen geometrian $\mathcal{M}$ suoran l pisteitä. Silloin on olemassa viivoitin $g\colon l \to \mathbb{R}$, jolle $g(A) = 0$ ja $g(B) > 0$.*

Todistus. Koska l on suora metrisessä geometriassa, on olemassa viivoitin $f\colon l \to \mathbb{R}$. Olkoon $a = f(A)$. Määritellään $h\colon l \to \mathbb{R}$ asettamalla $h(P) = f(P) - a$ kaikilla $P \in l$. Lauseen 5.1 perusteella h on suoran l viivoitin. Koska $h(A) = f(A) - a = 0$, on $h(B) \neq 0$. Jos $h(B) > 0$, valitaan $g = h$. Jos $h(B) < 0$, niin valitaan $g = -h$. Molemmissa tapauksissa g on suoran l viivoitin (Lause 5.1), joka toteuttaa vaaditut ehdot. $\square$

Lauseen 5.2 tilanteessa sanotaan, että g on suoran l viivoitin eli koordinaattijärjestelmä, jolle A on *origo* ja B on *positiivinen*.

Edellä todettiin, että metrisen avaruuden $\mathcal{M}$ suoralle l voidaan määritellä peilauksia $\sigma_{P_0}\colon l \to l$ ja siirtoja $s_a\colon l \to l$. Siirrot ja peilaukset ovat bijektioita ja

$$\sigma_{P_0}^{-1} = \sigma_{P_0}, \qquad s_a^{-1} = s_{-a}.$$

Jos $f\colon l \to \mathbb{R}$ on viivoitin, jolle P_0 on origo, niin

$$h_{0,-1} = f \circ \sigma_{P_0} \quad \text{ja} \quad h_{a,1} = f \circ s_{-a}$$

ovat l:n viivoittimia. Seuraava lause osoittaa, että kaikki l:n viivoittimet saadaan muuntamalla f:ää peilauksen σ_{P_0} ja siirtojen s_a avulla:

Lause 5.3. *Oletetaan, että f ja g ovat metrisen avaruuden $\mathcal{M}$ suoran l viivoittimia. Silloin on olemassa $a \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ siten, että $\varepsilon^2 = 1$ ja $g(P) = \varepsilon f(P) - a$ kaikille $P \in l$.*

Todistus. Olkoon $P_0 \in l$ piste, jolle $f(P_0) = 0$ ja olkoon $a = -g(P_0)$. Koska f ja g ovat molemmat l:n viivoittimia, on jokaiselle $P \in l$ voimassa

$$\begin{aligned} |f(P)| &= |f(P) - f(P_0)| = d(P, P_0) \\ &= |g(P) - g(P_0)| = |g(P) + a|. \end{aligned}$$

Näin ollen jokaiselle $P \in l$ on voimassa

$$f(P) = \pm\big(g(P) + a\big).$$

Oletetaan, että on olemassa l:n piste $P_1 \neq P_0$, jolle $f(P_1) = g(P_1) + a$ ja toinen l:n piste $P_2 \neq P_0$, jolle $f(P_2) = -\big(g(P_2) + a\big)$. Silloin

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= |f(P_1) - f(P_2)| = |g(P_1) + a + g(P_2) + a| \\ &= |g(P_1) + g(P_2) + 2a|. \end{aligned}$$

Koska $d(P_1, P_2) = |g(P_1) - g(P_2)|$, on

$$|g(P_1) - g(P_2)| = |g(P_1) + g(P_2) + 2a|,$$

joten joko

$$g(P_1) - g(P_2) = g(P_1) + g(P_2) + 2a$$

tai

$$g(P_1) - g(P_2) = -g(P_1) - g(P_2) - 2a.$$

Ensimmäisessä tapauksessa on

$$g(P_2) = -a = g(P_0)$$

ja jälkimmäisessä tapauksessa on

$$g(P_1) = -a = g(P_0).$$

Koska g on injektio, tullaan molemmissa tapauksissa ristiriitaan. Siis on joko

$$f(P) = g(P) + a \qquad \text{kaikilla } P \in l$$

tai

$$f(P) = -g(P) - a \qquad \text{kaikilla } P \in l.$$

Jos edellisessä tapauksessa valitaan $\varepsilon = 1$ ja jälkimmäisessä tapauksessa valitaan $\varepsilon = -1$, niin aina $g(P) = \varepsilon f(P) - a$. $\square$

Edellä on jo todettu, että metrisen geometrian suoralla on aina äärettömän monta pistettä. Kuitenkaan jokainen insidenssigeometrian $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ etäisyys ei synnytä metristä geometriaa, vaikka suorilla olisi "riittävästi" pisteitä. Pisteiden pitää lisäksi jakautua oikealla tavalla sekä lähelle että kauas, kuten harjoitustehtävissä on nähty.

6. Euklidisen tason vektoriesitys

Edellä euklidinen taso $\mathcal{E}$ määriteltiin käyttämällä analyyttisestä geometriasta peräisin olevia käsitteitä, esim. suoran kulmakerrointa. Toinen tapa määritellä $\mathcal{E}$ on käyttää lineaarialgebran käsitteistöä, kuten vektoreita, vektorin normia ja sisätuloa.

Määritelmä 6.1. Jos $A = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$, niin

(i) $A + B = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$,

(ii) $rA = (rx_1 + ry_1) \in \mathbb{R}^2$,

(iii) $A - B = A + (-1)B = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$,

(iv) $\langle A, B\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \in \mathbb{R}$,

(v) $\|A\| = +\sqrt{\langle A, A\rangle} \in \mathbb{R}$.

Määritelmässä 6.1 tarkastellaan $\mathbb{R}^2$:a vektoriavaruutena, jossa on tavanmukainen vektoreiden yhteenlasku, skalaarilla kertominen, sisätulo ja vektorin normi. Näillä on seuraavat ominaisuudet:

Propositio 6.2. *Kaikille A, B, $C \in \mathbb{R}^2$ ja r, $s \in \mathbb{R}$ pätee*

(i) $A + B = B + A$, (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(iii) $r(A + B) = rA + rB$, (iv) $(r + s)A = rA + sA$,

(v) $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$, (vi) $\langle rA, B\rangle = r\langle A, B\rangle$,

(vii) $\langle A + B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$, (viii) $\|rA\| = |r|\,\|A\|$,

(ix) $\|A\| > 0$, *jos* $A \neq (0, 0)$. □

Vektorimerkintöjä käyttämällä $\mathbb{R}^2$:sta tehdään insidenssigeometria seuraavasti:

Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin niiden kautta kulkeva suora on

$$L_{AB} = \{\, X \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B - A),\ t \in \mathbb{R}\,\}.$$

Seuraavaa propositiota pidetään ilmeisenä:

Propositio 6.3. *Olkoon $\mathcal{L}'$ kaikkien muotoa L_{AB} olevien $\mathbb{R}^2$:n osajoukkojen kokoelma. Silloin $\{\,\mathbb{R}^2, \mathcal{L}'\,\}$ on insidenssigeometriana sama kuin euklidinen taso $\mathcal{E}$.* □

Proposition 6.3 todistamiseksi riittää osoittaa, että $\mathcal{L}'$ on sama kuin Propositiossa 2.2 määritelty euklidisten suorien joukko $\mathcal{L}_E$. Tämä voidaan osoittaa näyttämällä, että $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}_E$ ja $\mathcal{L}_E \subset \mathcal{L}'$.

Propositio 6.4. *Jos A, $B \in \mathbb{R}^2$, niin $d_E(A, B) = \|A - B\|$.*

Todistus. Olkoon $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$. Silloin $\|A - B\| = \langle A - B, A - B\rangle^{1/2} = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2}$. □

Propositio 6.5. *Olkoon $L_{AB} \in \mathcal{L}_E$. Silloin kuvaus $f\colon L_{AB} \to \mathbb{R}$,*

$$f\big(A + t(B - A)\big) = t\|B - A\|,$$

on suoran L_{AB} viivoitin.

Todistus. Jokaista pistettä $P \in L_{AB}$ vastaa yksi ja vain yksi reaaliluku t siten, että $P = A + t(B - A)$. Näin ollen f on todella kuvaus $L_{AB} \to \mathbb{R}$ (eli f on "hyvin määritelty").

Olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$. Suoran L_{AB} määritelmän nojalla $A \neq B$, joten $\|A - B\| \neq 0$. Olkoon $t = t_0/\|B - A\|$ ja $P = A + t(B - A) \in L_{AB}$. Silloin

$$f(P) = t\|B - A\| = \frac{t_0}{\|B - A\|}\|B - A\| = t_0,$$

joten f on surjektio.

Viivoitinyhtälön todistamiseksi olkoot $P_1 = A + t_1(B - A)$ ja $P_2 = A + t_2(B - A)$. Silloin on

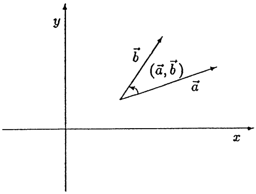
$$|f(P_1) - f(P_2)| = \big|t_1\|B - A\| - t_2\|B - A\|\big| = |t_1 - t_2|\,\|B - A\|.$$

Toisaalta on (Propositio 6.4 ja Propositio 6.2)

$$d_E(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\| = \|t_1(B - A) - t_2(B - A)\| = |t_1 - t_2|\,\|B - A\|.$$

Näin ollen $|f(P_1) - f(P_2)| = d_E(P_1, P_2)$, joten f on Lemman 4.8 nojalla viivoitin. $\square$

Vanhastaan tiedetään, että vektoreiden pistetulo ja vektoreiden välisen kulman kosini liittyvät toisiinsa kaavalla $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b})$, missä $(\vec{a}, \vec{b})$ on vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma, kun vektorit on piirretty alkamaan samasta pisteestä (Kuva 6.1).



KUVA 6.1

Koska $|\cos(\vec{a},\vec{b})| \le 1$, seuraa tästä vektorilaskennan peruskaavasta, että

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|.$$

Tämä ns. *Schwarzin epäyhtälö* voidaan myös todistaa käyttämättä kulman käsitettä. Tällöin saavutetaan kaksi etua: 1) Euklidisen tason vektoreiden välisen kulman kosini voidaan määritellä sisätulon avulla, jolloin kulman käsite ei nojaa kuvista tehtyihin havaintoihin. 2) Schwarzin epäyhtälön todistus pätee sellaisenaan yleisemmissäkin sisätuloavaruuksissa kuin $\mathbb{R}^2$:ssa. Tästä seuraa, ettei vektoreiden välisen kulman käsite rajoitu tasoon $\mathbb{R}^2$, vaan se voidaan yleistää jopa sellaisiin sisätuloavaruuksiin, joista ei voida piirtää kuvia.

Propositio 6.6. (Schwarzin epäyhtälö). *Jos X, $Y \in \mathbb{R}^2$, niin*

$$(*) \qquad |\langle X,Y\rangle| \le \|X\|\,\|Y\|.$$

Epäyhtälössä $(*)$ on voimassa yhtäsuuruus, jos ja vain jos joko $Y = (0,0)$ tai $X = tY$ jollakin $t \in \mathbb{R}$.

Todistus. Huomaa, että tapaus $X = (0,0)$ sisältyy jälkimmäiseen vaihtoehtoon, kun valitaan $t = 0$.

Jos $Y = (0,0)$, niin $|\langle X,Y\rangle| = 0 = \|X\|\,\|Y\|$, joten $(*)$ on voimassa.

Oletetaan, että $Y \ne (0,0)$. Tarkastellaan funktiota $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \|X - tY\|^2$. Silloin

$$g(t) = \langle X - tY, X - tY\rangle = \langle X,X\rangle - 2t\langle X,Y\rangle + t^2\langle Y,Y\rangle.$$

Koska $Y \ne (0,0)$, on $\langle Y,Y\rangle \ne 0$, joten $g(t)$ on t:n toisen asteen polynomi. Koska $g(t) = \|X - tY\|^2 \ge 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, ei $g(t)$:llä voi olla kahta eri nollakohtaa. Yleisesti tiedetään, että funktiolla $at^2 + 2bt + c$ on kaksi reaalista nollakohtaa, jos ja vain jos $b^2 - ac > 0$. Näin ollen

$$\langle X,Y\rangle^2 - \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle \le 0$$

eli

$$|\langle X,Y\rangle| \le \sqrt{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle} = \|X\|\,\|Y\|.$$

Milloin $(*)$:ssä on voimassa yhtäsuuruus? Jos $Y \ne (0,0)$, niin yhtäsuuruus pätee aina ja vain, kun yhtälöllä $g(t) = 0$ on reaalinen juuri. Mutta $g(t) = 0$ aina ja vain kun $X - tY = 0$ eli $X = tY$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Tähän asti olemme verranneet toisiinsa ainoastaan samalla suoralla olevien pisteiden (eli kollineaaristen pisteiden) välisiä etäisyyksiä. Jos A, B ja C ovat kollineaarisia pisteitä metrisessä geometriassa $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ siten, että B on A:n ja C:n välissä, niin $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$. Jos pisteet A, B ja C eivät ole kollineaarisia, ne muodostavat kolmion. Kolmiossa on aina "sivun AC pituus" korkeintaan niin suuri kuin "sivujen AB ja BC pituuksien" summa eli $d(A,C) \le d(A,B) + d(B,C)$. Tämä heuristinen ajatus voidaan täsmentää seuraavalla tavalla:

Määritelmä 6.7. Joukon $\mathcal{S}$ etäisyysfunktio d *toteuttaa kolmioepäyhtälön*, jos epäyhtälö

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

on voimassa kaikille A, B, $C \in \mathcal{S}$.

Propositio 6.8. *Euklidinen etäisyysfunktio d_E toteuttaa kolmioepäyhtälön.*

Todistus. Osoitetaan aluksi Schwarzin epäyhtälön avulla, että kaikille X, $Y \in \mathbb{R}^2$ on voimassa $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$. Suoralla laskulla nähdään, että

$$\begin{aligned}
\|X+Y\|^2 &= \langle X+Y, X+Y\rangle = \langle X,X\rangle + 2\langle X,Y\rangle + \langle Y,Y\rangle \\
&= \|X\|^2 + 2\langle X,Y\rangle + \|Y\|^2 \\
&\leq \|X\|^2 + 2|\langle X,Y\rangle| + \|Y\|^2 \\
&\leq \|X\|^2 + 2\|X\|\,\|Y\| + \|Y\|^2 \\
&= (\|X\| + \|Y\|)^2.
\end{aligned}$$

Ottamalla epäyhtälön molemmilta puolilta neliöjuuri saadaan $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$. Väite seuraa valitsemalla $X = A - B$ ja $Y = B - C$, sillä $\|X+Y\| = \|A-C\| = d_E(A,C)$, $\|X\| = \|A-B\| = d_E(A,B)$ ja $\|Y\| = \|B-C\| = d_E(B,C)$. □

Kolmioepäyhtälö on voimassa myös taksiautotasossa (harjoitustehtävä) ja hyperbolisessa tasossa (pitkä lasku). Kuitenkaan se ei ole voimassa kaikissa metrisissä geometrioissa (harjoitustehtävä).

7. Suoran pisteiden järjestys

Edellä on jo pari kertaa viitattu käsitteeseen "piste B on pisteiden A ja C välissä suoralla l". Eukleides ei aksiomatisoinut tätä käsitettä, mutta on osoittautunut, että tällöin voidaan esim. "todistaa" jokainen kolmio tasakylkiseksi. Määrittelemme seuraavaksi "välissäolon" käyttämällä etäisyysfunktiota. Tämän jälkeen voimme määritellä sellaiset metrisen geometrian peruskäsitteet kuin jana, kulma ja kolmio.

Määritelmä 7.1. Piste B on pisteiden A ja C *välissä*, jos A, B ja C ovat metrisen geometrian $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ kolme eri kollineaarista pistettä ja $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$. Tällöin merkitään $A - B - C$.

Jos merkitään lyhyesti $AB = d(A,B)$, niin

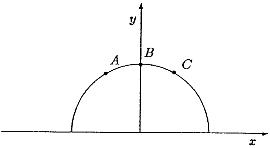
$$A - B - C \iff AB + BC = AC,$$

kun A, B ja C ovat erillisiä kollineaarisia $\mathcal{M}$:n pisteitä. Merkintä $AB = d(A, B)$ ei ole kuitenkaan kovin yleisesti käyttökelpoinen, koska siitä ei käy ilmi käytetty etäisyysfunktio. (Jos A ja B ovat esim. ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ pisteitä, voidaan tilanteesta riippuen tarkastella etäisyyksiä $d_E(A, B)$, $d_H(A, B)$, $d_T(A, B)$ jne.)

Olkoot A, B ja C metrisen geometrian $\mathcal{M}$ kolme erillistä pistettä. Seuraako ehdosta $AB + BC = AC$, että A, B ja C ovat kollineaarisia? Euklidisessa tasossa ja hyperbolisessa tasossa vastaus on myönteinen. Havainnollisesti puhuen tämä johtuu siitä, että suora $\overleftrightarrow{AC}$ on molemmissa tapauksissa yksikäsitteisesti määrätty lyhin käyrä (eli ns. *geodeettinen viiva*) pisteestä A pisteeseen C. Jos B ei ole tällä suoralla, on oltava $AB + BC > AC$, sillä muuten murtoviiva ABC olisi korkeintaan yhtä pitkä kuin jana AC eikä pisteitä A ja C yhdistävä geodeettinen viiva olisi yksikäsitteisesti määrätty.

Taksiautotasossa tilanne on toinen. Siellä pisteitä A ja C yhdistäviä lyhimpiä käyriä on rajaton määrä. (Kaikki murtoviivat, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia (Kuva 4.2).) Tästä seuraa, että taksiautotasossa yhtälö $AB + BC = AC$ voi olla voimassa, vaikka pisteet A, B ja C eivät ole kollineaarisia (harjoitustehtävä). Yleisessä tapauksessa vastaus esitettyyn kysymykseen on siis kielteinen.

Esimerkki 7.2. Tarkastellaan hyperbolisen tason $\mathcal{H}$ pisteitä $A = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $B = (0, 1)$ ja $C = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Osoita, että $A - B - C$ (Kuva 7.1).



KUVA 7.1

Ratkaisu. Pisteet A, B, ja C ovat suoralla $L^{1,0} = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Etäisyyksille on voimassa

$$\begin{aligned} AB &= d_H(A, B) = \left| \ln \frac{\frac{-1/2+1}{\sqrt{3}/2}}{\frac{1}{1}} \right| = \ln \sqrt{3}, \\ BC &= d_H(B, C) = \ln \sqrt{3}, \\ AC &= d_H(A, C) = \ln 3. \end{aligned}$$

Näin ollen $AC = AB + BC$, joten $A - B - C$. Kuvassa 7.1 piste B todella "näyttää olevan" A:n ja C:n välissä. □

Lause 7.3. *Jos $A - B - C$, niin $C - B - A$.*

Todistus. Koska $A - B - C$, pisteet C, B ja A ovat erillisiä ja kollineaarisia. Lisäksi $AB + BC = AC$. Koska kaikille P, $Q \in \mathcal{S}$ on voimassa $PQ = QP$, on $CB + BA = CA$. □

Jos x, y, ja z ovat reaalilukuja, niin y on lukujen x ja z *välissä*, jos

$$\text{joko} \quad x < y < z \qquad \text{tai} \quad z < y < x,$$

ts. jos $(y - x)(y - z) < 0$. Tällöin merkitään $x * y * z$.

Jos x, y ja z ovat kolme eri reaalilukua, niin yksi niistä on suurin, toinen on pienin ja kolmas on näiden kahden välissä.

Lause 7.4. *Olkoon f metrisen geometrian $\mathcal{M}$ suoran l viivoitin. Suoran l pisteiden A, B ja C koordinaatit olkoot $x = f(A)$, $y = f(B)$ ja $z = f(C)$. Silloin $A - B - C$, jos ja vain jos $x * y * z$.*

Todistus. Jos joukko $\{A, B, C\}$ sisältää korkeintaan kaksi eri pistettä, niin kumpikaan ehdoista $A - B - C$ ja $x * y * z$ ei voi olla voimassa. Riittää siis tarkastella tapausta, jossa A, B ja C ovat kolme eri pistettä.

Oletetaan ensin, että $A - B - C$ eli että $AB + BC = AC$. Viivoitinyhtälön perusteella on silloin

$$AB = |f(A) - f(B)| = |x - y|, \quad BC = |y - z|, \quad AC = |x - z|,$$

joten

$$(*) \qquad |x - y| + |y - z| = |x - z|.$$

On osoitettava, että joko $x < y < z$ tai $z < y < x$ on voimassa.

Koska A, B ja C ovat eri pisteitä ja f on viivoittimena injektio, ovat x, y ja z eri lukuja. Näin yksi ja vain yksi seuraavista vaihtoehdoista on voimassa:

(i) $x < y < z$, (ii) $z < y < x$,
(iii) $y < x < z$, (iv) $z < x < y$,
(v) $x < z < y$, (vi) $y < z < x$.

Tapauksessa (iii) on $|x-y| = x-y$, $|y-z| = z-y$ ja $|x-z| = z-x$. Silloin $(*)$:n nojalla

$$|x-y| + |y-z| = x-y+z-y = z-x,$$

joten $x = y$, mikä on mahdotonta. Samalla tavalla voidaan osoittaa, etteivät vaihtoehdot (iv)–(vi) voi toteutua. Siis joko (i) tai (ii) on voimassa eli $x * y * z$.

Oletetaan kääntäen, että $x * y * z$. Tarkastellaan esim. tapausta $x < y < z$. Koska $|x-y| = y-x$, $|x-z| = z-x$ ja $|y-z| = z-y$, on

$$|x-y| + |y-z| = |x-z|$$

eli

$$|f(A) - f(B)| + |f(B) - f(C)| = |f(A) - f(C)|$$

eli

$$AB + BC = AC.$$

Koska pisteet A, B ja C lisäksi ovat erillisiä ja kollineaarisia, on $A-B-C$. Tapaus $z < y < x$ voidaan todistaa samalla tavalla. □

Korollaari 7.5. *Olkoot A, B ja C kolme erillistä kollineaarista pistettä. Silloin yksi ja vain yksi näistä pisteistä on kahden muun välissä.*

Todistus. Olkoot A, B ja C suoralla l ja olkoon f suoran l viivoitin. Silloin $x = f(A)$, $y = f(B)$ ja $z = f(C)$ ovat kolme eri reaalilukua, joten yksi ja vain yksi luvuista x, y ja z on kahden muun välissä. Väite seuraa Lauseesta 7.4. □

Propositio 7.6. *Euklidisessa tasossa on voimassa $A - B - C$, jos ja vain jos $B = (1-t)A + tC = A + t(C-A)$ jollekin reaaliluvulle t, $0 < t < 1$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 7.7. *Jos A ja B ovat eri pisteitä metrisessä geometriassa $\mathcal{M}$, niin*

(i) *on olemassa piste C, jolle $A - B - C$,*

(ii) *on olemassa piste D, jolle $A - D - B$.*

Todistus. Olkoon f suoran $l = \overleftrightarrow{AB}$ viivoitin, jolle $f(A) < f(B)$ (vrt. Lause 5.2). Merkitään $x = f(A)$ ja $y = f(B)$. Kohdan (i) todistamiseksi valitaan $z = y + 1$ ja $C = f^{-1}(z)$. Silloin $A - B - C$, koska $x < y < z$. (Lause 7.4.)

Kohdan (ii) todistamiseksi valitaan $w = (x+y)/2$ ja $D = f^{-1}(w)$. Silloin $A - D - B$, koska $x < w < y$. □

Merkintä $A-B-C-D$ tarkoittaa, että ehdot $A-B-C$, $A-B-D$, $A-C-D$ ja $B-C-D$ ovat yhtäaikaa voimassa. Tämä tapahtuu, jos ja vain jos ehdot $A-B-C$ ja $B-C-D$ ovat voimassa. Jos annetaan neljä erillistä kollineaarista pistettä, niin ne voidaan nimetä pisteiksi A, B, C ja D siten, että $A-B-C-D$ on voimassa.

8. Janat ja säteet

Kaiken tähänastisen valmistelutyön jälkeen voimme määritellä janat ja säteet (eli puolisuorat) aksiomaattisesti. Seuraavassa pykälässä määritellään janojen avulla kolmiot ja säteitten avulla kulmat, jolloin klassillisen geometrian peruskäsitteet ovat tulleet määritellyiksi. Havaitaan, että aksiomaattinen lähestymistapa geometriaan ei ole didaktisesti aivan ongelmatonta. Koska esitystä tuskin voidaan läpikäymästämme yksinkertaistaa, ei ole ajateltavissa, että näinkään pitkälle menevää aksiomaattista johdatusta voitaisiin sisällyttää kouluopetukseen. Johtopäätöksenä on, että koulugeometriassa tulisi aksiomatiikan sijasta keskittyä tutkimaan euklidisen tason mallia $\mathcal{E} = \{\, \mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E \,\}$.

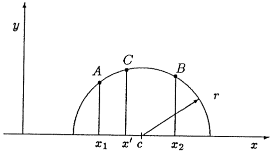
Milloin sitten aksiomaattinen teoria on tarpeen? Oleellista on, että samaa teoriaa halutaan soveltaa hyvin erilaisiin malleihin. Kohta käsiteltävä topologia tulee olemaan hyvä esimerkki aksiomaattisen menetelmän voimasta. Topologiassa peruskäsitteinä ovat pisteet ja avoimet joukot. Mutta "pisteet" ovat joskus euklidisen avaruuden pisteitä, joskus funktioita, joskus lukujonoja, joskus pintoja tai käyriä jne. On selvää, että tällöin ei riitä tarkastella euklidisen tason topologiaa. Aksiomaattiseen geometriaan verrattuna aksiomaattisella topologialla on vielä se etu, että tarvittavien aksioomien määrä on hyvin pieni.

Määritelmä 8.1. Jos A ja B ovat eri pisteitä metrisessä geometriassa $\mathcal{M} = \{\, \mathcal{S}, \mathcal{L}, d \,\}$, niin A:n ja B:n määräämällä *janalla* tarkoitetaan joukkoa

$$\overline{AB} = \{\, C \in \mathcal{S} \mid A-C-B \,\} \cup \{\, A, B \,\}.$$

Propositio 8.2. *Olkoot $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ hyperbolisen tason suoran $L^{r,c}$ pisteitä. Jos $x_1 < x_2$, niin (Kuva 8.1)*

$$\overline{AB} = \{\, C = (x', y') \in L^{r,c} \mid x_1 \le x' \le x_2 \,\}.$$



KUVA 8.1

Todistus. Koska $x' = x_1$ vastaa pistettä A ja $x' = x_2$ vastaa pistettä B, riittää näyttää, että $A - C - B$, jos ja vain jos $x_1 < x' < x_2$.

Tarkastellaan suoran $L^{r,c}$ standardiviivoitinta

$$f(x,y) = \ln \frac{x-c+r}{y}.$$

Oletetaan, että $A - C - B$. Lauseen 7.4 perusteella on silloin

$$(*) \qquad f(A) * f(C) * f(B).$$

Käänteiskuvaus $g = f^{-1} \colon \mathbb{R} \to L^{r,c}$ on $L^{r,c}$:n parametrisointi

$$g(t) = (c + r\tanh t, r\operatorname{sech} t).$$

Jos merkitään $f(A) = t_1$, $f(B) = t_2$ ja $f(C) = t_3$, niin $(*)$:n nojalla on

$$t_1 * t_3 * t_2.$$

Koska $\tanh t$ on aidosti kasvava t:n funktio, on

$$(c + r\tanh t_1) * (c + r\tanh t_3) * (c + r\tanh t_2)$$

eli

$$x_1 * x' * x_2.$$

Koska oletuksen mukaan $x_1 < x_2$, on $x_1 < x' < x_2$.

Oletetaan kääntäen, että $x_1 < x' < x_2$ on voimassa $L^{r,c}$:n pisteille $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ ja $C = (x', y')$. Koska pisteelle $(x,y) \in L^{r,c}$ pätee

$$y = \sqrt{r^2 - (x-c)^2} = \sqrt{[r + (x-c)][r - (x-c)]},$$

on

$$f(x,y) = \ln\sqrt{\frac{r+(x-c)}{r-(x-c)}}.$$

Derivoimalla voidaan osoittaa, että funktio

$$x \mapsto \frac{r+(x-c)}{r-(x-c)}.$$

on kasvava. Koska myös logaritmi ja neliöjuuri ovat kasvavia funktioita, on

$$f(A) < f(C) < f(B).$$

Lauseen 7.4 nojalla on $A - C - B$. $\square$

Lause 8.3. *Olkoot A, B, C ja D metrisen geometrian pisteitä siten, että $\overline{AB} = \overline{CD}$. Silloin $\{A, B\} = \{C, D\}$.*

Todistus. Oletetaan esim. että $A \notin \{C, D\}$, ts. että $A \neq C$ ja $A \neq D$. Koska $A \in \overline{CD}$, on $C - A - D$.

Koska $\overline{AB} = \overline{CD}$, pisteet A, B, C ja D ovat kollineaarisia. On seuraavat mahdollisuudet: (i) $B = C$, (ii) $B = D$, tai joukossa $\{A, B, C, D\}$ on neljä eri pistettä ja yksi seuraavista vaihtoehdoista toteutuu: (iii) $B - C - A - D$, (iv) $C - B - A - D$, (v) $C - A - B - D$, (vi) $C - A - D - B$. Tapauksissa (i), (iii) ja (iv) on $B - A - D$, joten $D \notin \overline{AB} = \overline{CD}$. Tapauksissa (ii), (v) ja (vi) on $C - A - B$, joten $C \notin \overline{AB} = \overline{CD}$. Ristiriita, joten $A \in \{C, D\}$. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että $B \in \{C, D\}$. $\square$

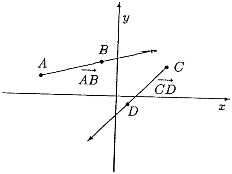
Määritelmä 8.4. Pisteitä A ja B kutsutaan janan $\overline{AB}$ *päätepisteiksi.* Lukua $AB = d(A, B)$ kutsutaan janan $\overline{AB}$ *pituudeksi.*

Lause 8.3 osoittaa, että janan päätepisteet ovat yksikäsitteisellä tavalla määrätyt.

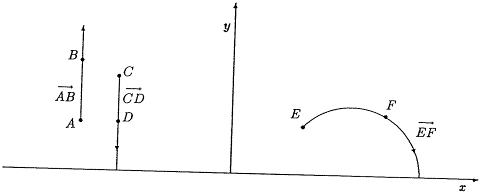
Määritelmä 8.5. Olkoot A ja B metrisen geometrian $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ kaksi eri pistettä. *Säteellä* eli *puolisuoralla* pisteestä A suuntaan B tarkoitetaan joukkoa

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \in \mathcal{S} \mid A - B - C\}.$$

Säde $\overrightarrow{AB}$ on määritelmän perusteella suoran $\overleftrightarrow{AB}$ osajoukko.



KUVA 8.2. Säteitä euklidisessa tasossa



KUVA 8.3. Säteitä hyperbolisessa tasossa

Propositio 8.6. *Euklidisen tason janoilla ja säteillä on esitykset*

$$\overline{AB} = \{ C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A),\ 0 \le t \le 1 \},$$
$$\overrightarrow{AB} = \{ C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A),\ t \ge 0 \}. \quad \square$$

Seuraava lause osoittaa, että säteen $\overrightarrow{AB}$ *alkupiste* A on yksikäsitteisellä tavalla määrätty:

Lause 8.7. *Metrisessä geometriassa* $\mathcal{M}$ *on voimassa:*

(i) *Jos* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *niin* $A = C$.

(ii) *Jos* $C \in \overrightarrow{AB}$ *ja* $C \neq A$, *niin* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. $\square$

Kohdan (ii) perusteella säteellä on useita eri esitystapoja, joissa kaikissa on sama alkupiste.

Lause 8.8. *Jos A ja B ovat metrisen geometrian $\mathcal{M}$ kaksi eri pistettä, niin on olemassa viivoitin $f\colon \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ siten, että*

$$\overrightarrow{AB} = \{\, X \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(X) \geq 0 \,\}.$$

Todistus. Olkoon $f\colon \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ viivoitin, jolle A on origo ja B positiivinen (Lause 5.2). Väitämme, että f täyttää vaaditut ehdot. Osoitetaan ensin, että

$$\{\, X \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(X) \geq 0 \,\} \subset \overrightarrow{AB}.$$

Olkoon tätä varten $X \in \overleftrightarrow{AB}$ siten, että $f(X) \geq 0$. Merkitään $x = f(X)$ ja $y = f(B) > 0$. Jos $x = 0$, niin $X = A \in \overrightarrow{AB}$. Jos $x = y$, niin $X = B \in \overrightarrow{AB}$. Koska $x \geq 0$, niin jäljelle jää vaihtoehdot $0 < x < y$ tai $0 < y < x$. Edellisessä tapauksessa on $A - X - B$ ja siis $X \in \overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$. Jälkimmäisessä tapauksessa on $A - B - X$ ja siis $X \in \overrightarrow{AB}$ (Lause 7.4).

Vielä on osoitettava, että

$$\overrightarrow{AB} \subset \{\, X \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(X) \geq 0 \,\}.$$

Olkoon tätä varten $D \in \overrightarrow{AB}$, jolloin $D \in \overleftrightarrow{AB}$. Oletetaan, että $f(D) < 0$. Koska $f(A) = 0$ ja $f(B) > 0$, on (Lause 7.4) $D - A - B$ ja siis $D \notin \overrightarrow{AB}$. Ristiriita. Siis $f(D) \geq 0$. $\square$

Perinteisen (koulu-) geometrian keskeistä aineistoa oli kolmioiden yhteneväisyyslauseet. Nämä perustuvat janojen ja kulmien yhteneväisyyteen.

Määritelmä 8.9. Metrisen geometrian $\mathcal{M}$ janat $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ovat *yhteneviä* eli *kongruentteja*, jos niillä on sama pituus. Tällöin merkitään $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$.

Lause 8.10. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$ säde ja $\overline{PQ}$ jana metrisessä geometriassa $\mathcal{M}$. Silloin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty piste $C \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{PQ} \simeq \overline{AC}$.*

Todistus. Olkoon f suoran $\overleftrightarrow{AB}$ viivoitin, jolle A on origo ja B positiivinen. Lauseen 8.8 mukaan $\overrightarrow{AB} = \{\, X \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(X) \geq 0 \,\}$. Olkoon $r = PQ$ ja $C = f^{-1}(r)$. Koska $r > 0$, on $C \in \overrightarrow{AB}$. Lisäksi

$$AC = |f(A) - f(C)| = |0 - r| = r = PQ,$$

joten $\overline{AC} \simeq \overline{PQ}$.

On vielä näytettävä, että piste C on yksikäsitteisesti määrätty. Oletetaan tätä varten, että $C' \in \overrightarrow{AB}$ on toinen piste, jolle $\overline{AC'} \simeq \overline{PQ}$. Koska $C' \in \overrightarrow{AB}$, on $f(C') > 0$. Lisäksi

$$f(C') = f(C') - f(A) = |f(C') - f(A)| = AC' = PQ = f(C).$$

Koska f on injektio, on $C' = C$. $\square$

Esimerkki 8.11. Olkoon hyperbolisessa tasossa $A = (0,2)$, $B = (0,1)$, $P = (0,4)$ ja $Q = (7,3)$. Etsi piste $C \in \overrightarrow{AB}$, jolle $\overline{AC} \simeq \overline{PQ}$.

Ratkaisu. Ensin on selvitettävä, millä suoralla $L^{r,c}$ pisteet P ja Q ovat. Molempien pisteiden koordinaattien on toteutettava yhtälö

$$(x-c)^2 + y^2 = r^2,$$

mistä saadaan helpolla laskulla, että $c = 3$ ja $r = 5$. Sen jälkeen lasketaan pisteiden P ja Q etäisyys:

$$d_H(P,Q) = \left| \ln \frac{\frac{0-3+5}{4}}{\frac{7-3+5}{3}} \right| = \ln 6.$$

Säde $\overrightarrow{AB}$ on I-tyypin suoralla $x = 0$. Olkoon $C = (0,y)$. Silloin

$$d_H(A,C) = \left| \ln \frac{y}{2} \right|.$$

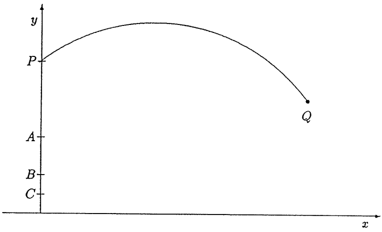
Jotta olisi $\overline{AC} \simeq \overline{PQ}$, on oltava

$$\ln \frac{y}{2} = \pm \ln 6$$

eli

$$y = 12 \quad \text{tai} \quad y = \tfrac{1}{3}.$$

Koska on oltava $C \in \overrightarrow{AB}$, ainoastaan $C = (0, 1/3)$ kelpaa ratkaisuksi (Kuva 8.4). □



KUVA 8.4. $\overline{AC} \simeq \overline{PQ}$

Esimerkissä 8.11 ovat I-tyypin suoralla oleva jana $\overline{AC}$ ja II-tyypin suoralla oleva jana $\overline{PQ}$ yhteneviä eli kongruentteja hyperbolisessa geometriassa. Kuitenkin ne pistejoukkoina näyttävät hyvin erilaisilta. Yhtenevyys on siis tarkasteltavaan geometriaan liittyvä käsite. Ainoastaan euklidisessa geometriassa yhtenevät kuviot näyttävät samanlaisilta.

Lause 8.12. *Oletetaan, että metrisessä geometriassa $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ on voimassa $A - B - C$, $P - Q - R$, $\overline{AB} \simeq \overline{PQ}$ ja $\overline{BC} \simeq \overline{QR}$. Silloin $\overline{AC} \simeq \overline{PR}$.*

Todistus. Määritelmän 7.1 nojalla on

$$AB + BC = AC \quad \text{ja} \quad PQ + QR = PR.$$

Koska $\overline{AB} \simeq \overline{PQ}$ ja $\overline{BC} \simeq \overline{QR}$, on (Määritelmä 8.9) $AB = PQ$ ja $BC = QR$. Silloin $AC = PR$, mistä seuraa, että $\overline{AC} \simeq \overline{PR}$. $\square$

Seuraavan lauseen todistus on Lauseen 8.12 todistuksen nojalla ilmeinen:

Lause 8.13. *Oletetaan, että metrisessä geometriassa $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ on voimassa $A - B - C$, $P - Q - R$, $\overline{AB} \simeq \overline{PQ}$ ja $\overline{AC} \simeq \overline{PR}$. Silloin $\overline{BC} \simeq \overline{QR}$.* $\square$

Lauseen 8.12 nojalla janoja voidaan laskea yhteen: Summajanan $\overline{AC}$ pituus riippuu vain osien $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ pituuksista, ei siitä, millä suoralla pisteet A, B ja C sijaitsevat. Lause 8.13 määrittelee janojen vähennyslaskun.

Olkoot A ja B kaksi eri pistettä metrisessä geometriassa $\mathcal{M}$. Piste $M \in \overleftrightarrow{AB}$ on janan $\overline{AB}$ *keskipiste*, jos $AM = MB$.

Lause 8.14. (i) *Jokaisella janalla $\overline{AB}$ on keskipiste.*

(ii) *Janalla $\overline{AB}$ on vain yksi keskipiste.*

(iii) *Jos M on janan $\overline{AB}$ keskipiste, niin $A - M - B$.*

Todistus. Tarkastellaan suoran $\overleftrightarrow{AB}$ viivoitinta f, jolle $f(A) = 0$ ja $f(B) > 0$. Olkoon $m = f(B)/2$ ja $M = f^{-1}(m)$. Silloin on $AM = |f(M) - f(A)| = m$ ja $MB = |f(B) - f(M)| = m$, joten M on janan AB keskipiste. Lisäksi $A - M - B$ (Lause 7.4).

Olkoon $M' \in \overleftrightarrow{AB}$ siten, että $AM' = M'B$. Koska $AM' = |f(M')|$ ja $M'B = |f(B) - f(M')|$, on $\pm f(M') = f(B) - f(M')$. Siis joko $f(M') = f(B)/2$ tai $f(B) = 0$. Koska $f(B) > 0$, on $f(M') = f(B)/2 = f(M)$. Siis $M = M'$ viivoittimen f injektiivisyyden perusteella. $\square$

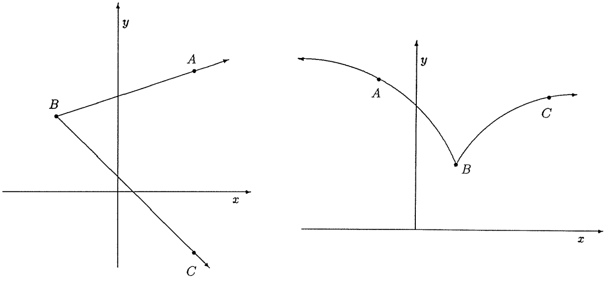
9. Kulmat ja kolmiot

Määrittelemme seuraavaksi kulmat ja kolmiot metrisessä geometriassa $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$. On tärkeää huomata, ettei näitä käsitteitä varten tarvita metriseen geometriaan mitään lisästruktuuria. Toisin sanoen metrinen geometria pitää jo sisällään kulmat ja kolmiot.

Määritelmä 9.1. Olkoot A, B ja C metrisen geometrian $\mathcal{M}$ kolme ei-kollineaarista pistettä. *Kulmalla* ABC tarkoitetaan $\mathcal{S}$:n osajoukkoa

$$\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}.$$

Määritelmässä 9.1 ei sallita, että pisteet A, B ja C olisivat kollineaarisia. Tästä seuraa, että säteet $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ eivät ole samalla suoralla. Näin ollen "oikokulma" ja "nollakulma" eivät sisälly kulman määritelmään. Kuvassa 9.1 on esitetty kulma euklidisessa tasossa ja hyperbolisessa tasossa.



KUVA 9.1. Euklidinen ja hyperbolinen kulma

Alkeisgeometrian loogisia ongelmia kuvaa se, ettei ehdosta $\angle ABC = \angle DEF$ itsestään selvästi seuraa, että $B = E$. Kulman kärki ei siis automaattisesti ole yksikäsitteisellä tavalla määritelty. Tämä tulee ilmeiseksi jos ajatellaan oikokulmaa euklidisessa tasossa: Oikokulman määrää kolme kollineaarista pistettä $A - B - C$, mutta (Määritelmän 9.1 mielessä) sama oikokulma saadaan, valittiinpa mitkä tahansa kolme pistettä $A' - B' - C'$ suoralta $l = \overleftrightarrow{AB}$. Oikokulmat ja (vastaavasti nollakulmat) tuovat siis geometriaan loogisia ongelmia.

Lemma 9.2. *Olkoon $\angle PQR$ kulma ja S piste, jolle $P - Q - S$. Silloin $S \notin \angle PQR$.*

Todistus. Oletetaan, että $S \in \angle PQR$. Koska $S \notin \overrightarrow{QP}$, on oltava $S \in \overrightarrow{QR}$ ja $S \neq Q$. Lauseen 8.7 kohdan (ii) perusteella $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QS}$, joten Q, R ja S ovat kollineaarisia ja $R \in \overleftrightarrow{QS} = \overleftrightarrow{QP}$. Näin ollen P, Q ja R ovat kollineaarisia, mikä on ristiriita. Siis $S \notin \angle PQR$. $\square$

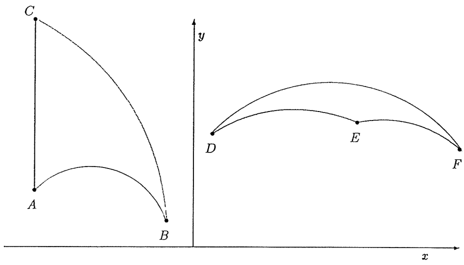
Lause 9.3. *Jos $\angle ABC = \angle DEF$, niin $B = E$.*

Todistus. Koska $B \in \angle ABC = \angle DEF$, on $B \in \overrightarrow{ED}$ tai $B \in \overrightarrow{EF}$. Oletetaan esim., että $B \in \overrightarrow{EF}$ ja $B \neq E$. Valitaan G siten, että $E - B - G$. Silloin $G \in \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EF} \subset \angle DEF = \angle ABC$, joten $G \in \overrightarrow{BC}$ tai $G \in \overrightarrow{BA}$. Olkoon esim. $G \in \overrightarrow{BC}$. Koska $G \neq B$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG}$. Siis $\angle ABC = \angle ABG$. Lemman 9.2 nojalla $E \notin \angle ABG$, koska on $E - B - G$. Tämä on ristiriita, sillä toisaalta $E \in \angle DEF = \angle ABC = \angle ABG$. Siis $B = E$. $\square$

Lauseen 9.3 nojalla on metrisen geometrian kulman $\angle ABC$ *kärki* B riippumaton siitä, millaista esitystä ko. kulmalle käytetään.

Määritelmä 9.4. Jos A, B ja C ovat metrisen geometrian $\mathcal{M}$ ei-kollineaarisia pisteitä, niin *kolmiolla* ABC tarkoitetaan joukkoa

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}.$$



KUVA 9.2. Kolmioita hyperbolisessa tasossa

Euklidisessa tasossa kolmion kulmien summa on aina 180°. Hyperbolisessa tasossa kolmion kulmien summa vaihtelee, mutta on aina vähemmän kuin 180°. Hyperbolisessa tasossa voidaan määritellä ns. hyperbolinen pinta-ala. Mitä suurempi on kolmion hyperbolinen pinta-ala, sitä pienempi on kulmien summa. On nimittäin voimassa seuraava mielenkiintoinen sääntö: Jos hyperbolisen kolmion kulmien summa ilmoitetaan radiaaneissa ja lisätään kolmion hyperbolinen pinta-ala, niin saadaan aina tulokseksi π.

Osoitamme lopuksi, että kolmion *kärjet* ovat yksikäsitteisellä tavalla määrätyt.

Lause 9.5. *Oletetaan, että metrisen geometrian pisteet A, B ja C eivät ole kollineaarisia. Silloin A ei ole kolmion ABC minkään kahden pisteen välissä.*

Todistus. Oletetaan, että olisi $D - A - E$ joillekin pisteille D, $E \in \triangle ABC$. Osoitetaan, että tällöin olisi D, $E \in \overline{BC}$.

Jos $D \in \overline{AB}$, niin joko $D = B$ ja $E - A - B$ tai $D \neq B$ ja $E - A - D - B$. Molemmissa tapauksissa $E \notin \overline{AB}$. Jos $E \subset \overline{AC}$, niin $C - E - A - B$ tai $C = E$, joten $C - A - B$. Jos $E \in \overline{BC}$, niin $C - E - A - B$ tai $C = E$, joten $C - A - B$. Koska A, B ja C eivät ole kollineaarisia, on tultu ristiriitaan. Siis $D \notin \overline{AB}$.

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että $D \notin \overline{AC}$. Koska $D \in \triangle ABC$, on oltava $D \in \overline{BC}$. Samanlainen todistus osoittaa, että $E \in \overline{BC}$.

Koska $D - A - E$ ja D, $E \in \overleftrightarrow{BC}$, on $A \in \overleftrightarrow{BC}$. Tämä on mahdotonta, koska A, B ja C eivät ole kollineaarisia. Siis ei voi olla $D - A - E$ millekään pisteelle $D, E \in \triangle ABC$. $\square$

Korollaari 9.6. *Jos $\triangle ABC = \triangle DEF$, niin $\{A, B, C\} = \{D, E, F\}$.*

Todistus. Jos $X \in \triangle ABC$ ja $X \notin \{A, B, C\}$, niin X on kolmion ABC kahden pisteen välissä. Lauseesta 9.5 seuraa silloin, että

$$\begin{aligned}\{A, B, C\} &= \{X \in \triangle ABC \mid X \text{ ei ole } \triangle ABC\text{:n kahden pisteen välissä}\}\\ &= \{X \in \triangle DEF \mid X \text{ ei ole } \triangle DEF\text{:n kahden pisteen välissä}\}\\ &= \{D, E, F\}. \ \square\end{aligned}$$

Määritelmä 9.7. Pisteet A, B ja C ovat metrisen geometrian kolmion $\triangle ABC$ *kärkiä* ja janat $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{AC}$ ovat sen *sivuja*.

Kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ yhtenevyyden (eli kongruenssin) määrittelyä varten tarvitaan kulman mitta m. Oletetaan, että tällainen on onnistuttu määrittelemään metrisessä geometriassa $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$. Silloin nelikköä $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d, m\}$ sanotaan *astelevygeometriaksi* (protractor geometry). Astelevygeometrian kulmat $\angle ABC$ ja $\angle DEF$ ovat *yhteneviä* (eli *kongruentteja*), jos $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$. Tällöin merkitään $\angle ABC \simeq \angle DEF$.

Kolmiossa $\triangle ABC$ merkitään $\angle ABC = \angle B$, $\angle CAB = \angle A$ ja $\angle BCA = \angle C$.

Määritelmä 9.8. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kaksi kolmiota astelevygeometriassa $\mathcal{M}$. Bijektio $f\colon \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ on *kongruenssi*, jos

$$\overline{AB} \simeq \overline{f(A)f(B)}, \quad \overline{BC} \simeq \overline{f(B)f(C)}, \quad \overline{CA} \simeq \overline{f(C)f(A)},$$

sekä

$$\angle A \simeq \angle f(A), \quad \angle B \simeq \angle f(B), \quad \angle C \simeq \angle f(C).$$

Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat *yhteneviä* (eli *kongruentteja*), jos on olemassa konguenssi $f\colon \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$.

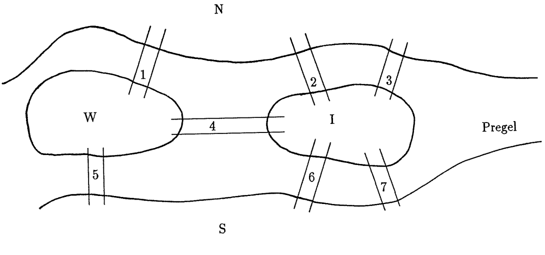
Osoittautuu, että tutut yhtenevyyslauseet eivät välttämättä päde astelevygeometriassa. Jos SKS-lause on voimassa, niin $\mathcal{M}$:n sanotaan toteuttavan SKS-*aksiooman*. Tällöin $\mathcal{M}$ on ns. *neutraaligeometria*. Neutraaligeometriassa voidaan todistaa tuttuja kolmioiden yhtenevyyslauseita.

Taksiautotaso on esimerkki astelevygeometriasta, joka ei toteuta SKS-aksioomaa.

II Topologia

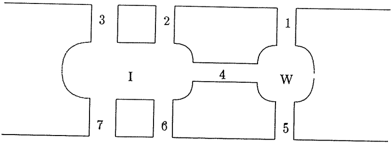
1. Euklidisen tason topologian synty

Leonhard Euler (s. 1707 Baselissa, k. 1783 Pietarissa) tuli 1730 fysiikan ja 1733 matematiikan professoriksi Pietarin yliopistoon (kaupunki oli perustettu 1703 asumattomalle suolle). Vuonna 1736 hän ratkaisi seuraavan *Königsbergin silta-ongelman*: Königsbergin kaupunki sijaitsi silloin Pregel-joen molemmilla rannoilla ja kahdella saarella. Kaupunginosia yhdisti seitsemän siltaa (Kuva 1.1). Onko mahdollista kiertää kaupunginosasta toiseen siten, että jokainen silta tulee ylitetyksi täsmälleen kerran? Vastaus oli kielteinen.

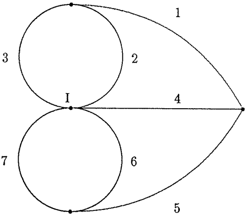


KUVA 1.1. Königsbergin neljä kaupunginosaa ja seitsemän siltaa.

Euler huomasi, että hän oli tekemisissä sellaisen geometrian osa-alueen kanssa, jota siihen mennessä ei oltu eksplisiittisesti käsitelty. Ongelma ei riipu saarten tai joen muodoista, ei siltojen pituuksista tms. Siltaongelman ratkaisuun vaikuttaa ainoastaan siltojen sijainti toisiinsa nähden, ei reittien geometrinen muoto. Kuvissa 1.2 ja 1.3 on erilaisia versioita samasta ongelmasta.



KUVA 1.2. Königsbergin siltaongelma



KUVA 1.3. Königsbergin siltaongelma graafina. Kaaret ovat siltoja, risteyskohdat kaupunginosia.

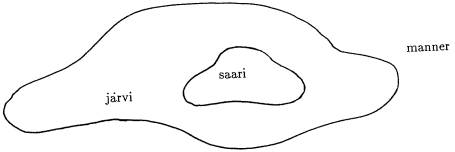
Königsbergin siltaongelma ei sinänsä ole kovin mielenkiintoinen. Matematiikan historiaan se on jäänyt siksi, että sen katsotaan olleen alkuna Eulerin oivallukselle, että geometriasta tulee erottaa tieteenala, joka tutkii pelkästään paikkasuhteita kiinnittämättä huomiota suuruuksiin tai muotoihin. Uusi tiede sai nimen ***analysis situs***, paikan analyysi. Myöhemmin sitä on ruvettu kutsumaan ***topologiaksi*** kreikan kielen sanojen "topos" ($\tau\acute{o}\pi o\zeta$), paikka, ja "logos" ($\lambda\acute{o}\gamma o\zeta$), tieto, mukaisesti.

Aluksi topologia käsitteli tason $\mathbb{R}^2$ tai avaruuden $\mathbb{R}^3$ pistejoukkoja. Yleisen topologisen avaruuden määritteli aksiomaattisesti Felix Hausdorff (1868–1942) vuonna 1912. Tällöin "lähelläolo" tuli määritellyksi riittävän yleisesti ja yksinkertaisesti, jotta se soveltuisi matemaattisen analyysin moninaisiin tarpeisiin. Kuluneet 80 vuotta ovat osoittaneet, että topologia on eräs matematiikan perusstruktuureja.

Jos Königsbergin kartta piirretään venyvälle pinnalle ja sitä venytellään ja kutistellaan repimättä ja laskostamatta, niin siltaongelma säilyy muuttumattomana. Tätä ajatusta kehittelemällä on päädytty siihen, että tason topologia tutkii niitä tason ominaisuuksia, jotka säilyvät muuttumattomina tason jatkuvissa muunnoksissa. (Tason ajatellaan olevan venyvä kalvo, jota venytellään ja kutistellaan repimättä ja laskostamatta.) Topologia ei siis tutki *määrällisiä* asioita eikä *suuruuksia*.

Topologisiin ominaisuuksiin ei yleensä liity *numeroita* samalla tavalla kuin aritmetiikkaan tai differentiaali- ja integraalilaskentaan. Tässä mielessä topologia eroaa aikaisemmasta käsityksestä matematiikasta.

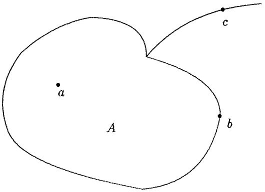
Saadaksemme esimerkkejä topologisista ominaisuuksista tarkastelemme karttaa maisemasta, jossa on manner, järvi ja saari (Kuva 1.4).



KUVA 1.4. Topologinen ominaisuus: Saaresta ei pääse mantereelle kulkematta järven yli.

Riippumatta siitä, miten karttaa venytellään, on saari erillään mantereesta. Saaresta ei pääse mantereelle kulkematta järven yli. Tämä on topologinen ominaisuus. Saaren etäisyys mantereesta ei sen sijaan ole topologinen ominaisuus, koska se muuttuu karttaa venyteltäessä. Kuitenkin etäisyyden suuruudesta ja saaren ja mantereen muodoista riippumatta on aina olemassa sellaiset rannan kohdat saaressa ja mantereella, joiden välinen matka saaresta mantereelle on lyhin mahdollinen. Tällaisten pisteiden olemassaolo on kuvion topologinen ominaisuus, vaikka nämä pisteet vaihtuvat kuvion muodon muuttuessa.

Etsittäessä ominaisuuksia, jotka eivät muutu kuviota venyteltäessä, on osoittautunut oleelliseksi tutkia, onko pistejoukon alkio joukon "reunalla" vai "sisällä".



KUVA 1.5. Piste a on joukon A "sisällä", pisteet b ja c sen "reunalla".

Olkoon A tason $\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1,\, x_2 \in \mathbb{R} \}$ osajoukko. Kuvassa 1.5 piste a on joukon A sisällä, sillä kaikki a:n "lähellä" olevat pisteet sisältyvät A:han. Sen sijaan "mielivaltaisen läheltä" pisteitä b ja c löytyy A:han kuulumattomia pisteitä. Pisteet b ja c ovat A:n "reunapisteitä".

Olkoon $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(a,r) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2 \}$$

on *a-keskinen r-säteinen (avoin) kiekko.* Jos merkitään $x = (x_1, x_2)$, niin on

$$B(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(a,x) < r \},$$

missä d_E on $\mathbb{R}^2$:n euklidinen etäisyys.

Määritelmä 1.1. Joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ pistettä a sanotaan A:n *sisäpisteeksi*, jos on olemassa a-keskinen kiekko $B(a,r)$, joka sisältyy A:han.

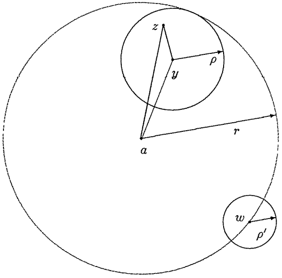
Jos tasoa venytellään, joukko A muuttuu ja piste a voi siirtyä lähemmäksi a:n reunaa. Kuitenkin on aina löydettävissä $r > 0$ siten, että $B(a,r) \subset A$. Ominaisuus "piste a on joukon A sisäpiste" ei siis muutu tason jatkuvissa muunnoksissa. Tarkempi ajattelu osoittaa, että tämä on juuri se oleellinen ominaisuus, joka säilyy muuttumattomana näissä muunnoksissa.

Esimerkki 1.2. (i) Valitaan $A = \mathbb{R}^2$. Silloin jokainen piste $a \in A$ on sisäpiste.

(ii) Valitaan $A = l$, $l \in \mathcal{L}_E$. ($\mathcal{L}_E$ on $\mathbb{R}^2$:n suorien joukko.) Joukolla A ei ole nyt lainkaan sisäpisteitä.

(iii) Olkoon $\overline{B}(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(a,x) \le r \}$ suljettu kiekko. Silloin pisteet $y \in B(a,r)$ ovat sekä $\overline{B}(a,r)$:n että $B(a,r)$:n sisäpisteitä. *Todistus.* Olkoon $\rho = r - d_E(a,y)$ ja $z \in B(y,\rho)$. Koska d_E toteuttaa kolmioepäyhtälön (Propositio I.6.8), on $d_E(a,z) \le d_E(a,y) + d_E(y,z) < d_E(a,y) + \rho = r$. Siis $z \in B(a,r)$ eli $B(y,\rho) \subset B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$.

(iv) Ympyrän $S(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d_E(a,x) = r \}$ pisteet eivät ole $\overline{B}(a,r)$:n sisäpisteitä, sillä jokainen kiekko $B(w,\rho')$, $w \in S(a,r)$, $\rho' > 0$, sisältää joukkoon $\overline{B}(a,r)$ kuulumattomia pisteitä (Kuva 1.6). $\square$



KUVA 1.6. Piste $y \in B(a, r)$ on sisäpiste.

Määritelmä 1.3. Joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ on *avoin*, jos sen jokainen piste on sisäpiste (tai jos U on tyhjä).

Esimerkissä 1.2 todettiin, että koko taso $U = \mathbb{R}^2$ on avoin joukko. Samoin todettiin, että jokainen avoin kiekko $U = B(a, r)$ on avoin joukko. Sen sijaan tason suora l tai suljettu kiekko $\overline{B}(a, r)$ eivät ole avoimia joukkoja. Myöskään yhden pisteen joukko eli yksiö ei ole avoin joukko.

Jos tasoa muunnellaan jatkuvasti sitä repimättä tai laskostamatta, niin avoin joukko säilyy avoimena joukkona. On osoittautunut, että tämä avoimien joukkojen invarianssi on juuri se ominaisuus, jonka avulla voidaan täsmällisesti määritellä, mitä edellä kuvatuilla tason jatkuvilla muunnoksilla tarkoitetaan. Tästä seuraa, että topologia on avoimien joukkojen tutkimista. Jos tämä avoimien joukkojen invarianssi otetaan luvallisten muunnosten määritelmäksi, niin havainnollisesti on ilmeistä, että kuvion korvaaminen peilikuvallaan ei muuta sen topologisia ominaisuuksia. (Sisäpiste säilyy sisäpisteenä peilauksessa.) Näin ollen Königsbergin siltaongelman eri versiot (Kuvat 1.1–1.3) voidaan todeta topologisesti samanarvoisiksi.

Tässä osassa kurssia emme käytä kaikkia I-osan merkintöjä sellaisinaan. Emme myöskään erottele malleja ja aksiomaattista teoriaa toisistaan käyttämällä termejä "propositio" ja "lause". On huomattava, että geometrialle ja topologialle on kehittynyt toisistaan lievästi poikkeavat merkintätavat ja näitä pyrimme luonnollisesti noudattamaan.

2. Euklidisen tason topologia

Edellisessä pykälässä nähtiin, että paikkasuhteiden analyysi, analysis situs eli topologia, on avoimien joukkojen ominaisuuksien tutkimista. Kaikkien avointen joukkojen joukkoa $\mathcal{T}$ sanotaan tason *topologiaksi.*

Tason avoimien joukkojen määrä on hyvin suuri. Jo yksistään origo-keskisten avointen kiekkojen $B(O,r)$ joukko on ylinumeroituva, kun r käy läpi kaikki positiiviset reaaliluvut. Olkoon $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ kokoelma avoimia joukkoja. Silloin $\mathcal{T}_1$ voi olla joko äärellinen kokoelma,

$$\mathcal{T}_1 = \{\, A_i \in \mathcal{T} \mid i \in \{1,2,\dots,n\}\,\},$$

numeroituvasti ääretön kokoelma,

$$\mathcal{T}_1 = \{\, A_i \in \mathcal{T} \mid i \in \mathbb{N}\,\},$$

tai ylinumeroituvasti ääretön kokoelma,

$$\mathcal{T}_1 = \{\, A_i \in \mathcal{T} \mid i \in \mathbb{R}\,\}.$$

Kaikissa tapauksissa $\mathcal{T}_1$ on muotoa

$$\mathcal{T}_1 = \{\, A_i \in \mathcal{T} \mid i \in I\,\},$$

missä I on ns. *indeksijoukko.* Joukkoa

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\, a \in \mathbb{R}^2 \mid a \text{ kuuluu johonkin joukkoon } A_i\,\}$$

sanotaan joukkojen $A_i \in \mathcal{T}_1$ *yhdisteeksi.* Vastaavasti joukkoa

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\, a \in \mathbb{R}^2 \mid a \text{ kuuluu jokaiseen joukkoon } A_i\,\}$$

sanotaan joukkojen $A_i \in \mathcal{T}_1$ *leikkaukseksi.*

Lause 2.1. *Olkoon $\mathcal{T}_1$ kokoelma avoimia joukkoja. Silloin joukkojen $A_i \in \mathcal{T}_1$ yhdiste on avoin.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{T}_1 = \{\, A_i \in \mathcal{T} \mid i \in I\,\}$ ja

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Jos $a \in A$, niin $a \in A_\imath$ jollekin $\imath \in I$. Koska $A_\imath$ on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B(a,r) \subset A_\imath$. Mutta silloin $B(a,r) \subset A$, joten a on A:n sisäpiste. □

Avoimien joukkojen $A_\imath$, $i \in I$, leikkaus ei yleensä ole avoin. Olkoon esimerkiksi $A_r = B(O,r)$, $r > 0$. (Indeksijoukkona I on nyt positiivisten reaalilukujen joukko $\mathbb{R}_+^* = \{ t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \}$.) Silloin

$$O \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} A_r,$$

koska O kuuluu jokaiseen kiekkoon $A_r = B(O,r)$. Olkoon $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Koska x ei ole origo, on $\|x\| > 0$. Valitaan reaaliluku r_0 siten, että $0 < r_0 < \|x\|$. Silloin $x \notin A_{r_0} = B(O,r_0)$, joten

$$x \notin \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} A_r.$$

Näin ollen

$$(*) \qquad \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} A_r = \{O\}.$$

Yksiönä leikkausjoukko $(*)$ ei ole avoin, vaikka jokainen A_r on avoin. Leikkaus on avoin, jos indeksijoukko I on äärellinen:

Lause 2.2. *Äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin.*

Todistus. Oletetaan, että joukot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat avoimia. Jos

$$a \in A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k,$$

niin $a \in A_1$, $a \in A_2$, ..., $a \in A_n$. Silloin on olemassa $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, ..., $r_n > 0$ siten, että $B(a,r_1) \subset A_1$, $B(a,r_2) \subset A_2$, ..., $B(a,r_n) \subset A_n$. Olkoon $r = \min\{ r_1, r_2, \ldots, r_n \}$. Silloin $B(a,r) \subset B(a,r_1)$, $B(a,r) \subset B(a,r_2)$, ..., $B(a,r) \subset B(a,r_n)$, joten $B(a,r) \subset A_k$, $k = 1, \ldots, n$, eli $B(a,r) \subset A$. □

Lause 2.3. *Epätyhjä joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on avoin, jos ja vain jos se voidaan esittää avoimien kiekkojen yhdisteenä.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{T}_A = \{ B_\imath \mid i \in I \}$ on jokin avoimien kiekkojen kokoelma siten, että

$$A = \bigcup_{\imath \in I} B_\imath.$$

Koska jokainen $B_\cdot$ on avoin joukko, on A Lauseen 2.1 perusteella avoin.

Oletetaan kääntäen, että A on avoin. Määritelmän 1.3 perusteella jokaista pistettä $x \in A$ kohti on olemassa reaaliluku $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset A$. Koska $x \in B(x, r_x)$, on

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subset A,$$

joten

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$$

on A:n esitys avoimien kiekkojen yhdisteenä. $\square$

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan tasossa $\mathbb{R}^2$ euklidisten suorien joukkoa $\mathcal{L}_E$. Joukko $R \subset \mathbb{R}^2$ on *rako*, jos on olemassa suora $l \in \mathcal{L}_E$ siten, että $R = \mathbb{R}^2 \setminus l$. Rako on siis suoran komplementti. Joukko R on rako, jos ja vain jos joukko $l = \mathbb{R}^2 \setminus R$ on suora.

On itsestään selvää, että tasojoukko B ei yleensä ole rako eikä suora. Tutkimalla rakoa $R = \mathbb{R}^2 \setminus l$ saadaan yhtä paljon tietoa kuin tutkimalla suoraa l eikä käsitteen "rako" käytöstä käsitteen "suora" rinnalla ole mitään periaatteellista hyötyä. $\square$

Avoimet joukot ja suljetut joukot muodostavat samanlaisen käsiteparin kuin raot ja suorat:

Määritelmä 2.5. Joukko F on *suljettu*, jos sen komplementti $A = \mathbb{R}^2 \setminus F$ on avoin.

Avoimet joukot ovat hyvin poikkeuksellisia tasojoukkoja. Näin ollen myös suljetut joukot ovat hyvin poikkeuksellisia eikä mielivaltainen tasojoukko yleensä ole sen enempää avoin kuin suljettukaan. Samalla tavalla kuin Esimerkin 2.4 "rako" on käsitteenä tarpeeton on myös "suljettu joukko" käsitteenä periaatteessa tarpeeton. On kuitenkin osoittautunut hyödylliseksi antaa avoimen joukon komplementille oma nimityksensä. Käsitteen "rako" käytöstä ei sen sijaan ilmeisestikään ole yleisempää hyötyä.

Tyhjä joukko $\emptyset$ on suljettu, koska sen komplementti $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset$ on avoin. Vastaavasti koko taso $\mathbb{R}^2$ on suljettu, koska sen komplementti $\emptyset = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ on avoin. Koko taso $\mathbb{R}^2$ ja tyhjä joukko $\emptyset$ ovat siis sekä avoimia että suljettuja. Muita tällaisia joukkoja ei ole:

Lause 2.6. *Tyhjä joukko $\emptyset$ ja koko taso $\mathbb{R}^2$ ovat ainoat tason $\mathbb{R}^2$ osajoukot, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja.*

Todistus. Oletetaan, että on olemassa joukko $A \subset \mathbb{R}^2$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(a) A on avoin,

(b) A on suljettu, jolloin $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$ on avoin,

(c) $A \neq \emptyset$,

(d) $A \neq \mathbb{R}^2$, jolloin $B \neq \emptyset$.

Valitaan $a \in A$ ja $b \in B$. Olkoon

$$x_t = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$$

ja tarkastellaan janaa

$$\overline{ab} = \{\, x_t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1] \,\}.$$

Olkoon

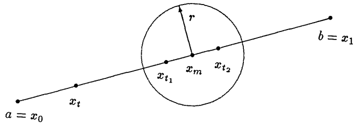
$$m = \sup\{\, t \in [0,1] \mid x_t \in A \,\}$$

ja

$$x_m = a + m(b-a) \in \overline{ab}.$$

Onko x_m joukossa A vai B? Koska $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, on pisteen x_m oltava toisessa näistä joukoista.

Olkoon $r > 0$. Osoitetaan, että kiekko $B(x_m, r)$ sisältää sekä A:han että B:hen kuuluvia pisteitä (Kuva 2.1).



KUVA 2.1

Koska

$$d_E(x_t, x_m) = \|x_t - x_m\| = |m-t|\, \|b-a\|,$$

on $x_t \in B(x_m, r)$, kun $|m-t| < r/\|b-a\|$. Koska m on joukon $\{\, t \in [0,1] \mid x_t \in A \,\}$ pienin yläraja, ei $m - r/\|b-a\|$ enää ole tämän joukon yläraja. On siis olemassa $t_1 \in [0,1]$ siten, että

$$m - \frac{r}{\|b-a\|} < t_1 \leq m \quad \text{ja} \quad x_{t_1} \in A.$$

Tällöin $x_{t_1} \in A \cap B(x_m, r)$.

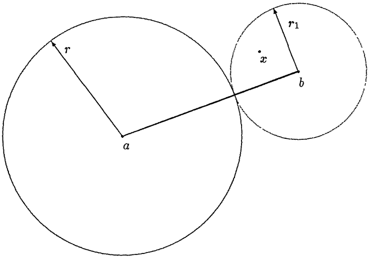
Koska b on joukon B sisäpiste, on olemassa $\rho > 0$ siten, että $B(b, \rho) \subset B$. Edellisen nojalla pisteellä x_m ei ole tällaista ympäristöä, joten $x_m \neq b$ eli $m < 1$.

Olkoon $t_2 \in [0, 1]$ siten, että

$$m < t_2 < m + \frac{r}{\|b-a\|}.$$

Koska m on joukon $\{ t \in [0,1] \mid x_t \in A \}$ yläraja ja $t_2 > m$, on $x_{t_2} \in B \cap B(x_m, r)$. Koska päättely pätee kaikilla arvoilla $r > 0$, ei piste x_m ole joukon A eikä joukon B sisäpiste. Koska A ja B ovat avoimia joukkoja, on $x_m \notin A$ ja $x_m \notin B$. Ristiriita. Ehtoja (a)–(d) täyttävää joukkoa A ei siis voi olla olemassa. $\square$

Esimerkki 2.7. (i) Suljettu kiekko $\overline{B}(a, r)$ on suljettu joukko. *Todistus.* Olkoon $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(a, r)$ ja $d = d_E(a, b)$. Silloin $r_1 = d - r > 0$ (Kuva 2.2).



KUVA 2.2. $\overline{B}(a, r)$ on suljettu joukko.

Olkoon $x \in B(b, r_1)$. Koska d_E toteuttaa kolmioepäyhtälön (Propositio I.6.8), on

$$d_E(a, b) \leq d_E(a, x) + d_E(x, b),$$

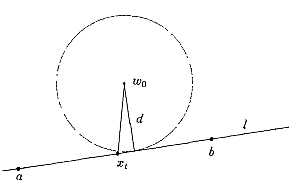
joten

$$d_E(a, x) \geq d_E(a, b) - d_E(x, b) > d - r_1 = r.$$

Näin ollen $B(b, r_1) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(a, r)$, joten joukko $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(a, r)$ on avoin.

(ii) Yksiö $\{a\}$ on suljettu. *Todistus.* Sovelletaan kohdan (i) todistusta arvolla $r = 0$.

(iii) Jokainen suora $l \in \mathcal{L}_E$ on suljettu joukko. *Todistus.* Olkoon $w_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus l$, $l = \overleftrightarrow{ab}$ ja $x_t = a + t(b - a)$, $t \in \mathbb{R}$, suoran l piste (Kuva 2.3).



KUVA 2.3. Suora l on suljettu joukko.

Funktio

$$h(t) = d_E(w_0, x_t)$$

on jatkuva ja positiivinen. Lisäksi $h(t) \to +\infty$, kun $t \to +\infty$ tai $t \to -\infty$. Näin ollen on olemassa

$$d = \min\{\, d_E(w_0, x_t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} > 0.$$

Jos $w \in B(w_0, d)$, niin $d_E(w_0, w) < d$, joten $w \notin l$. Silloin $B(w_0, d) \subset \mathbb{R}^2 \setminus l$. $\square$

Olkoon $\{\, F_i \mid i \in I \,\}$ kokoelma suljettuja joukkoja. Jos merkitään $A_i = \mathbb{R}^2 \setminus F_i$, niin $\{\, A_i \mid i \in I \,\}$ on kokoelma avoimia joukkoja. Koska

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} F_i\Big) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

ja

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} F_i\Big) = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

voidaan Lauseet 2.1 ja 2.2 muotoilla myös seuraavasti:

Lause 2.1′. *Olkoon $\{\, F_i \mid i \in I \,\}$ kokoelma suljettuja joukkoja. Silloin joukkojen F_i, $i \in I$, leikkaus on suljettu.* $\square$

Lause 2.2′. *Äärellisen monen suljetun joukon yhdiste on suljettu.* $\square$

Määritelmä 2.8. Kokoelma $\mathcal{B}$ tason avoimia joukkoja on tason topologian $\mathcal{T}$ *kanta*, jos jokainen (epätyhjä) joukko $A \in \mathcal{T}$ voidaan esittää $\mathcal{B}$:n joukkojen yhdisteenä.

Esimerkki 2.9. (i) Avoimet kiekot $B(a,r)$, $a \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, muodostavat $\mathcal{T}$:n kannan (Lause 2.3).

(ii) Taksiautotason avoimet kiekot

$$B_T(a,r) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(a,x) < r \,\},$$

$a \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, muodostavat $\mathcal{T}$:n kannan (harjoitustehtävä). $\square$

Jos $\mathcal{B}$ on $\mathcal{T}$:n kanta ja $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$, niin myös $\mathcal{B}'$ on $\mathcal{T}$:n kanta. Erikoisesti $\mathcal{T}$ on itsensä kanta.

Lause 2.10. *Joukko $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ on $\mathcal{T}$:n kanta, jos ja vain jos jokaista $A \in \mathcal{T}$ ja jokaista $a \in A$ kohti on olemassa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $a \in B \subset A$.*

Todistus. 1. Oletetaan, että $\mathcal{B}$ on $\mathcal{T}$:n kanta. Olkoon $A \in \mathcal{T}$ ja $a \in A$. Koska $\mathcal{B}$ on kanta, on olemassa kokoelma $\{\, B_i \mid i \in I \,\} \subset \mathcal{B}$ siten, että

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Koska $a \in A$, on $a \in B_{i_0}$ jollekin $i_0 \in I$. Mutta tällöin $a \in B_{i_0} \subset A$, joten B_{i_0} on vaadittu $\mathcal{B}$:n alkio.

2. Oletetaan, että $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ on joukko siten, että jokaista $A \in \mathcal{T}$ ja $a \in A$ kohti on olemassa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $a \in B \subset A$.

Olkoon $A_0 \in \mathcal{T}$. On osoitettava, että A_0 voidaan esittää $\mathcal{B}$:n joukkojen yhdisteenä. Jokaista $a \in A_0$ kohti on olemassa $B_a \in \mathcal{B}$ siten, että $a \in B_a \subset A_0$. Silloin on

$$A_0 = \bigcup_{a \in A_0} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A_0} B_a \subset A_0,$$

joten $A_0 = \bigcup_{a \in A_0} B_a$. $\square$

Korollaari 2.11. *Olkoon $\mathcal{B}$ topologian $\mathcal{T}$ kanta. Joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ on avoin, jos ja vain jos jokaista $x \in U$ kohti on olemassa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B \subset U$.*

Todistus. Jos $U \in \mathcal{T}$, niin Lauseen 2.10 perusteella jokaista $x \in U$ vastaa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B \subset U$.

Oletetaan kääntäen, että jokaista $x \in U$ vastaa $B_x \in \mathcal{B}$ siten, että $x \in B_x \subset U$. Mutta silloin (vrt. Lauseen 2.10 todistus)

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Lauseen 2.1 nojalla $U \in \mathcal{T}$. $\square$

Tason topologialla $\mathcal{T}$ on erilaisia kantoja. Harjoitustehtävässä osoitetaan, että sellaiset kiekot $B(a,r)$, joille $a \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ja $r \in \mathbb{Q}$, muodostavat $\mathcal{T}$:n kannan. Tässä kannassa on vain numeroituva määrä alkioita, koska rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva.

Lause 2.12. *Tason topologialla $\mathcal{T}$ ei ole äärellistä kantaa.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ topologian kanta. Tarkastellaan kiekkoja $B(a_n, 1/2)$, missä $a_n = (n, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Lauseen 2.10 nojalla on olemassa joukot $B_n \in \mathcal{B}$ siten, että $B_n \subset B(a_n, 1/2)$. Koska kiekot $B(a_n, 1/2)$ ovat erillisiä, ovat joukot B_n eri joukkoja, $n = 1, 2, \ldots$, joten $\mathcal{B}$:ssä on äärettömän monta eri joukkoa. □

Olemme edellä perustaneet topologian käsitteen "avoin joukko" varaan. Toinen lievästi erilainen lähestymistapa saadaan määrittelemällä avoimien joukkojen asemasta pisteen $a \in \mathbb{R}^2$ ympäristöt:

Määritelmä 2.13. Joukko $V \subset \mathbb{R}^2$ on pisteen $a \in \mathbb{R}^2$ *ympäristö*, jos a on joukon V sisäpiste.

Jos A on avoin joukko, niin Määritelmän 1.3 mukaan A on jokaisen pisteensä $a \in A$ ympäristö.

Pisteen a ympäristön V ei tarvitse olla avoin joukko. Riittää, että on olemassa $r > 0$ siten, että $B(a, r) \subset V$. Näin ollen jokainen suljettu kiekko $\overline{B}(a, r)$ on pisteen a ympäristö.

Avoimien joukkojen vastaavien ominaisuuksien perusteella ympäristöillä on seuraavat ominaisuudet:

Lause 2.14. (i) *Jos V on pisteen a ympäristö ja $V_1 \supset V$, niin myös V_1 on pisteen a ympäristö.*

(ii) *Joukko V on pisteen a ympäristö, jos ja vain jos on olemassa avoin joukko A siten, että $a \in A \subset V$.*

(iii) Jos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ovat pisteen a ympäristöjä, niin myös

$$V = \bigcap_{j=1}^{n} V_j$$

on pisteen a ympäristö.

Todistus. (i) seuraa Määritelmästä 2.13. Jos V kohdassa (ii) on a:n ympäristö, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(a, r) \subset V$. Avoimella joukolla $A = B(a, r)$ on silloin vaadittu ominaisuus. Oletetaan kääntäen, että on olemassa avoin joukko A siten, että $a \in A \subset V$. Koska A on pisteen a ympäristö, on myös V pisteen a ympäristö kohdan (i) perusteella.

Kohdassa (iii) on olemassa avoimet joukot $A_1, \ldots, A_n$ siten, että $a \in A_j \subset V_j$. Lauseen 2.2 nojalla joukko

$$A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

on avoin. Koska $a \in A \subset V$, on V pisteen a ympäristö (kohta (ii)). □

3. Topologinen avaruus

Yleinen topologinen avaruus voidaan määritellä hyvin samalla tavalla kuin abstrakti geometria Määritelmässä I.2.1. Lähtökohdaksi voidaan ottaa Lauseet 2.1 ja 2.2.

Määritelmä 3.1. *Topologinen avaruus* koostuu joukosta X, jonka alkioita kutsumme *pisteiksi*, sekä kokoelmasta $\mathcal{T}$ joukon X osajoukkoja, joita kutsumme *avoimiksi joukoiksi*, siten että seuraavat ehdot (aksioomat) ovat voimassa:

(T1) Jos $\{ A_i \mid i \in I \} \subset \mathcal{T}$, niin $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$,

(T2) Jos $\{ A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \} \subset \mathcal{T}$, niin $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$,

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $X \in \mathcal{T}$.

Avoimien joukkojen kokoelmaa $\mathcal{T}$ kutsutaan X:n *topologiaksi*.

Taso $\mathbb{R}^2$ on topologinen avaruus, kun topologiaksi $\mathcal{T}$ valitaan sen tavalliset avoimet joukot (Määritelmä 1.3). On heti sanottava, että tasossa voidaan määritellä muitakin topologioita kuin sen tavanmukainen topologia $\mathcal{T}$. Osoitamme näet seuraavaksi, että jokainen joukko X, jossa on vähintään kaksi eri pistettä, voidaan tehdä ainakin kahdella eri tavalla topologiseksi avaruudeksi, eikä kumpikaan näistä tason tapauksessa ole sen tavanmukainen topologia.

Joukon X jokainen topologia sisältää joka tapauksessa alkiot $\emptyset$ ja X. (Huomaa, että X ja $\emptyset$ sisältyvät alkioina X:n jokaiseen topologiaan $\mathcal{T}$.) Näin ollen $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ on suppein mahdollinen X:n topologia. Kutsumme $\mathcal{T}_1$:tä X:n *minitopologiaksi*. Jos toisaalta $\mathcal{T}_2$ on X:n kaikkien osajoukkojen joukko, niin $\mathcal{T}_2$ on selvästi X:n topologia. Tällöin siis X:n kaikki osajoukot, esimerkiksi yksiöt $\{x\}$, $x \in X$, ovat avoimia. Kutsumme $\mathcal{T}_2$:tä X:n *diskreetiksi topologiaksi* ja paria $(X, \mathcal{T}_2)$ *diskreetiksi topologiseksi avaruudeksi*. Pari $(X, \mathcal{T})$ on diskreetti topologinen avaruus, jos ja vain jos $\{x\} \in \mathcal{T}$ kaikilla $x \in X$. Jos X:ssä on vähintään kaksi eri pistettä x_1 ja x_2, niin $\{x_1\} \neq X$. Tällöin on $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

Lause 3.2. *Joukon $X \neq \emptyset$ minitopologia on sen diskreetti topologia, jos ja vain jos X on yksiö.* $\square$

Luvussa I.3 tarkastelimme äärellisiä geometrioita. Samalla tavalla äärelliset topologiset avaruudet tarjoavat käyttökelpoisia esimerkkejä tilanteista, joissa jokin ominaisuus joko on tai ei ole voimassa.

Äärellisellä joukolla $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ on äärellinen määrä osajoukkoja ja siis myös äärellinen määrä topologioita. Äärellinen joukko voidaan siis tehdä topologiseksi avaruudeksi vain äärellisen monella eri tavalla. Ne voidaan löytää suorittamalla äärellinen määrä kokeita ominaisuuksien (T1)–(T3) voimassaolon selvittämiseksi. Kone voi siis helposti listata kaikki äärellisen joukon topologiat.

Jos esimerkiksi a, b ja c ovat eri pisteitä ja $X = \{a,b,c\}$, niin joukko $\{\, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X \,\}$ on X:n eräs topologia. Muitten luetteleminen ei ole vaikea harjoitustehtävä.

Lause 3.3. *Olkoon X epätyhjä joukko. Silloin $\mathcal{T} = \{\, A \subset X \mid X \setminus A$ on äärellinen$\,\} \cup \{\emptyset\}$ on X:n topologia.*

Todistus. (T1) Olkoon $\{\, A_i \mid i \in I \,\} \subset \mathcal{T}$. Jos $A_i = \emptyset$ kaikilla $i \in I$, niin

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Jos taas $A_{i_0} \neq \emptyset$ ainakin yhdellä indeksillä $i_0 \in I$, niin $X \setminus A_{i_0}$ on äärellinen ja tämän osajoukkona on

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$$

äärellinen. Tällöin $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

(T2) Olkoon $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{T}$ ja

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Jos jokin joukoista A_i on tyhjä, niin myös A on tyhjä ja $A \in \mathcal{T}$. Muussa tapauksessa on jokainen $X \setminus A_i$, $i = 1, \ldots, n$, äärellinen, joten myös

$$X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$

on äärellinen ja $A \in \mathcal{T}$.

(T3) $\mathcal{T}$:n määritelmän mukaan $\emptyset \in \mathcal{T}$. Toisaalta $X \in \mathcal{T}$, koska $\emptyset = X \setminus X$ on äärellinen joukko. □

Määritelmä 3.4. Lauseessa 3.3 määriteltyä joukon X topologiaa $\mathcal{T}$ sanotaan X:n ***kofiniittiseksi topologiaksi.***

Lause 3.5. *Joukon X kofiniittinen topologia on sen diskreetti topologia, jos ja vain jos X on äärellinen joukko.*

Todistus. Oletetaan ensin, että X on äärellinen joukko. Olkoon $x \in X$. Riittää näyttää, että yksiö $\{x\}$ on avoin joukko X:n kofiniittisessä topologiassa. Tämä puolestaan seuraa siitä, että $X \setminus \{x\}$ on äärellinen joukko.

Oletetaan kääntäen, että X:n kofiniittinen topologia on sen diskreetti topologia. Silloin jokainen yksiö $\{x\}$, $x \in X$, on avoin myös kofiniittisessä topologiassa, joten joukot $X \setminus \{x\}$ ovat äärellisiä. Koska $X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\}$, on X äärellinen joukko. $\square$

Laajennettu luonnollisten lukujen joukko $\overline{\mathbb{N}}$ määritellään joukkona $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, missä ∞ ei ole luonnollinen luku.

Lause 3.6. *Joukko*

$$\mathcal{T} = \{\, A \subset \overline{\mathbb{N}} \mid A \subset \mathbb{N} \text{ tai } \overline{\mathbb{N}} \setminus A \text{ on äärellinen} \,\}$$

on $\overline{\mathbb{N}}$:n topologia.

Todistus. Ehto $\overline{\mathbb{N}} \setminus A$ tulee käyttöön ainoastaan joukoille A, jotka sisältävät pisteen ∞.

(T1) Olkoon $\{\, A_i \mid i \in I \,\} \subset \mathcal{T}$ ja $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Jos $A_i \subset \mathbb{N}$ kaikilla $i \in I$, niin myös $A \subset \mathbb{N}$. Jos taas $\infty \in A_i$ jollekin $i \in I$, niin $\overline{\mathbb{N}} \setminus A$ on äärellisen joukon $\overline{\mathbb{N}} \setminus A_i$ osajoukkona äärellinen. Näin ollen $A \in \mathcal{T}$.

(T2) Olkoon $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{T}$ ja $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Jos $A_k \subset \mathbb{N}$ jollekin $k \in \{1, \ldots, n\}$, niin myös $A \subset \mathbb{N}$ (koska aina $A \subset A_k$). Jos taas $\infty \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, niin $\overline{\mathbb{N}} \setminus A_i$ on äärellinen kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin on

$$\overline{\mathbb{N}} \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} (\overline{\mathbb{N}} \setminus A_i)$$

äärellinen joukko. Molemmissa tapauksissa $A \in \mathcal{T}$.

(T3) Koska $\emptyset \subset \mathbb{N}$, on $\emptyset \in \mathcal{T}$. Koska tyhjä joukko $\emptyset = \overline{\mathbb{N}} \setminus \overline{\mathbb{N}}$ on äärellinen, on $\overline{\mathbb{N}} \in \mathcal{T}$. $\square$

Määritelmä 3.7. Lauseessa 3.6 määriteltyä topologiaa sanotaan joukon $\overline{\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ *luonnolliseksi topologiaksi*.

Joukon $\overline{\mathbb{N}}$ luonnollinen topologia muistuttaa diskreettiä topologiaa, sillä kaikki muut yksiöt paitsi $\{\infty\}$ ovat avoimia. Toisaalta se muistuttaa kofiniittistä topologiaa, koska pisteen ∞ sisältävä joukko A on avoin, jos sen komplementti $\overline{\mathbb{N}} \setminus A$ on äärellinen.

Tasossa $\mathbb{R}^2$ on nyt käytettävissä neljä topologiaa:

(a) minitopologia $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$,

(b) kofiniittinen topologia $\mathcal{T}_2 = \{ A \subset \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{R}^2 \setminus A \text{ on äärellinen joukko} \} \cup \{\emptyset\}$,

(c) tavanmukainen topologia $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}$,

(d) diskreetti topologia $\mathcal{T}_4 = \{ A \mid A \subset \mathbb{R}^2 \}$.

Olkoon $A \in \mathcal{T}_2$. Silloin $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on äärellisenä joukkona suljettu (Esimerkki 2.7(ii) ja Lause 2.2′), joten A on avoin tavanmukaisessa topologiassa $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}$. Näin ollen $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3$. Koska lisäksi $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ja $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_4$, on voimassa

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_4.$$

Topologia $\mathcal{T}_1$ on karkea, siinä on avoimina joukkoina ainoastaan $\emptyset$ ja $\mathbb{R}^2$. Kun $\mathbb{R}^2$:ta rei'itellään kaikilla mahdollisilla tavoilla, saadaan topologia $\mathcal{T}_2$. Lisäämällä tähän kokoelmaan uusia joukkoja saadaan topologia $\mathcal{T}_3$ ja lisäämällä tähän loputkin $\mathbb{R}^2$:n osajoukot saadaan topologia $\mathcal{T}_4$. Sanomme, että nämä tason topologiat saadaan toisistaan edellistä *hienontamalla.*

Määritelmä 3.8. Olkoot $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ topologioita joukossa X. Jos $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, niin $\mathcal{T}_2$ on *hienompi* kuin $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_1$ on *karkeampi* kuin $\mathcal{T}_2$.

Muistisääntö: Topologiat ovat kuin seuloja. Hienossa seulassa on enemmän aukkoja kuin karkeassa. Hienossa topologiassa on enemmän avoimia joukkoja kuin karkeassa.

Jos $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat X:n topologioita, niin tavallisesti näistä ei kumpikaan ole toista hienompi. Toisin sanoen topologiat eivät aina ole lainkaan vertailtavissa.

Esimerkki 3.9. Olkoon $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ja $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Silloin $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat X:n topologioita, mutta $\mathcal{T}_1$ ei sisälly $\mathcal{T}_2$:hen aikä $\mathcal{T}_2$ sisälly $\mathcal{T}_1$:hen.

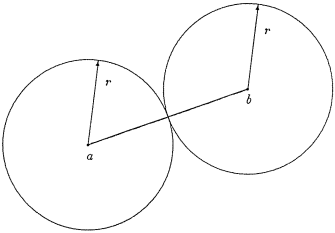
Jos $\mathcal{T}_1$ on joukon X minitopologia, $\mathcal{T}_2$ sen diskreetti topologia ja $\mathcal{T}$ sen mielivaltainen topologia, niin kuitenkin on aina

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_2.$$

Minitopologia on siis karkein ja diskreetti topologia hienoin joukon X topologioista. $\square$

4. Hausdorffin avaruus

Tason tavanmukaisen topologian määrittely perustui euklidisen etäisyysfunktion käyttöön. Olkoot a ja b kaksi tason pistettä. Merkitään $\|b-a\| = 2r$. Silloin $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$ (Kuva 4.1), joten kahdella eri pisteellä on aina pistevieraat ympäristöt.



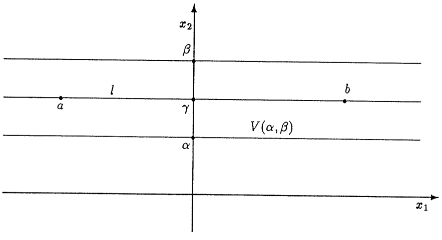
KUVA 4.1. Pisteillä a ja b on pistevieraat ympäristöt.

Pistevieraitten ympäristöjen löytyminen ei suinkaan ole kaikkien tason topologioitten yhteinen ominaisuus.

Esimerkki 4.1. Tarkastellaan kiekkojen $B(a,r)$ asemasta x_1-akselin suuntaisia viipaleita

$$V(\alpha,\beta) = \{\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < x_2 < \beta\,\},$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\alpha < \beta$ (Kuva 4.2).



KUVA 4.2. Viipaletopologian kantajoukko $V(\alpha,\beta)$.

Joukkojen $V(\alpha,\beta)$ avulla voidaan tasossa määritellä eräs topologia samaan tapaan kuin tavanmukainen topologia kiekkojen $B(a,r)$ avulla: Olkoon $\mathcal{T}_V$ niiden tason osajoukkojen A joukko, joiden jokaista pistettä $a \in A$ kohti on olemassa luvut α_a ja β_a siten, että $a \in V(\alpha_a,\beta_a) \subset A$.

Harjoitustehtävinä osoitetaan:

(a) $\mathcal{T}_V$ on tason $\mathbb{R}^2$ topologia,

(b) $\{ V(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta \}$ on $\mathcal{T}_V$:n kanta,

(c) $\mathcal{T}_V$ on karkeampi kuin tason tavanmukainen topologia.

Käytämme topologiasta $\mathcal{T}_V$ nimitystä *viipaletopologia.*

Olkoon a suoran $l = \{ (x_1,x_2) \mid x_2 = \gamma \}$ piste (Kuva 4.2). Jos $A \in \mathcal{T}_V$ siten, että $a \in A$, niin on olemassa $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ siten, että $a \in V(\alpha,\beta) \subset A$. Koska $l \subset V(\alpha,\beta)$, on $l \subset A$. Jos $b \in l$, niin jokainen avoin joukko $A \in \mathcal{T}_V$, joka sisältää a:n, sisältää myös b:n. Ei siis voida löytää avoimia joukkoja $U \in \mathcal{T}_V$ ja $V \in \mathcal{T}_V$ siten, että $a \in U$, $b \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. □

Määritelmä 4.2. Topologista avaruutta $(X,\mathcal{T})$ sanotaan *Hausdorffin avaruudeksi*, jos se toteuttaa seuraavan ns. *Hausdorffin ehdon*:

(H) Jos x ja y ovat eri pisteitä, niin on olemassa avoimet joukot $U \in \mathcal{T}$ ja $V \in \mathcal{T}$ siten, että $x \in U$, $y \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

Olkoon $(X,\mathcal{T})$ topologinen avaruus. Lauseen 2.14 antaman mallin mukaisesti kutsumme joukkoa $B \subset X$ pisteen $a \in X$ *ympäristöksi*, jos on olemassa avoin joukko $A \in \mathcal{T}$ siten, että $a \in A \subset B$.

Lause 4.3. *Topologinen avaruus $(X,\mathcal{T})$ on Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos kahdella X:n eri pisteellä x ja y on aina olemassa pistevieraat ympäristöt.* □

Jos topologinen avaruus $(X,\mathcal{T})$ ei ole Hausdorff, niin topologia $\mathcal{T}$ ei "riittävästi erottele" X:n pisteitä. Sovellutuksissa törmätään silloin tällöin tilanteisiin, joissa Hausdorffin ehto (H) ei ole voimassa. Yleisesti ottaen havaintoon ja kuviin perustuva päättely ei silloin ole voimassa ja virheellisen päättelyn vaara on lähellä.

Esimerkki 4.4. (i) Joukon $X \neq \emptyset$ minitopologia $\mathcal{T}_1 = \{X,\emptyset\}$ toteuttaa Hausdorffin ehdon, jos ja vain jos X on yksiö. *Todistus.* Oletetaan, että X:ssä on kaksi eri pistettä x ja y. Olkoon $U \in \mathcal{T}_1$ ja $V \in \mathcal{T}_1$ siten, että $x \in U$ ja $y \in V$. Koska U ja V ovat epätyhjiä avoimia joukkoja ja $\mathcal{T}_1$ on minitopologia, on $U = V = X$, joten $U \cap V \neq \emptyset$.

(ii) Joukon X diskreetti topologia $\mathcal{T}_2$ toteuttaa aina Hausdorffin ehdon. *Todistus.* Olkoot x ja y joukon X kaksi eri pistettä. Koska $\mathcal{T}_2$ on diskreetti topologia, on $\{x\} \in \mathcal{T}_2$ ja $\{y\} \in \mathcal{T}_2$. Näin ollen $U = \{x\}$ ja $V = \{y\}$ ovat vaaditut pistevieraat ympäristöt.

(iii) Äärellinen topologinen avaruus $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ ei toteuta Hausdorffin ehtoa. *Todistus.* Tarkastellaan pisteitä a ja b. Jos V on b:n ympäristö, niin $V \supset \{a, b\}$, joten $a \in V$. Jokainen a:n ympäristö kohtaa silloin V:n. Samanlainen päättely osoittaa, että äärellinen topologinen avaruus on Hausdorff, jos ja vain jos se on diskreetti.

(iv) Kofiniittinen topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on Hausdorff, jos ja vain jos se on äärellinen (jolloin se on diskreetti topologinen avaruus). *Todistus.* Olkoot U ja V avoimia joukkoja siten, että $U \cap V = \emptyset$. Silloin komplementit $X \setminus U$ ja $X \setminus V$ ovat äärellisiä. Koska toisaalta $X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, on X äärellinen. Näin ollen kofiniittinen Hausdorffin avaruus on äärellinen. Jos kääntäen $(X, \mathcal{T})$ on äärellinen kofiniittinen topologinen avaruus, niin se on Lauseen 3.5 nojalla diskreetti. Kohdan (ii) perusteella se on silloin Hausdorffin avaruus. □

5. Metriset ja metristyvät avaruudet

Joukon X etäisyysfunktiota $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ kutsutaan *metriikaksi*, jos se toteuttaa kolmioepäyhtälön. Määritelmien I.4.1 ja I.6.7 nojalla d on metriikka, jos ja vain jos seuraavat ehdot (aksioomat) ovat voimassa:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$,

(M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Euklidinen etäisyys d_E, hyperbolinen etäisyys d_H ja taksiautoetäisyys d_T ovat metriikkoja. Harjoitustehtävissä on esimerkki etäisyysfunktiosta, joka ei ole metriikka.

Jos d on joukon X metriikka, niin pari (X, d) on *metrinen avaruus.*

Määritelmä 5.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $a \in X$ ja $r > 0$. Avaruuden X osajoukkoa

$$B(a, r) = B_d(a, r) = \{\, x \in X \mid d(a, x) < r \,\}$$

sanotaan *a-keskiseksi r-säteiseksi (avoimeksi) palloksi.* Joukkoa

$$\overline{B}(a, r) = \overline{B}_d(a, r) = \{\, x \in X \mid d(a, x) \leq r \,\}$$

sanotaan *a-keskiseksi r-säteiseksi suljetuksi palloksi.*

Metrisessä avaruudessa (X, d) voidaan topologiset käsitteet määritellä samalla tavalla kuin euklidisessa tasossa:

(i) Piste $a \in A$ on joukon $A \subset X$ *sisäpiste*, jos $B(a, r) \subset A$ jollekin $r > 0$.

(ii) Joukko $A \subset X$ on ***avoin***, jos sen jokainen piste on sisäpiste (tai jos A on tyhjä).

(iii) Joukko $\mathcal{T}_d = \{ U \subset X \mid U \text{ on avoin} \}$ on X:n topologia. Sitä kutsutaan metriikan d *määräämäksi* topologiaksi tai ***d-topologiaksi***.

(iv) Jokainen $B(a, r)$ on avoin.

(v) Jokaisen yksiön $\{a\}$ komplementti on avoin, ts. jokainen yksiö on suljettu joukko.

Esimerkki 5.2. Olkoon X joukko ja

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \neq y, \\ 0, & \text{kun } x = y. \end{cases}$$

Ehdot (M1)–(M3) ovat selvästi voimassa. Kolmioepäyhtälö $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ on ilmeinen, kun $x = z$ eli kun $d(x, z) = 0$. Jos taas $x \neq z$, niin $x \neq y$ tai $y \neq z$, jolloin oikea puoli on ≥ 1. Ehto (M4) on siis aina voimassa. Jos $0 < r < 1$, on $B(a, r) = \{a\}$. Näin ollen jokainen yksiö $\{a\}$ on avoin topologiassa $\mathcal{T}_d$ eli X:n diskreetti topologia on metriikan d määräämä. □

Määritelmä 5.3. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *metristyvä*, jos on olemassa X:n metriikka d siten, että $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Esimerkin 5.2 nojalla diskreetti topologinen avaruus on aina metristyvä. Seuraava lause osoittaa, että monet topologiset avaruudet eivät ole metristyviä.

Lause 5.4. *Metristyvä topologinen avaruus on Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ metristyvä topologinen avaruus ja d joukon X metriikka siten, että $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Olkoot a ja b joukon X eri pisteitä. Ehtojen (M1) ja (M2) perusteella on $d(a, b) > 0$. Valitaan $r = d(a, b)/2$. Silloin $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$, sillä jos $x \in B(a, r) \cap B(b, r)$, on $d(a, x) < r$ ja $d(x, b) < r$. Kolmioepäyhtälön (M4) perusteella on silloin $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2r = d(a, b)$, mikä on mahdotonta. Koska joukot $B(a, r)$ ja $B(b, r)$ ovat avoimia, on (X, d) Hausdorffin avaruus. □

Esimerkki 5.5. (i) X:n minitopologia ei ole Hausdorffin avaruus, jos X:ssä on vähintään kaksi eri pistettä. Lauseen 5.4 perusteella minitopologia ei tällöin ole metristyvä.

(ii) Tason viipaletopologia (Esimerkki 4.1) ei ole metristyvä. □

Lauseesta 5.4 ei seuraa, että kaikki Hausdorffin avaruudet olisivat metristyviä. Hausdorffin ehto (H) on välttämätön, mutta ei riittävä ehto avaruuden metristyvyydelle. Emme kuitenkaan voi tässä vaiheessa esittää esimerkkiä ei-metristyvästä Hausdorffin avaruudesta.

Esimerkki 5.6. Joukon $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ luonnollinen topologia $\mathcal{T}$ on metristyvä. Tämän osoittamiseksi konstruoidaan $\overline{\mathbb{N}}$:n metriikka d seuraavalla tavalla:

Olkoon $f\colon \overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ kuvaus, jolle

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{kun } n \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{kun } n = \infty. \end{cases}$$

Silloin f on injektio. Asetetaan

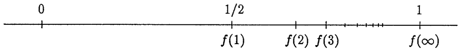
$$d(m,n) = |f(m) - f(n)|.$$

Harjoitustehtävässä osoitetaan, että d on metriikka joukossa $\overline{\mathbb{N}}$. Koska $0 < f(1) < f(2) < \cdots < f(\infty) = 1$, on (Kuva 5.1)

$$B\big(n, d(n, n+1)\big) = \{n\}, \qquad \text{kun } n \in \mathbb{N},$$

ja

$$B(\infty, r) = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n > \frac{1}{r} - 1 \right\} \cup \{\infty\}.$$



Kuva 5.1

Näin ollen $\mathcal{T}_d$ ja $\mathcal{T}$ sisältävät molemmat kaikki yksiöt $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sekä kaikki pallot $B(\infty, r)$. Tällöin $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. Jos $A \in \mathcal{T}$, niin joko $A \subset \mathbb{N}$, jolloin

$$A = \bigcup_{n \in A} \{n\} \in \mathcal{T}_d,$$

koska $\{n\} \in \mathcal{T}_d$, tai $\infty \in A$ ja $\overline{\mathbb{N}} \setminus A$ on äärellinen. Mutta tällöin A koostuu sopivan pienestä pallosta $B(\infty, r)$ ja äärellisestä määrästä yksiöitä $\{n\}$. Silloin $A \in \mathcal{T}_d$. $\square$

Harjoitustehtävässä on osoitettu, että taksiautokiekot $B_{d_T}(a, r)$ muodostavat tason tavanmukaisen topologian $\mathcal{T}$ kannan. Toisin sanoen

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d_E} = \mathcal{T}_{d_T}.$$

Näin ollen metristyvä topologia voi olla usean erilaisen metriikan määräämä.

Määritelmä 5.7. Joukon X metriikat d_1 ja d_2 ovat *(topologisesti) ekvivalentteja*, jos ne määräävät saman topologian, ts. jos $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

Lause 5.8. *Olkoot d_1 ja d_2 joukon X metriikkoja. Jos on olemassa vakiot $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

on voimassa kaikilla $x, y \in X$, niin metriikat d_1 ja d_2 ovat ekvivalentteja.

Todistus. Pallo $B_{d_1}(a,r)$ sisältää pallon $B_{d_2}(a,\alpha r)$. Jos nimittäin $d_2(x,a) < \alpha r$, niin ehdosta $\alpha d_1(x,a) \leq d_2(x,a)$ seuraa

$$d_1(x,a) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x,a) < \frac{1}{\alpha}\alpha r = r.$$

Jos $U \in \mathcal{T}_{d_1}$ ja $a \in U$, niin $B_{d_1}(a,r) \subset U$ jollekin $r > 0$. Koska $B_{d_2}(a,\alpha r) \subset B_{d_1}(a,r) \subset U$, on $U \in \mathcal{T}_{d_2}$. Siis $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$. Vaihtamalla vakio α vakioksi $1/\beta$ ja metriikka d_1 metriikaksi d_2 voidaan samalla tavalla osoittaa, että $\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$. $\square$

Esimerkki 5.9. Luvun I.6 merkintöihin liittyen määritellään euklidisessa tasossa $\mathbb{R}^2$ kolme normia: Jos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, niin asetetaan

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &= \max(|x_1|, |x_2|) \\ \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

Asettamalla $d_j(x,y) = \|y - x\|_j$, $j = 0,1,2$, saadaan kolme metriikkaa. Itse asiassa on $d_2 = d_E$ ja $d_1 = d_T$.

Koska $|x_k|^2 \leq x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2$, on $|x_1| + |x_2| \leq 2\|x\|_2$ eli $\|x\|_1 \leq 2\|x\|_2$. Ehdosta $|x_k| \leq \|x\|_2$ seuraa toisaalta, että $\max(|x_1|, |x_2|) \leq \|x\|_2$, eli $\|x\|_0 \leq \|x\|_2$. Koska $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq (|x_1| + |x_2|)^2 = \|x\|_1^2$, on $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Lisäksi on $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 2\max(|x_1|, |x_2|) = 2\|x\|_0$. Yhdistelemällä saadaan seuraavat kaksoisepäyhtälöt:

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &\leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_0, \\ \|x\|_0 &\leq \|x\|_2 \leq 2\|x\|_0, \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_2. \end{aligned}$$

Lauseesta 5.8 seuraa, että normien $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ määräämät tason metriikat ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen on (jälleen kerran) osoitettu, että euklidinen etäisyys, taksiautoetäisyys ja maksimietäisyys määräävät tasossa saman topologian. □

Tarkastellaan arvoilla $t \geq 0$ funktiota

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t}.$$

Sillä on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\varphi(t) \geq 0$ kaikilla $t \geq 0$,

(ii) $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$,

(iii) $\varphi(t+u) \leq \varphi(t) + \varphi(u)$ kaikilla $t \geq 0$ ja $u \geq 0$,

(iv) φ on kasvava,

(v) $\varphi(t) < 1$ kaikilla $t \geq 0$.

Kohdan (iii) (eli φ:n *subadditiivisuuden*) todistamiseksi olkoot $t \geq 0$ ja $u \geq 0$. Silloin

$$\frac{t+u}{1+t+u} = \frac{t}{1+t+u} + \frac{u}{1+t+u} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{u}{1+u}$$

eli $\varphi(t+u) \leq \varphi(t) + \varphi(u)$. Muut ominaisuudet ovat vielä ilmeisempiä.

Olkoon d joukon X metriikka ja $d' = \varphi \circ d$ eli

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad x, y \in X.$$

Kohdista (iv) ja (iii) seuraa, että d' toteuttaa kolmioepäyhtälön. Näin ollen d' on metriikka X:ssä, joka on rajoitettu, ts. $d'(x,y) < 1$ kaikilla $x, y \in X$.

Tasossa $\mathbb{R}^2$ on siis

$$d'_E(x,y) = \frac{\|x-y\|}{1-\|x-y\|}$$

metriikka, joka toteuttaa ehdon $d'_E(x,y) < 1$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$. Mielenkiintoista on, että se määrää tason tavanmukaisen topologian:

Lause 5.10. *Joukon X metriikat d ja $d' = \varphi \circ d$ ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Olkoon $x \in B_d(a,r)$. Koska

$$d'(x,a) = \frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} \leq d(x,a) < r,$$

on $x \in B_{d'}(a,r)$. Näin ollen $B_d(a,r) \subset B_{d'}(a,r)$.

Jos toisaalta merkitään $r' = \varphi(r) = r/(1+r)$, niin vastaavasti $B_{d'}(a, r') \subset B_d(a, r)$.

Olkoon $A \subset X$. Piste $a \in A$ on sisäpiste d-topologiassa, jos ja vain jos se on sisäpiste d'-topologiassa. Silloin $A \in \mathcal{T}_d$ jos ja vain jos $A \in \mathcal{T}_{d'}$ eli $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. □

Tason $\mathbb{R}^2$ metriikat d_E ja d'_E ovat siis Lauseen 5.10 perusteella ekvivalentteja. Koska d_E ei ole rajoitettu, mutta $d'_E \leq 1$, ei voida löytää vakiota $\beta > 0$ siten, että

$$d_E(x, y) \leq \beta d'_E(x, y)$$

olisi voimassa kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$. Ekvivalentit metriikat d_E ja d'_E eivät näin ollen toteuta Lauseen 5.8 ehtoa.

Korollaari 5.11. *Jokainen metriikka on topologisesti ekvivalentti rajoitetun metriikan kanssa.* □

Havainnollisesti voidaan sanoa, ettei maailmankaikkeuden paikallinen tarkastelu voi paljastaa sitä, onko maailmankaikkeus äärellinen vai ääretön. Meidän "luonnollinen metriikkamme" voi olla yhtä hyvin rajoitettu tai rajoittamaton, eikä maailmankaikkeuden topologinen rakenne siitä miksikään muutu.

Määritelmä 5.12. Olkoon $\mathbb{R}_+ = \{\, t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0 \,\}$. Kuvaus $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on *mittausfunktio*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$,

(ii) $\varphi(t + u) \leq \varphi(t) + \varphi(u)$ kaikilla $t, u \in \mathbb{R}_+$ (subadditiivisuus),

(iii) φ on kasvava.

Lause 5.13. *Jos φ on mittausfunktio ja d on X:n metriikka, niin myös $d' = \varphi \circ d$ on X:n metriikka. Jos φ on jatkuva arvolla $t = 0$, niin d ja d' ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 5.14. Olkoon $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t = 0, \\ 1, & \text{kun } t > 0. \end{cases}$
Silloin $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on mittausfunktio ja

$$d'(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = y, \\ 1, & \text{kun } x \neq y. \end{cases}$$

Tällöin $\mathcal{T}_{d'}$ on X:n diskreetti topologia. □

Esimerkin 5.9 täydennykseksi esitetään lopuksi esimerkki metrisistä avaruuksista, joissa X on tuttu ja konkreettinen vaikka se ei ole euklidisen tason tai avaruuden osajoukko.

Olkoon $\mathcal{C}$ suljetulla välillä $[0,1]$ jatkuvien funktioiden $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ joukko. Alkioiden $x \in \mathcal{C}$ ja $y \in \mathcal{C}$ *summa* $x + y$ määritellään asettamalla

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \qquad t \in [0,1].$$

Alkion $x \in \mathcal{C}$ ja reaaliluvun a *tulo* ax määritellään puolestaan kaavalla

$$(ax)(t) = ax(t), \qquad t \in [0,1].$$

Näillä laskutoimituksilla varustettuna $\mathcal{C}$ on *reaalikertoiminen vektoriavaruus*, ts. vektoreiden yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen noudattavat tavanmukaisia laskusääntöjä. Erikoisesti on nollavektorina vakiokuvaus $x(t) = 0$ kaikilla $t \in [0,1]$.

Määritellään $\mathcal{C}$:ssä kolme eri normia:

$$\begin{aligned}
\|x\|_0 &= \max_{0\le t\le 1} |x(t)|,\\
\|x\|_1 &= \int_0^1 |x(t)|\,dt,\\
\|x\|_2 &= \left(\int_0^1 x(t)^2\,dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}$:stä tulee normiavaruus varustettiinpa $\mathcal{C}$ millä tahansa normilla $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ tai $\|\cdot\|_2$; toisin sanoen seuraavat *normiavaruuden* aksioomat ovat aina voimassa:

(N1) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ kaikille vektoreille x ja y,

(N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ kaikille $a \in \mathbb{R}$ ja vektoreille x,

(N3) $\|x\| = 0$ jos ja vain jos x on nollavektori.

Ehto (N1) normille $\|\cdot\|_2$ on suoralla laskulla vaikeasti todistettavissa (ns. Minkovskin epäyhtälö), muut ovat helppoja analyysin harjoitustehtäviä.

Normien avulla voidaan $\mathcal{C}$ tehdä kolmella eri tavalla metriseksi avaruudeksi asettamalla

$$\begin{aligned}
d_0(x,y) &= \|x-y\|_0,\\
d_1(x,y) &= \|x-y\|_1,\\
d_2(x,y) &= \|x-y\|_2.
\end{aligned}$$

Metriikka d_2 on euklidisen etäisyyden yleistys $\mathcal{C}$:hen ja d_1 on taksiautoetäisyyden yleistys $\mathcal{C}$:hen. Jatkuvien funktioiden avaruus $\mathcal{C}$ voidaan siis topologisoida kolmella tavalla. Vektoriavaruutena $\mathcal{C}$ on äärettömulotteinen, luvut $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, voidaan tulkita vektorin x komponenteiksi samalla tavalla kuin luvut x_1 ja x_2

ovat vektorin $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ komponentteja. Euklidisella tasolla on näin ollen mielenkiintoinen ääretönulotteinen yleistys.

Voidaan vielä huomauttaa, että yhtälö

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$$

määrittelee $\mathcal{C}$:ssä sisätulon, jolle

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Tällöin Määritelmä I.6.1 ja Lause I.6.2 on yleistetty koskemaan myös ääretönulotteista avaruutta $\mathcal{C}$. Sisätuloavaruudessa on Schwartzin epäyhtälö aina voimassa (kts. Proposition I.6.6 todistus). Silloin myös ehto (N1) toteutuu (vrt. Proposition 6.8 todistus). Olemme näin ollen osoittaneet, että normi $\|\cdot\|_2$ toteuttaa kolmioepäyhtälön (N1).

6. Homeomorfismit

Määrittelemme seuraavaksi, milloin kaksi topologista avaruutta $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ ovat samanrakenteisia eli isomorfisia.

Olkoon yleisesti $f\colon X \to X'$ kuvaus ja $\mathcal{M}$ kokoelma X:n osajoukkoja. Joukkoluokan $\mathcal{M}$ kuvalla kuvauksessa f tarkoitetaan X':n osajoukkojen kokoelmaa

$$f(\mathcal{M}) = \{\, f(A) \mid A \in \mathcal{M}\,\}.$$

Esimerkki 6.1. Määritellään kuvaus $f_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2/2).$$

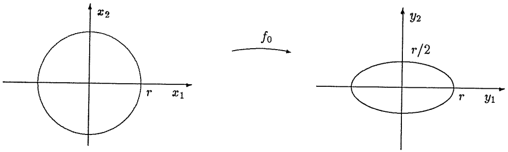
Olkoon $\mathcal{M}$ kaikkien origokeskisten ympyröiden

$$S(0, r) = \{\,(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\,\}$$

joukko. Merkitään $f_0(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Silloin $x_1 = y_1$ ja $x_2 = 2y_2$, joten

$$(y_1, y_2) \in f_0\big(S(0, r)\big) \iff y_1^2 + 4y_2^2 = r^2 \iff \left(\frac{y_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\frac{r}{2}}\right)^2 = 1.$$

Näin ollen $\mathcal{M}' = f_0(\mathcal{M})$ on kaikkien niiden origokeskisten ellipsien $(y_1/a)^2 + (y_2/b)^2 = 1$ perhe, joille $a/b = 2$ (Kuva 6.1).



KUVA 6.1. Ympyräperhe kuvautuu ellipsiperheeksi.

Tutkitaan, miten avoimet joukot kuvautuvat kuvauksessa $f\colon X \to X'$. Seuraava esimerkki osoittaa, ettei ole mitään syytä odottaa, että X:n avoimen joukon A kuva $f(A)$ olisi X':n avoin joukko.

Esimerkki 6.2. Olkoon $X = \{x_1, x_2\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{x_1\}\}$, $X' = \{x_1', x_2'\}$ ja $\mathcal{T}' = \{\emptyset, X', \{x_2'\}\}$. Silloin $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ ovat topologisia avaruuksia. Määritellään bijektio $f\colon X \to X'$ asettamalla $f(x_1) = x_1'$ ja $f(x_2) = x_2'$. Silloin X:n avoimen joukon $A = \{x_1\}$ kuva $f(A) = \{x_1'\}$ ei ole X_2:n avoin joukko.

Esimerkki 6.2 osoittaa, ettei topologisten avaruuksien välinen bijektio välttämättä säilytä topologista struktuuria.

Määritelmä 6.3. Olkoot $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ topologisia avaruuksia. Bijektio $f\colon X \to X'$ on *homeomorfismi*, jos $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$. Avaruudet $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ ovat *homeomorfisia* (eli isomorfisia), jos on olemassa niiden välinen homeomorfismi.

Homeomorfiset topologiset avaruudet X ja X' ovat topologisilta ominaisuuksiltaan täysin samankaltaisia. X on esimerkiksi diskreetti tai Hausdorff, jos ja vain jos X':llä on vastaava ominaisuus.

Topologisten avaruuksien $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ välinen bijektio $f\colon X \to X'$ on homeomorfismi, jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(i) $A \in \mathcal{T} \implies f(A) \in \mathcal{T}'$,

(ii) $A' \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

Seuraava lause seuraa suoraan määritelmästä:

Lause 6.4. *Jos X, X' ja X'' ovat topologisia avaruuksia, niin*

(i) *identtinen kuvaus* $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ *on homeomorfismi,*
(ii) *homeomorfismin* $f\colon X \to X'$ *käänteiskuvaus* $f^{-1}\colon X' \to X$ *on homeomorfismi,*
(iii) *homeomorfismien* $f\colon X \to X'$ *ja* $g\colon X' \to X''$ *yhdistelmä* $g \circ f\colon X \to X''$ *on homeomorfismi.* $\square$

Korollaari 6.5. *Olkoon X topologinen avaruus. Silloin $G = \{ f\colon X \to X \mid f$ on homeomorfismi $\}$ on ryhmä, jonka laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen, neutraalialkiona Id_X ja alkion $f \in G$ käänteisalkiona sen käänteiskuvaus f^{-1}.* $\square$

Korollaari 6.6. *Olkoon $\mathbb{X}$ kaikkien topologisten avaruuksien joukko. Silloin relaatio $\sim$,*

$$X \sim X' \iff \text{on olemassa homeomorfismi } f\colon X \to X',$$

on ekvivalenssi joukossa $\mathbb{X}$. $\square$

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Määritelmän 2.8 joukko $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ on topologian $\mathcal{T}$ *kanta*, jos jokainen (epätyhjä) joukko $A \in \mathcal{T}$ voidaan esittää $\mathcal{B}$:n joukkojen yhdisteenä.

Lause 6.7. *Olkoot $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ topologisia avaruuksia, $\mathcal{B}$ jokin X:n topologian $\mathcal{T}$ kanta sekä $f\colon X \to X'$ bijektio. Silloin f on homeomorfismi, jos ja vain jos $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ on X':n topologian $\mathcal{T}'$ kanta.*

Todistus. Oletetaan ensin, että f on homeomorfismi. Koska silloin $f(B) \in \mathcal{T}'$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$, on $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}'$. Olkoon $A' \in \mathcal{T}'$. Koska $f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$ ja $\mathcal{B}$ on $\mathcal{T}$:n kanta, on olemassa perhe $\{ B_\imath \mid i \in I \} \subset \mathcal{B}$ siten, että

$$f^{-1}(A') = \bigcup_{\imath \in I} B_\imath.$$

Mutta silloin

$$A' = \bigcup_{\imath \in I} f(B_\imath),$$

joten $\mathcal{B}'$ on $\mathcal{T}'$:n kanta.

Oletetaan kääntäen, että $\mathcal{B}'$ on $\mathcal{T}'$:n kanta.

(i) Olkoon $A \in \mathcal{T}$. Silloin on olemassa perhe $\{ B_\imath \mid \imath \in I \} \subset \mathcal{B}$ siten, että

$$A = \bigcup_{\imath \in I} B_\imath .$$

Koska

$$f(A) = \bigcup_{\imath \in I} f(B_\imath)$$

ja $f(B_\imath) \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}'$, on $f(A) \in \mathcal{T}'$.

(ii) Olkoon $A' \in \mathcal{T}'$. Soveltamalla edellistä päättelyä bijektioon $f^{-1}\colon X' \to X$ voidaan osoittaa, että $f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$. $\square$

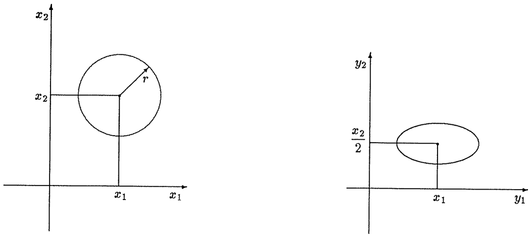
Esimerkki 6.8. Tason *siirrolla* $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektorin $a \in \mathbb{R}^2$ verran tarkoitetaan kuvausta

$$f_1(x) = x + a, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Tällöin f_1 kuvaa avoimet kiekot $B(x,r)$ avoimiksi kiekoiksi $B(x+a,r)$. Näin ollen f_1 on bijektio, joka kuvaa tason tavanmukaisen topologian kannan $\mathcal{B} = \{ B(x,r) \mid x \in \mathbb{R},\ r > 0 \}$ itselleen. Lauseen 6.7 perusteella $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on homeomorfismi.

Tarkastellaan Esimerkin 6.1 litistystä $f_0(x_1,x_2) = (x_1, x_2/2)$. Koska (Kuva 6.2)

$$f_0\big(B(x,r)\big) = \left\{ (y_1,y_2) \,\middle|\, \left(\frac{y_1 - x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - \frac{x_2}{2}}{\frac{r}{2}}\right)^2 < 1 \right\}$$



Kuva 6.2

on $f_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Lauseen 6.7 perusteella homeomorfismi. (Avoimet ellipsit $\{ (y_1,y_2) \mid (y_1 - \eta_1)^2/r^2 + 4(y_2 - \eta_2)^2/r^2 < 1 \}$, missä $(\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$, muodostavat tason tavanmukaisen topologian kannan Lauseen 2.10 perusteella.)

Kuvaus f_0 on esimerkki tason homeomorfismista itselleen, joka ei ole yhtenevyyskuvaus eikä yhdenmuotoisuuskuvaus. Yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuskuvaukset ovat kaikki homeomorfismeja.

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $Y \subset X$. Perhe

$$\mathcal{T}_Y = \{ A \cap Y \mid A \in \mathcal{T} \}$$

on Y:n topologia. (Seuraa suoraan Määritelmästä 3.1.) Sitä kutsutaan $\mathcal{T}$:n *indusoimaksi topologiaksi* Y:ssä, eli Y:n *relatiivitopologiaksi*. Topologista avaruutta $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kutsutaan $(X, \mathcal{T})$:n *aliavaruudeksi.*

Esimerkki 6.9. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ voidaan tulkita tason $\mathbb{R}^2$ osajoukoksi $\mathbb{N} = \{ (n, 0) \mid n = 1, 2, \dots \}$. Millaisen topologian tason tavanmukainen topologia $\mathcal{T}$ indusoi joukkoon $\mathbb{N}$?

Osoitetaan, että $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ on diskreetti topologia, ts. että kaikki yksiöt $\{n\}$ ovat avoimia. (Käytämme lyhennettyä merkintää $n = (n, 0)$.) Tarkastellaan kiekkoja $B(n, 1/2)$. Esimerkin 1.2 perusteella $B(n, 1/2) \in \mathcal{T}$. Koska

$$\{n\} = B(n, 1/2) \cap \mathbb{N},$$

on $\{n\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. □

Esimerkki 6.9 osoittaa, että alkuperäinen topologia ja indusoitu topologia voivat olla hyvin erilaisia. Topologiassa $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ ovat kaikki yksiöt avoimia, kun taas topologiassa $\mathcal{T}$ ei ole yhtään avointa yksiötä. Ratkaisevaa tällaisen tilanteen syntymisessä on, että $\mathbb{N} \notin \mathcal{T}$.

Lause 6.10. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $Y \subset X$. Silloin $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}$, jos ja vain jos $Y \in \mathcal{T}$.* □

Seuraava esimerkki osoittaa, että $(X, \mathcal{T})$ ja sen aliavaruus $(Y, \mathcal{T}_Y)$ voivat olla homeomorfisia.

Esimerkki 6.11. Valitaan avaruudeksi $(X, \mathcal{T})$ taso $\mathbb{R}^2$ tavanmukaisella topologialla varustettuna ja osajoukoksi Y yksikkökiekko $\mathbb{D} = B(0, 1)$. Määritellään kuvaus $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{D}$ yhtälöllä

$$f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}^2$ piste, jolle $\|a\| = 1$. Yksinkertainen päättely osoittaa, että f kuvaa origosta lähtevän säteen $\{ ta \mid t \geq 0 \}$ bijektiivisesti janalle $\{ ua \mid 0 \leq u < 1 \}$. Tästä seuraa, että $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{D}$ on bijektio. Kuvauksen f homeomorfisuus voidaan perustella Lauseen 6.7 avulla. □

7. Jatkuvat kuvaukset

Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$(*) \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Kahden reaaliluvun x ja y erotuksen itseisarvo $|x-y|$ on lukujen x ja y (euklidinen) etäisyys lukusuoralla. Jos merkitään $d_E(x,y) = |x-y|$, niin $(*)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$(**) \qquad d_E(x, x_0) < \delta \implies d_E\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Kuvauksen f lähtönä ja maalina on tässä sama metrinen avaruus $(\mathbb{R}, d_E)$.

Olkoot yleisesti (X, d) ja (X', d') metrisiä avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ kuvaus. Ehdon $(**)$ perusteella on selvää, miten kuvauksen f jatkuvuus pisteessä $x_0 \in X$ tulee määritellä:

Määritelmä 7.1. Kuvaus f on *jatkuva pisteessä* $x_0 \in X$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$(***) \qquad d(x, x_0) < \delta \implies d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Kuvaus f on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa X:n pisteessä.

Ehto $(***)$ tarkoittaa, että palloympäristö $B_d(x_0, \delta)$ kuvautuu palloympäristöön $B_{d'}\big(f(x_0), \varepsilon\big)$ eli että

$$f\big(B_d(x_0, \delta)\big) \subset B_{d'}\big(f(x_0), \varepsilon\big).$$

Korvaamalla palloympäristöt mielivaltaisilla ympäristöillä voimme yleistää jatkuvuuden määritelmän koskemaan topologisten avaruuksien välisiä kuvauksia:

Määritelmä 7.2. Olkoot $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ topologisia avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to X'$ on *jatkuva pisteessä* x_0, jos jokaista pisteen $f(x_0)$ ympäristöä V vastaa pisteen x_0 ympäristö U siten, että $f(U) \subset V$. Kuvaus f on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa X:n pisteessä.

Jos $f(U) \subset V$, niin $U \subset f^{-1}(V)$. Jos U on pisteen x_0 ympäristö, niin myös $f^{-1}(V)$ on x_0:n ympäristö (Lause 2.14). Olemme todenneet, että seuraava lause on voimassa.

Lause 7.3. *Olkoot* $(X, \mathcal{T})$ *ja* $(X', \mathcal{T}')$ *topologisia avaruuksia. Kuvaus* $f\colon X \to X'$ *on jatkuva pisteessä* x_0*, jos ja vain jos* $f^{-1}(V)$ *on pisteen* x_0 *ympäristö aina, kun* V *on pisteen* $f(x_0)$ *ympäristö.* $\square$

Avoin joukko on jokaisen pisteensä ympäristö. Lauseen 7.3 avulla voidaan nyt todistaa seuraava tulos:

Lause 7.4. *Olkoot* $(X, \mathcal{T})$ *ja* $(X', \mathcal{T}')$ *topologisia avaruuksia. Kuvaus* $f\colon X \to X'$ *on jatkuva, jos ja vain jos*

$$A' \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(A') \in \mathcal{T}.$$

Todistus. Oletetaan ensiksi, että f on jatkuva. Olkoon $A' \in \mathcal{T}'$. Merkitään $A = f^{-1}(A')$. On osoitettava, että $A \in \mathcal{T}$. Olkoon tätä varten $x \in A$ ja merkitään $x' = f(x)$. Koska $x' \in A'$ ja $A' \in \mathcal{T}'$, on A' pisteen $x' = f(x)$ ympäristö. Koska f on jatkuva pisteessä x, on A Lauseen 7.3 perusteella pisteen x ympäristö. On siis olemassa joukko $A(x) \in \mathcal{T}$ siten, että $x \in A(x) \subset A$. Mutta tällöin

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A(x) \subset A,$$

joten $A = \bigcup\limits_{x \in A} A(x) \in \mathcal{T}$.

Oletetaan kääntäen, että $f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$ aina, kun $A' \in \mathcal{T}'$. On osoitettava, että f on jatkuva jokaisessa X:n pisteessä. Valitaan $x \in X$. Olkoon V pisteen $f(x)$ ympäristö ja $A' \in \mathcal{T}'$ siten, että $f(x) \in A' \subset V$. Merkitään $U = f^{-1}(V)$ ja $A = f^{-1}(A')$. Koska $A \in \mathcal{T}$ ja $x \in A \subset U$, on U pisteen x ympäristö. Lauseen 7.3 perusteella f on jatkuva pisteessä $x \in X$. Koska x valittiin mielivaltaisesti, on f jatkuva. $\square$

Lauseen 7.4 tulos voidaan ilmaista sanomalla, että topologisten avaruuksien välinen kuvaus on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin.

Bijektio $f\colon X \to X'$ on homeomorfismi, jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(i) $A \in \mathcal{T} \implies f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{T}'$,

(ii) $A' \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

Lauseen 7.4 nojalla ehto (ii) toteutuu, jos ja vain jos f on jatkuva. Vastaavasti (i) toteutuu, jos ja vain jos f^{-1} on jatkuva Näin ollen on voimassa

Korollaari 7.5. *Olkoot $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ topologisia avaruuksia. Bijektio $f\colon X \to X'$ on homeomorfismi, jos ja vain jos sekä $f\colon X \to X'$ että $f^{-1}\colon X' \to X$ ovat jatkuvia.* □

Kuvauksen jatkuvuutta tutkittaessa ei itse asiassa tarvitse tutkia kaikkien avoimien joukkojen alkukuvien avoimuutta:

Lause 7.6. *Olkoot $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ topologisia avaruuksia ja $\mathcal{B}'$ topologian $\mathcal{T}'$ kanta. Silloin $f\colon X \to X'$ on jatkuva, jos ja vain jos*

$$B' \in \mathcal{B}' \implies f^{-1}(B') \in \mathcal{T}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $f\colon X \to X'$ on jatkuva. Jos $B' \in \mathcal{B}'$, niin $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$ Lauseen 7.4 perusteella.

Oletetaan, että $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$ kaikilla $B' \in \mathcal{B}'$. Olkoon $A' \in \mathcal{T}'$. Koska $\mathcal{B}'$ on $\mathcal{T}'$:n kanta, on olemassa perhe $\{ B'_\imath \mid \imath \in I \} \subset \mathcal{B}'$ siten, että

$$A' = \bigcup_{\imath \in I} B'_\imath.$$

Tällöin on

$$f^{-1}(A') = \bigcup_{\imath \in I} f^{-1}(B'_\imath) \in \mathcal{T}.$$

Lauseen 7.4 perusteella f on jatkuva. □

Esimerkki 7.7. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ taso $\mathbb{R}^2$ tavanmukaisella topologialla varustettuna sekä $(X', \mathcal{T}')$ taso $\mathbb{R}^2$ viipaletopologialla varustettuna (Esimerkki 4.1). Tarkastellaan kuvausta $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Tällöin siis $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ kaikille $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Viipaletopologialla $\mathcal{T}'$ on kanta $\mathcal{B}'$, joka koostuu viipaleista

$$V(\alpha, \beta) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < x_2 < \beta \},$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\alpha < \beta$. Koska $f^{-1}\big(V(\alpha, \beta)\big) = V(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}$, on $f\colon X \to X'$ jatkuva.

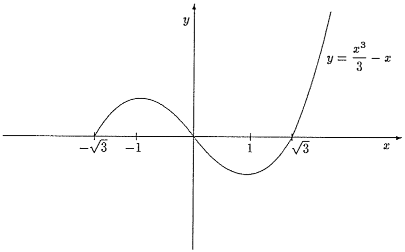
Tason tavanmukaisella topologialla on kanta $\mathcal{B}$, joka koostuu avoimista kiekoista $B(x, r)$, missä $x \in \mathbb{R}^2$ ja $r > 0$. Tarkastellaan kuvausta $f^{-1} = f\colon X' \to X$. Koska $f\big(B(x, r)\big) \notin \mathcal{T}'$, ei $f\colon X' \to X$ ole jatkuva. Bijektio $f\colon X \to X'$ ei siis ole homeomorfismi. □

Lause 7.8. *Olkoot $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ ja $(X'',\mathcal{T}'')$ topologisia avaruuksia. Jos kuvaukset $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ ovat jatkuvia, niin niiden yhdiste $g \circ f\colon X \to X''$ on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $A'' \in \mathcal{T}''$. Koska $g\colon X' \to X''$ on jatkuva, on (Lause 7.4) $g^{-1}(A'') \in \mathcal{T}'$. Koska $f\colon X \to X'$ on jatkuva, on vastaavasti $f^{-1}\big(g^{-1}(A'')\big) = (g \circ f)^{-1}(A'') \in \mathcal{T}$. $\square$

Seuraava esimerkki osoittaa, ettei jatkuva kuvaus välttämättä kuvaa avointa joukkoa avoimeksi joukoksi.

Esimerkki 7.9. Varustetaan $\mathbb{R}$ tavanmukaisella topologialla ja tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = x^3/3 - x$ (Kuva 7.1).



KUVA 7.1. Avoimen välin $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ kuva on suljettu väli $[-2/3, 2/3]$.

Funktiolla f on pisteessä $x = -1$ (lokaali) maksimi $f(-1) = 2/3$ ja pisteessä $x = 1$ (lokaali) minimi $f(1) = -2/3$, funktion nollakohdat ovat $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = \sqrt{3}$. Näin ollen avoimen välin $A = \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ kuva $f(A)$ on suljettu väli $[-2/3, 2/3]$. Avoin väli on avoin joukko. Suljettu väli ei ole avoin joukko. Lisäksi on huomattava, että f on surjektio eli $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Kuvajoukko $f(\mathbb{R})$ ei siis ole $\mathbb{R}$:n aito aliavaruus, vaan aliavaruuden $f(\mathbb{R})$ topologia on $\mathbb{R}$:n tavanmukainen topologia. $\square$

8. Sulkeuma ja reuna

Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos $X \setminus F \in \mathcal{T}$ (Määritelmä 2.5). Jos $\{ F_i \mid i \in I \}$ on perhe suljettuja joukkoja, niin joukko

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i$$

on suljettu (Lause 2.1′).

Olkoon $A \subset X$ mielivaltainen joukko. Tarkastellaan seuraavaa suljettujen joukkojen perhettä

$$\mathcal{F}_A = \{ F \supset A \mid F \subset X \text{ suljettu joukko} \}.$$

Määritelmä 8.1. Joukkoa

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$$

sanotaan joukon A *sulkeumaksi*.

Suljettujen joukkojen leikkauksena sulkeuma $\overline{A}$ on suljettu joukko. Se on suppein suljettu joukko, joka sisältää A:n, ts. jos $F \supset A$ on suljettu joukko, niin $F \supset \overline{A}$. On siis voimassa

Lause 8.2. *Joukko F_0 on joukon A sulkeuma, jos ja vain jos F_0 on suljettu ja $F \supset F_0 \supset A$ kaikille suljetuille joukoille $F \supset A$.* □

Korollaari 8.3. *Jos $A \subset B$, niin $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Todistus. Koska $A \subset B \subset \overline{B}$, on $\overline{B} \supset A$. Koska $\overline{B}$ on suljettu joukko, on $\overline{B} \supset \overline{A}$ Lauseen 8.2 perusteella. □

Korollaari 8.4. *Joukko A on suljettu, jos ja vain jos $A = \overline{A}$.*

Todistus. Jos $A = \overline{A}$, on A suljettu (Lause 8.2).

Oletetaan kääntäen, että A on suljettu. Merkitään $F_0 = A$. Silloin $F \supset F_0 \supset A$ kaikille suljetuille joukoille $F \supset A$, joten $\overline{A} = F_0 = A$. □

Korollaari 8.5. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Todistus. Koska $\overline{A}$ on suljettu (Lause 8.2), seuraa väite Korollaarista 8.4. $\square$

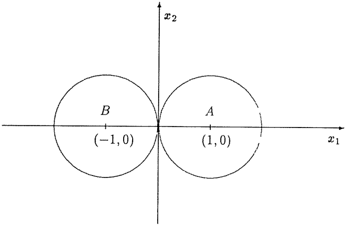
Korollaari 8.6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Todistus. Joukko $\overline{A} \cup \overline{B}$ on suljettu (Lause 2.2′) ja $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, joten $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (Lause 8.2). Koska $A \subset A \cup B$ ja $B \subset A \cup B$, on $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ ja $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ (Korollaari 8.3). Näin ollen $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. $\square$

Korollaari 8.7. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Todistus. Koska $A \cap B \subset A$ ja $A \cap B \subset B$, niin (Korollaari 8.3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ ja $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, ts. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. $\square$

Esimerkki 8.8. (i) Avoimen kiekon $B(a,r) \subset \mathbb{R}^2$ sulkeuma on suljettu kiekko $\bar{B}(a,r)$. (Harjoitustehtävä.) Olkoon $a = (1,0)$, $b = (-1,0)$, $A = B(a,1)$ ja $B = B(b,1)$. Silloin on (Kuva 8.1) $A \cap B = \emptyset$ ja $\overline{A} \cap \overline{B} = \{(0,0)\}$. Koska $\emptyset$ on suljettu joukko, on $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Näin ollen $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.



KUVA 8.1. $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ii) Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Koska $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $X \in \mathcal{T}$, ovat $\emptyset$ ja X toistensa komplementteina suljettuja. Korollaarin 8.4 nojalla on $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ja $\overline{X} = X$. Pistettä $x \in X$ kutsutaan *erilliseksi pisteeksi*, jos $\{x\} \in \mathcal{T}$. Tällöin $X \setminus \{x\}$ on suljettu, joten $\overline{X \setminus \{x\}} = X \setminus \{x\}$. Jos x ei ole erillinen piste, ei joukko $X \setminus \{x\}$ ole suljettu. Korollaarin 8.4 nojalla silloin

$$\overline{X \setminus \{x\}} \neq X \setminus \{x\}.$$

Koska joka tapauksessa $\overline{X \setminus \{x\}} \supset X \setminus \{x\}$, on oltava

$$\overline{X \setminus \{x\}} = X. \quad \square$$

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $A \subset X$. Piste $a \in A$ on joukon A *sisäpiste*, jos A on a:n ympäristö, ts. jos on olemassa $U \in \mathcal{T}$ siten, että $a \in U \subset A$. Piste $b \in X \setminus A$ on joukon A *ulkopiste*, jos b on joukon $X \setminus A$ sisäpiste. Tällöin on olemassa $U' \in \mathcal{T}$ siten, että $b \in U'$ ja $U' \cap A = \emptyset$. Joukon A sisäpisteiden joukolle käytetään merkintää $\operatorname{Int} A$ ja ulkopisteiden joukolle käytetään merkintää $\operatorname{Ext} A$.

Pisteitä $x \in X \setminus \operatorname{Ext} A$ sanotaan A:n *kosketuspisteiksi*. (Piste on *kasautumispiste*, jos se on kosketuspiste, mutta ei ole erillinen piste.)

Lause 8.9. *Piste x on joukon A kosketuspiste, jos ja vain jos $U \cap A \neq \emptyset$ aina, kun U on pisteen x ympäristö.*

Todistus. Piste x ei ole A:n kosketuspiste, jos ja vain jos $x \in \operatorname{Ext} A$. Tämä tapahtuu jos ja vain jos x on joukon $X \setminus A$ sisäpiste, ts. jos ja vain jos on olemassa x:n ympäristö U siten, että $U \subset X \setminus A$. $\square$

Lause 8.10. *Joukon A sulkeuma on sama kuin sen kosketuspisteiden joukko.*

Todistus. Olkoon $B = X \setminus \operatorname{Ext} A$ joukon A kosketuspisteiden joukko. Koska $\operatorname{Ext} A$ on avoin (vrt. Korollaari 8.16), on B suljettu. Lisäksi $A \subset B$ (Lause 8.9).

Jos $F \supset A$ on suljettu joukko, niin $X \setminus F \subset \operatorname{Ext} A$. Näin ollen $F \supset X \setminus \operatorname{Ext} A = B$. Lauseen 8.2 perusteella $B = \overline{A}$. $\square$

Korollaari 8.11. *Topologisen avaruuden osajoukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kosketuspisteensä.*

Todistus. Korollaari 8.4. $\square$

Määritelmä 8.12. Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ *reunapiste*, jos x on A:n kosketuspiste, mutta $x \notin \operatorname{Int} A$.

Lause 8.13. *Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ reunapiste, jos ja vain jos ehdot*

$$U \cap A \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad U \not\subset A$$

ovat voimassa kaikille x:n ympäristöille U.

Todistus. Lause 8.9. $\square$

Joukon A reunapisteiden joukkoa kutsutaan A:n *reunaksi*. Sille käytetään merkintää $\operatorname{Bd} A$. Joukko A ei yleensä sisällä kaikkia reunapisteitään.

Esimerkki 8.14. (i) Avoimen kiekon $B(a,r)$ reuna on ympyrä $S(a,r) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\| = r \}$. Avoin kiekko ei siis sisällä yhtään reunapistettään.

(ii) Suljetun kiekon $\overline{B}(a,r)$ reuna on myös ympyrä $S(a,r)$. Suljettu kiekko sisältää kaikki reunapisteensä.

(iii) Tasojoukon $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ reuna on koko taso $\mathbb{R}^2$. *Todistus.* Olkoon $x \in \mathbb{R}^2$ ja U pisteen x ympäristö. Silloin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset U$. Toisaalta $B(x,r) \cap \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \neq \emptyset$ ja toisaalta $B(x,r) \not\subset \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Lauseen 8.13 perusteella $x \in \operatorname{Bd} A$. Tässä tapauksessa $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\operatorname{Ext} A = \emptyset$, $A \subset \operatorname{Bd} A$ ja $\mathbb{R}^2 \setminus A \subset \operatorname{Bd} A$. □

Olkoon A topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko. Avaruuden X pisteet jakautuvat kolmeen luokkaan:

(a) $\operatorname{Int} A$,

(b) $\operatorname{Ext} A$,

(c) $\operatorname{Bd} A$.

Nämä luokat ovat keskenään pistevieraita ja $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Ext} A \cup \operatorname{Bd} A$.

Lause 8.15. $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Bd} A$.

Todistus. Lause 8.10 ja Määritelmä 8.12. □

Seuraava huomio on ilmeinen myös suoraan määritelmien perusteella:

Korollaari 8.16. *Joukot* $\operatorname{Ext} a$ *ja* $\operatorname{Int} A$ *ovat avoimia.*

Todistus. $\operatorname{Ext} A = X \setminus (\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Bd} A) = X \setminus \overline{A}$. Koska $\overline{A}$ on suljettu (Korollaari 8.4), on $\operatorname{Ext} A$ avoin. Koska $\operatorname{Int} A = \operatorname{Ext}(X \setminus A)$, on $\operatorname{Int} A$ avoin. □

Korollaari 8.17. *Joukko A on suljettu, jos ja vain jos* $\operatorname{Bd} A \subset A$.

Todistus. Korollaari 8.4. □

Korollaari 8.18. *Joukko A on avoin, jos ja vain jos* $A = \operatorname{Int} A$.

Todistus. Jos A on avoin, niin A on jokaisen pisteensä ympäristö. Näin ollen $A = \operatorname{Int} A$. Jos $A = \operatorname{Int} A$, niin A on avoin Korollaarin 8.16 perusteella. □

Korollaari 8.19. *Joukko A on avoin, jos ja vain jos* $A \cap \operatorname{Bd} A = \emptyset$.

Todistus. Jos A on avoin, on $A = \operatorname{Int} A$. Tällöin $A \cap \operatorname{Bd} A = \emptyset$. Oletetaan kääntäen, että $A \cap \operatorname{Bd} A = \emptyset$. Koska $A \subset \overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Bd} A$, on $A = \operatorname{Int} A$. Tällöin A on avoin. □

III Harjoitustehtäviä

1. harjoitustehtävät

1. Osoita, että Esimerkin 1.1 aksioomajärjestelmä (i)–(iii) on ristiriidaton.

2. Määritellään tasossa $\mathbb{R}^2$ ekvivalenssirelaatio asettamalla $P_1 = (x_1, y_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2)$ ekvivalenteiksi, jos $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

a) Osoita, että kyseessä on todella ekvivalenssirelaatio.

b) Mitä ovat pisteiden $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,2)$ ja $(0,0)$ määräämät ekvivalenssiluokat?

3. Määritelmä: Joukon S relaatiolla $\sim$ tarkoitetaan sääntöä, joka liittää jokaiseen alkioon $s \in S$ joukon S osajoukon $R(s)$. Jos $x \in R(s)$, niin merkitään $x \sim s$. Olkoon $\sim$ relaatio, joka on symmetrinen ja transitiivinen. Mitä vikaa on seuraavassa päättelyssä: Olkoon $a \sim b$. Silloin symmetrisyyden nojalla $b \sim a$. Transitiivisuuden nojalla $a \sim b$ ja $b \sim a$ implikoivat, että $a \sim a$, joten $\sim$ on refleksiivinen. Vai eivätkö Esimerkin 1.1 aksioomat olekaan loogisesti riippumattomia?

4. Määritellään joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ekvivalenssirelaatio asettamalla vektorit $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ ekvivalenteiksi, jos on olemassa $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ siten, että $\vec{v} = \lambda\vec{w}$.

a) Osoita, että kyseessä on todella joukon $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ekvivalenssirelaatio.

b) Mitä ovat ekvivalenssiluokat?

Ekvivalenssiluokkien joukkoa kutsutaan (reaaliseksi) *projektiiviseksi tasoksi.*

2. harjoitustehtävät

1. Olkoot $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ hyperbolisen tason $\mathcal{H}$ pisteitä, $x_1 \neq x_2$. Johda pisteiden P ja Q kautta kulkevan suoran $L^{r,c} \in \mathcal{L}_H$ yhtälö.

2. Osoita, että hyperbolinen taso $\mathcal{H}$ on insidenssigeometria.

3. Etsi kaikki pisteen $(0,1)$ kautta kulkevat hyperbolisen tason $\mathcal{H}$ suorat, jotka ovat suoran $L^6 \in \mathcal{L}_H$ suuntaisia.

4. Olkoon $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$. *Suoralla* $\mathbb{R}^2$:ssa tarkoitetaan muotoa

$$J_{a,b,c} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \}$$

olevaa joukkoa, missä a, b ja c ovat vakioita ja $a^2 + b^2 > 0$. Olkoon $\mathcal{L}_J$ kaikkien suorien joukko. Osoita, että $(\mathcal{S}, \mathcal{L}_J)$ on insidenssigeometria, jolla on sama suorien joukko kuin euklidisella tasolla.

5. Olkoon $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ja $\mathcal{L}$ kaikkien suorien $J_{a,b,c}$ joukko, joille $c \neq 0$. Osoita, että $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ ei ole insidenssigeometria.

6. On olemassa äärellinen insidenssigeometria, jossa on 7 pistettä siten, että jokaisella suoralla on täsmälleen 3 pistettä. Etsi tämä geometria. Montako suoraa siinä on?

3. harjoitustehtävät

1. Osoita, että hyperbolinen etäisyys on etäisyysfunktio.

2. Tarkastellaan euklidista tasoa $\mathcal{E} = \{ \mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E \}$ taksiautoetäisyydellä d_T varustettuna. Osoita, että kuvaus $f(x,y) = x(1 + |m|)$ on suoran $L_{m,b}$ viivoitin.

3. Määritellään $\mathbb{R}^2$:ssa etäisyysfunktio d^* euklidisen etäisyyden d_E avulla seuraavasti:

$$d^*(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,Q), & \text{jos } d_E(P,Q) \leq 1, \\ 1, & \text{jos } d_E(P,Q) > 1. \end{cases}$$

   a) Osoita, että d^* on etäisyysfunktio.
   b) Etsi kaikki pisteet $P \in \mathbb{R}^2$, joille $d^*(P,O) \leq 2$.
   c) Etsi kaikki pisteet $P \in \mathbb{R}^2$, joille $d^*(P,O) = 2$.

   Tavalliseen tapaan on $O = (0,0)$.

4. Olkoon d^* edellisen tehtävän etäisyysfunktio. Osoita, että ei ole olemassa insidenssigeometriaa $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}\}$ siten, että $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, d^*\}$ olisi metrinen geometria.

5. Olkoot d_0 ja d_1 joukon $\mathcal{S}$ etäisyysfunktioita sekä $s \geq 0$ ja $t > 0$. Osoita, että myös $sd_0 + td_1$ on $\mathcal{S}$:n etäisyysfunktio.

6. Olkoon $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrinen geometria, $r > 0$ ja $P \in \mathcal{S}$. Osoita, että on olemassa piste $Q \in \mathcal{S}$ siten, että $d(P,Q) = r$.

4. harjoitustehtävät

1. Etsi euklidisessa tasossa pisteen $(2,3)$ koordinaatit **(a)** suoran $x = 2$ suhteen **(b)** suoran $y = -4x + 11$ suhteen. Molemmilla suorilla käytetään standardiviivoitinta.

2. Sama tehtävä kuin edellä taksiautotasossa.

3. Etsi hyperbolisessa tasossa pisteen $(2,3)$ koordinaatit **(a)** suoran $x = 2$ suhteen **(b)** suoran $(x-1)^2 + y^2 = 10$. Molemmilla suorilla käytetään standardiviivoitinta.

4. Määrää **(a)** pisteiden $(1,2)$ ja $(3,4)$ hyperbolinen etäisyys sekä **(b)** pisteiden $(2,1)$ ja $(4,3)$ hyperbolinen etäisyys.

5. Etsi piste P, jonka euklidinen koordinaatti suoralla $L_{2,-3}$ on -2 (standardiviivoittimen suhteen).

6. Etsi piste P, jonka taksiautokoordinaatti suoralla $L_{2,-3}$ on -2 (standardiviivoittimen suhteen).

7. Etsi piste P, jonka hyperbolinen koordinaatti suoralla $L^{\sqrt{7},-3}$ on $\ln 2$ (standardiviivoittimen suhteen).

5. harjoitustehtävät

1. **a)** Tarkastellaan suoraa $L_0 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\,\}$ euklidisessa tasossa $\mathcal{E}$. Muodosta pisteen $(0,2)$ peilikuva pisteen $(0,1)$ suhteen.
b) Tarkastellaan suoraa $L^0 = \{\,(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = 0\,\}$ hyperbolisessa tasossa $\mathcal{H}$. Muodosta pisteen $(0,2)$ peilikuva pisteen $(0,1)$ suhteen.

2. Tasossa $\mathbb{R}^2$ määritellään maksimietäisyys d_S seuraavasti: Jos $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$, niin

$$d_S(P,Q) = \max\{\,|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\,\}.$$

a) Osoita, että d_S on etäisyysfunktio.

b) Osoita, että $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_S\}$ on metrinen geometria.

3. Metrisessä geometriassa $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ määritellään piste $P \in \mathcal{S}$ keskinen ja $r > 0$ säteinen ympyrä joukkona $\{ Q \in \mathcal{S} \mid d(P, Q) = r \}$. Piirrä piste $(0, 0)$ keskinen ja 1-säteinen ympyrä käyttämällä jokaista etäisyysfunktiota d_E, d_T ja d_S.

4. Olkoon $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrinen geometria, $P \in \mathcal{S}$ ja $l \in \mathcal{L}$ suora, jolle $P \in l$. Olkoon $\mathcal{C}$ piste P keskinen ympyrä. Osoita, että $l \cap \mathcal{C}$ sisältää täsmälleen kaksi pistettä. Ovatko pisteet toistensa peilikuvia ympyrän keskipisteen suhteen?

5. Millainen joukko mahtaa olla hyperbolisen tason ympyrä, jonka keskipiste on $(0, e)$ ja säde on 1?

6. harjoitustehtävät

1. Osoita, että taksiautoetäisyys d_T toteuttaa kolmioepäyhtälön.

2. Määritellään $\mathbb{R}^2$:n pisteiden P ja Q funktio d_F asettamalla

$$d_F(P, Q) = \begin{cases} 0, & \text{jos } P = Q, \\ d_E(P, Q), & \text{jos } L_{PQ} \text{ ei ole vertikaalinen}, \\ 3d_E(P, Q), & \text{jos } L_{PQ} \text{ on vertikaalinen.} \end{cases}$$

   Osoita, että $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_F\}$ on metrinen geometria. Osoita, että etäisyysfunktio d_F ei toteuta kolmioepäyhtälöä.

3. Osoita, että euklidisessa tasossa on voimassa $A - B - C$, jos ja vain jos $B = (1 - t)A + tC$ jollekin t, $0 < t < 1$.

4. Osoita, että taksiautotasossa on olemassa kolme eri pistettä A, B ja C, jotka eivät ole kollineaarisia, mutta joille $d_T(A, C) = d_T(A, B) + d_T(B, C)$. Tämä selittää, miksi Määritelmässä 7.1 puhutaan kollineaarisista pisteistä

5. Olkoon annettu neljä erillistä metrisen geometrian pistettä. Osoita, että ne voidaan nimetä pisteiksi A, B, C ja D siten, että $A - B - C - D$.

6. Olkoot A, B, C ja D metrisen geometrian pisteitä siten, että $A - B - C$ ja $B - C - D$. Osoita, että $A - B - D$ ja $A - C - D$. (Tällöin siis $A - B - C - D$.)

7. harjoitustehtävät

1. Osoita, että euklidisen tason janoilla ja säteillä on esitykset

$$\overline{AB} = \{ C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A), \quad 0 \le t \le 1 \},$$
$$\overrightarrow{AB} = \{ C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A), \quad t \ge 0 \}.$$

2. Osoita, että metrisessä geometriassa $\mathcal{M}$ on voimassa:

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies A = C$,

(ii) $C \in \overrightarrow{AB}$ & $C \neq A \implies \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

3. Olkoon hyperbolisessa tasossa $P = (1,2)$ ja $Q = (1,4)$. Jos $A = (0,2)$ ja $B = (1,\sqrt{3})$, niin etsi $C \in \overrightarrow{AB}$, jolle $\overline{AC} \simeq \overline{PQ}$.

4. Taksiautotasossa olkoon $P = (1,-2)$, $Q = (2,5)$, $A = (4,-1)$ ja $B = (3,2)$. Etsi $C \in \overrightarrow{AB}$, jolle $\overline{AC} \simeq \overline{PQ}$.

5. Varustetaan $\mathbb{R}^2$ etäisyydellä

$$d_S(P,Q) = \max\{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \},$$

$P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, jolloin $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_S\}$ on metrinen geometria. Olkoot $A = (0,0)$, $B = (1/10, 1)$ ja $C = (1,1)$ tämän metrisen geometrian pisteitä. Osoita, että $\overline{AB} \simeq \overline{AC}$. Miltä janat näyttävät?

6. Osoita, että metrisen geometrian $\mathcal{M}$ säde $\overrightarrow{AB}$ on niiden pisteiden $C \in \overleftrightarrow{AB}$ joukko, joille A ei ole C:n ja B:n välissä.

8. harjoitustehtävät

1. Osoita, että metrisessä geometriassa on voimassa $\angle ABC = \angle CBA$.

2. Olkoot D, E ja F kolme metrisen geometrian ei-kollineaarista pistettä. Oletetaan, että suora l sisältää korkeintaan yhden pisteistä D, E ja F. Osoita, että jokainen suora $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{DF}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ kohtaa l:n korkeintaan yhdessä pisteessä.

3. Olkoot A, B ja C metrisen geometrian ei-kollineaarisia pisteitä. Osoita. että $\overline{AB} = \overleftrightarrow{AB} \cap \triangle ABC$.

4. Olkoon $A = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 < 1,\ 0 \leq x_2 < 1 \}$. Mitkä A:n pisteet ovat sisäpisteitä ja mitkä A:n pisteet ovat reunapisteitä.

5. Olkoon $E = \{ (0, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$ ja $A = \mathbb{R}^2 \setminus E = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin E \}$. Mitkä A:n pisteet ovat sisäpisteitä ja mitkä reunapisteitä? Onko A avoin joukko?

6. Tarkastellaan tason suoria $l_0 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \}$ ja $l_n = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1/n \}$, $n \in \mathbb{N}$. Olkoon

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} l_k.$$

Osoita, että A on avoin joukko.

7. Oletetaan, että joukko $F \subset \mathbb{R}^2$ ei ole avoin. Voiko osajoukko $A \subset F$ olla avoin?

9. harjoitustehtävät

1. Osoita, että joukko $F \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu, jos F:n alkioiden määrä on äärellinen.

2. Olkoot $F_1 = \{ (1/n, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$ ja $F_2 = \{ (n, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$. Molemmissa joukoissa on numeroituvasti ääretön määrä pisteitä. Osoita, että F_1 ei ole avoin eikä suljettu. Osoita, että F_2 on suljettu.

3. Olkoon $A_n = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 1,\ -\frac{1}{n} < x_2 < \frac{1}{n} \}$, $n = 1, 2, \ldots$, sekä

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Totea, että jokainen A_n on avoin. Osoita, että $A = \{ (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 1 \}$. Onko A avoin tai suljettu?

4. Osoita, että taksiautotason kiekot $B_T(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(a, x) < r \}$ muodostavat tason topologian kannan.

5. Muodostavatko rengasalueet

$$R(a, r_1, r_2) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid r_1 < d_E(a, x) < r_2 \},$$

$a \in \mathbb{R}^2$, $0 < r_1 < r_2$, tason topologian kannan?

6. Osoita, että avoimet kiekot $B(a, r)$, joille $a \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ja $r \in \mathbb{Q}$, muodostavat tason topologian kannan.

10. harjoitustehtävät

1. Olkoon $X = \{a, b, c\}$. Luettele kaikki X:n topologiat.

2. Olkoon $[0, a[= \{ t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < a \}$, kun $a > 0$. Olkoon $X = [0, 1[$. Osoita, että

$$\mathcal{T} = \{ [0, a[\,\big|\, 0 < a \leq 1 \} \cup \{\emptyset\}$$

on X:n topologia.

3. Olkoot $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ joukon X topologioita. Osoita, että $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ on X :n topologia.

4. Mitkä seuraavista joukoista ovat origon $O = (0, 0)$ ympäristöjä tason tavanmukaisessa topologiassa:

a) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$,
b) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \leq 1 \}$,
c) $\{ (x_1, x_2) \mid -3 < x_1 + x_2 < 3 \}$,
d) $\{ (x_1, x_2) \,\big|\, |x_1| + |x_2| \leq 4 \}$,
e) $\{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 \}$.
Piirrä kuvat.

11. harjoitustehtävät

1. Osoita, että $\mathcal{T}_V$ on tason topologia, jonka kantana on joukko $\{ V(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta \}$. Osoita, että $\mathcal{T}_V$ on karkeampi kuin tason tavanmukainen topologia.

2. Määrää karkein joukon $\{a, b, c, d, e\}$ niistä topologioista, jotka sisältävät joukot $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ ja $\{b, d, e\}$.

3. Olkoon X äärellinen topologinen avaruus. Osoita, että X on Hausdorff, jos ja vain jos se on diskreetti.

4. Olkoon $f \colon X \to \mathbb{R}$ injektio ja $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, kun $x, y \in X$. Onko d joukon X metriikka?

5. Olkoon $f(x, y) = |x^2 - y^2|$ ja $g(x, y) = |x^3 - y^3|$, kun $x, y \in \mathbb{R}$. Ovatko f ja g metriikkoja $\mathbb{R}$:ssä?

6. Olkoot d_1 ja d_2 metriikkoja joukossa X. Osoita, että kuvaukset

$$d_1 + d_2 \colon (x, y) \mapsto d_1(x, y) + d_2(x, y)$$

ja

$$\max(d_1, d_2) \colon (x, y) \mapsto \max\bigl(d_1(x, y), d_2(x, y)\bigr)$$

ovat metriikkoja X:ssä.

12. harjoitustehtävät

1. Olkoon $f \colon \overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ kuvaus, jolle $f(\infty) = 1$ ja $f(n) = n/(n+1)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Asetetaan $d(m, n) = |f(m) - f(n)|$. Osoita, että d on joukon $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ metriikka.

2. Oletetaan, että φ on mittausfunktio ja d on joukon X metriikka.
   a) Osoita, että $d' = \varphi \circ d$ on X:n metriikka.
   b) Oletetaan, että $\lim_{t \to 0+} \varphi(t) = 0$. Osoita, että d ja d' ovat topologisesti ekvivalentteja.

3. Määritellään vektoreille $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\|x\|_3 = \max(|x_1| + |x_2|,\ 2|x_1|).$$

Osoita, että $\| \cdot \|_3$ on normi. Tutki, millaisia ovat tämän normin määräämään metriikkaan d_3 liittyvät pallot. Osoita, että d_3 on ekvivalentti normin $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ määräämän metriikan d_1 kanssa.

4. Osoita, että funktiot $t \mapsto t^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, $t \mapsto \log(1+t)$ ja $t \mapsto \min(1, t)$ ovat mittausfunktioita.

5. Osoita, että $\mathbb{R}$:n metriikat

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{ja} \quad d'(x, y) = |x^3 - y^3|$$

ovat ekvivalentteja. Osoita, että ei ole olemassa vakioita $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että kaksoisepäyhtälö

$$\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$$

olisi voimassa kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

13. harjoitustehtävät

1. Varustetaan $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ luonnollisella topologiallaan. Osoita, että bijektio $f\colon \overline{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{N}}$ on homeomorfismi, jos ja vain jos $f(\infty) = \infty$.

2. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, Y joukko ja $f\colon X \to Y$ bijektio. Osoita, että on olemassa yksi ja vain yksi Y:n topologia $\mathcal{T}_Y$ siten, että f on homeomorfismi.

3. Olkoot $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ homeomorfisia topologisia avaruuksia. Osoita, että $(X, \mathcal{T})$ on metristyvä, jos ja vain jos $(X', \mathcal{T}')$ on metristyvä.

4. Olkoon $f\colon X \to X'$ homeomorfismi ja $A \subset X$. Osoita, että piste $x \in A$ on A:n sisäpiste, jos ja vain jos $f(x)$ on $f(A)$:n sisäpiste.

5. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = (0,0), \\ \frac{x}{\|x\|^2}, & \text{kun } x \neq (0,0). \end{cases}$$

   Osoita, että f on bijektio. Onko f homeomorfismi?

6. Millainen on $\mathbb{R}$:n luonnollinen topologia? Osoita, että $\mathbb{R}$ ja avoin väli $]a, b[$ ovat homeomorfisia.

14. harjoitustehtävät

1. Olkoot $(X, \mathcal{T})$ ja $(X', \mathcal{T}')$ topologisia avaruuksia ja $c \in X'$. Määritellään kuvaus $f\colon X \to X'$ asettamalla $f(x) = c$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että f on jatkuva.

2. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ taso $\mathbb{R}^2$ varustettuna viipaletopologialla ja olkoon $f\colon X \to X$ tason kierto. Milloin f on jatkuva?

3. Olkoon $X = \{a, b, c\}$ ja $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Määrää joukon $\{a\}$ sulkeuma topologisessa avaruudessa $(X, \mathcal{T})$.

4. Olkoon X' joukko, $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $f\colon X \to X'$ kuvaus. Osoita, että X':ssä on olemassa karkein topologia, jolla f on jatkuva.