I Perusmääritelmiä

1. Topologisia peruskäsitteitä

Kompleksilukujen $z = x+iy$ kunta merkitään $\mathbb{C}$:llä. Jos z samaistetaan tason $\mathbb{R}^2$ pisteen (x, y) kanssa, niin $\mathbb{C}$:stä tulee lisäksi topologinen avaruus ja sille käytetään nimitystä *kompleksitaso*.

Muodostetaan joukko $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, missä $\infty \notin \mathbb{C}$. Määritellään ∞:n r-säteinen ympäristö joukkona

$$U_r(\infty) = \{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| > r \}$$

ja sovitaan, että $|\infty| > r$ kaikilla $r > 0$. Tällöin $\hat{\mathbb{C}}$:stä tulee kompakti topologinen avaruus, joka on homeomorfinen $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallon kanssa. Tämän takia $\hat{\mathbb{C}}$:tä kutsutaan *Riemannin palloksi*.

Jos X on joukko, jossa on annettu metriikka ρ, niin määrittelemällä pisteen a r-säteinen (pallo-) ympäristö joukkona $U_r(a) = \{ x \in X \mid \rho(a,x) < r\}$ tulee X:stä topologinen avaruus. Saatua topologiaa kutsutaan metriikan ρ *määräämäksi topo-*

logiaksi.

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Avaruudelle X on useita erilaisia metriikkoja, mutta mielivaltainen metriikka määrää yleensä muun topologian kuin $\mathcal{T}$:n. Avaruutta sanotaan *metrisoituvaksi*, jos on olemassa metriikka ρ, jonka määräämä topologia on täsmälleen $\mathcal{T}$.

Jos $A \subset X$, niin joukot $A \cap U$, $U \in \mathcal{T}$ muodostavat A:n topologian $\mathcal{T}_A$, jota kutsutaan $\mathcal{T}$:n *indusoimaksi relatiivitopologiaksi*.

A on tällöin X:n *aliavaruus*.

Polulla tarkoitetaan jatkuvaa kuvausta $\gamma : I = [0,1] \to X$. Avaruus X on *polkuyhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan aina yhdistää polulla. Avaruus on *lokaalisti polkuyhtenäinen*, jos jokaisella X:n pisteellä on polkuyhtenäinen ympäristö.

Lause 1.1. Jos X on yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen, niin X on polkuyhtenäinen.

Lauseen sinänsä suoraviivainen todistus on esitetty topologian kurssilla.

Jos $\varphi : X \to Y$ on topologisen avaruuden X kuvaus joukkoon Y, niin Y:ssä voidaan määritellä ns. <u>identifikaatiotopologia</u> asettamalla joukko $V \subset Y$ avoimeksi jos ja vain jos $\varphi^{-1}(V)$ on X:n avoin joukko. Saatu topologia on hienoin topologia, jonka suhteen φ on jatkuva.

Olkoon $\sim$ avaruudessa X määritelty ekvivalenssirelaatio ja $X/\sim$ ekvivalenssiluokkien $[x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$ joukko. Jos $X/\sim$ varustetaan projektiokuvauksen $p : X \to X/\sim$, $p(x) = [x]$, määräämällä identifikaatiotopologialla, niin $X/\sim$ on <u>tekijäavaruus</u>.

Topologinen avaruus X on <u>Hausdorff</u>, jos sen kahdella eri pisteellä on aina pistevieraat ympäristöt. Hausdorffin avaruuden aliavaruus on Hausdorff ja Hausdorffin avaruuden kompakti joukko on suljettu. Koska kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti, saadaan seuraava tulos.

<u>Lause 1.2.</u> Jos f on suljettu ja

rajoitetun joukon $F \subset \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus Hausdorffin avaruuteen X, niin $f(F)$ on X:n suljettu joukko.

2. Pinta

Hausdorffin avaruudet ovat liian yleisiä, jotta niissä määritellyille funktioille voitaisiin kehittää riittävän mielenkiintoinen teoria. Tämän takia on yleisyyttä vielä rajoitettava. Aluksi vaaditaan, että tarkasteltavan avaruuden on oltava lokaalisti euklidinen, ts. että jokaisella pisteellä on ympäristö, joka ainakin topologisesti on ekvivalentti tason avoimen joukon kanssa. Tällaista avaruutta kutsutaan pinnaksi. Sen täsmällinen määritelmä asetetaan seuraavasti.

Määritelmä. Pinnalla tarkoitetaan yhtenäistä Hausdorffin avaruutta S, jolla on peite avoimilla joukoilla U, jotka ovat homeomorfisia tason avoimien joukkojen kanssa.

<u>Kommentteja.</u> 1. Määritelmä tarkoittaa seuraavaa: Jos $x \in S$, niin on olemassa S:n avoin joukko $U \ni x$, $\mathbb{C}$:n avoin joukko V ja kuvaus $h: U \to V$, joka on homeomorfismi, kun U käsitetään S:n ja V $\mathbb{C}$:n aliavaruudeksi.

2. Ei riitä sanoa, että on olemassa S:n peite joukoilla U, jotka (S:n aliavaruuksina) ovat homeomorfisia tason avoimien joukkojen kanssa. Tästä antaa hyvän esimerkin $\mathbb{R}^3$:n yksikkökuutio $I \times I \times I$. Se voidaan peittää vaakasuorilla neliöillä $I_t = \{(x, y, t) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, $0 \le t \le 1$. Jokainen I_t on $I \times I \times I$:n aliavaruutena homeomorfinen neliön $I \times I$ kanssa. Kuitenkaan I_t ei ole $I \times I \times I$:n avoin joukko.

3. Pinnan määritelmästä ei voida pudottaa vaatimusta, että S:n on oltava Hausdorff. Tarkastellaan esimerkkinä tasoa, jossa on kaksi origoa. Se määritellään seuraavasti: olkoot $T_1 = \{(x_1, y_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R},\ y_1 \in \mathbb{R}\}$ ja $T_2 = \{(x_2, y_2, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R},\ y_2 \in \mathbb{R}\}$ tasoja

avaruudessa $\mathbb{R}^3$ siis: $X = T_1 \cup T_2$. Määritellään X:ssä ekvivalenssirelaatio asettamalla

$$(x_1, y_1, 0) \sim (x_1, y_1, 0)$$
$$(x_2, y_2, 1) \sim (x_2, y_2, 1)$$
$$(x_1, y_1, 0) \sim (x_2, y_2, 1) \iff x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \text{ ja } x_1^2 + y_1^2 > 0.$$

Tekijäavaruus $X/\sim$ on muuten $\mathbb{C}$:n kaltainen, mutta origoa vastaa kaksi pistettä $(0,0,0)$ ja $(0,0,1)$. Näillä pisteillä ei ole pistevieraita ympäristöjä, joten $X/\sim$ ei ole Hausdorff. Sen sijaan jokaisella $X/\sim$:n pisteellä on ympäristöjä, jotka ovat luonnollisella tavalla homeomorfisia tason avoimien joukkojen kanssa.

Olkoon S pinta ja $h: U \to V$ pinnan määritelmän mukainen homeomorfismi avoimelta joukolta $U \subset S$ avoimelle joukolle $V \subset \mathbb{C}$. Tällaisia kuvauksia h kutsutaan <u>lokaaleiksi parametreiksi</u>. Olkoon $p \in S$ ja $U \ni p$ lokaalin parametrin h määritysjoukko. Silloin on olemassa kiekko $D \subset h(U)$ siten, että $h(p) \in D$ ja $\bar{D} \subset h(U)$. Koska

Avointa joukkoa U kutsutaan <u>parametriympäristöksi</u>.

$h: U \to h(U)$ on homeomorfismi, ja avoimen joukon $h^{-1}(D)$ sulkeuma homeomorfinen $\bar{D}$:n kanssa. Tällaisia avoimia joukkoja $h^{-1}(D)$ kutsutaan <u>parametrikiekoiksi</u>. Pinta voidaan aina peittää parametrikiekoilla.

1. luento →

Pinta voi olla joko kompakti tai ei-kompakti. Edellisessä tapauksessa pinta voidaan peittää äärellisen monella parametrikiekolla. On ehkä syytä mainita, että vanhemmassa kirjallisuudessa kompaktia pintaa kutsutaan suljetuksi (vrt. suljettu l. umpinainen polku) ja ei-kompaktia pintaa avoimeksi.

Jokainen parametriympäristö on lokaalisti kompakti ja lokaalisti polkuyhtenäinen, koska tason avoimilla joukoilla on nämä ominaisuudet. Näin ollen pinta on aina lokaalisti kompakti ja lokaalisti polkuyhtenäinen. Koska pinta on lisäksi yhtenäinen, seuraa lauseesta 1.1, että pinta on itse asiassa aina polkuyhtenäinen.

Topologinen avaruus on _numeroituva_, jos sen topologialla on numeroituva kanta. Onko pinta numeroituva? Vaikka jokainen parametriympäristö on numeroituva, ei pinnan tarvitse olla numeroituva (Prüfer-Radó n. 1925). Tämä tietenkin sotii havainnollista mielikuvaamme vastaan, joten määritelmää on vielä tiukennettava, jotta käsittely rajoittuisi aiheeseen kuuluviin avaruuksiin. Huomattakoon, että pinta on numeroituva, jos ja vain jos sillä on numeroituva peite parametriympäristöillä.

Pinta ei yleensä ole metrisoituva.

Jos A on pinnan S alue (so. avoin ja yhtenäinen joukko), niin A on pinta ja sen parametriympäristöt ovat muotoa $A \cap U$, missä U on S:n parametriympäristö.

Pinta S on _sileäntapainen_ (l. _planaarinen_), jos se on homeomorfinen tasoalueen kanssa. Pinnan S alue A on sileäntapainen jos se on pintana sileäntapainen.

Olkoon A pinnan S sileänta- painen alue sekä $h_1 : A \to \Omega_1$ ja $h_2 : A \to \Omega_2$ homeomorfismeja taso- alueille Ω_1 ja Ω_2. Sanomme, että h_1 ja h_2 ovat <u>ekvivalentteja</u>, jos $h_1 \circ h_2^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ säilyttää kiertosuunnan. (Jos $f = h_1 \circ h_2^{-1}$ ja f^{-1} ovat jatkuvasti differentioi- tuvia, niin f:n Jacobin deter- minantti on joko >0 tai <0 koko alueessa Ω. Edellisessä tapauksessa f säilyttää kierto- suunnan ja jälkimmäisessä kääntää kiertosuunnan.)

Eo. ekvivalenssirelaatio jakaa homeomorfismit $h : A \to \Omega$ kah- teen luokkaan. Jos toist. niistä kutsutaan A:n (<u>positiiviseksi</u>) <u>suunnistukseksi</u>, niin A:st. tulee <u>suunnistettu alue</u>. A:n suunnistus indusoi suunnistuk- sen sen kaikkiin osa-alueisiin.

Olkoot A ja A' kaksi suunnis- tettua aluetta siten, että $A \cap A' \neq \emptyset$. Jos A ja A' indusoivat saman suunnistuksen jokaiseen jonkin $A \cap A'$ komponenttiin, niin A:n ja A':n suunnistukset ovat <u>yhteen- sopivia</u>.

Pinta S on <u>suunnistuva</u>, jos on mahdollista määrätä kaikille sileäntapaisille alueille yhteensopivat suunnistukset. Tällöin tulee jokaisessa pisteessä $p \in S$ määrätellyksi positiivinen kiertosuunta.

<u>Lause 2.1.</u> Pinta S on suunnistuva, jos ja vain jos on olemassa kokoelma H lokaaleja parametrejä, joilla on seuraavat ominaisuudet:
(i) H:n kuvausten $h : U \to V$ määritysjoukot peittävät S:n
(ii) Jos kuvausten $h_1, h_2 \in H$ määritysjoukot leikkaavat toisensa, niin $h_1 \circ h_2^{-1}$ on määritysjoukossaan kiertosuunnansäilyttävä.

Lauseen 2.1 todistuksen voi jokainen halutessaan laatia itse. Lauseen merkitys on siinä, että se antaa mallin, miten pinnalla voidaan määritellä erilaisia ominaisuuksia. Jos kohdassa (ii) sana "kiertosuunnansäilyttävä" korvataan esim. sanalla jatkuvasti differentioituva, voidaan pinnalla tarkastella esim. käyrän tangentti- tai funktioiden osittaisderivaattojen yleisen kuvauksen siten, että ko. lokaali tarkastelu siirretään lokaalille parametrille tasoon. Koska <u>parametrinvaihtokuvaukset</u> $h_1 \circ h_2^{-1}$ ovat esimerkiksi tapauksessa jatkuvasti differentioituvia, ei tutkittava ominaisuus riipu lokaalin parametrin valinnasta. Vaatimalla kuvauksista $h_1 \circ h_2^{-1}$ mahdollisimman paljon voidaan pinnalle tarkastella mahdollisimman paljon eri ominaisuuksia. Tasoalueitten välisten kuvausten tärkein tämäntapainen ominaisuus on analyyttisyys, so. että kuvauksella on kompleksinen derivaatta. Jos kohdassa (ii) vaaditaan, että kuvausten $h_2 \circ h_1^{-1}$ on oltava analyyttisiä, niin S:ää kutsutaan silloin <u>Riemannin pinnaksi</u>.

3. Riemannin pinta

Esitämme Riemannin pinnan määritelmän edellisen pykälän tarkasteluista riippumattomalla tavalla.

Riemannin pinnalla tarkoitetaan paria (S,H), missä S on yhtenäinen Hausdorffin avaruus ja H luokka kuvauksia h, joilla on seuraavat ominaisuudet:

(i) Jokainen $h \in H$ on S:n avoimen joukon homeomorfismi ~~tason~~ avoimelle joukolle.

(ii) Kuvausten $h \in H$ määritysjoukot peittävät S:n

(iii) Jos kuvauksien $h_1, h_2 \in H$ määritysjoukoilla on epätyhjä leikkaus, niin $h_1 \circ h_2^{-1}$ on määritysjoukossaan (suoraan) konforminen.

Huomioita. 1. Ehdoista (i) ja (ii) seuraa, että S on pinta.

2. Koska konformikuvaus säilyttää kiertosuunnan, on S suunnistuva pinta (Lause 2.1)

3. Ehdot (i)-(iii) täyttävää luokkaa H kutsutaan S:n konformisiksi strukturiksi. Riemannin pinta (S,H) on siis pari, missä S on pinta ja H sen konforminen struktuuri. Usein riittää käyttää Riemannin pinnasta (S,H) merkintää S, vaikka itse asiassa

(kuvauksen h määritys joukkojen yhdisteenä)

2. luento

9. Jos $h : U \to V$ on lokaali parametri, U on peitetty avoimilla joukoilla $U_i \subset U$ ja $h|U_i \in \bar{H}$ kaikilla i, niin $h \in \bar{H}$.

konforminen struktuuri H pitää tietenkin sisällään myös pinnan S. Puhetapa "Riemannin pint. H" olisi siis loogisesti oikein, mutta "Riemannin pint. S" on vakiintunut.

4. Kaksi S:n konformista struktuuria H_1 ja H_2 pidetään samana, jos niiden yhdiste $H_1 \cup H_2$ on S:n konforminen struktuuri. Näin ollen $(S, H) = (S', H')$ $\Leftrightarrow$ $S = S'$ ja $H \cup H'$ on S:n konforminen struktuuri.

5. Olkoon (S, H) Riemannin pint. ja $\mathcal{H}$ kaikkien konformisten struktuurien H' joukko, joille $(S, H) = (S, H')$. Silloin

$$\bar{H} = \bigcup_{H' \in \mathcal{H}} H'$$

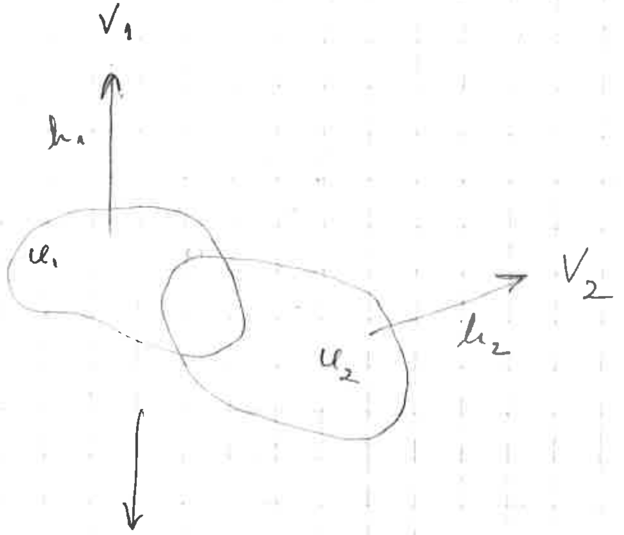
on S:n konforminen struktuuri, joka määrää saman Riemannin pinnan kuin H ja joka sisältää mahdollisimman paljon lokaaleja parametreja.

6. $(S, H_1) = (S, H_2) \Leftrightarrow \bar{H}_1 = \bar{H}_2$.

7. Jos $h : U \to V$ on luokkaa $\bar{H}$ ja $U' \subset U$ on avoin, niin $h|U' \in \bar{H}$.

8. Jos $g : V \to V'$ on konforminen, niin $g \circ h \in \bar{H}$.

10. Tarvittaessa voidaan aina ajatella

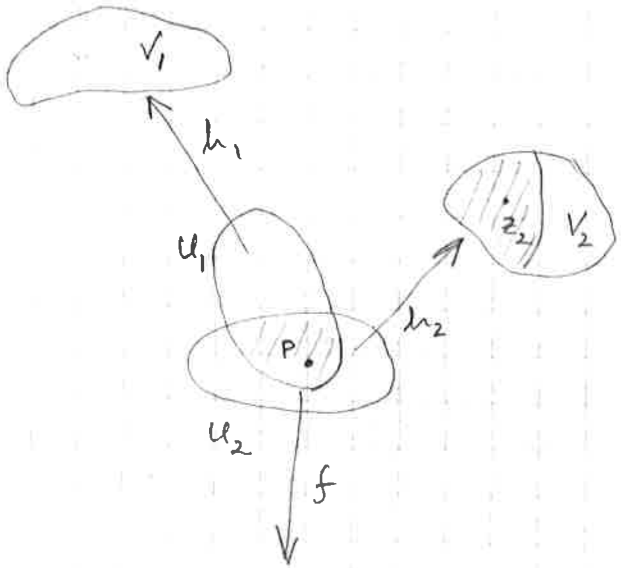


H korvataksi maksimaalille struktuurille $\overline{H}$ tai jollakin struktuurille $H' \supset H$. Joskus on tapana sanoa, että H on (maksimaalinen) konforminen struktuuri $\overline{H}$ kanta.

II. Riemannin pinta on aina numeroituva ja metrisoituva. (Todistukset syvällisiä.) Voitanemme sanoa, että Riemannin pinta vastaa sitä havainnollista mielikuvaa pinnasta, joka saadaan analyysin kursseilla (jolloin tarkastellaan pintaa $\mathbb{R}^3$:n aliavaruutena).

<u>Määritelmä</u> 1. Riemannin pinnan (S, H) kompleksiarvoinen funktio f on <u>analyyttinen</u>, jos $f \circ h^{-1} : V \to \mathbb{C}$ on kompleksimuuttujan kompleksiarvoisena funktiona analyyttinen aina, kun $h : U \to V$ on konformiseen struktuuriin H kuuluva lokaali parametri.

<u>Huomautus</u>. 1. Olkoot $h_1 : U_1 \to V_1$ ja $h_2 : U_2 \to V_2$ H:n lokaalisia parametrejä siten, että $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Oletetaan, että $f \circ h_1^{-1} : V_1 \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Joukossa $h_2(U_1 \cap U_2)$ on silloin



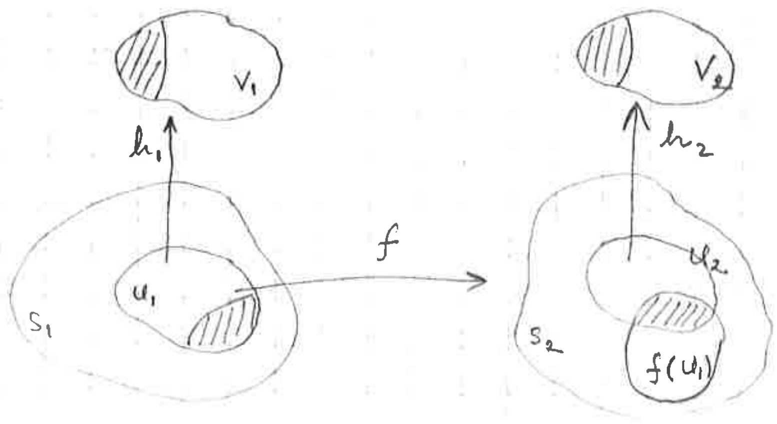
$$f\circ h_2^{-1} = (f\circ h_1^{-1})\circ(h_1\circ h_2^{-1}).$$

Riemannin pinnan määritelmän mukaan $h_1\circ h_2^{-1}$ on konforminen ja siis analyyttinen, joten $f\circ h_2^{-1}$ on analyyttinen joukossa $h_2(U_1\cap U_2)$. Funktion $f: S\to \mathbb{C}$ analyyttisyys pisteessä $p\in S$ voidaan siis määritellä lokaalin parametrin valinnasta riippumattomalla tavalla.

2. Olkoon $(S,H_1) = (S,H_2)$ ja f (S,H_1):n analyyttinen funktio. Osoitetaan, että f on myös (S,H_2):n analyyttinen funktio. Olkoon tätä varten $h_2: U_2\to V_2$ H_2:n lokaali parametri ja $z_2\in V_2$. Silloin on olemassa H_1:n lokaali parametri $h_1: U_1\to V_1$, jolle $p = h_2^{-1}(z_2)\in U_1$. Pisteen z_2 ympäristössä $h_2(U_1\cap U_2)$ on

$$f\circ h_2^{-1} = (f\circ h_1^{-1})\circ(h_1\circ h_2^{-1}),$$

joten $f\circ h_2^{-1}$ on analyyttinen avoimen joukon V_2 mielivaltaisesti valitussa pisteessä z_2. Tällöin $f\circ h_2^{-1}$ on analyyttinen joukossa V_2.



Yleisemmin voidaan tarkastella kahden Riemannin pinnan välisiä kuvauksia.

<u>Määritelmä 2.</u> Riemannin pintojen (S_1, H_1) ja (S_2, H_2) välinen jatkuva kuvaus f on <u>analyyttinen</u>, jos kaikki funktiot $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, ovat analyyttisiä, joiden määritysjoukko on epätyhjä.

<u>Huomioita.</u> 1. $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ on määritelty, jos $f(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Määritysjoukko on tällöin $h_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2))$. Jotta voitaisiin tutkia funktion $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ analyyttisyyttä on, tämän joukon oltava avoin. Tätä varten määritelmässä rajoitutaan jatkuviin kuvauksiin f.

2. Jatkuvan kuvauksen $f: S_1 \to S_2$ analyyttisyys pisteessä $p \in S_1$ ei riipu siitä, mitkä lokaalit parametrit $h_1 \in H_1$ ja $h_2 \in H_2$ valitaan, kunhan vain $p \in U_1$ ja $f(p) \in U_2$.

3. Kuvauksen $f: (S_1, H_1) \to (S_2, H_2)$ analyyttisyys ei riipu siitä, korvataanko H_1 ja H_2 konformisilla struktuureilla H_1' ja H_2', joille $(S_i, H_i) = (S_i, H_i')$.

Jos $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ on tasoalueiden välinen analyyttinen funktio, niin f on avoin ja diskreetti (= jokaisen pisteen $z_2 \in \Omega_2$ alkukuva $f^{-1}(z_2)$ koostuu isoloiduista pisteistä, ts. joukolla $f^{-1}(z_2)$ ei ole kasautumispisteitä Ω_1:ssä).

Olkoon $f : (S_1, H_1) \to (S_2, H_2)$ analyyttinen. Koska lokaalisti on

$$f = h_2^{-1} \circ (h_2 \circ f \circ h_1^{-1}) \circ h_1 ,$$

$h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ on tavallisessa mielessä analyyttinen sekä h_1 ja h_2 ovat homeomorfismeja, saadaan

Lause 3.1. Analyyttinen kuvaus $f : (S_1, H_1) \to (S_2, H_2)$ on avoin ja diskreetti.

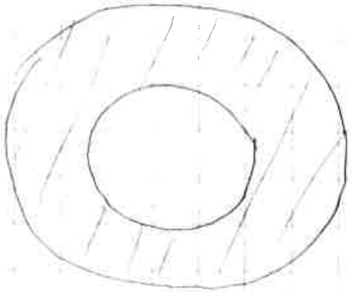
Jos $f : (S_1, H_1) \to (S_2, H_2)$ on analyyttinen bijektio, niin f:ää kutsutaan konformikuvaukseksi. Lauseen 3.1 nojalla f^{-1} on jatkuva, joten konformikuvaus on homeomorfismi. Kaksi Riemannin pintaa sanotaan konformisesti ekvivalenteiksi, jos ne voidaan konformisesti kuvata toisilleen.

Konformikuvauksen käänteiskuvaus on konforminen, sillä tasoalueiden välisen analyyttisen bijektion käänteiskuvaus on analyyttinen.

3. luento

Erikoistapauksia. 1. Olkoon S tasoalue. Silloin $H = \{id\}$ on S:n konforminen struktuuri. Funktio $f : (S, H) \to \mathbb{C}$ on analyyttinen Määritelmän 1 mielessä, jos ja vain jos $f : S \to \mathbb{C}$ on tavallinen analyyttinen funktio.

Määritelmä 2 sisältää erikoistapauksenaan Määritelmän 1, kun



(S_2, H_2) korvataan Riemannin pinnalla $(\mathbb{C}, \{id\})$. (Tällöin kuvauksien $h_2 \circ f \circ h_1^{-1} = f \circ h_1^{-1}$ määritysjoukot ovat automaattisesti avoimia, joten oletus f:n jatkuvuudesta käy tarpeettomaksi.)

2. Olkoon (S, H) Riemannin pinta ja $A \subset S$ alue. H:n lokaalien parametrien $h : U \to V$ rajoittumat $h \mid A \cap U$ muodostavat A:n konformisen struktuurin.

3. Olkoon $S = \hat{\mathbb{C}}$ Riemannin pallo, $h_1 : U_1 = \{z \mid |z| < 2\} \to V_1 = U_1$ identtinen kuvaus ja $h_2 : U_2 = \{z \mid |z| > 1\} \to V_2 = \{z \mid |z| < 1\}$ kuvaus, jolle $h_2(z) = 1/z$, $h_2(\infty) = 0$. Joukossa $U_1 \cap U_2$ on

$$h_1(h_2^{-1}(z)) = 1/z$$

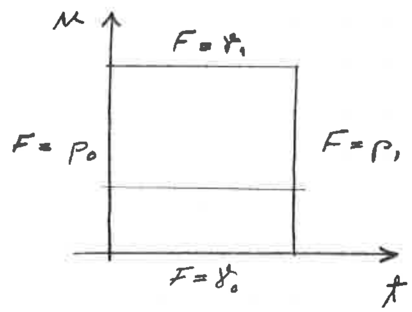
$$h_2(h_1^{-1}(z)) = 1/z ,$$

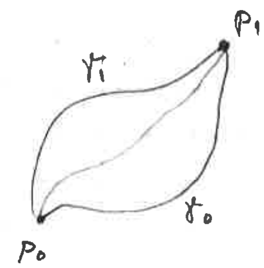
joten $H = \{h_1, h_2\}$ on $\hat{\mathbb{C}}$:n konforminen struktuuri. Funktion $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ analyyttisyys ∞:ssä ja pisteissä, joissa $f(z) = \infty$, määritellään Määritelmällä 2. Jos esim. $f(\infty) = \infty$, on kuvauksen

$$z \mapsto 1/f(1/z)$$

ollessa analyyttinen kiekossa $|z| < 1$. Näin ollen saadaan kaikki Funktioteorian kursseilla esiintyneet analyyttisyyden määritelmät erikoistapauksina Määritelmästä 2.

Määritelmän 2 mielessä analyyttisiä funktioita $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$, Ω tasoalue, kutsutaan meromorfisiksi, ja pisteitä $z \in \Omega$, joissa $f(z) = \infty$ funktion f navoiksi. Määritelmän 2 mielessä navat eivät ole itse asiassa lainkaan erikoispisteitä. Funktio on näissä napapisteissä yhtä analyyttinen kuin muissakin pisteissä.





II Kerrospinnat

1. Perusryhmä

Olkoot $\gamma_1 : I \to S$ ja $\gamma_2 : I \to S$ pinnan S polkuja siten, että $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Silloin voidaan muodostaa **tulopolku** $\gamma_1 \gamma_2$, joka määritellään kuvauksena

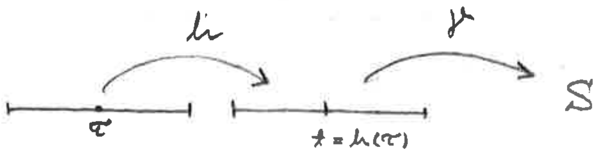
$$\gamma_1 \gamma_2 (t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{jos } 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & \text{jos } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Polun $\gamma : I \to S$ **vastakkainen polku** $(\gamma^{-1} =)\ \overleftarrow{\gamma}$ määritellään yhtälöllä

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(1-t).$$

Olkoot γ_0 ja γ_1 polkuja siten, että $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p_0$ ja $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = p_1$. Polut ovat **homotooppisia**, jos on olemassa jatkuva kuvaus $F : I \times I \to S$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $F(t, 0) = \gamma_0(t)$
(ii) $F(t, 1) = \gamma_1(t)$
(iii) $F(0, u) = p_0$
(iv) $F(1, u) = p_1$.



Kuvausta F sanotaan <u>deformaatioksi</u> tai <u>homotopiaksi</u> γ_0:st. γ_1:aan ja sille käytetään merkintää $F: \gamma_0 \simeq \gamma_1$. Merkintä $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ tarkoittaa, että γ_0:lla ja γ_1:llä on sama alkupiste ja sama loppupiste ja että ne ovat homotooppisia.

Jos $\Gamma(p_0,p_1)$ on kaikkien jatkuvien polkujen $\gamma: I \to S$ joukko, joille $\gamma(0) = p_0$ ja $\gamma(1) = p_1$, niin $\simeq$ on joukon $\Gamma(p_0,p_1)$ ekvivalenssirelaatio. Polun γ homotopialuokkaa merkitään $[\gamma]$:lla.

Olkoon $h: I \to I$ jatkuva ja ei-vähenevä surjektio. Silloin h on <u>parametrinvaihtokuvaus</u> ja polku $\gamma \circ h$ sanotaan saaduksi γ:sta <u>parametrinvaihdolla</u>.

<u>Lause 1.1.</u> $\gamma \simeq \gamma \circ h$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $F(t,\mu) = \gamma((1-\mu)t + \mu h(t))$. Silloin $F(I \times I) \subset \gamma(I) \subset S$, $F(t,0) = \gamma(t)$, $F(t,1) = \gamma(h(t))$, $F(0,\mu) = \gamma(0)$ ja $F(1,\mu) = \gamma(1)$. $\square$

Lauseen mukaan homotopialuokka tulee määrätyksi, kun tiedetään, Tällöin $\gamma : I \to \gamma(I)$ on homeomorfismi (vrt. Lause 1.2)

missä järjestyksessä $\gamma(t)$ piirtää joukon $\gamma(I)$ pisteet.

Jos γ on injektio, niin γ:aa sanotaan Jordan-kaareksi.

Lause 1.2. Jos $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(p_0, p_1)$ ovat Jordan kaaria ja $\gamma_0(I) = \gamma_1(I)$, niin $\gamma_0 \approx \gamma_1$.

Todistus. $h = \gamma_0^{-1} \circ \gamma_1 : I \to I$ on jatkuva bijektio, joten h on monotoninen. Koska $h(0) = \gamma_0^{-1}(\gamma_1(0)) = \gamma_0^{-1}(p_0) = 0$, on h kasvava. Koska $\gamma_1 = \gamma_0 \circ h$, seuraa väite Lauseesta 1.1. □

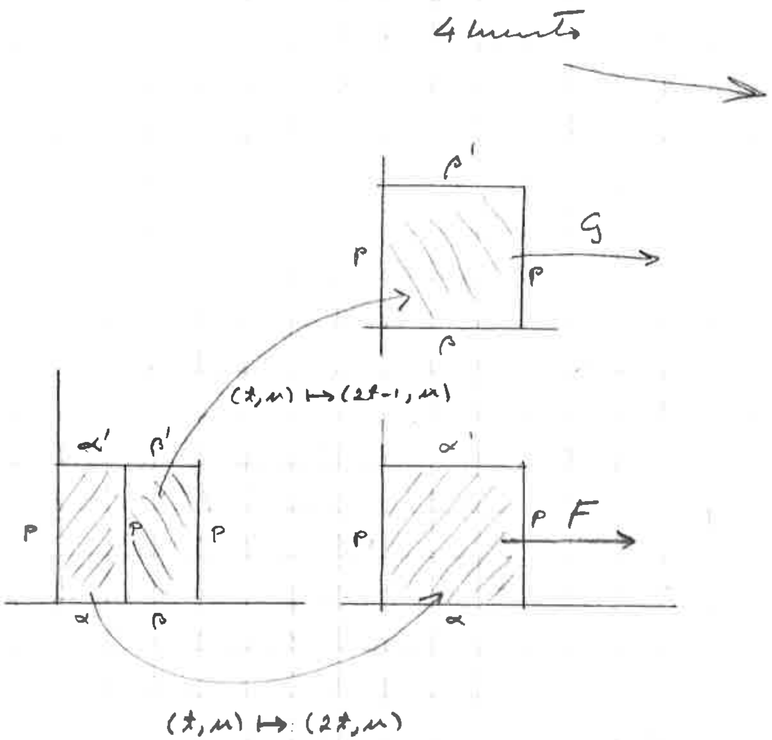
γ_0^{-1} on tässä käänteiskuvaus, ei vastakkainen polku, mikä käy ilmi asiayhteydestä.

Jordan-kaaren homotopialuokka tulee siis määrätyksi, kun annetaan alkupiste, loppupiste ja polun jälki.

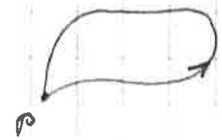
Polku on suljettu l. umpinainen, jos $\gamma(0) = \gamma(1)$. Jos $\gamma : I/\{0,1\} \to \gamma(I)$ on tällöin homeomorfismi, niin γ:aa sanotaan Jordan-käyräksi.

Jos $\gamma \in \Gamma(p,p)$ on Jordan-käyrä, niin pistejoukko $\gamma(I)$ ei määrää homotopialuokkaa yksikäsitteisesti; sillä $\gamma(I) = \overleftarrow{\gamma}(I)$, mutta yleensä $\gamma \not\approx \overleftarrow{\gamma}$. Jos kuitenkin joukosta $\gamma(I)$

ts. joko $\gamma^{-1}(p_1) < \gamma^{-1}(p_2)$ vai $\gamma^{-1}(p_2) < \gamma^{-1}(p_1)$.



valitaan kaksi eri pistettä p_1 ja p_2 ja määrätään kumpi on ensin taist., niin homotopialuokka tulee yksikäs. määrätyksi. (Todistus samantapainen kuin Lauseessa 1.2.)
Näin ollen kuvio



määrää yksikäsitteisen homotopialuokan.

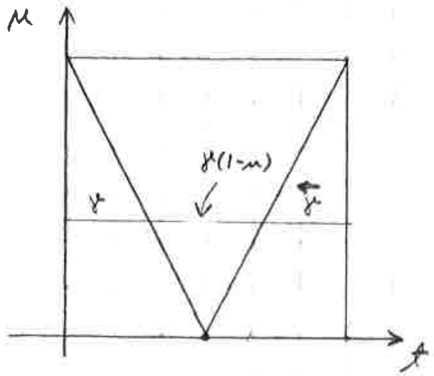
Valitaan $p \in S$ ja tarkastellaan suljettujen polkujen joukkoa $\Gamma = \Gamma(p,p)$. Jos $\alpha, \beta \in \Gamma$, niin $\alpha\beta \in \Gamma$ ja $\overleftarrow{\alpha} \in \Gamma$.

Lemma 1. Jos $\alpha \simeq \alpha'$ ja $\beta \simeq \beta'$, niin $\alpha\beta \simeq \alpha'\beta'$ ja $\overleftarrow{\alpha} \simeq \overleftarrow{\alpha'}$.

Todistus Jos $F: \alpha \simeq \alpha'$ ja $G: \beta \simeq \beta'$, niin muodostetaan $H: I \times I \to S$ seuraavan kuvion mukaisesti: Silloin $H: \alpha\beta \simeq \alpha'\beta'$.
Jälkimmäisessä tapauksessa asetetaan $H(t,u) = F(1-t,u)$. □

Jos $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$, niin yleensä $\alpha(\beta\gamma) \neq (\alpha\beta)\gamma$. Polut saadaan kuitenkin toisistaan parametrin vaihdolla, joten

$[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2]$



$\gamma(2-2t) = \gamma^{-1}(2t-1)$

$2-2t = 1-(2t-1)$

$(\alpha\beta)\gamma \approx \alpha(\beta\gamma)$. Voidaan siis puhua homotopialuokasta $[\alpha\beta\gamma]$. Näin ollen joukossa $\Gamma/\approx$ on määritelty assosiatiivinen laskutoimitus.

Lemma 2. Jos $\gamma_0(t) \equiv p$, niin $\gamma \approx \gamma\gamma_0 \approx \gamma_0\gamma$ kaikilla $\gamma \in \Gamma$.

Todistus. Polut saadaan toisistaan parametrinvaihdolla. □

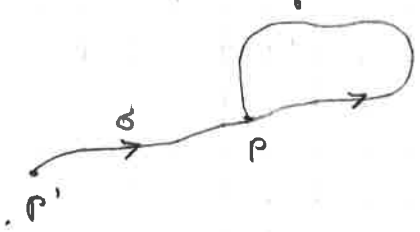
Lemma 3. Jos $\gamma \in \Gamma$, niin $\gamma\overleftarrow{\gamma} \approx \overleftarrow{\gamma}\gamma \approx \gamma_0$.

Todistus. Asetetaan

$$F(t,\mu) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le t \le (1-\mu)/2 \\ \gamma(1-\mu) & (1-\mu)/2 \le t \le (1+\mu)/2 \\ \gamma(2-2t) & (1+\mu)/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Silloin $F: \gamma\overleftarrow{\gamma} \approx \gamma_0$. □

Merkitään $1 = [\gamma_0]$ ja $[\gamma]^{-1} = [\overleftarrow{\gamma}]$. Tällöin $\Gamma/\approx$ on ryhmä. Sitä kutsutaan S:n pisteeseen p liittyväksi perusryhmäksi (l. Poincarén ryhmäksi) $\pi_1(S,p)$.



Tarkastellaan kahteen eri pisteeseen $p, p' \in S$ liittyviä perusryhmiä. Koska S on polkuyhtenäinen, voidaan p' ja p yhdistää polulla $\sigma : I \to S$, jolloin siis $\sigma(0) = p'$ ja $\sigma(1) = p$. Liitetään jokaiseen $\gamma \in \Gamma(p,p)$ polku $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1} \in \Gamma(p',p')$. Jos $\gamma_1 \approx \gamma_2$, niin $\gamma_1' \approx \gamma_2'$ (vrt. Lemma 1). Näin ollen σ määrää kuvauksen

$$\sigma_* : \pi_1(S,p) \to \pi_1(S,p'),$$

missä $\sigma_*([\gamma]) = [\sigma\gamma\sigma^{-1}]$.

<u>Lause 1.3.</u> σ_* on isomorfismi.

<u>Todistus.</u> 1. σ_* on homomorfismi, sillä

vrt. Lemma 2

$$\sigma_*([\gamma_1\gamma_2]) = [\sigma\gamma_1\gamma_2\sigma^{-1}] = [\sigma\gamma_1\gamma_0\gamma_2\sigma^{-1}]$$

$$= [(\sigma\gamma_1\sigma^{-1})(\sigma\gamma_2\sigma^{-1})] = [\sigma\gamma_1\sigma^{-1}][\sigma\gamma_2\sigma^{-1}]$$

vrt. Lemma 3

$$= \sigma_*([\gamma_1])\,\sigma_*([\gamma_2]).$$

2. σ_* on injektio, sillä jos $\gamma' = \sigma_*([\gamma])$, on $\gamma' \approx \sigma\gamma\sigma^{-1}$. Tästä seuraa, että (Lemmat 1, 2 ja 3)

$\gamma \approx \delta^{-1}\gamma'\delta$, joten aina saadaan $[\gamma] = [\delta^{-1}\gamma'\delta]$ kuvautuu $[\gamma']$:lle.

3. δ_* on surjektio, sillä jos $\gamma' \in \Gamma(p',p')$, niin $\delta^{-1}\gamma'\delta \in \Gamma(p,p)$ ja

$$\delta_*[\delta^{-1}\gamma'\delta] = [\delta\delta^{-1}\gamma'\delta\delta^{-1}] = [\gamma']. \square$$

Itse asiassa nähtiin, että $(\delta_*)^{-1} = (\delta^{-1})_*$. Koska kaikki perusryhmät $\pi_1(S,p)$ ovat isomorfisia, voidaan puhua pinnan S perusryhmästä $\pi_1(S)$.

Perusryhmä voidaan eo. tavalla määritellä kaikille topologisille avaruuksille S. Yleisessä tapauksessa $\pi_1(S,p)$ riippuu pisteestä p, mutta $\pi_1(S,p)$ ja $\pi_1(S,p')$ ovat isomorfisia, jos p ja p' ovat samassa polkuyhtenäisessä komponentissa.

Määritelmä. Pinta on *yhdesti yhtenäinen*, jos $\pi_1(S)$ on triviaali (= sisältää vain neutraalialkion)

Jos siis S on yhdesti yhtenäinen

ja $\gamma \in \Gamma(p,p)$, niin $\gamma \simeq \gamma_0$, missä $\gamma_0(t) \equiv p$.

Olkoon $f : S \to S'$ jatkuva kuvaus. Jokaista polkua $\gamma : I \to S$ vastaa polku $f \circ \gamma : I \to S'$. Jos $F : \gamma \simeq \gamma'$ niin $f \circ F : f\circ\gamma \simeq f \circ \gamma'$. Näin ollen f indusoi kuvauksen $f_* : \pi_1(S,p) \to \pi_1(S',p')$, $p' = f(p)$, jolle

$$f_*([\gamma]) = [f\circ\gamma].$$

Lause 1.4. f_* on homomorfismi. Jos f on homeomorfismi, niin f_* on isomorfismi.

Todistus. 1. $f\circ(\gamma_1\gamma_2) = (f\circ\gamma_1)(f\circ\gamma_2)$

2. Jos f on homeomorfismi, niin $(f^{-1})_*$ on määritelty. Tällöin

$$f_*\circ(f^{-1})_*[\gamma] = [f\circ f^{-1}\circ\gamma] = [\gamma]$$

$$(f^{-1})_*\circ f_*[\gamma] = [\gamma],$$

joten $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$ ja f_* on isomorfismi. □

Todistus osoittaa, että merkintä f_*^{-1} ei ole monimielinen.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S,p) & \xrightarrow[f_*]{} & \pi_1(S',p') \end{array}$$

Huomautus: Jotta S_1 ja S_2 olisivat homeomorfisia, on siis välttämätöntä, että niillä on isomorfiset perusryhmät. Tämä ei kuitenkaan ole riittävää: Esim. Riemannin pallo ja yksikkökiekko ovat yhdesti yhtenäisiä, mutta ne eivät ole homeomorfisia, sillä toinen on kompakti, mutta toinen ei ole.

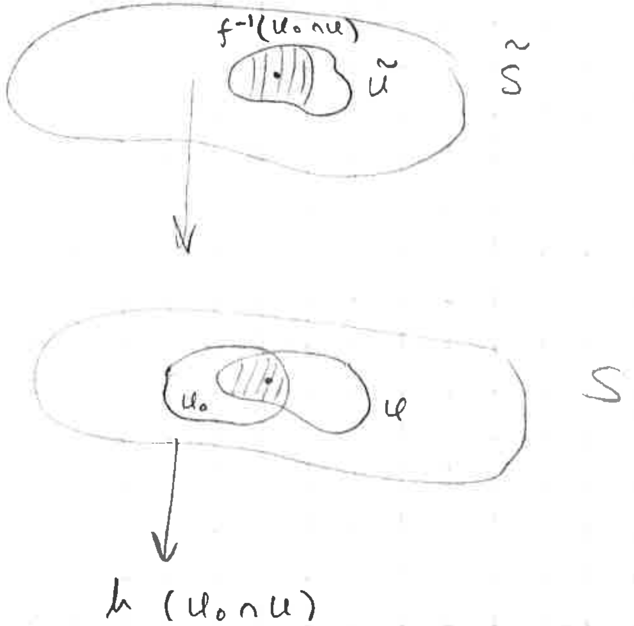
Kompakteille pinnoille S_1 ja S_2 on yllättäen voimassa, että ne ovat homeomorfisia, jos ja vain jos $\pi_1(S_1) \simeq \pi_1(S_2)$. Tämä johtuu siitä, että kompakti pinta on aina homeomorfinen pallon kanssa, johon on lisätty liitty määrä "kahvoja". Perusryhmä $\pi_1(S)$ määrää kahvojen lukumäärän ja siis myös pinnan topologisen tyypin.

5. luento

Esimerkkejä. 1. $\mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen. Todistus: Osoitetaan, että $\pi_1(\mathbb{C}, 0)$ on triviaali. Olkoon $\gamma \in \Gamma(0,0)$ ja $\gamma_0(t) \equiv 0$. Määritellään $F: I \times I \to \mathbb{C}$ asettamalla $F(t,u) = (1-u)\gamma(t)$. Silloin $F(t,0) = \gamma(t)$, $F(t,1) = 0 = \gamma_0(t)$, $F(0,u) = 0$ ja $F(1,u) = 0$, joten $F: \gamma \approx \gamma_0$.

2. Alue $\Omega \subset \mathbb{C}$ on tähtimäinen, jos on olemassa $z_0 \in \Omega$ siten, että jokainen piste $z \in \Omega$ voidaan yhdistää Ω:aan sisältyvällä janalla z_0:aan. Tähtimäinen alue on yhdesti yhtenäinen. Todistus. Osoitetaan, että $\pi_1(\Omega, z_0)$ on triviaali. Olkoon $\gamma \in \Gamma(z_0, z_0)$ ja $F(t,u) = (1-u)\gamma(t) + u z_0$. Silloin $F: \gamma \approx \gamma_0$ alueessa Ω. Kupera alue on tähtimäinen, joten kupera alue on yhdesti yhtenäinen. Koska $\mathbb{C}$ on kupera, on esim. 1 tästä erikoistapaus.

3. Tasoa, josta on poistettu yksi piste, kutsutaan punkteeratuksi tasoksi (vast. punkteerattu kiekko jne.) Punkteerattu taso ei ole yhdesti yhtenäinen, sen perusryhmä on yhden alkion virittämä ääretön syklinen ryhmä.



2. Sileä kerrospinta

Pinnan S sileällä kerrospinnalla tarkoitetaan paria $(\tilde{S}, f)$, missä $\tilde{S}$ on yhtenäinen Hausdorffin avaruus ja $f : \tilde{S} \to S$ on lokaali homeomorfismi (= jokaisella pisteellä $\tilde{p} \in \tilde{S}$ on (avoin) ympäristö $\tilde{U}$ siten, että $U = f(\tilde{U})$ on avoin ja $f|\tilde{U} : \tilde{U} \to U$ on homeomorfismi).

Jos $p = f(\tilde{p})$, niin p on $\tilde{p}$:n projektio; $\tilde{p}$:n sanotaan olevan p:n yläpuolella. Kuvausta f kutsut. projektioksi.

Lause 2.1. $\tilde{S}$ on pinta ja $f : \tilde{S} \to S$ on jatkuva ja avoin.

Todistus. Olkoon $\tilde{p} \in \tilde{S}$ ja $p = f(\tilde{p})$. Olkoon $\tilde{U}$ pisteen $\tilde{p}$ ja $U = f(\tilde{U})$ pisteen p ympäristö siten, että $f|\tilde{U} : \tilde{U} \to U$ on homeomorfismi. Silloin $f|\tilde{U}$ on jatkuva, joten f on jatkuva pisteessä $\tilde{p}$.

Koska U on avoin seuraa, että f on avoin kuvaus.

Olkoon $h : U_0 \to V_0$ pinnan S lokaali parametri siten, että $p \in U_0$.

Silloin $f^{-1}(U_0 \cap U)$ on $\tilde{S}$:n avoin joukko, joka sisältää $\tilde{p}$:n, $h(U_0 \cap U)$ tason avoin joukko ja $h \circ (f \mid f^{-1}(U_0 \cap U))$ on näiden välinen homeomorfismi. □

Olkoon $\gamma : I \to S$ polku ja $\gamma(0) = a$. Polkua $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{S}$ sanotaan <u>jatkoksi pitkin</u> γ:aa <u>pisteestä</u> $\tilde{a} \in \tilde{S}$ (tai γ:n <u>nostoksi</u> <u>pisteestä</u> $\tilde{a} \in \tilde{S}$), jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

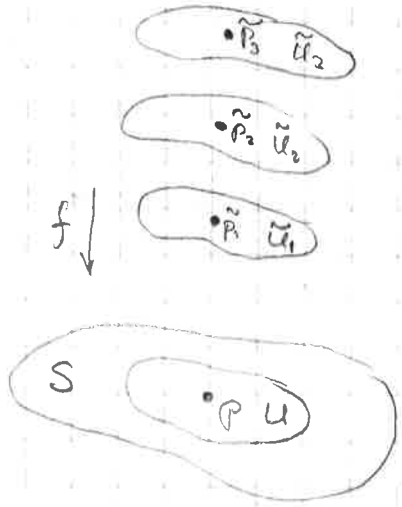
(i) $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$

(ii) $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

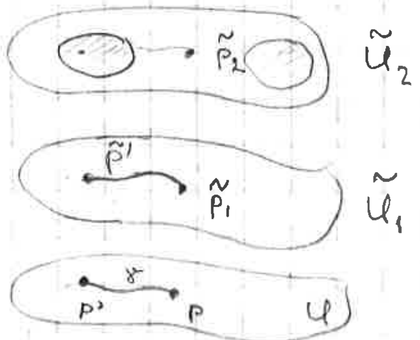
<u>Lause 2.2.</u> Jos $(\tilde{S}, f)$ on S:n sileä peitepinta ja $\tilde{\gamma}$ ja $\tilde{\gamma}'$ ovat jatkoja pitkin γ:aa samasta pisteestä $\tilde{a}$, niin $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $E = \{ t \in I \mid \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t) \}$. Koska $0 \in E$, on $E \neq \emptyset$. Olkoon $t_n \in E$ siten, että $t_n \to t \ni I$. Jatkuvuuden nojalla $\tilde{\gamma}(t_n) \to \tilde{\gamma}(t)$ ja $\tilde{\gamma}'(t_n) \to \tilde{\gamma}'(t)$. Koska $\tilde{\gamma}(t_n) = \tilde{\gamma}'(t_n) = \tilde{p}_n$, on jonolla $(\tilde{p}_n)$ raja-arvona sekä $\tilde{\gamma}(t)$ että $\tilde{\gamma}'(t)$. Koska $\tilde{S}$ on Hausdorff, on raja-arvo yksikäsitteisesti määrätty, joten $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)$, ts. $t \in E$ ja E on suljettu.

Annetun pisteen $p \in S$ ympäristössä voidaan siis kuvapinta $(\tilde{S}, f)$ esittää seuraavasti:



Pisteet $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ ovat p:n päällä, vastaavasti ympäristöt $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ kuvautuvat homeomorfisesti p:n ympäristölle U.



Osoitetaan vielä, että E on avoin. Olkoon $t_0 \in E$ sekä U ja $\tilde{U}$ pisteiden $\gamma(t_0)$ ja $\tilde{\gamma}(t_0)$ homeomorfiset ympäristöt. Koska $\tilde{\gamma}$ ja $\tilde{\gamma}'$ ovat jatkuvia, ne kuvaavat jonkin t_0:n ympäristön $\tilde{U}$:hun. Koska näillä kuvilla on sama projektio ja $f|\tilde{U}$ on injektio, ovat ne samoja, ts. $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$ pisteen t_0 ympäristössä eli E on avoin.

Koska I on yhtenäinen, on $E = I$. □

Eo. kuvassa tilanne on tarpeettoman säännöllinen: Kaikki ympäristöt $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ ovat homeomorfisia saman ympäristön U kanssa. Määritelmä selvästi sallii sen, että jossakin $\tilde{U}_i$:ssä on "reikä", ts. tilanne voi olla seuraavanlainen: (kuva)

Tällöin ympäristöstä $\tilde{U}_2$ puuttuu esim. piste, joka projisoituisi pisteelle $p' \in U$. Sen sijaan ympäristössä $\tilde{U}_1$ tällainen piste $\tilde{p}'$ on olemassa.

Tarkastellaan polkua $\gamma: I \to U$ pisteestä p pisteeseen p'. Se voidaan nostaa pinnalle $\tilde{S}$ pisteestä $\tilde{p}_1$, mutta ei voida nostaa alkavaksi pisteestä $\tilde{p}_2$.

Sileällä kerrospinnalla jatko pitkin annettua polkua annetusta pisteestä ei siis aina ole mahdollinen.

<u>Määritelmä.</u> Pinnan S sileä kerrospinta $(\tilde{S}, f)$ on <u>rajoittamaton</u>, jos on olemassa jatko pitkin jokaista polkua $\gamma : I \to S$ jokaisesta pisteen $\gamma(0)$ yläpuolella olevasta pisteestä.

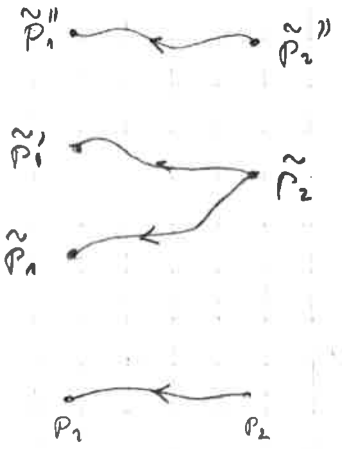
6. luento ⟶

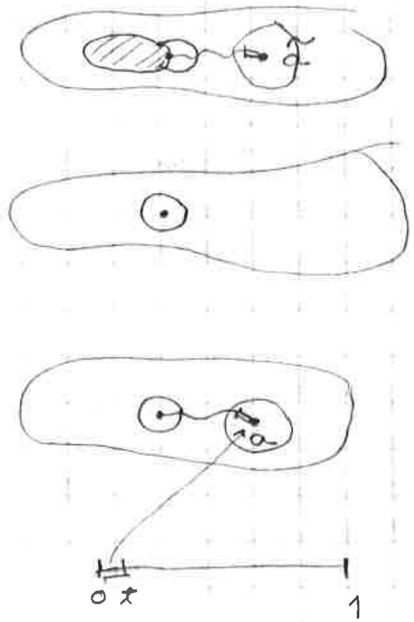
<u>Huomio</u>: Jos $(\tilde{S}, f)$ on S:n rajoittamaton kerrospinta, niin f on surjektio.

<u>Todistus.</u> Olkoon $p \in S$ ja $\gamma_0(t) \equiv p$. Silloin on olemassa $\tilde{\gamma}_0 : I \to \tilde{S}$ siten, että $f \circ \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0$. Tällöin $f(\tilde{\gamma}_0(0)) = \gamma_0(0) = p$. □

<u>Lause 2.3.</u> Jos $(\tilde{S}, f)$ on S:n rajoittamaton kerrospinta ja $p_1, p_2 \in S$, niin joukot $f^{-1}(p_1)$ ja $f^{-1}(p_2)$ ovat yhtä mahtavia.

<u>Todistus.</u> Olkoon $\gamma : I \to S$ polku, jolle $\gamma(0) = p_1$ ja $\gamma(1) = p_2$. Jos $\tilde{p}_1 \in f^{-1}(p_1)$, niin $\tilde{\gamma}$ olkoon jatko pitkin γ:an pisteestä $\tilde{p}_1$. Merkitään





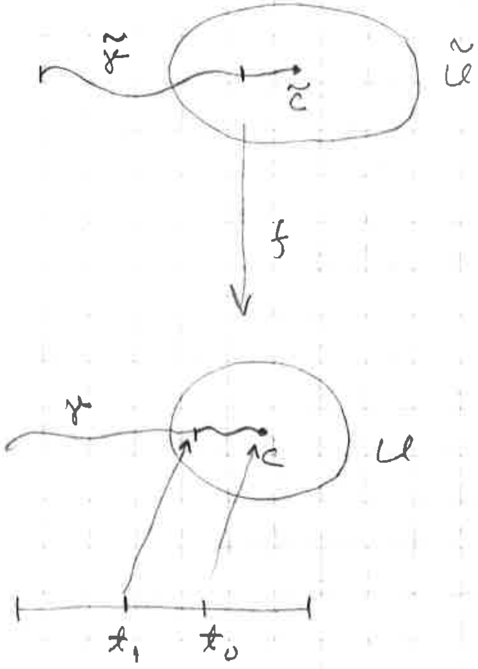
$\tilde p_2 = \tilde\gamma(1)$. Silloin $\tilde p_2 \in f^{-1}(p_2)$. Näin on saatu kuvaus $\varphi : f^{-1}(p_1) \to f^{-1}(p_2)$, $\tilde p_1 \overset{\varphi}{\mapsto} \tilde p_2$. Lause 2.2 sanoo, että φ on injektio. Koska $(\tilde S, f)$ on rajoittamaton kerrospinta, on φ surjektio. □

Joukon $f^{-1}(p)$, $p \in S$, (pisteestä p riippumatonta) alkioiden lukumäärää kutsutaan rajoittamattoman kerrospinnan $(\tilde S, f)$ lehtien lukumääräksi.

Lause 2.4. Olkoon $(\tilde S, f)$ pinnan S sileä kerrospinta. Jos jokaisella pisteellä $p \in S$ on (~~kompakti~~) ympäristö $V \subset S$ siten, että joukon $f^{-1}(V)$ kaikki komponentit ovat kompakteja, niin $(\tilde S, f)$ on rajoittamaton.

Todistus. Antiteesi: $(\tilde S, f)$ ei ole rajoittamaton. Silloin on olemassa polku $\gamma : I \to S$, jolla ei ole nostoa pisteestä $\tilde a \in \tilde S$, $f(\tilde a) = a = \gamma(0)$.

Olkoon E sellaisten pisteiden $t \in I$ joukko, että on olemassa jatko $\tilde\gamma$ pitkin polkua $\gamma|[0,t]$ pisteestä $\tilde a$.



Koska f on lokaali homeomorfismi, päätellään, että $E \neq \emptyset$ ja että E on avoin. [I:11c] Jos $t \in E$ ja $t' < t$, niin $t' \in E$. Näin ollen $E = \{t \mid 0 \leq t < t_0\}$, missä $0 < t_0 \leq 1$.

Väitämme, että $\tilde{\gamma}(t)$ poistuu jokaisesta kompaktista joukosta $A \subset \tilde{S}$, kun $t \to t_0$. (Eli että $\tilde{\gamma}(t)$ lähestyy $\tilde{S}$:n "ideaalireunaa".) Jos väite ei päde, on olemassa kompakti joukko $A \subset \tilde{S}$ ja jono $t_n \to t_0$ siten, että $\tilde{\gamma}(t_n) \in A$. Silloin on olemassa osajono $\tilde{\gamma}(t_{n_k}) \to \tilde{c} \in A$. Jatkuvuudesta seuraa, että $f(\tilde{c}) = \gamma(t_0) = c$. Olkoot $\tilde{U}$ ja U näiden pisteiden homeomorfiset ympäristöt. Olkoon $t_1 \in I$ siten, että

$$t_1 \leq t \leq t_0 \Rightarrow \gamma(t) \in U.$$

Määritellään välillä $[t_1, t_0]$

$$\tilde{\gamma}(t) = (f|\tilde{U})^{-1} \circ \gamma(t).$$

Koska $f|\tilde{U}$ on homeomorfismi, yhtyy tämä määritelmä aikaisempaan arvoille $t < t_0$. Silloin $\tilde{\gamma}$ on jatko pitkin polkua $\gamma|[0, t_0]$, joten $t_0 \in E$, mikä on mahdotonta.

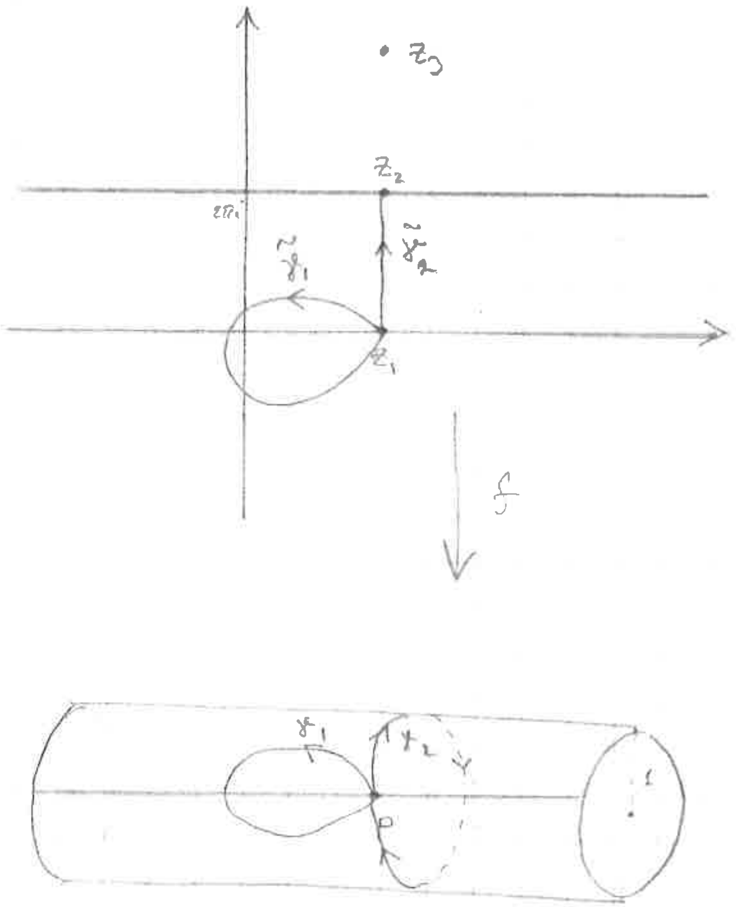
Olkoon V pisteen $\gamma(t_0)$ mielivaltainen (~~kompakti~~) ympäristö. Jos

$$t_1 \leq t \leq t_0 \Rightarrow \gamma(t) \in V,$$

niin $\tilde{\gamma}(t)$ sisältyy arvoilla $t_1 \leq t < t_0$ yhteen ja samaan joukon $f^{-1}(V)$ komponenttiin. Itseensä rajalla $\tilde{\gamma}(t)$, $t \geq t_1$, ei sisälly mihinkään $\tilde{S}$:n kompaktiin joukkoon, joten ko. joukon $f^{-1}(V)$ komponentti ei ole kompakti. $\square$

3 Monodromialause

Olkoon S pinta ja $(\tilde{S}, f)$ sen rajoittamaton kunnaspinta. Valitaan piste $a \in S$ ja $\tilde{a} \in \tilde{S}$ sen yläpuolelta. Olkoot γ_1 ja γ_2 kaksi polkua pisteestä a samaan pisteeseen b. Nostetaan γ_1 ja γ_2 pinnalle $\tilde{S}$ pisteestä $\tilde{a}$. Olkoon $\tilde{\gamma}_1$:n loppupiste $\tilde{b}_1$ ja $\tilde{\gamma}_2$:n loppupiste $\tilde{b}_2$. Silloin $\tilde{b}_1$ ja $\tilde{b}_2$ ovat molemmat b:n yläpuolella. Onko $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2$? Ei välttämättä, mutta jos $\gamma_1 \approx \gamma_2$, niin $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2$ ja lisäksi $\tilde{\gamma}_1 \approx \tilde{\gamma}_2$.



7. luento →

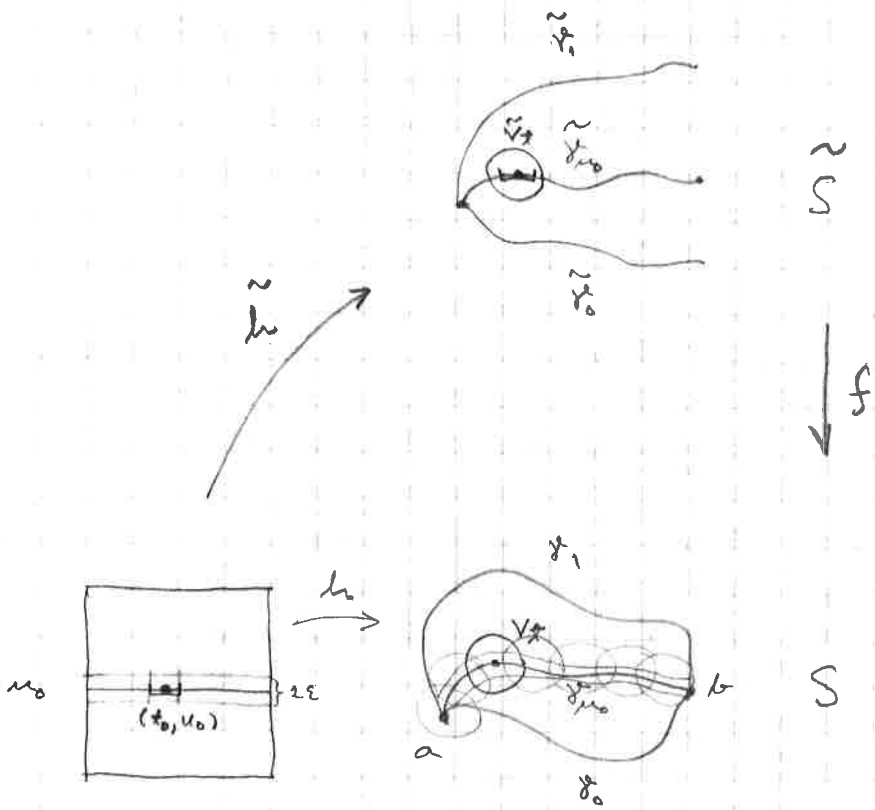
Tämä on ns. monodromialauseen sisältö. Ennen sen todistamista tarkastellaan tapausta, jossa S on (äärettömän pitkä) lieriö ja $\tilde{S}$ sen rajoittamaton kerrospinta.

Esimerkki: Määritellään $\mathbb{C}$:ssä ekvivalenssirelaatio $\sim$ asettamalla

$$z_1 \sim z_2 \iff (z_1 - z_2)/2\pi i \in \mathbb{Z}$$

Olkoon $S = \mathbb{C}/\sim$, $\tilde{S} = \mathbb{C}$ ja $f : \tilde{S} \to S$ projektio. Silloin f on lokaali homeomorfismi ja S Hausdorff, joten S on pinta ja $(\tilde{S}, f)$ sen kerrospinta. Olkoon z_1 pisteen $p \in S$ yläpuolella ja $z_2 = z_1 + 2\pi i$. Tarkastellaan kuvion mukaisia polkuja $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(p,p)$. Silloin $\tilde{\gamma}_1$ on suljettu polku pisteestä z_1, mutta $\tilde{\gamma}_2$ yhdistää z_1:n ja z_2:n. Polkujen nostot eivät siis päädy samaan pisteeseen, mutta tietysti onkin $\gamma_1 \not\sim \gamma_2$.

Huomattakoon vielä, että jos $\gamma_3 \in \Gamma(p,p)$ kiertää kaksi kertaa sylinterin ympäri, niin sen nosto $\tilde{\gamma}_3$ pisteestä z_1 päättyy pisteeseen $z_3 = z_1 + 4\pi i$.



Monodromialause. Olkoon $(\tilde S, f)$ pinnan S rajoittamaton kuvopinta. Jos S:n polut $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(a,b)$ ovat homotooppisia, niin jatkot $\tilde\gamma_0$ ja $\tilde\gamma_1$ samasta pisteestä $\tilde a$ päättyvät samaan pisteeseen $\tilde b$ ja $\tilde\gamma_0 \approx \tilde\gamma_1$.

Todistus. Olkoon $h : \gamma_0 \approx \gamma_1$. Merkitään $\gamma_\mu = h(\cdot, \mu)$, jolloin siis $\gamma_0 = h(\cdot, 0)$ ja $\gamma_1 = h(\cdot, 1)$. Olkoon $\tilde\gamma_\mu$ polun γ_μ nosto pisteestä $\tilde a$. Silloin $\tilde\gamma_\mu$ on yksikäsitteisesti määrätty (Lause 2.2). Määritellään

$$\tilde h : I \times I \to \tilde S \quad \text{s.e.} \quad \tilde h(t, \mu) = \tilde\gamma_\mu(t).$$

Oletetaan, että $\tilde h$ on todistettu jatkuvaksi. Silloin $\tilde\gamma_\mu(1) = \tilde h(1, \mu)$ on μ:n jatkuva funktio. Koska $f(\tilde\gamma_\mu(1)) = \gamma_\mu(1) = b$ ja f on lokaali injektio, on $\tilde\gamma_\mu(1)$ lokaalisti vakio. Näistä kahdesta ominaisuudesta seuraa, että $\tilde\gamma_\mu(1)$ on vakio, ts. kaikki polut $\tilde\gamma_\mu$ päättyvät samaan pisteeseen. Näin ollen $\tilde h : \tilde\gamma_0 \approx \tilde\gamma_1$.

Riittää siis todistaa, että $\tilde h$ on jatkuva. Valitaan tätä varten $(t_0, u_0) \in I \times I$. Jokaiseen pisteeseen $\tilde h(t, u_0)$

liitetään ympäristö $\tilde{V}_t$ siten, että $f|\tilde{V}_t$ on homeomorfismi ympäristölle V_t. Koska $\tilde{\gamma}_{\mu_0}$ on jatkuva, on olemassa relat. avoin väli $I_t \ni t$ s.e.

$$\tau \in \overline{I}_t \Rightarrow \tilde{\gamma}_{\mu_0}(\tau) = \tilde{h}(\tau, \mu_0) \subset \tilde{V}_t .$$

Koska I on kompakti, se voidaan peittää äärellisen monella tällaisella välillä $I_{t_1}, \dots, I_{t_m}$ s.e. $t_k \leq t_{k+1}$, $k = 1, \dots, m-1$.

Merkitään $f_k = f|\tilde{V}_{t_k}$. Silloin f_k:lla on käänteiskuvaus joukossa V_{t_k}. Koska h on jatkuva, on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että h kuvaa jokaisen joukon

$$A_k = \{(t, \mu) \mid t \in I_{t_k}, |\mu - \mu_0| < \varepsilon\}$$

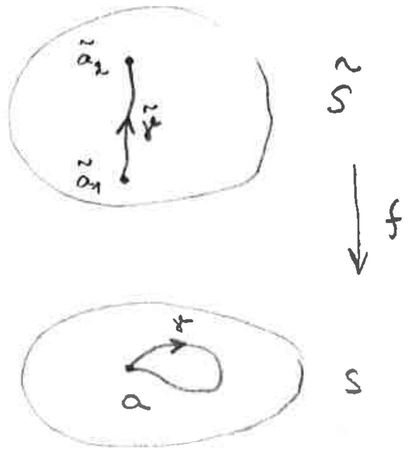
joukkoon V_{t_k}. (Huomaa, että h kuvaa joukon $\{(t, \mu_0) \mid t \in \overline{I}_{t_k}\}$ joukkoon V_{t_k}, mistä ε:n olemassaolo seuraa.)

Osoitetaan, että joukossa A_k pätee

$$(*) \qquad \tilde{h} = f_k^{-1} \circ h .$$

Jos $k = 1$, niin $\tilde{\gamma}_\mu$ ja $f_1^{-1} \circ \gamma_\mu$ ovat molemmat jatkoja pitkin γ_μ:n osakaaret pisteestä $\tilde{a}$, joten ne ovat samoja eli (*) pätee arvolla $k=1$.

Oletetaan, että (*) pätee kun $k \le i$. Koska $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ saadaan vastaavasti, että (*) pätee arvolla $k=i+1$. Näin ollen (*) pätee kaikilla arvoilla $k=1,\dots,n$. Erityisesti on $\tilde{h}$:lla pisteessä (t_0,u_0) muotoa $\tilde{h} = f_k^{-1} \circ h$ oleva esitys, joten se on jatkuva tässä pisteessä. □



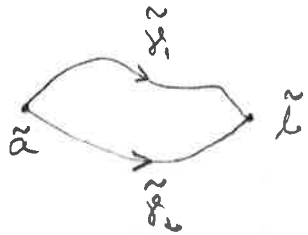
<u>Lause 3.1.</u> Jos $(\tilde S, f)$ on yhdesti yhtenäisen pinnan S rajoittamaton kerrospinta, niin $f : \tilde S \to S$ on homeomorfismi.

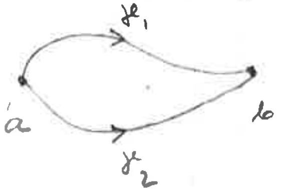
<u>Todistus.</u> Koska f on jatkuva ja avoin surjektio (Lauseet 2.1 ja 2.3), riittää näyttää, että f on injektio.

Oletetaan, että $f(\tilde a_1) = f(\tilde a_2)$. Yhdistetään $\tilde a_1$ ja $\tilde a_2$ polulla $\tilde\gamma$. Sen projektio $f \circ \tilde\gamma$ on suljettu polku pisteestä $a = f(\tilde a_1) = f(\tilde a_2)$. Olkoon $\gamma_0(t) \equiv a$. Silloin $\tilde\gamma_0(t) \equiv \tilde a_1$ on sen nosto pisteestä $\tilde a_1$. Koska S on yhdesti yhtenäinen, on $\gamma \approx \gamma_0$. Monodromialauseen nojalla jatkot $\tilde\gamma_0$ ja $\tilde\gamma$ päättyvät samaan pisteeseen eli $\tilde a_1 = \tilde\gamma_0(1) = \tilde\gamma(1) = \tilde a_2$. □

<u>4. Kerrospinnat ja perusryhmän aliryhmät</u>

Kertaus: Olkoon $(\tilde S, f)$ pinnan S rajoittamaton kerrospinta. Valitaan $a \in S$ ja $\tilde a \in f^{-1}(a)$. Olkoot γ_1 ja γ_2 polkuja pisteestä a samaan pisteeseen b. Olkoot $\tilde\gamma_1$ ja $\tilde\gamma_2$ nos-





Jat pisteestä $\tilde a$. Silloin pisteet $\tilde b_1 = \tilde\gamma_1(1)$ ja $\tilde b_2 = \tilde\gamma_2(1)$ ovat b:n yläpuolella. Monodromialauseen nojalla

$$\gamma_1 \approx \gamma_2 \Rightarrow \tilde b_1 = \tilde b_2 .$$

Käänteinen implikaatio ei kuitenkaan päde.

Esimerkki: Valitaan $S = \tilde S = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$ ja $f = id$. Olkoon

$$\gamma_1(t) = \frac{3}{2} + e^{2\pi i t} \quad , \; 0 \le t \le 1$$

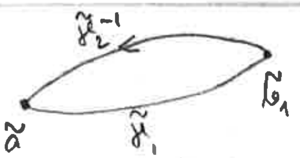
$$\gamma_2(t) = \frac{3}{2} \quad , \; 0 \le t \le 1 .$$

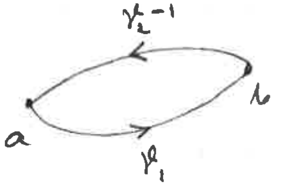
Silloin $\gamma_1 \not\approx \gamma_2$, mutta $\tilde\gamma_1 = \gamma_1$ ja $\tilde\gamma_2 = \gamma_2$, joten molemmat pisteestä $\frac{3}{2}$ päättyvät samaan pisteeseen.

Lemma. $\tilde b_1 = \tilde b_2$, jos ja vain jos jatko pitkin polkua $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ pisteestä $\tilde a$ on suljettu polku.

Todistus. 1. Oletetaan, että $\tilde b_1 = \tilde b_2 = \tilde b$. Silloin $\tilde\gamma_2^{-1}$ on jatko pitkin polkua γ_2^{-1} pisteestä $\tilde b$. Näin ollen

$$(\gamma_1\gamma_2^{-1})^\sim = \tilde\gamma_1 \tilde\gamma_2^{-1}$$





päättyy pisteeseen $\tilde a$.

2. Oletetaan, että $(\gamma_1\gamma_2^{-1})^\sim$ on suljettu polku pisteestä $\tilde a$. Olkoon $\tilde\gamma_2^{-1}$ jatko pitkin polkua γ_2^{-1} pisteestä $\tilde b_1$. Silloin $(\gamma_1\gamma_2^{-1})^\sim = \tilde\gamma_1\tilde\gamma_2^{-1}$. Koska $(\gamma_1\gamma_2^{-1})^\sim$ on suljettu, päättyy $\tilde\gamma_2^{-1}$ pisteessä $\tilde a$. Mutta tällöin $(\tilde\gamma_2^{-1})^{-1}$ on jatko pitkin γ_2:n pisteestä a, joten $\tilde b_2 = \tilde b_1$. □

Näin ollen kysymys, milloin $\tilde b_1 = \tilde b_2$ muuttuu kysymykseksi, milloin jatko pitkin suljettua polkua on suljettu.

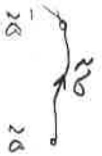
Olkoon $\gamma \in \Gamma(a,a)$. Jos jatko pitkin γ:n pisteestä $\tilde a$ on suljettu, niin sama pätee kaikille poluille $\gamma' \approx \gamma$, sekä polulle γ^{-1}. Jos jatkot pitkin polkuja $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(a,a)$ ovat suljettuja, niin myös jatko pitkin polkua $\gamma_1\gamma_2$ on suljettu. Näin ollen pätee

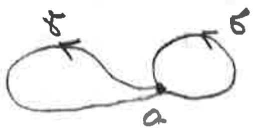
<u>Lemma</u>. Ne homotopialuokat $[\gamma]$, joille jatko $\tilde\gamma$ pisteestä $\tilde a$ on suljettu, muodostavat perusryhmän $\pi_1(S,a)$ aliryhmän G.

8 luento

Miten G riippuu pisteen $\tilde a \in f^{-1}(a)$

valinnasta? Kolmikon $(\tilde S, f, \tilde a)$ sanotaan peittävän (S, a):n, jos $(\tilde S, f)$ on S:n rajoittamaton kuvauspeite ja $f(\tilde a) = a$. Edellä esitetyllä tavalla kolmikko $(\tilde S, f, \tilde a)$ määrää yksikäsitteisen aliryhmän $G \subset \pi_1(S,a)$.





Lause 4.1. Kolmikkojen $(\tilde S, f, \tilde a)$ ja $(\tilde S, f, \tilde a')$ määräämät aliryhmät G ja G' ovat konjugaatteja.

Todistus. Olkoon $\tilde\sigma$ polku $\tilde a$:sta $\tilde a'$:han, ja olkoon $\sigma = f \circ \tilde\sigma$. Silloin $\sigma \in \Gamma(a,a)$. Päätellään: Jatko pitkin polkua $\gamma \in \Gamma(a,a)$ pisteestä $\tilde a'$ on suljettu, jos ja vain jos jatko pitkin polkua $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ pisteestä $\tilde a$ on suljettu. Näin ollen $[\gamma] \in G'$ jos ja vain jos $[\sigma\gamma\sigma^{-1}] = [\sigma][\gamma][\sigma^{-1}] \in G$ eli $G' = [\sigma^{-1}]\, G\, [\sigma]$. □

Lause 4.2. Kaikki (S,a):n peittävät kolmikot $(\tilde S, f, \tilde a)$ määräävät saman aliryhmän G, jos ja vain jos G on normaali aliryhmä.

Todistus. (Huom. että $\tilde S$, f, S ja a pidetään kiinteinä ja ainoastaan

$\tilde a \in f^{-1}(a)$ vaihtelee.) Olkoon jonkin kolmikon $(\tilde S, f, \tilde a)$ määräämä aliryhmä G normaali. Jos $(\tilde S, f, \tilde a')$ peittää (S, a):n, niin sen määräämä aliryhmä G' ja G ovat konjugoituja (Lause 4.1), koska G on normaali, on $G = G'$.

Oletetaan, että kaikki kolmikot $(\tilde S, f, \tilde a)$ määräävät saman aliryhmän G. Antiteesi: G ei ole normaali. Silloin on olemassa $[\sigma] \in \pi_1(S, a)$ siten, että $G' = [\sigma^{-1}] G [\sigma] \neq G$. Olkoon $\tilde \sigma$ polun σ nosto pinnalle $\tilde S$ ja $\tilde a = \tilde\sigma(0)$, $\tilde a' = \tilde\sigma(1)$. Silloin $(\tilde S, f, \tilde a)$ määrää aliryhmän G, joten (Lause 4.1) $(\tilde S, f, \tilde a')$ määrää aliryhmän G'. Toisaalta kaikki kolmikot määräävät G:n, joten $G = G'$, mikä on ristiriita. □

Se, että kolmikon $(\tilde S, f, \tilde a)$ määräämä $\pi_1(S, a)$:n aliryhmä on normaali, ei riipu pisteen a valinnasta. Merkitään tällöin ko. aliryhmää G_a:lla. (Se siis riippuu a:sta, ei siis siitä miten $\tilde a$ valitaan joukosta $f^{-1}(a)$.)

Lause 4.3. Jos G_{a_0} on normaali jollakin $a_0 \in S$, niin G_a on normaali kaikille $a \in S$.

Todistus. Olkoot $\tilde a_0 \in f^{-1}(a_0)$ ja $\tilde a \in f^{-1}(a)$, sekä $\tilde\sigma$ polku $\tilde a_0$:sta $\tilde a$:han. Merkitään $\sigma = f \circ \tilde\sigma$. Silloin yhtälö

$$\varphi[\gamma] = [\sigma^{-1}\gamma\sigma]$$

määrittelee isomorfismin $\pi_1(S, a_0) \to \pi_1(S, a)$. Lauseen 4.1 todistuksesta seuraa, että $\varphi(G_{a_0}) = G_a$. Koska G_{a_0} on normaali, on myös G_a normaali. □

Määritelmä. Rajoittamaton kerrospint. $(\tilde S, f)$ on normaali, jos kaikkien kolmikkojen $(\tilde S, f, \tilde a)$ määräämät aliryhmät ovat normaaleja.

Kysymyksiä: 1. Milloin kaksi kolmikkoa $(\tilde S_1, f_1, \tilde a_1)$ ja $(\tilde S_2, f_2, \tilde a_2)$, jotka peittävät (S, a):n, määräävät saman $\pi_1(S, a)$:n aliryhmän?
2. Vastaako jokaista $\pi_1(S, a)$:n aliryhmää kolmikko $(\tilde S, f, \tilde a)$,

$$\begin{tikzcd} \tilde S_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & \tilde S_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & S \end{tikzcd}$$

jolle määrää tämän aliryhmän?

Määritelmä. Kaksi parin (S, a) peittävää kolmikkoa $(\tilde S_1, f_1, \tilde a_1)$ ja $(\tilde S_2, f_2, \tilde a_2)$ on ekvivalentti, jos on olemassa homeomorfismi $\varphi : \tilde S_1 \to \tilde S_2$, jolle $\varphi(\tilde a_1) = \tilde a_2$ ja $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

Lemma. Ehdot $\varphi(\tilde a_1) = \tilde a_2$ ja $f_1 = f_2 \circ \varphi$ määräävät homeomorfismin $\varphi : \tilde S_1 \to \tilde S_2$ yksikäsitteisesti.

Todistus. ~~Olkoon $\psi : \tilde S_1 \to \tilde S_2$ toinen ko. ehdot täyttävä homeomorfismi. Olkoon $A = \{ p \in \tilde S_1 \mid \varphi(p) = \psi(p) \}$. Koska $\tilde a_1 \in A$, on $A \neq \emptyset$. Koska $\tilde S_2$ on Hausdorff ja φ ja ψ ovat jatkuvia, on A suljettu. Olkoon $p \in A$ ja V sellainen p:n ympäristö, että $f_1 | V$, $f_2 | \varphi(V)$ ja $f_2 | \psi(V)$ ovat~~

Olkoot $\varphi : \tilde S_1 \to \tilde S_2$ ja $\psi : \tilde S_1 \to \tilde S_2$ homeomorfismeja siten, että

$$\varphi(\tilde a_1) = \tilde a_2, \quad \psi(\tilde a_1) = \tilde a_2,$$

$$f_1 = f_2 \circ \varphi, \quad f_1 = f_2 \circ \psi.$$

Merkitään $h = \psi^{-1} \circ \varphi$. Silloin

$h : \tilde{S}_1 \to \tilde{S}_2$ on homeomorfismi, $h(\tilde{a}_1) = \tilde{a}_1$ sekä

(*) $f_1 \circ h = f_1 \circ \psi^{-1} \circ \varphi = f_2 \circ \varphi = f_1$.

Merkitään $A = \{ p \in \tilde{S}_1 \mid h(p) = p \}$. Silloin $\tilde{a}_1 \in A$, joten $A \neq \emptyset$. Olkoon $p_n \in A$ siten, että $p_n \to p$. Silloin h:n jatkuvuuden nojalla

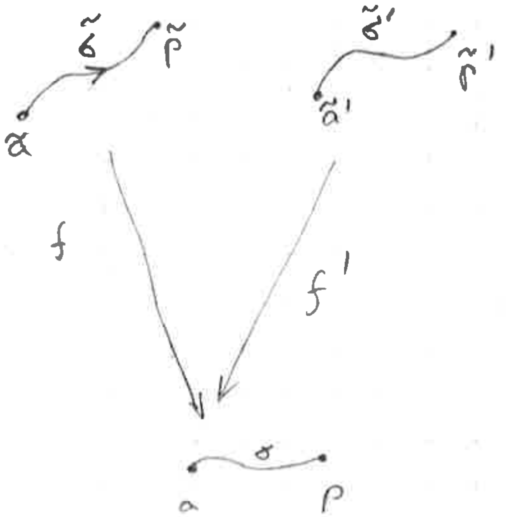
$$\begin{array}{ccc} h(p_n) & = & p_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ h(p) & & p \end{array}$$

Koska $\tilde{S}_1$ on Hausdorff on jonon raja-arvo yksikäsitteisesti määrätty, joten $h(p) = p$ eli $p \in A$ ja A on suljettu.

Olkoon $p \in A$. Valitaan a:n ympäristö V siten, että $f_1 | V$ on homeomorfismi. Koska h on jatkuva, on olemassa p:n ympäristö $U \subset V$, jolle $h(U) \subset V$. Olkoon $q \in U$. Koska (*):n nojalla $f_1(q) = f_1(h(q))$ ja $q, h(q) \in V$, on $q = h(q)$ eli $q \in A$. Näin ollen $U \subset A$ ja A on avoin. Koska $\tilde{S}_1$ on yhtenäinen on $\tilde{S}_1 = A$ eli $\psi^{-1} \circ \varphi = id$. □

9. luento

Olkoot $(\tilde{S}_1, f_1, \tilde{a}_1)$ ja $(\tilde{S}_2, f_2, \tilde{a}_2)$ kaksi kolmikkoa, jotka peittävät (S, a):n. Jos $\gamma \in \Gamma(a,a)$, niin merkitään $\tilde{\gamma}_i$:llä jatkoa pitkin γ:aa pisteestä $\tilde{a}_i$, $i = 1, 2$. Jos $(\tilde{S}_1, f, \tilde{a}_1) \sim (\tilde{S}_2, f, \tilde{a}_2)$, niin $\tilde{\gamma}_2 = \varphi \circ \tilde{\gamma}_1$. Näin ollen $\tilde{\gamma}_1$ on suljettu, jos ja vain jos $\tilde{\gamma}_2$ on suljettu. Täten saamme: ekvivalentit kolmikot määräävät saman aliryhmän $G \subset \pi_1(S, a)$ eli on olemassa kuvaus kolmikkojen ekvivalenssiluokkien joukolta $\pi_1(S, a)$:n aliryhmien joukolle.



Lause 4.4. Kolmikkojen $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ ekvivalenssiluokkien ja S:n perusryhmän $\pi_1(S, a)$ aliryhmien välinen kuvaus on bijektio.

Todistus. 1. Osoitetaan aluksi, että kuvaus on injektio. Oletetaan tätä varten, että kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ ja $(\tilde{S}', f', \tilde{a}')$ määräävät saman aliryhmän $G \subset \pi_1(S, a)$. Homeomorfismi $\varphi : \tilde{S} \to \tilde{S}'$ konstruoidaan seuraavasti. Jos $\tilde{p} \in \tilde{S}$, niin olkoon $\tilde{\sigma}$ polku $\tilde{a}$:sta $\tilde{p}$:hen. Olkoon $\tilde{\sigma}'$ polun $\sigma = f \circ \sigma'$ nosto pinnalle $\tilde{S}'$

pisteestä $\tilde{a}'$. Asetetaan $\varphi(\tilde{p}) = \tilde{p}' = \tilde{\sigma}'(1)$.

Olkoon $\tilde{\sigma}_1$ toinen polku $\tilde{a}$:sta $\tilde{p}$:hen. Silloin $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}_1^{-1}$ on suljettu polku pinnalla $\tilde{S}$, joten sen projektiolle pätee $[\sigma\sigma_1^{-1}] \in G$. Olkoon $\tilde{\sigma}_1'$ polun σ_1 nosto pinnalle $\tilde{S}'$ pisteestä $\tilde{a}'$. Silloin $\tilde{\sigma}'(\tilde{\sigma}_1')^{-1}$ on suljettu polku pisteestä $\tilde{a}'$, joten $\tilde{\sigma}_1'(1) = \tilde{\sigma}'(1)$ eli φ on hyvinmääritelty.

Koska $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ ja $(\tilde{S}, f, \tilde{a}')$ määräävät saman aliryhmän, päätellään samaan tapaan kuin edellä, että φ on injektio. Suorittamalla päättely pinnalta $\tilde{S}'$ pinnalle $\tilde{S}$ havaitaan, että φ on surjektio.

Konstruktion perusteella $f = f' \circ \varphi$, joten φ on jatkuva ja avoin (koska lokaalisti on $\varphi = (f')^{-1} \circ f$). Näin ollen $\varphi : \tilde{S} \to \tilde{S}'$ on homeomorfismi, joka identifioi kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ ja $(\tilde{S}', f, \tilde{a}')$.

2. Varsinainen työ on sen osoittamisessa, että annettu aliryhmä $G \subset \pi_1(S, a)$ on jonkin kolmikon $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ määräämä.

Kolmikon $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ konstruoimiseksi tarkastellaan kaikkia pareja

(p, γ), missä $p \in S$ ja γ on S:n polku a:sta p:hen. Asetetaan $(p, \gamma) \sim (p_1, \gamma_1) \iff p = p_1$ ja $[\gamma \gamma_1^{-1}] \in G$. Merkitköön (p, γ) tästä lähtien vastaavaa parin määräämää ekvivalenssiluokkaa, ja olkoon $\tilde{S}$ kaikkien ekvivalenssiluokkien (p, γ) joukko. Merkitään $\tilde{a} = (a, \gamma_0)$, $\gamma_0(t) \equiv a$. Määritellään $f : \tilde{S} \to S$ ehdolla $f(p, \gamma) = p$.

Määritellään $\tilde{S}$:n topologia seuraavasti: olkoon $\tilde{p} = (p, \gamma) \in \tilde{S}$ ja $U \subset S$ pisteen p sisältävä parametrikiekko. Tarkastellaan kaikkia polkuja $\sigma : I \to U$, joille $\sigma(0) = p$. Jos $q = \sigma(1)$ asetetaan $\tilde{U} = \{(q, \gamma\sigma)\}$. Koska U on yhdesti yhtenäinen, seuraa ~~[illegible]~~, että $f|\tilde{U}$ on injektio. On helppo osoittaa, että joukot $\tilde{U}$ muodostavat $\tilde{S}$:n topologian kannan. Varustetaan $\tilde{S}$ tämän kannan virittämällä topologialla. Silloin $\tilde{S}$ on Hausdorff (todistus helppo) sekä polkuyhtenäinen.

Koska $f|\tilde{U}$ on homeomorfismi, on $(\tilde{S}, f)$ pinnan S sileä peitospinta. Kuvapinta on myös rajoittamaton, sillä jos γ on S:n polku pisteestä a, niin $\tilde{\gamma}$,

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma|[0,t])$$

on jatko pitkin pisteestä $\tilde{a}$.
Jos γ on mielivaltainen S:n polku, $\gamma(0) = p$ ja $f(\tilde{p}) = p$, yhdistetään $\tilde{a}$ ja $\tilde{p}$ polulla $\tilde{\sigma}$. Jos $\sigma = f \circ \tilde{\sigma}$, niin $\sigma\gamma$ on polku, joka voidaan nostaa pisteestä $\tilde{a}$. Tällöin nostoja γ:aa vastaava osa on jatko pitkin γ:aa pisteestä $\tilde{p}$.

Jos $[\gamma] \in \pi_1(S, a)$, niin

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma|[0,t])$$

on jatko pitkin γ:aa pisteestä $\tilde{a}$.
$\tilde{\gamma}$ on suljettu jos ja vain jos

$$(\gamma(0), \gamma_0) \sim (\gamma(1), \gamma) \iff$$

$$[\gamma\gamma_0^{-1}] = [\gamma] \in G.$$

Näin ollen $(\tilde{S}, f)$ määrää aliryhmän G. $\square$

10 luento →

Lause 4.5. Olkoon G kolmikon $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ määräämä $\pi_1(S, a)$:n aliryhmä. Silloin $G \cong \pi_1(\tilde{S}, \tilde{a})$.

Todistus. Peittäköön kolmikko $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ parin (S, a). Tarkastellaan suljettuja polkuja $\tilde{\gamma} \in \Gamma(\tilde{a}, \tilde{a})$ ja määritellään kuvaus

$$\psi : \pi_1(\tilde{S}, \tilde{a}) \to G$$

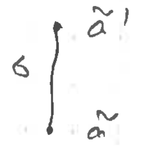
ehdolla $\psi[\tilde{\gamma}] = [f \circ \tilde{\gamma}]$. Koska f on jatkuva,

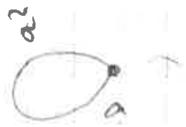
$$\tilde{\gamma} \approx \tilde{\gamma}' \Rightarrow f \circ \tilde{\gamma} \approx f \circ \tilde{\gamma}',$$

joten ψ on hyvinmääritelty. Lisäksi $f \circ (\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2) = (f \circ \tilde{\gamma}_1)(f \circ \tilde{\gamma}_2)$, joten ψ on homomorfismi. (Lause II 1.4)

Injektiivisyys: olkoon $\psi[\tilde{\gamma}_1] = \psi[\tilde{\gamma}_2]$. Silloin $f \circ \tilde{\gamma}_1 \approx f \circ \tilde{\gamma}_2$, joten näiden, polkujen nostot $\tilde{\gamma}_1$ ja $\tilde{\gamma}_2$ ovat monodromialauseen nojalla homotooppisia, ts. $[\tilde{\gamma}_1] = [\tilde{\gamma}_2]$.

Surjektiivisuus: Jos $[\gamma] \in G$, niin on olemassa jatko $\tilde{\gamma}$ pitkin γ:n alkupisteestä $\tilde{a}$, ja $\tilde{\gamma} \in \Gamma(\tilde{a}, \tilde{a})$. Tällöin $\psi[\tilde{\gamma}] = \gamma$. □





Olkoon kolmikon $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ määräämä aliryhmä $G = \pi_1(S,a)$. Koska a:n yläpuolella on silloin vain yksi piste $\tilde{a}$, seuraa Lauseesta 2.3, että f on injektio. Näin ollen f on homeomorfismi. (Sama tulos seuraa myös Lauseesta 4.4, sillä kolmikko (S, id, a) määrää myös $\pi_1(S,a)$:n.) Toisaalta triviaalia aliryhmää vastaava kolmikko $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ on sellainen, että ainoastaan nollahomotooppisen polun jatkes on suljettu. Sanomme, että kolmikko $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ on tällöin vahvin mahdollinen, koska perusryhmää vastaava kolmikko on taas heikoin mahdollinen. Kolmikkoa pidetään sitä heikompana, mitä useamman homotopialuokan polut muuttuvat suljetuiksi poluiksi:

Määritelmä. Määrätkööt kolmikot $(\tilde{S}_1, f_1, \tilde{a}_1)$ ja $(\tilde{S}_2, f_2, \tilde{a}_2)$ aliryhmät $G_1, G_2 \subset \pi_1(S,a)$. Kolmikon $(\tilde{S}_1, f_1, \tilde{a}_1)$ ekvivalenssiluokka on vahvempi kuin kolmikon $(\tilde{S}_2, f_2, \tilde{a}_2)$ ekvivalenssiluokka, jos $G_1 \subset G_2$.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde a_2 & & \tilde S_2 \\
\downarrow & & \downarrow f \\
\tilde a_1 & & \tilde S_1 \\
\downarrow & & \downarrow f_1 \\
a & & S
\end{array}
\qquad f_2 : \tilde S_2 \to S$$

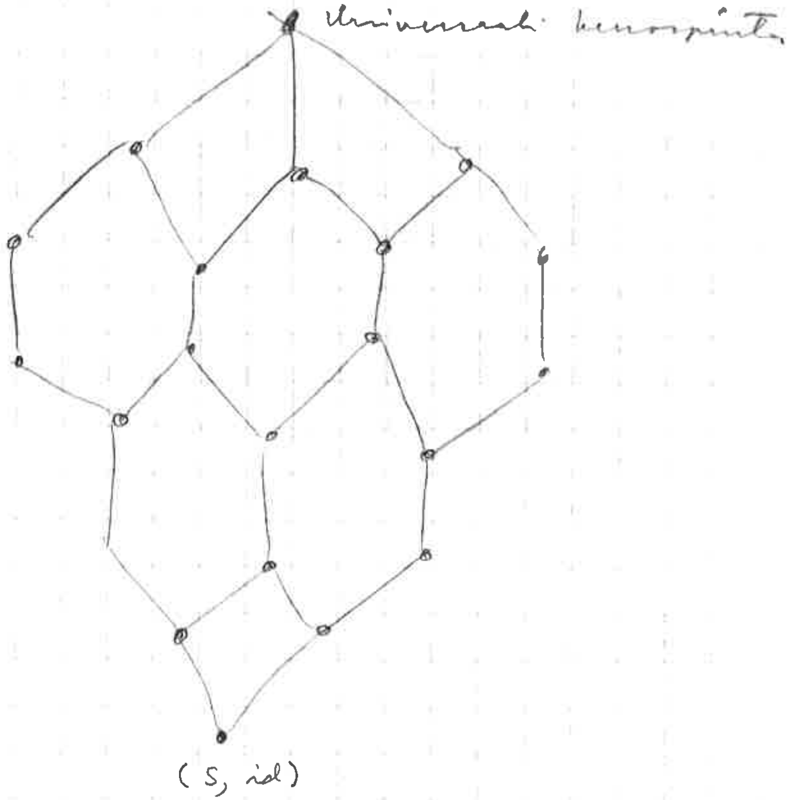
Lause 4.6. $(\tilde S_2, f_2, \tilde a_2)$ on vahvempi kuin $(\tilde S_1, f_1, \tilde a_1)$, jos ja vain jos on olemassa kuvaus $f: \tilde S_2 \to \tilde S_1$ siten, että $(\tilde S_2, f, \tilde a_2)$ peittää parin $(\tilde S_1, \tilde a_1)$ ja $f_2 = f_1 \circ f$.

Todistus. Oletetaan aluksi, että on olemassa vaaditut ehdot täyttävä kuvaus $f: \tilde S_2 \to \tilde S_1$. Jos $[\gamma] \in G_2$, niin jatko $\tilde\gamma$ pisteestä $\tilde a_2$ on suljettu. Silloin $f \circ \tilde\gamma \in \Gamma(\tilde a_1, \tilde a_1)$ ja $f_1 \circ f \circ \tilde\gamma = f_2 \circ \tilde\gamma = \gamma$, joten γ:n nosto $\tilde S_1$:lle pisteestä $\tilde a_1$ on suljettu eli $\gamma \in G_1$. Näin ollen $G_2 \subset G_1$.

Oletetaan, että $G_2 \subset G_1$. Kuvaus $f: \tilde S_2 \to \tilde S_1$ konstruoidaan seuraavasti: Valitaan $\tilde p_2 \in \tilde S_2$ ja yhdistetään $\tilde a_2$ ja $\tilde p_2$ polulla $\tilde\sigma$. Olkoon $\tilde\sigma_1$ polun $f_2 \circ \tilde\sigma = \sigma$ nosto pinnalle $\tilde S_1$ pisteestä $\tilde a_1$. Koska $G_2 \subset G_1$, päätellään samalla tavalla kuin Lauseen 4.5 todistuksessa, että piste $\tilde p_1 = \tilde\sigma_1(1)$ ei riipu polun $\tilde\sigma$ valinnasta. Asetetaan

$$f(\tilde p_2) = \tilde p_1.$$

Tällöin $f_2 = f_1 \circ f$ ja $(\tilde S_2, f, \tilde a_2)$ peittää parin $(\tilde S_1, \tilde a_1)$. □



Ryhmän aliryhmien joukko inkluusion avulla järjestettynä on hila: Kahdesta aliryhmästä G_1 ja G_2 määrää maksimaalin aliryhmän, joka sisältyy molempiin (nimittäin $G_1 \cap G_2$) sekä minimaalin aliryhmän, joka sisältää molemmat. $G_1 \cup G_2$:n virittämä aliryhmä.

Kolmikkojen ekvivalenssiluokkien joukon järjestys on isomorfinen aliryhmien joukon järjestyksen käänteisen (duaalisen) järjestyksen kanssa. Voidaan näin ollen (hieman epämääräisesti) puhua pinnan S rajoittamattomien kerrospintojen muodostamasta hilasta. Tässä hilassa on korkein alkio, jota vastaa koko ryhmä $\pi_1(S)$; tämän alkion yksikäsitteinen edustaja on (S, id). Hilassa on myös matalin alkio, jota puolestaan vastaa triviaali aliryhmä. Jos $(\tilde{S}, f)$ on tämän luokan edustaja, niin $\pi_1(\tilde{S})$ on triviaali (Lause 4.5) ja $\tilde{S}$ on yhdesti yhtenäinen, ja käänteisesti, jos $\tilde{S}$ on yhdesti yhtenäinen, on $(\tilde{S}, f)$ matalimman luokan edustaja.

<u>Määritelmä.</u> Jos $(\tilde{S}, f)$ on S:n rajoittamaton kerrospinta ja $\tilde{S}$ on yhdesti yhtenäinen, niin $(\tilde{S}, f)$:ää kutsutaan <u>universaaliksi kerrospinnaksi</u>.

5. Peitekuvaukset

Silloin $\pi_1(\tilde{S}, \tilde{a}) \cong G$

Oletetaan, että $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ määrää $\pi_1(S, a)$:n aidon aliryhmän G. Katoaako G:hen kuulumaton $\pi_1(S,a)$:n osa jäljettömiin? Mikä tämä osa itse asiassa on? Jos G on normaali aliryhmä, niin voidaan muodostaa tekijäryhmä $\pi_1(S,a)/G$. Tässä tekijäryhmässä on niin paljon ryhmän struktuuria jäljellä kuin sitä ei sisälly G:hen. Näin ollen on odotettavaa, että kerrospinnalle $(\tilde{S}, f)$ löytyy tekijäryhmän $\pi_1(S,a)/G$ kanssa isomorfinen ryhmä.

11 luento

<u>Määritelmä.</u> Pinnan S sileän kerrospinnan $(\tilde{S}, f)$ <u>peitekuvauksella</u> tarkoitetaan homeomorfismia $\varphi : \tilde{S} \to \tilde{S}$, jolle $f \circ \varphi = f$.

Olkoot t_1 ja t_2 kaksi $(\tilde{S}, f)$:n peitekuvausta. Silloin

$$f\circ(t_1\circ t_2) = (f\circ t_1)\circ t_2 = f\circ t_2 = f,$$

joten $t_1 \circ t_2$ on peitekuvaus. Koska myös id on peitekuvaus ja peitekuvauksen t käänteiskuvaus t^{-1} on peitekuvaus ($f\circ t = f \Rightarrow f = f\circ t^{-1}$), muodostavat peitekuvaukset ryhmän, jota merkitään T:llä. Huomaa, että peitekuvausten ryhmä voidaan muodostaa kaikille sileille kuvaspinnoille, ei pelkästään rajoittamattomille kuvaspinnoille.

Kaksi pistettä $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{S}$ sanotaan (ryhmän T suhteen) <u>ekvivalenteiksi</u>, jos on olemassa $t \in T$ siten, että $t(\tilde{p}) = \tilde{q}$. Ekvivalenteilla pisteillä on sama projektio. Onko käänteinen voimassa, ts. onko kaksi pistettä $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in f^{-1}(p)$ aina ekvivalentteja? Ei välttämättä.

<u>Määritelmä</u>. Jos kahta pistettä $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{S}$, joille $f(\tilde{p}) = f(\tilde{q})$, aina vastaa $t \in T$ siten, että $t(\tilde{p}) = \tilde{q}$,

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[r, "t_1"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{S} \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd}$$

niin peitekuvausten ryhmä T on transitiivinen.

Lause 5.1. Jos $t_1, t_2 \in T$ ja on olemassa $\tilde{p} \in \tilde{S}$ siten, että $t_1(\tilde{p}) = t_2(\tilde{p})$, niin $t_1 = t_2$.

Todistus. Merkitään $\tilde{q} = t_1(\tilde{p})$. Koska $f \circ t_1 = f$, ovat kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{p})$ ja $(\tilde{S}, f, \tilde{q})$ ekvivalentteja. Koska myös $f \circ t_2 = f$ ja $t_2(\tilde{p}) = \tilde{q}$, seuraa Lauseen 4.3 jälkeisestä Lemmasta, että $t_1 = t_2$ (Huomaa, että Lemmaa

voidaan soveltaa myös sileisiin kuvapintoihin!)

Korollaari Tähän

Ajatellaan vielä eo. todistusta. Olkoon $a \in S$ ja $\tilde{a} \in f^{-1}(a)$. Jos $t \in T$ ja $\tilde{a}' = t(\tilde{a})$, niin kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ ja $(\tilde{S}, f, \tilde{a}')$ ovat ekvivalentteja, ja juuri peitekuvaus t on se yksikäsitteisesti määrätty homeomorfismi, joka identifioi ko. kolmikot. Kääntäen, jos $\tilde{a}, \tilde{a}' \in f^{-1}(a)$ ja $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ ja $(\tilde{S}, f, \tilde{a}')$ ovat ekvivalentteja, niin kolmikot identifioiva homeomorfismi $\varphi: \tilde{S} \to \tilde{S}$ on peitekuvaus. Näin ollen on voimassa: Peitekuvausten ryhmä T on transitiivinen, jos ja vain jos jokaiselle $a \in S$ kaikki kol-

[illegible] $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ i $(\tilde{S}, f, \tilde{a}')$,
$\tilde{a}, \tilde{a}' \in f^{-1}(a)$, [illegible] ekvivalentnima.

Korollaari. Peitekuvausten ryhmä T on kiintopisteetön, ts. ainoastaan identtisellä kuvauksella on ryhmän T kuvauksista kiintopisteitä.

Oletimme edellä vähän ennenaikaisesti, että sileä kerrospinta $(\tilde{S}, f)$ olisi rajoittamaton. Jos T on transitiivinen, niin näin itse asiassa on asian laita.

Lause 5.2. Olkoon $(\tilde{S}, f)$ pinnan S sileä kerrospinta, $f : \tilde{S} \to S$ surjektio ja peitekuvausten ryhmä T transitiivinen. Silloin $(\tilde{S}, f)$ on S:n rajoittamaton kerrospinta.

12 luento (1 tunti)

Todistus. Olkoon $p \in S$ ja $\tilde{p} \in f^{-1}(p)$. Olkoon $\tilde{U}$ pisteen $\tilde{p}$ ympäristö s.e. $f|\tilde{U}$ on injektio ja $A \subset \tilde{U}$ pisteen $\tilde{p}$ yhtenäinen kompakti ympäristö. Riittää osoittaa (Lause II.2.4), että joukon $f^{-1}(f(A))$ kaikki komponentit ovat kompakteja.
Koska $f|t(\tilde{U})$ on injektio kaikilla $t \in T$ ja T on kiintopisteetön, joukot $t(\tilde{U})$ ovat pistevieraita. Näin ollen

joukot $t(A)$, $t \in T$, ovat joukon $f^{-1}(f(A))$ komponentteja. Koska T on transitiivinen, ovat kaikki komponentit muotoa $t(A)$, joten ovat kompakteja. □

Lause 5.3. Olkoon $(\tilde{S}, f)$ pinnan S normaali kerrospinta, G kolmikon $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ määräämä $\pi_1(S,a)$:n aliryhmä sekä $T(\tilde{S}, f)$:n peitekuvausten ryhmä. Silloin $T \cong \pi_1(S,a)/G$.

Todistus. Olkoon $[\gamma] \in \pi_1(S,a)$, $\tilde{\gamma}$ jatko polulle γ:n pisteestä $\tilde{a}$ ja $\tilde{b} = \tilde{\gamma}(1)$. Monodromialauseen nojalla $\tilde{b}$ on sama kaikille luokan $[\gamma]$ poluille. Kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$ ja $(\tilde{S}, f, \tilde{b})$ määräävät G:n normaalisuuden nojalla saman aliryhmän G (Lause 4.2), joten kolmikot ovat ekvivalentteja. Näin ollen on olemassa homeomorfismi

$$t_{[\gamma]} : \tilde{S} \to \tilde{S},$$

jolle $f \circ t_{[\gamma]} = f$ ja $t_{[\gamma]}(\tilde{a}) = \tilde{b}$, joten $t_{[\gamma]} \in T$. Lauseen 5.1 nojalla $t_{[\gamma]}$ on

Korollaari. Jos $(\tilde S, f)$ on S:n universaali kerrospinta, niin $T \cong \pi_1(S,a)$.

yksikäsitteisesti määrätty, joten näin

$$[\gamma] \to t_{[\gamma]}$$

määrittelee kuvauksen $\varphi : \pi_1(S,a) \to T$. Koska $t_{[\gamma_1][\gamma_2]} = t_{[\gamma_2]} \circ t_{[\gamma_1]}$ ($\tilde\gamma_2$:n jatkopisteet: $\tilde b$ on yksikäs. määrätty), φ on homomorfismi.

Olkoon $t \in T$ ja $\tilde b = t(\tilde a)$. Yhdistetään $\tilde a$ ja $\tilde b$ polulla $\tilde\gamma$ ja olkoon $\gamma = f \circ \tilde\gamma$. Silloin $t = t_{[\gamma]}$ eli φ on surjektio. Koska ker $\varphi = G$, saadaan väite. □

<u>Huomautus.</u> Jos G ei ole normaali, tarkastellaan ryhmän G normalisoijaa $N(G)$ ryhmässä $\pi_1(S,a)$, ts. laajinta $\pi_1(S,a)$:n aliryhmää $G' \supset G$, jonka normaali aliryhmä G on. Silloin saadaan (lähes samalla todistuksella kuin edellä), että

$$T \cong N(G)/G.$$

Milloin kerrospinta on normaali?

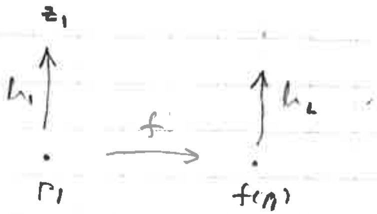
<u>Lause 5.4</u> Kerrospinta $(\tilde S, f)$ on normaali.

jos ja vain jos vastaava peitekuvausten ryhmä T on transitiivinen.

Todistus. 1. Oletetaan, että $(\tilde{S}, f)$ on normaali ja olkoot $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in f^{-1}(a)$. Silloin kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{a}_1)$ ja $(\tilde{S}, f, \tilde{a}_2)$ määräävät saman aliryhmän (Lause 4.2), joten ne ovat ekvivalentteja, ts. on olemassa peitekuvaus t, jolle $t(\tilde{a}_1) = \tilde{a}_2$. Koska a ja $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ valittiin mielivaltaisesti, on T transitiivinen.

2. Olkoon T transitiivinen. Silloin kaikki parin (S, a) peittävät kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{a})$, $\tilde{a} \in f^{-1}(a)$, ovat ekvivalentteja, joten ne määräävät kaikki saman aliryhmän ja kerrospeite on normaali. □

Korollaari: Olkoon $(\tilde{S}, f)$ pinnan S rajoittamaton kerrospeite. Jos on olemassa $a_0 \in S$ siten, että joukon $f^{-1}(a_0)$ pisteet ovat peitekuvausten ryhmän T suhteen ekvivalentteja, niin T on transitiivinen.



<u>Todistus.</u> Koska joukon $f^{-1}(a_0)$ pisteet ovat T:n mukaan ekvivalentteja, ovat kaikki kolmikot $(\tilde S, f, \tilde a_0)$, $\tilde a_0 \in f^{-1}(a_0)$, ekvivalentteja. Silloin (Lause 4.2) $(\tilde S, f)$ on normaali. Lauseen 5.4 nojalla T on transitiivinen. □

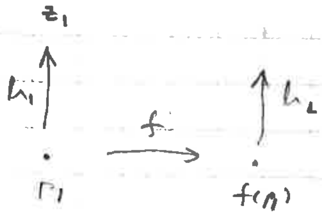
<u>Huomautus.</u> Koska universaali kerrospinta vastaa triviaalia aliryhmää, on universaali kerrospinta normaali; Lauseen 5.4 nojalla peitekuvausten ryhmä T on tällöin transitiivinen.

III Riemannin pintojen esittäminen

1. Riemannin pinnan kerrospinta

Tarkastellaan Riemannin pintojen (S_1, H_1) ja (S_2, H_2) välistä analyyttistä kuvausta. Jos $p_1 \in S_1$, h_1 on lokaali parametri p_1:ssä ja h_2 on lokaali parametri p_2:ssa, niin

$$g = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$$



Todistus. Koska joukon $f^{-1}(a_0)$ pisteet ovat T:n mukaan ekvivalentteja, ovat kaikki kolmikot $(\tilde{S}, f, \tilde{a}_0)$, $\tilde{a}_0 \in f^{-1}(a_0)$, ekvivalentteja. Siksi (Lause 4.2) $(\tilde{S}, f)$ on normaali. Lauseen 5.4 nojalla T on transitiivinen. □

Huomautus. Koska universaali kerrospinta vastaa triviaalia aliryhmää, on universaali kerrospinta normaali; Lauseen 5.4 nojalla peitekuvausten ryhmä T on tällöin transitiivinen.

III Riemannin pintojen esittäminen

1. Riemannin pinnan kerrospinta

Tarkastellaan Riemannin pintojen (S_1, H_1) ja (S_2, H_2) välistä analyyttistä kuvausta. Jos $p_1 \in S_1$, h_1 on lokaaliparametri p_1:ssä ja h_2 on lokaaliparametri p_2:ssa, niin

$$g = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$$

on analyyttinen pisteessä $z_1 = h(p_1)$.
Oletetaan, että $g'(z_1) \neq 0$.
Olkoon $\tilde{h}_1$ toinen lokaali parametri pisteessä p_1 sekä $\tilde{h}_2$ toinen lokaali parametri pisteessä $f(p_1)$.
Merkitään $\tilde{z}_1 = \tilde{h}_1(p_1)$ ja

$$\tilde{g} = \tilde{h}_2 \circ f \circ \tilde{h}_1^{-1} .$$

Silloin $\tilde{g} = (\tilde{h}_2 \circ h_2^{-1}) \circ g \circ (h_1 \circ \tilde{h}_1^{-1})$,
joten

$$(\tilde{g}')(\tilde{z}_1) = (\tilde{h}_2 \circ h_2^{-1})'(g(z_1)) \cdot g'(z_1) \cdot (h_1 \circ \tilde{h}_1^{-1})'(\tilde{z}_1) \neq 0,$$

koska parametrinvaihtokuvaukset $h_2 \circ \tilde{h}_2^{-1}$ ja $h_1 \circ \tilde{h}_1^{-1}$ ovat konformisia.
Näin ollen voidaan lokaalin parametrin valinnasta riippumattomalla tavalla puhua pisteistä $p_1 \in S_1$, joissa f:n derivaatta ei häviä.

<u>Lause 1.1.</u> Jos $f : (S_1, H_1) \to (S_2, H_2)$ on analyyttinen ja $f'(p_1) \neq 0$ kaikissa pisteissä $p_1 \in S_1$, niin (S_1, f) on pinnan S_2 sileä kerrospinta.

Todistus. Olkoon $p_1 \in S_1$, $p_2 = f(p_1)$, $z_1 = h_1(p_1)$ ja $w_2 = h_2(p_2)$, missä $h_i \in H_i$ on p_i:n ympäristössä määritelty lokaali parametri, $i=1,2$. Olkoon

$$g = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}.$$

Koska $g'(z_1) \neq 0$, on pisteellä z_1 avoin ympäristö U siten, että $g|U$ on homeomorfismi $U \to g(U)$, $g(U)$ avoin. Silloin $f|h_1(U)$ on homeomorfismi $h_1(U) \to h_2^{-1}(g(U))$, missä $h_1(U) \ni p_1$ ja $h_2^{-1}(g(U))$ ovat avoimia. □

Huomautus. Luovutaan oletuksesta, että $f'(p_1) \neq 0$ kaikilla $p_1 \in S_1$. Jos f ei ole vakio, niin pisteitä p_1, joille $f'(p_1) = 0$, on korkeintaan numeroituva määrä, eikä niillä ole kasautumispisteitä S_1:ssä. Näissä pisteissä f ei ole lokaali homeomorfismi, mutta sen sijaan muissa pisteissä on. Tämä antaa aiheen seuraavaan määritelmään:

Määritelmä. Pinnan S haarautuvalla kerrospinnalla tarkoitetaan paria $(\tilde{S}, f)$, missä $\tilde{S}$ on

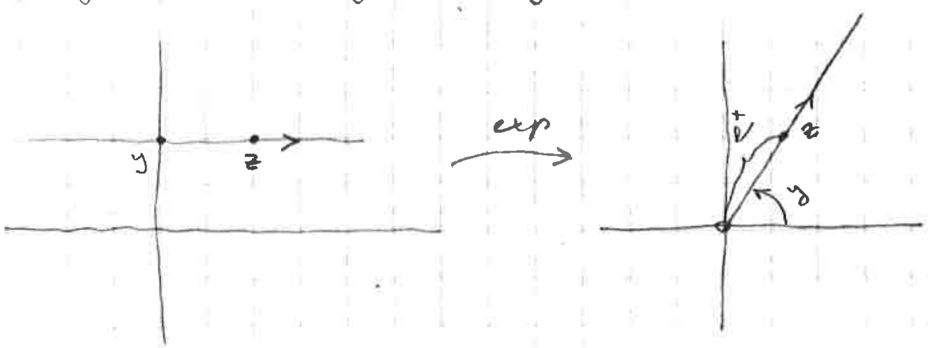
Viimeksi todettiin, että voidaan yksikäsitteisellä tavalla puhua analyyttisen funktion $f: S_1 \to S_2$ derivaatan nollakohdista. Lisäksi todistettiin: Jos $f' \neq 0$ pinnalla S_1, niin (S_1, f) on S_2:n sileä kerrospinta. Näin ollen saadaan esimerkiksi sileitä kerrospintoja tarkastelemalla tasoalueita Ω ja analyyttisiä kuvauksia $f: \Omega \to \Omega'$ siten, että $f' \neq 0$ ja $f(\Omega) = \Omega'$.

Olkoon $\Omega = \mathbb{C}$ ja $f = \exp$. Tällöin $f' = \exp \neq 0$, $f(\mathbb{C}) = \Omega' = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Näin ollen $(\mathbb{C}, \exp)$ on alueen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sileä kerrospinta.

Tarkastellaan kuvausta lähemmin.

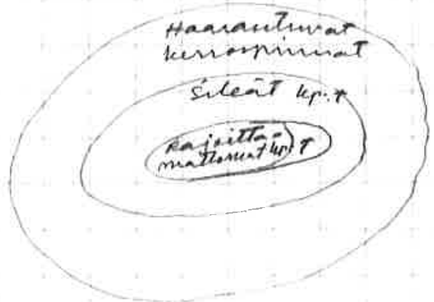
13 luento ———

$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$



pinta ja jatkuva kuvaus $f: \tilde{S} \to S$ on diskreettiä pistejoukkoa lukuunottamatta lokaali homeomorfismi.

Emme käsittele jatkossa haarautuneita kerrospintoja. Huomattakoon kuitenkin, että rajoittamattomat kerrospinnat muodostavat aidon osaluokan sileistä kerrospinnoista, sileät kerrospinnat ovat puolestaan aito osaluokka haarautuneista kerrospinnoista. Kaikkia käytetään yhteisesti nimeä kerrospinnat.



Lauseelle 1.1 tietyssä mielessä käänteinen tulos on myöskin voimassa:

<u>Lause 1.2.</u> Olkoon (S, H) Riemannin pinta ja $(\tilde{S}, f)$ sen sileä kerrospinta. Silloin $\tilde{S}$:llä on (yksikäsitteisesti määrätty) konfor-

Nähdään välittömästi, että $(\mathbb{C}, \exp)$ täyttää Lauseen II.2.4 ehdon, joten $(\mathbb{C}, \exp)$ on rajoittamaton kuvospint., jonka lehtien lukumäärä on ääretön.

formisen struktuurin $\tilde{H}$ siten, että $f: (\tilde{S}, \tilde{H}) \to (S, H)$ on analyyttinen.

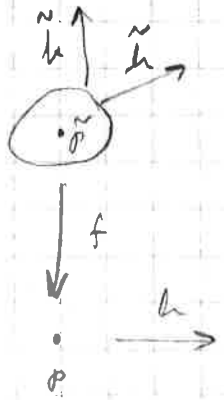
Todistus. Olkoon $\tilde{H}$ kaikkien $\tilde{S}$:n lokaalien parametrien $\tilde{h}$ joukko, joilla jokainen kuvaus $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$, $h \in H$, on määritysjoukossaan analyyttinen. Jos osoitetaan, että $\tilde{H}$ on konforminen struktuuri, niin $(\tilde{S}, \tilde{H})$ on Riemannin pint. ja f analyyttinen.

1. $\tilde{H}$:n kuvausten määritysjoukot peittävät $\tilde{S}$:n. Olkoon $\tilde{p} \in S$ ja $p = f(\tilde{p})$. Olkoon $\tilde{U} \in \tilde{S}$ pisteen $\tilde{p}$ ympäristö siten, että $f|\tilde{U}$ on homeomorfismi, olk. $h \in H$ joukossa $U \ni p$ määritelty lokaali parametri. Oletetaan, että $\tilde{U}$ on valittu niin pieneksi, että $f(\tilde{U}) \subset U$. Asetetaan $\tilde{h} = h \circ f|\tilde{U}$. Silloin $\tilde{h}$ on $\tilde{S}$:n lokaali parametri ja

$$h \circ f \circ \tilde{h}^{-1} = id$$

on analyyttinen määritysjoukossaan. Näin ollen $\tilde{p}$ sisältyy lokaalin parametrin $\tilde{h} \in \tilde{H}$ määritysjoukkoon.

2. Olkoot $\tilde{h}, \tilde{k} \in \tilde{H}$. Osoite-



saan, että $\tilde h \circ \tilde k^{-1}$ on määrittelyjoukossaan konforminen. Olkoot $\tilde h$ ja $\tilde k$ määriteltyjä pisteen $\tilde p$ ympäristössä, $p = f(\tilde p)$ ja $h \in H$ lokaali parametri p:ssä. Valitaan $\tilde p$:n ympäristö $\tilde U$ niin pieneksi, että $f|\tilde U$ on homeomorfismi. Luokan $\tilde H$ määritelmän mukaan kuvaukset

$$g_1 = h \circ f|\tilde U \circ \tilde h^{-1},$$

$$g_2 = h \circ f|\tilde U \circ \tilde k^{-1}$$

ovat konformisia. Silloin

$$g_1^{-1} \circ g_2 = (\tilde h \circ (f|\tilde U)^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ f|\tilde U \circ \tilde k^{-1}) = \tilde h \circ \tilde k^{-1}$$

on konforminen. □

Oletamme jatkossa, että Riemannin pinnan S kunnospinta $(\tilde S, f)$ on aina varustettu ns. lauseen konformisella struktuurilla $\tilde H$, jolloin siis projektiokuvaus f on analyyttinen.

2. Peitekuvausryhmä

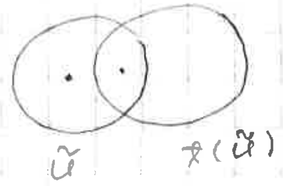
Lause 2.1. Olkoon $(\tilde{S}, f)$ Riemannin pinnan S ideaalinen kuoripinta. Silloin peitekuvaukset $t : \tilde{S} \to \tilde{S}$ ovat konformisia.

Todistus. Koska peitekuvaukset ovat homeomorfismeja, riittää näyttää, että peitekuvaukset ovat analyyttisiä.
Valitaan $\tilde{p} \in \tilde{S}$ ja olkoon V pisteen $\tilde{p}$ ympäristö siten, että $f_1 = f|V$ on injektio. Silloin $f_2 = f|t(V)$ on injektio. Ehdosta $f_1 = f_2 \circ t|V$ seuraa, että

$$t|V = f_2^{-1} \circ f_1 .$$

Koska f_1 ja f_2 ovat analyyttisiä, on $t|V$ näin ollen analyyttinen. □

Riemannin pinnan S ideaalin kuoripinnan $(\tilde{S}, f)$ peitekuvausten ryhmä T koostuu näin ollen konformikuvauksista $\tilde{S} \to \tilde{S}$. Lauseen II.5.2 todistuksessa käytettiin hyväksi T:n seuraavaa ominaisuutta:



Määritelmä. Ryhmä T homeomorfismeja $t: \tilde{S} \to \tilde{S}$ on epäjatkuva, jos jokaisella pisteellä $\tilde{p} \in \tilde{S}$ on ympäristö $\tilde{U}$ siten, että $t(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset \Rightarrow t = id$.

Lause 2.2. Peitekuvausten ryhmä T on epäjatkuva.

Todistus. Olkoon $\tilde{p} \in \tilde{S}$ ja valitaan $\tilde{p}$:n ympäristö $\tilde{U}$ siten, että $f|\tilde{U}$ on injektio. Väitetään, että $t(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$ kaikille $t \neq id$.
Antiteesi: $t(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq 0$, $t \neq id$.
Valitaan $\tilde{q} \in t(\tilde{U}) \cap \tilde{U}$. Silloin $\tilde{q}_1 = t^{-1}(\tilde{q}) \in \tilde{U}$. Koska $f(\tilde{q}_1) = f(\tilde{q})$ ja $f|\tilde{U}$ on injektio, on $q_1 = q$. Näin ollen q on peitekuvauksen t kiintopiste, mikä on mahdotonta. (Lause II 5.1, korall.). □

Huom. Eo. todistuksessa käytettiin hyväksi T:n kiintopisteettömyyttä. On syytä huomata, että epäjatkuvuuden määritelmästä seuraa välittömästi, että epäjatkuva ryhmä on kiintopisteetön.

$$S_1 \xrightarrow{f \text{ homeo}} S_2$$

$$T_1 \cong \pi_1(S_1) \underset{\text{isom}}{\xrightarrow{f_*}} \pi_1(S_2) \cong T_2$$

14
fuento

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "j"] \arrow[dddd, bend right, start anchor=west, end anchor=west] & T_2 \arrow[dddd, bend left, start anchor=east, end anchor=east] \\
\tilde{S}_1 \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "f_1"'] & \tilde{S}_2 \arrow[d, "f_2"] \\
S_1 \arrow[r, "\varphi"] & S_2 \\
 & \\
\pi_1(S_1) \arrow[r, "\varphi_*"] & \pi_1(S_2)
\end{tikzcd}$$

S:n universaalin kerrospinnan $(\tilde{S}, f)$ peitekuvausryhmä T ja $\pi_1(S)$ ovat isomorfisia. Tästä seuraa: Jos S_1 ja S_2 ovat homeomorfisia ja T_1 ja T_2 ovat vastaavien universaalien kerrospintojen peitekuvausten ryhmiä, niin T_1 ja T_2 ovat isomorfisia. Tällöin esiintyvä isomorfismi on varsin erikoista laatua. (ns. geometrinen isomorfismi)

<u>Lause 2.3.</u> Olkoot S_1 ja S_2 (Riemannin) pintoja, $(\tilde{S}_1, f_1)$ ja $(\tilde{S}_2, f_2)$ niiden universaaleja kerrospintoja sekä T_1 ja T_2 vastaavat peitekuvausten ryhmät. Silloin on olemassa (konforminen) homeomorfismi $\varphi : S_1 \to S_2$, jos ja vain jos on olemassa (konforminen) homeomorfismi $\tilde{\varphi} : \tilde{S}_1 \to \tilde{S}_2$ ja isomorfismi $j : T_1 \to T_2$ siten, että

(*) $\quad j(t) = \tilde{\varphi} \circ t \circ \tilde{\varphi}^{-1}$.

Tällöin on $\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \tilde{\varphi}$.

<u>Todistus.</u> Olkoot S_1 ja S_2 mielivaltaisia pintoja, $\tilde{\varphi} : \tilde{S}_1 \to \tilde{S}_2$ homeomorfismi ja $j : T_1 \to T_2$ isomorfismi siten, että (*) on voimassa. Olkoon $p_1 \in S_1$,

$\tilde{p} \in f_1^{-1}(p_1)$ ja $p_2 = f_2(\tilde{\varphi}(\tilde{p}))$. Kuvaus

$$\varphi : S_1 \to S_2 \,, \quad \varphi(\bar{p}_1) = p_2$$

on hyvinmääritelty. Sillä jos $\tilde{p}' \in f_1^{-1}(p_1)$, on olemassa $t_1 \in T_1$, jolle $\tilde{p}' = t_1(\tilde{p})$ (Lause II 5.4). Tällöin

$$f_2(\tilde{\varphi}(\tilde{p}')) = f_2(\tilde{\varphi}(t_1(\tilde{p}))) =$$

$$f_2(j(t_1)(\tilde{\varphi}(\tilde{p}))) = f_2(\tilde{\varphi}(\tilde{p})) = p_2 .$$

Koska j on isomorfismi, seuraa, että φ on bijektio. Ehdosta $\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \tilde{\varphi}$ päätellään, että φ on jatkuva ja avoin.

Oletetaan käänteen, että $\varphi : S_1 \to S_2$ on homeomorfismi. Silloin $(\tilde{S}_1, \varphi \circ f_1)$ on S_2:n universaali kerrospinta. Näin ollen on olemassa homeomorfismi $\tilde{\varphi} : \tilde{S}_1 \to \tilde{S}_2$, jolle

$$\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \tilde{\varphi} .$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{S}_1 \arrow[rr, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi \circ f_1"'] & & \tilde{S}_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & S_2 & \end{tikzcd}$$

Jos $t_1 \in T_1$, niin

$$f_2 \circ \tilde{\varphi} \circ t_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \varphi \circ f_1 \circ t_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1} =$$

$$\varphi \circ f_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1} = f_2 .$$

Näin ollen $j(t_1) = \tilde{\varphi} \circ t_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1} \in T_2$. Jos kääntäen $t_2 \in T_2$, niin vastaavasti $t_1 = \tilde{\varphi}^{-1} \circ t_2 \circ \tilde{\varphi} \in T_1$ ja $j(t_1) = t_2$. Näin ollen $j : T_1 \to T_2$ on bijektio. Lisäksi

$$j(t_1 \circ t_1') = \tilde{\varphi} \circ t_1 (\circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi) \circ t_1' \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

$$= j(t_1) \circ j(t_1') .$$

Jos φ tai $\tilde{\varphi}$ on konforminen, niin ehdosta $\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \tilde{\varphi}$ seuraa, että myös toinen on konforminen. □

Sanomme, että $\varphi : S_1 \to S_2$ <u>indusoi</u> kuvauksen $\tilde{\varphi} : \tilde{S}_1 \to \tilde{S}_2$. Huomattakoon, ettei $\tilde{\varphi}$ ole yksikäsitteisesti määrätty, vaan kaikki muotoa

$$\tilde{\psi} = t_2 \circ \tilde{\varphi} , \quad t_2 \in T_2 ,$$

olevat kuvaukset ovat φ:n indusoimia.

Määritelmä. G on varsinaisesti epäjatkuva, jos kaikille kompakteille joukoille $A, B \subset S$ on $g(A) \cap B \neq \emptyset$ korkeintaan äärellisen monella $g \in G$.

3. Riemannin pinta tekijäavaruutena

Olkoon S pinta ja G ryhmä homeomorfismeja $S \to S$. Silloin G määrittelee ekvivalenssirelaation joukossa S, ts.

$$p_1 \sim p_2 \iff \exists g \in G \text{ s.e. } g(p_1) = p_2 .$$

Olkoon S/G ekvivalenssiluokkien joukko. Varustetaan S/G tekijätopologialla, ts. S/G varustetaan hienoimmalla topologialla, jonka suhteen projektio $f: S \to S/G$ on jatkuva. Riittävän vahvoilla oletuksilla S/G osoittautuu olevan pinta, (S, f) sen rajoittamaton kerrospinta ja G vastaava peitekuvausten ryhmä.

Lause 3.1. Olkoon (S, H) Riemannin pinta, G varsinaisesti epäjatkuva (ja kiintopisteetön) ryhmä konformikuvauksia $g: S \to S$ ja $f: S \to S/G$ kanoninen projektio. Silloin
(1) S/G on pinta
(2) (S, f) on S/G:n rajoittamaton kerrospinta

(3) S/G:llä on olemassa konformisen struktuuri siten, että f on analyyttinen

(4) G on (S, f):n peitekuvausten ryhmä.

Todistus. Projektio f on S/G:n topologian määritelmän nojalla jatkuva. Lisäksi f on avoin. Sillä jos $O \subset S$ on avoin, niin

$$f^{-1}(f(O)) = \bigcup_{g \in G} g(O)$$

on avoin. Tällöin $f(O) \subset S/G$ on avoin.

Koska f on jatkuva ja S on yhtenäinen, on $S/G = f(S)$ yhtenäinen.

~~Lemma 1. Jos $a \in S$, niin joukolla $\{g(a) \mid g \in G\}$ ei ole kasautumispisteitä.~~

~~Todistus. Antiteesi: a' on joukon $\{g(a) \mid g \in G\}$ kasautumispiste. Olkoon A mielivaltainen a':n ympäristö. Silloin on olemassa $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$ siten, että $g_1(a) \in A$ ja $g_2(a) \in A$. Merkitään $g = g_2 \circ g_1^{-1}$. Silloin on $g \neq id$ ja $g(A) \cap A \neq \emptyset$, koska~~

$g(g_1(a)) = g_2(a)$. Näin ollen $\mathcal{G}$ ei ole epäjatkuva.

Lemma 2. Jos $a, b \in S$ siten, että $f(a) \neq f(b)$, niin on olemassa a:n ympäristö A ja b:n ympäristö B siten, että $g_1(A) \cap g_2(B) = \emptyset$ kaikilla $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$.

Todistus. Riittää näyttää, että $A \cap g(B) = \emptyset$ kaikilla $g \in \mathcal{G}$, sillä ehdosta $g_1(A) \cap g_2(B) \neq \emptyset$ seuraa, että $A \cap (g_1^{-1} \circ g_2)(B) \neq \emptyset$.

Olkoon U pisteen a ympäristö. Lemman 1 nojalla U sisältää korkeintaan äärellisen monta joukon $\{g(b) \mid g \in \mathcal{G}\}$ pistettä, olkoot ne $b_1, \dots, b_n$. Olkoon

Sen osoittamiseksi, että $S/\mathcal{G}$ on Hausdorff, tarkastellaan kahta $S/\mathcal{G}$:n pistettä $f(a)$ ja $f(b)$. Pisteen $b \in S$ kompakti ympäristö sisältää (vars. epäjatkuvuuden nojalla) vain äärellisen monta pistettä $g(a)$. Koska S on Hausdorff, on b:llä kompakti ympäristö B, jossa ei ole yhtään pistettä $g(a)$, $g \in \mathcal{G}$. Koska vain

äärellisen monta joukkoa $g(B)$ koska pisteen a annetun kompaktin ympäristön ja $a \notin g(B)$ $\forall g \in G$, on olemassa a:n kompakti ympäristö A siten, että $A \cap g(B) = \emptyset$ $\forall g \in G$. Koska G on ryhmä, seuraa, että $g_1(A) \cap g_2(B) = \emptyset$ $\forall g_1, g_2 \in G$. Näin ollen $f(A)$ ja $f(B)$ ovat (f:n avoimuuden nojalla) pisteiden $f(a)$ ja $f(b)$ pistevieraat ympäristöt.

15 [illegible]

Osoitetaan, että S/G on pinta. Olkoon tätä varten $p \in S$ ja A sen kompakti ympäristö. [Silloin $g(A) \cap A \neq \emptyset$ korkeintaan äärellisen monelle $g \in G$.] Jos $g \neq id$, niin $g(p) \neq p$. Jatkuvuuden nojalla on olemassa avoin $U \subset A$, $p \in U$, siten, että $g(U) \cap U = \emptyset$. Koska $g(A) \cap A \neq \emptyset$ korkeintaan äärellisen monelle $g \in G$, voidaan $U \subset A$ valita siten, että $g(U) \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq id$. Tällöin $f|U$ on injektio ja siis homeomorfismi. Jos U on valittu niin pieneksi, että se sisältyy S:n lokaalin parametrin määrittelyjoukkoon, on $h \circ (f|U)^{-1}$ S/G:n avoimen joukon $f(U)$

homeomorfismi tason avoimelle joukolle.

Osoitimme samalla, että f on lokaali homeomorfismi, joten (S, f) on S/G:n sileä kuoripinta.

Osoitetaan, että G on (S, f):n peitekuvausryhmä. S/G:n määritelmän nojalla on $f \circ g = f$ $\forall g \in G$, joten $g \in G$ on peitekuvaus. Olkoon t mielivaltainen peitekuvaus. Jos $p \in S$, niin p ja $t(p)$ ovat G:n mukaan ekvivalentteja. Silloin on olemassa $g \in G$ siten, että $g(p) = t(p)$. Lauseesta 5.1 seuraa, että $t = g$.

Määritelmän mukaan G on transitiivinen, joten (Lause 5.2) (S, f) on S/G:n rajoittamaton kuoripinta.

Muotoa $k = h \circ (f|U)^{-1}$, $h \in H$, olevat lokaalit parametrit muodostavat S/G:n konformisen struktuurin, joten seuraa f on analyyttinen. $\square$

Huom. Kuvausten $g \in G$ konformisuutta tarvitaan vain S/G:n konformisen struktuurin konstruointiin. Muilta osin tulos pätee vaps. epäjatkuvalle ja kiintopisteettömälle ryhmälle G homeomorfismeja $g: S \to S$.

<u>Korollaari.</u> Olkoon S (Riemannin) pinta ja G vapaasti epäjatkuva

ja kiintopisteetön ryhmä (konformisia) homeomorfismeja $g: S \to S$. Silloin G on epäjatkuva.

<u>Todistus.</u> Lauseen mukaan G on peitekuvausryhmä, joten väite seuraa Lauseesta 2.2. $\square$

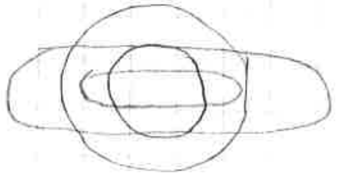
<u>Kysymyksiä</u>: 1) Onko epäjatkuva ryhmä välttämättä epäjatkuva? 2) Päteekö Lause 3.1 epäjatkuville ryhmille? Seuraava esimerkki osoittaa, että vastaus on molempiin kysymyksiin kieltävä, jos G:n kuvaukset eivät ole konformisia.

<u>Esimerkki</u>. Olkoon $S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja G kaikkien muotoa

$$(x, y) \mapsto (2^m x, 2^{-m} y) \quad , m \in \mathbb{Z},$$

olevien kuvausten $S \to S$ ryhmä. Silloin G on epäjatkuva (ja niin myös kiintopisteetön). Kuitenkaan G ei ole välttämättä epäjatkuva: Valitaan

$$A = B = \{ z \mid 1 \le |z| \le 2 \}.$$



Silloin $g(A) \cap A \neq \emptyset$ $\forall g \in G$. Tekijäavaruus S/G ei ole Hausdorff, joten Lause 3.1 ei päde tälle ryhmälle G. (Nimittäin x-akselin ja y-akselin pisteitä vastaavilla S/G – pisteillä ei ole pistevieraita ympäristöjä.

Riemannin kuvauslauseen nojalla yhdesti yhtenäinen Riemannin pinta on konformisesti ekvivalentti joko Riemannin pallon $\hat{\mathbb{C}}$, äärellisen tason $\mathbb{C}$ tai yksikkökiekon D kanssa. Näin ollen annetun Riemannin pinnan S universaalille kerrospinnalle voidaan valita joko

1. $\hat{\mathbb{C}}$ (elliptinen tapaus), tai
2. $\mathbb{C}$ (parabolinen tapaus), tai
3. D (hyperbolinen tapaus).

Olkoon $(\tilde{S}, t)$ S:n universaali kerrospinta siten, että $\tilde{S}$ on jokin näistä kolmesta vaihtoehdosta. Lauseen 2.1 nojalla $(\tilde{S}, t)$:n peitekuvaukset ovat konformisia. Funktioteoriasta tiedetään, että kaikissa tapauksissa peitekuvaukset ovat ns. Möbius-kuvauksia, ts.

$$(*)\qquad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Jokainen kuvaus (*) kuvaa $\hat{\mathbb{C}}$:n bijektiivisesti itselleen. Lisäksi kuvauksella (*) on joko 1 tai 2 kiintopistettä.

Lauseesta 2.1 seuraa, että peitekuvauksilla $f \neq id$ ole kiintopisteitä $\tilde{S}$:ssä. Näin ollen elliptisessä tapauksessa peitekuvausten ryhmä T on triviaali. Koska T on transitiivinen, seuraa, että $f : \tilde{S} \to S$ on injektio. Mutta koska f on myös surjektio ja analyyttinen, on f tällöin konforminen. Näin ollen elliptinen tapaus esiintyy silloin ja vain silloin kun S on konformisesti ekvivalentti $\hat{\mathbb{C}}$:n kanssa.

Parabolisessa tapauksessa on ∞ peitekuvausten ainoa mahdollinen kiintopiste. Tästä seuraa, että peitekuvaukset ovat muotoa

$$f : z \mapsto z + b.$$

Hyperbolisessa tapauksessa peitekuvausten $f: D \to D$ kiintopisteet ovat D:n reunalla. Tästä seuraa, että peitekuvaukset ovat joko hyperbolisia tai parabolisia Möbius-kuvauksia.

Voidaksemme soveltaa Lausetta 3.1 peitekuvausten ryhmään T, pitäisi tietää, että T on varsinaisesti epäjatkuva. Lauseesta II.5.1 tiedetään, että T on epäjatkuva ja kiintopisteetön, mutta esimerkki osoitti, ettei näistä ominaisuuksista yleisesti seuraa, että T olisi varsinaisesti epäjatkuva. Möbius-kuvausten ryhmille tulos kuitenkin pätee:

Lause 3.2. Olkoon T epäjatkuva ryhmä joko $\mathbb{C}$:n tai D:n Möbius-kuvauksia itselleen. Silloin T on varsinaisesti epäjatkuva.

Todistus. 1. Olkoon T tason $\mathbb{C}$ Möbiuskuvausten epäjatkuva ryhmä. Merkitään P:llä tason euklidist. metriikkaa. Silloin P on invariantti T:n kuvauksissa. Sillä jos $t \in T \setminus \{id\}$, niin t on muotoa $t(z) = z + b$. Näin ollen $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(z_1 + b) - (z_2 + b)| = \rho(t(z_1), t(z_2))$.

Olkoot A ja B tason kompakteja joukkoja. Oletetaan, että

$$t_i(A) \cap B \neq \emptyset$$

äärettömän monella $t_i \in T$. Koska A ja B ovat rajoitettuja ja t säilyttää etäisyydet, kuuluvat kaikki joukot $t_i(A)$ tason rajoitettuun joukkoon. Jos $p \in A$, niin äärettömällä joukolla $g_i(p)$ on kasautumispiste, mikä on ristiriidassa allaolevan Lemman kanssa.

16 huhtik.

2. Olkoon T D:n kuvausten ryhmä. Todistus menee samoin. Saadaan samalla tavalla kuvaamalla C D:lle ja valitsemalla ρ:ksi ns. Poincarén metriikka, joka on invariantti T:n kuvauksissa. □

Lemma Olkoon G epäjatkuva ryhmä Riemannin pinnan S (konformisia) kuvauksia itselleen. Jos $a \in S$, niin joukolla $\{g(a) \mid g \in G\}$

ei ole kasautumispisteitä S:ssä.

<u>Todistus.</u> s. 75. □

<u>Lause 3.3.</u> S ja $\tilde{S}/T$ ovat konformisesti ekvivalentteja.

<u>Todistus</u> Lause 3.1 ja Lemma. □

Lauseen 3.3 nojalla jokainen Riemannin pint. S voidaan esittää tekijäavaruutena $\tilde{S}/T$, missä joko

1. $\tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}$ ja $T = \{id\}$, jolloin $S \cong \hat{\mathbb{C}}$

tai

2. $\tilde{S} = \mathbb{C}$ ja T on epäjatkuva ryhmä muotoa $z \mapsto z+b$ olevia Möbius-kuvauksia

tai

3. $\tilde{S} = D$ ja T on epäjatkuva ryhmä Möbius kuvauksia $D \to D$.

Jos kääntäen T on epäjatkuva ryhmä Möbius-kuvauksia $D \to D$ tai $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, niin D/T ja $\mathbb{C}/T$ ovat Riemannin pintoja. Riemannin pintojen esittäminen tekijäavaruuten on näin ollen selvitetty.

Huomautettakoon lopuksi ilman todistusta, että parabolinen tapaus on tietyssä mielessä harvinainen. Riemannin pinnan S universaali kuorpinta on $\mathbb{C}$ jos ja vain jos S on konf. ekvival. jokin kanssa seuraavista pinnoista:

1) $\mathbb{C}$
2) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
3) torus

IV Differentiaalit ja integraalit

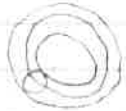
1. Pintaintegraali (Springer: Introduction to Riemann Surfaces)

Määrittelemme ensin pintaintegraalin Riemannin pinnalle. Ensimmäinen tehtävä on selittää, millaisia olioita on tällöin mahdollista integroida. Huomattakoon, että merkinnäissä saattaa tapahtua pieniä muutoksia aikaisempaan esitykseen.

Olkoon $f = f_1 + i f_2$ jatkuva kompleksifunktio Riemannin pinnalla S.

Huomautettakoon lopuksi ilman todistusta, että parabolinen tapaus on tietyssä mielessä harvinainen. Riemannin pinnan S universaalikerrospinta on $\mathbb{C}$ jos ja vain jos S on konf. ekvival. jonkin kanssa seuraavista pinnoista:

1). $\mathbb{C}$
2) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3) torus

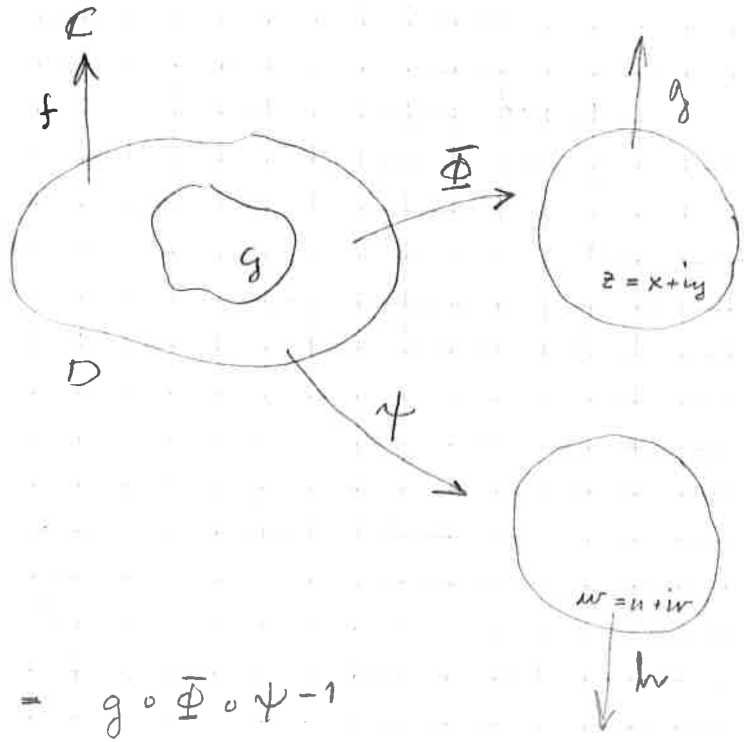


IV Differentiaalit ja integraalit

1. Pintaintegraali (Springer: Introduction to Riemann Surfaces)

Määrittelemme ensin pintaintegraalin Riemannin pinnalle. Ensimmäinen tehtävä on selittää, millaisia olioita on tällöin mahdollista integroida. Huomattakoon, että merkinnöissä saattaa tapahtua pieniä muutoksia aikaisempaan esitykseen.

Olkoon $f = f_1 + i f_2$ jatkuva kompleksifunktio Riemannin pinnalla S,



$$h = g \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$$

$$g = h \circ \Psi \circ \Phi^{-1}$$

Olkoon $G \subset S$ alue, joka sisältyy parametriliuskaan $D \subset S$. Olkoon $\Phi : D \to \mathbb{C}$ lokaali parametri. Asetetaan

$$g = f \circ \Phi^{-1}.$$

Tuntuisi järkevältä asettaa määritelmäksi

$$\iint_G f = \iint_{\Phi(G)} g(x,y)\,dx\,dy.$$

Sanottakoon heti, että yritys on mieletön. Olkoon tämän osoittamiseksi Ψ toinen lokaali parametri, jonka määrittelyjoukko sisältää G:n. Merkitään $\Psi(p) = u+iv$. Silloin olisi oltava

$$\iint_G f = \iint_{\Psi(G)} h(u,v)\,du\,dv,$$

missä $h = f \circ \Psi^{-1}$. Toisaalta on

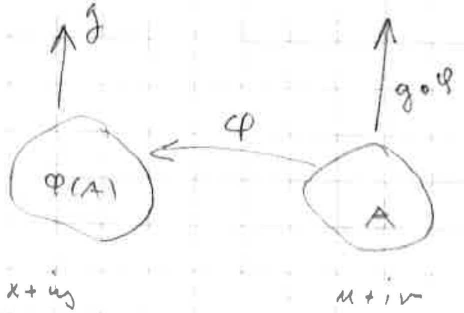
$$z = x+iy = \Phi(\Psi^{-1}(u+iv)),$$

joten

$$\iint_{\Phi(G)} g(x,y)\,dx\,dy =$$

$u_x v_y - u_y v_x$

$x_u y_v - x_v y_u$



A tasoalue
$\varphi : A \to \varphi(A)$ säännöllinen homeomorfismi.
$g : \varphi(A) \to \mathbb{C}$ integroituva
Silloin

$$\iint_{\varphi(A)} g(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A} g(\varphi(u,v))\, J_\varphi(u,v)\,du\,dv$$

φ määritellään x:n ja y:n muuttujien u:n ja v:n funktioina $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$.
Tällöin

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u$$

Jos φ on konforminen, niin $J_\varphi = |\varphi'|^2$.

$$\iint_{\Phi(G)} \overbrace{\underbrace{g(\Phi(\Psi^{-1}(u,v)))}_{h(u,v)\ \text{on kuitenkin tämä}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}^{\text{tämän pitäisi olla } h(u,v)}\, du\,dv .$$

Koska $\Phi \circ \Psi^{-1}$ on tasoalueen konformikuvaus tasoalueelle, on sen Jacobin determinantti = derivaatan modulin neliö eli

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2$$

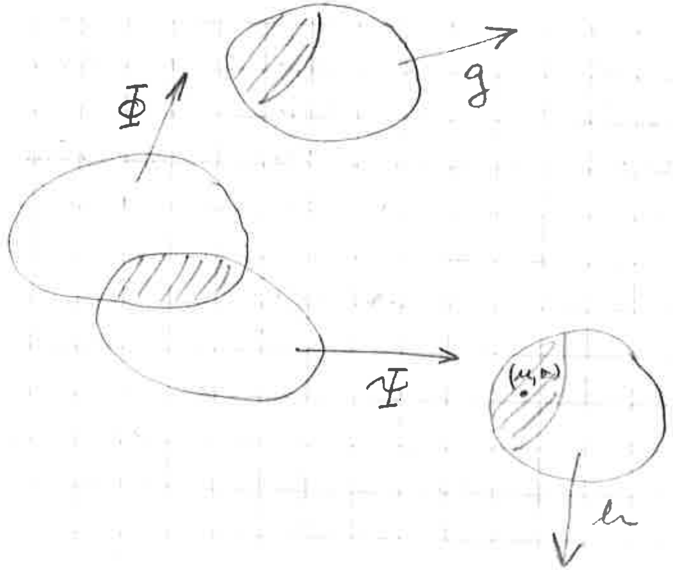
tai

$$J_{\Phi\circ\Psi^{-1}} = |(\Phi\circ\Psi^{-1})'|^2 .$$

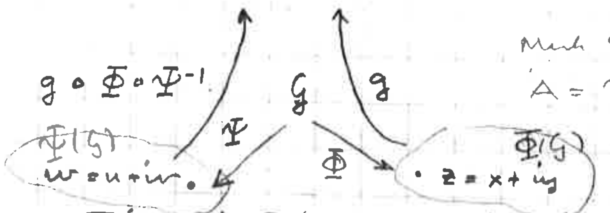
Näin ollen funktion f pintaintegraali on yksikäsitteisesti määritelty vain sillä edellytyksellä, että parametrinvaihdot $\Phi\circ\Psi^{-1}$ toteuttavat ehdon

$$|(\Phi\circ\Psi^{-1})'| = 1,$$

mikä on kuitenkin yleensä mahdotonta.
Tämä tarkastelu osoittaa, ettei voida lokaalin parametrin valinnasta riippumattomalla tavalla määritellä funktion pintaintegraalia. Näin olleen joudumme määrittelemään, mitä



Olkoot Φ ja Ψ lokaalisia parametrejä, joiden määrittelyalueet sisältävät G:n.



Merk. $\varphi = \Phi\circ\Psi^{-1}$
$A = \Psi(G)$

Muuttujanvaihtokaava pintaintegraalissa antaa:

$$\iint_{\Phi(G)} g(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Psi(G)} g(\Phi(\Psi^{-1}(u,v)))\,J_{\Phi\circ\Psi^{-1}}(u,v)\,du\,dv$$

$$= \iint_{\Psi(G)} g(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

voisimme integroida. Se, mitä integroidaan, on oltava sellainen, joka parametrinvaihdossa käyttäytyy siten, että ao. laskussa pintaintegraali pysyy muuttumattomana. Kutsumme tällaisia olioita 2. kertaluvun differentiaaleiksi.

17. luento

Määritelmä. Toisen kertaluvun differentiaalilla Riemannin pinnalla S tarkoitetaan sääntöä Ω, joka jokaiseen lokaaliin parametriin $\Phi : D \to \Phi(D)$ liittää joukossa $\Phi(D)$ määritellyn funktion $g(x,y)$ siten, että seuraava ehto on voimassa: Jos $h(u,v)$ on lokaaliin parametriin Ψ liittyvä funktio, niin

$$(*)\qquad h(u,v) = g(\Phi(\Psi^{-1}(u,v)))\,J_{\Phi\circ\Psi^{-1}}(u,v)$$

kaikissa pisteissä (u,v), joissa $\Phi\circ\Psi^{-1}$ on määritelty.

Kirjoittamalla (vanhahtavaan tapaan) $x = x(u,v)$ ja $y = y(u,v)$ saadaan (*) muotoon

$$h(u,v) = g(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Tämä tarkoittaa seuraavaa: Jos lausekkeeseen $g(x,y)dxdy$ sijoitetaan $x = x(u,v)$ ja $y = y(u,v)$, niin symboli $dxdy$ muuttuu lausekkeeksi

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv.$$

Erityis. $g(x,y)dxdy$ muuttuu Ω:n erityiseksi lokaaleissa koordinaateissa u ja v.

kts. (*)

Toisen kertaluvun differentiaalille Ω on tapana käyttää merkintää

$$\Omega(x,y) = g(x,y)dxdy,$$

jolloin voidaan sanoa, että lauseke $g(x,y)dxdy$ säilyy invarianttina lokaalin parametrin vaihdossa.

[Huom. Kun puhutaan Riemannin pinnan lokaalista parametreista, tarkoitetaan luonnollisesti pelkästään konformiseen struktuuriin kuuluvia lokaaleja parametreja.]

Jokaiselta funktiolta g voidaan tietenkin vaatia, että ne toteuttavat erilaisia säännöllisyysehtoja. Jos ko. ominaisuus on invariantti parametrinvaihdossa, niin sanotaan, että Ω:lla on ko. ominaisuus.

Koska $J_{\Phi\circ\psi^{-1}}$ on rajattu derivaatta, reaalinen ja positiivinen, huomataan, että g ja h ovat yhtä aikaa luokassa C^m (m kertaa jatk. deriv.), integroituvia, reaalisia, positiivisia jne. On siis mahdollista sanoa, että

1) $\Omega \in C^m$

2) Ω on ~~integroituva~~; lokaalisti integroituva
3) Ω on reaalinen
4) $\Omega > 0$
5) jne.

<u>Huomioita</u>: 1) Olkoon Ω 2. kertaluvun differentiaali ja f kompleksifunktio pinnalla S. Jos Ω:lla on lokaaliin parametriin $\Phi(P) = x+iy$ liittyvä esitys $\Omega(x,y) = g(x,y)\,dxdy$, niin <u>tulo</u> $f\Omega$ määritellään kaavalla

$$(*) \quad (f\Omega)(x,y) = f(\Phi^{-1}(x,y))\, g(x,y)\, dxdy .$$

Heti nähdään, että $f\Omega$ on 2. kertaluvun differentiaali. Jos näet $\Psi(P) = u+iv$ on toinen lokaali parametri ja $\Omega(u,v) = h(u,v)\,dudv$, niin sijoittamalla $(*)$:een $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ saadaan

$$f(\Psi^{-1}(u,v))\, g(x(u,v), y(u,v))\, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv$$

$$= f(\Psi^{-1}(u,v))\, h(u,v)\, dudv .$$

Näin ollen $f\Omega$ noudattaa oikeat muuntumislait.

2) Jos $\Omega_1(x,y) = g_1(x,y)\,dx\,dy$ ja $\Omega_2(x,y) = g_2(x,y)\,dx\,dy$ ovat 2. kertaluvun differentiaaleja, niin niiden summa

$$(\Omega_1+\Omega_2)(x,y) = (g_1(x,y)+g_2(x,y))\,dx\,dy$$

on 2. kertaluvun differentiaali.

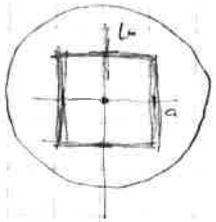
3) Jos G on alue, joka sisältyy parametrikiekkoon ja Ω on integroituva G:ssä, niin integraali $\iint_G \Omega$ on hyvinmääritelty. Sillä: jos Ω:lla on G:ssä esitykset $\Omega(x,y) = g(x,y)\,dx\,dy$ ja $\Omega(u,v) = h(u,v)\,du\,dv$, niin

$$\iint_{\Phi(G)} g(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Psi(G)} g(x(u,v),y(u,v))\cdot$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \iint_{\Psi(G)} h(u,v)\,du\,dv.$$

Integraalit kompaktin alueen yli

Olkoon $G \subset S$ alue, jonka sulkeuma $\bar{G}$ on kompakti. Jokainen piste $P_0 \in S$ sisältyy P_0-keskiseen parametrikiekkoon $D(P_0)$. Olkoon $\Phi : D(P_0) \to \{z \mid |z|<1\}$,



$\Phi(P_0) = 0$, vastaava lokaali parametri. Tällöin pisteelle $P \in D(P_0)$ voidaan käyttää merkintää $z = x + iy$, kun asetetaan $z = \Phi(P)$.

Olkoon $U(P_0)$ niiden pisteiden $z \in D(P_0)$ joukko, jotka toteuttavat ehdot

$$-a < x < a, \quad a < \frac{1}{2}$$
$$-b < y < b, \quad b < \frac{1}{2}.$$

Koska $\bar{G}$ on kompakti, se voidaan peittää äärellisellä määrällä joukkoja $U(P_0)$, olkoot ne $U_1, \dots, U_m$. Silloin jokainen U_k sisältyy parametrikiekkoon D_k, jonka lok. parametri olkoon $\Phi_k(P) = x + iy$. Määritellään funktiot $f_k : S \to [0, \infty[$ asettamalla

$$f_k(P) = \begin{cases} (x^2 - a^2)^4 (y^2 - b^2)^4, & P \in U_k \\ 0 & , P \in S \setminus U_k. \end{cases}$$

Silloin $f(P) > 0$, kun $P \in U_k$ ja $f(P) = 0$, kun $P \in S \setminus U_k$, sekä $f \in C^2$ pinnalla S. Jokaisessa pisteessä $P_0 \in \bar{G}$ on

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(P_0) > 0,$$

sillä $P_0 \in U_j$ jollakin arvolla j ja tällöin $f_j(P_0) > 0$, kun taas $f_k(P_0) \geq 0$ arvoilla $k \neq j$. Määritellään funktiot

$$\varrho_k : \bar{G} \to [0, \infty[$$

asettamalla

$$\varrho_k(P) = \frac{f_k(P)}{\sum_{j=1}^{m} f_j(P)}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Näillä funktioilla on seuraavat ominaisuudet:

(a) $\varrho_k(P) > 0$, kun $P \in U_k$

(b) $\varrho_k(P) = 0$, kun $P \notin U_k$

(c) $\sum_{k=1}^{m} \varrho_k(P) \equiv 1$ joukossa $\bar{G}$

(d) $\varrho_k \in C^2$ joukossa $\bar{G}$

Määritelmä. Ehdot (a) – (d) täyttävää kokoelman funktiot $\varrho_k : \bar{G} \to [0, \infty[$ sanotaan $\bar{G}$:n peitteeseen $\{U_k\}$ liittyväksi ykkösen ositukseksi.

Olemme edellä havainneet, että

kompaktilla joukolla on aina peitteitä, joihin liittyy yleinen ositus.

Olkoon nyt Ω integroituva 2. kertaluvun differentiaali alueessa G, jolla on esitys $\Omega(x,y) = g_k(x,y)\,dxdy$ parametrikiekossa D_k. Jos käytetään edellä konstruoitua yleistä ositusta, niin

$$\Omega = 1 \cdot \Omega = \Big(\sum_{k=1}^{m} e_k\Big)\Omega = \sum_{k=1}^{m} e_k \Omega .$$

Jokainen $e_k \Omega$ on integroituva 2. kertaluvun differentiaali, joka on $= 0$ U_k:n ulkopuolella. Näin ollen asetetaan seuraava määritelmä:

$$\iint_G \Omega = \sum_{k=1}^{m} \iint_{G \cap U_k} e_k \Omega = \sum_{k=1}^{m} \iint_{\Phi_k(G\cap U_k)} e_k(x,y)\, g_k(x,y)\,dxdy .$$

Lause 1.1. Integraalin $\iint_G \Omega$ arvo ei riipu käytetystä yleisestä osituksesta.

18 luento

Todistus. Olkoon $\tilde{e}_j$, $j = 1, \dots, m$ $\bar{G}$:n peitteeseen $\{\tilde{U}_j\}$ liittyvä ykkösen ositus. Olkoon $\tilde{\Phi}_j(P) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ lokaali parametri joukossa $\tilde{U}_j$. Silloin

$$\iint_G \Omega = \sum_{k=1}^{n} \iint_{G \cap U_k} \Omega e_k = \sum_{k=1}^{n} \iint_{G \cap U_k} \Omega e_k \sum_{j=1}^{m} \tilde{e}_j ,$$

koska $\sum \tilde{e}_j \equiv 1$. Jokaisessa joukossa $G \cap U_k$ integraali on additiivinen, joten

$$(*) \qquad \iint_G \Omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \iint_{G \cap U_k} \Omega e_k \tilde{e}_j$$

Tulo $e_k \tilde{e}_j$ on $\neq 0$ ainoastaan joukossa $U_k \cap \tilde{U}_j$. Koska $\Omega e_k \tilde{e}_j$ on 2. kertaluvun differentiaali, ei sen integraalin arvo riipu lokaalin parametrin valinnasta, joten

$$\iint_{G \cap U_k \cap \tilde{U}_j} \Omega(x, y) e_k \tilde{e}_j = \iint_{G \cap U_k \cap \tilde{U}_j} \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) e_k \tilde{e}_j$$

Muuttamalla (*):ssä summausjärjestystä saadaan

$$\iint_G \Omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \iint_{G \cap U_k \cap \tilde{U}_j} \Omega(x, y) e_k \tilde{e}_j =$$

Huomautus. Määritelmästä seuraa: Jos $G = G_1 \cup G_2$, niin

$$\iint_G \Omega = \iint_{G_1} \Omega + \iint_{G_2} \Omega .$$

Sillä

$$\iint_G \Omega = \sum_{k=1}^{n} \iint_{G\cap U_k} \Omega e_k = \sum_{k=1}^{n} \iint_{(G_1\cap U_k)\cup(G_2\cap U_k)} \Omega e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\iint_{G_1\cap U_k} \Omega e_k + \iint_{G_2\cap U_k} \Omega e_k \Big)$$

$$= \iint_{G_1} \Omega + \iint_{G_2} \Omega .$$

 $e_k = 0$ kun $x \notin U_k$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \iint_{G\cap \tilde U_j} \Omega(\tilde x, \tilde y)\, e_k \tilde e_j =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \iint_{G\cap \tilde U_j} \Omega(\tilde x, \tilde y) (\textstyle\sum e_k) \tilde e_j =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \iint_{G\cap \tilde U_j} \Omega(\tilde x, \tilde y)\, \tilde e_j . \quad \square$$

<u>Yleinen pintaintegraali</u>: Luovutaan oletuksesta, että G:n sulkeuma on kompakti. Tarkastellaan aluksi tapausta $\Omega \geq 0$. Olkoon $V \subset G$ mielivaltainen kompakti alue. Asetetaan

$$\iint_G \Omega = \sup_{V\subset G} \iint_V \Omega .$$

On selvää, että tämä määritelmä yhtyy aikaisempaan, sillä ehdosta $\Omega \geq 0$ seuraa, että jos $\bar G$ on kompakti, niin

$$\iint_V \Omega \leq \iint_G \Omega .$$

$\Omega(x,y) = g(x,y)\,dxdy$

Jos Ω on mielivaltainen (integroituva) 2. kertaluvun differentiaali, niin $|\Omega|$ määritellään kaavalla

$$|\Omega|(x,y) = |g(x,y)|\,dxdy,$$

Tästä seuraa, että $|\Omega|$ on toisen kertaluvun differentiaali. Jos Ω on reaalinen, niin asetetaan

$$\Omega^+ = \frac{1}{2}(|\Omega| + \Omega)$$

$$\Omega^- = \frac{1}{2}(|\Omega| - \Omega),$$

jolloin Ω^+ ja Ω^- ovat ei-negatiivisia 2. kertaluvun differentiaaleja. Asetetaan

$$\iint_G \Omega = \iint_G \Omega^+ - \iint_G \Omega^-$$

silloin, kun molemmat oikealla olevat integraalit ovat äärellisiä.

Jos Ω on kompleksinen, niin $\mathrm{Re}\,\Omega$ ja $\mathrm{Im}\,\Omega$ ovat 2. kertaluvun reaalisia differentiaaleja. Asetetaan

$$\iint_G \Omega = \iint_G \mathrm{Re}\,\Omega + i \iint_G \mathrm{Im}\,\Omega.$$

Kaavan

$$\iint_G (\Omega_1 + \Omega_2) = \iint_G \Omega_1 + \iint_G \Omega_2$$

todistus (täysin ilmeinen) sivuutetaan.

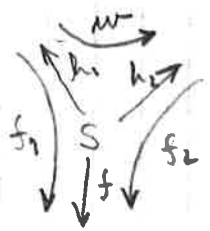
Esimerkki. Olkoon f tasoalueen G riittävän säännöllinen reaalifunktio. Sen gradientti $\operatorname{grad} f : G \to \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$\operatorname{grad} f = f_x + i f_y .$$

Silloin $|\operatorname{grad} f|^2 = f_x^2 + f_y^2$. Integraali

$$(*) \qquad \iint_G |\operatorname{grad} f|^2 = \iint_G (f_x^2 + f_y^2)$$

kutsutaan f:n Dirichlet'n integraaliksi. Sillä on monia fysikaalisia sovellutuksia, joiden matemaattinen tausta on seuraava: Jos G:n reuna on kyllin siisti ja tarkastellaan kaikkia funktioita f, joilla on G:n reunalla annetut reuna-arvot, niin Dirichlet'n



integraali (*) saa tässä funktioperheessä pienimmän arvonsa silloin, kun f on harmoninen.

Analyyttisten ja siis myös harmonisten funktioiden kannalta merkitsee häiritsevää rajoitusta, jos rajoitetaan tasoalueisiin. Oikea analyyttisen funktion määrittelyjoukko on Riemannin pinta (nykyisestä johdosta ehkä on jo käynyt ilmeiseksi mutta on mahdollista myös alkeellisesti perustella tarkastelemalla analyyttistä jatkamista.) Tuntuu näin ollen mielekkäältä kysyä, voidaanko Riemannin pinnalle määritellyn reaalifunktion Dirichlet'n integraali laskea.

Olkoon $f: S \to R$ jatkuvasti derivoituva funktio sekä h_1 ja h_2 lokaaleja parametreja, joiden määrittelyjoukot kohtaavat. Merkitään

$$f_1 = f \circ h_1^{-1}, \quad z_1 = x_1 + iy_1 = h_1(p),$$

$$f_2 = f \circ h_2^{-1}, \quad z_2 = x_2 + iy_2 = h_2(p),$$

$$w = u + iv = h_2 \circ h_1^{-1},$$

jolloin siis $f_1 = f_2 \circ w$. Näin ollen

$$D_1 f_1 = (D_1 f_2 \circ w)(D_1 u) + (D_2 f_2 \circ w)(D_1 v)$$

$$D_2 f_1 = (D_1 f_2 \circ w)(D_2 u) + (D_2 f_2 \circ w)(D_2 v),$$

joten

$$|\mathrm{grad}\, f_1|^2 = (D_1 f_2 \circ w)^2 \left((D_1 u)^2 + (D_2 u)^2\right) + (D_2 f_2 \circ w)^2 \left((D_1 v)^2 + (D_2 v)^2\right) + 2 (D_1 f_2 \circ w) \cdot (D_2 f_2 \circ w)(D_1 u\, D_1 v + D_2 u\, D_2 v).$$

Koska $w = u + iv$ on analyyttinen, on Cauchy-Riemannin differentiaaliyhtälöiden nojalla $(D_1 u)^2 + (D_2 u)^2 = (D_1 v)^2 + (D_2 v)^2 = |w'|^2$ ja $D_1 u\, D_1 v = - D_2 u\, D_2 v$. Näin ollen

$$|\mathrm{grad}\, f_1|^2 = |(\mathrm{grad}\, f_2) \circ w|^2 \, |w'|^2,$$

joten $|\mathrm{grad}\, f|^2$ voidaan määritellä 2. kertaluvun differentiaalina pinnalla S. Dirichlet'n integraali on näin ollen määritelty funktioille $f: S \to R$. Erityisesti osoittamme, että 2. kertaluvun differentiaalit ovat aivan mahdollisia (~~ja myös mielekkäitä~~) olioita, joiden pintaintegraali voidaan mielekkäällä tavalla määritellä Riemannin summalla.

2. Käyräintegraali

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaleille tarvitaan olioit, joiden käyräintegraali voidaan laskea. Samaan tapaan kuin edellä voitaisiin tarkastella muuttujien vaihtoa käyräintegraalissa ja päätyä oikeisiin muunnoskaavoihin.

19. huhti →

Riittänee sanoa lyhyesti, että ensimmäisen kertaluvun differentiaalille tarvitaan lokaalien parametrien avulla määriteltävää lauseketta.

$$\omega(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy.$$

Jos $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ja

$$\omega(u,v) = \tilde{p}(u,v)du + \tilde{q}(u,v)dv,$$

niin

$$\tilde{p}(u,v) = p(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u} + q(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\tilde{q}(u,v) = p(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v} + q(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Lyhyesti sanottuna lauseke $p\,dx + q\,dy$ säilyy invarianttina parametrin vaihdossa. Tästä seuraa: Jos $C : I \to S$ on differentioituva käyrä, jonka jälki sisältyy parametrisoinnin, niin käyräintegraali

$$\int_C \omega = \int_C p\,dx + q\,dy$$

on hyvin määritelty. Tarkastellaan integraalia lähemmin. Olkoon $\Phi(P) = x + iy$ lokaali parametri, jonka määrittelyjoukko sisältää $\gamma(I)$:n. Silloin $\Phi \circ C : I \to \mathbb{C}$ on säännöllinen käyrä kompleksitasossa. Merkitään $\Phi(C(t)) = x(t) + i\,y(t)$. Silloin

$x(t) = x(u(t), v(t))$
$y(t) = y(u(t), v(t))$,

joten

$$\int_C \omega = \int_{\Phi \circ C} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy =$$

$$\int_0^1 \big(p(x(t),y(t))\,x'(t) + q(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\,dt$$

Olkoon $\Phi(P) = u + iv$ toinen lokaaliparametri. Jos $\Phi(C(t)) = u(t) + iv(t)$, $x = x(u,v)$ ja $y = y(u,v)$, niin

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

Sijoittamalla nämä integraalin $\int_C \omega$ lausekkeeseen havaitaan, että

$$\int_C \omega = \int_{\Phi \circ C} \tilde{p}(u,v)\,du + \tilde{q}(u,v)\,dv.$$

Olkoon $C : I \to S$ mielivaltainen differentioituva käyrä. Koska $C(I)$ on kompakti, se voidaan peittää äärellisen monella parametrisolulla. Tästä seuraa, että I

voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = 1$ siten, että C kuvaa jokaisen osavälin $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ yhteen ainoaan parametrikäyrään. Merkitään $C_i = C \mid I_i$. Silloin integraalit

$$\int_{C_i} \omega \quad , \; i = 1, \dots, n,$$

on määritelty. Asetetaan

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \omega .$$

<u>Lemma</u>. Jos jako $t_0' < t_1' < \dots < t_m' = 1$ on jaon $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ tihennys, niin

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j'} \omega ,$$

missä $C_j' = C \mid [t_{j-1}', t_j']$.

<u>Todistus</u>. Jos jakopisteitä t_j' on tasan yksi enemmän kuin jakopisteitä t_i, seuraa väite tavallisen käyräintegraalin additiivisuudesta. Yleinen tulos saadaan induktiolla. □

Edellä on differentiaalin ω säännöllisyysoletukset jätetty tekemättä; Ensisijaisesti on kuitenkin ajateltava jatkuvia differentiaaleja. Jos niin differentiaalista oletetaan vähän, niin polun on oltava säännöllisempi, jotta integraali $\int_C \omega$ voitaisiin

<u>Lause 2.1.</u> Kaari-integraali

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \omega$$

arvo ei riipu käytetystä jaosta $t_0 < \dots < t_n$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $t_0' < t_1' < \dots < t_m'$ toinen välin $[0,1]$ jako ja $t_0'' < \dots < t_r''$ näiden jakojen yhteinen alajako. Lemman nojalla on

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \omega = \sum_{k=0}^{r} \int_{C_k''} \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j'} \omega . \square$$

Jos C on paloittain jatkuvasti differentioituva, jaetaan I osaväleihin $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ siten, että $C_i = C|[t_{i-1}, t_i]$ on jatkuvasti differentioituva, $i = 1, \dots, m$, ja asetetaan

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} \omega .$$

määritellä. Seuraavaksi pyrimme arvioimaan, että polusta riittää pelkkä jatkuvuus, jos ω on kyllin säännöllinen.

Huomattakoon lisäksi, että 1. kertaluvun differentiaalija voidaan laskea yhteen ja kertoa funktioilla.

Määritelmä. Jos funktiolla $f: S \to \mathbb{C}$ on jatkuvat 1. kertaluvun derivaatat, niin kaikkien parametrien avulla määriteltyä lauseketta

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

kutsutaan f:n kokonaisdifferentiaaliksi.

Lause 2.2. Kokonaisdifferentiaali df on 1. kertaluvun differentiaali.

Todistus. Asetetaan $p = \partial f/\partial x$ ja $q = \partial f/\partial y$. Olkoon $x = x(u,v)$ ja $y = y(u,v)$ sekä $\tilde{p} = \partial f/\partial u$ ja $\tilde{q} = \partial f/\partial v$. Ketjusäännön nojalla on

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Näin ollen $\tilde{p} = p \cdot \partial x/\partial u + q\, \partial y/\partial u$ ja $\tilde{q} = p\, \partial x/\partial v + q\, \partial y/\partial v$. □

Määritelmä. Differentiaali $\omega = p\,dx + q\,dy$ on eksakti, jos se on funktion $f \in C^2$ kokonaisdifferentiaali.

Lause 2.3. Jos $\omega = p\,dx + q\,dy$ on eksakti, niin $\partial p/\partial y = \partial q/\partial x$.

Todistus. Koska $f \in C^2$, on kaikilla lokaaleilla parametreilla (x, y) voimassa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Koska $p = \partial f/\partial x$ ja $q = \partial f/\partial y$, saadaan väite. □

20 luento →

Määritelmä. Jatkuvasti differentioituva differentiaali $\omega = p\,dx + q\,dy$ on suljettu, jos $\partial p/\partial y = \partial q/\partial x$.

Lauseen 2.3 nojalla eksakti differentiaali on suljettu. Käänteinen tulos on voimassa pelkästään lokaalisti: Jos $\omega = p\,dx + q\,dy$

on suljettu ja tarkastellaan lokaalia parametria $z = x+iy$, parametrikiekossa $|z|<1$, niin yksikkökiekossa määritelty differentiaalilauseke $p\,dx + q\,dy$ täyttää ns. integroituvuusehdon $\partial p/\partial y = \partial q/\partial x$. Analyysin tulosten mukaan on olemassa funktio $f \in C^2$, joka on määritelty joukossa $|z|<1$ ja jolle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q.$$

Näin ollen ω on eksakti parametrikiekossa $|z|<1$. Koska jokainen piste $P \in S$ sisältyy tällaiseen parametrikiekkoon, voidaan sanoa, että <u>suljettu differentiaali on lokaalisti eksakti</u>.

Suljettujen differentiaalien ω erikoisominaisuus on, että integraali

$$\int_C \omega$$

voidaan määritellä kaikille

jatkuville poluille $C: I \to S$ eikä yleisemmin paloittain jatkuvasti differentioituville poluille.

Tämän osoittamiseksi tarkastellaan aluksi säännöllistä polkua C, jolle $C(I)$ sisältyy yhteen parametrisoluun $|z|<1$. Koska ω on suljettu, on olemassa $f \in C^2$ siten, että tässä parametrisolussa pätee $\omega = df$. Silloin

$$\int_C \omega = \int_C df = f(C(1)) - f(C(0)).$$

Jos merkitään $P_1 = C(1)$ ja $P_0 = C(0)$, niin on

$$(*) \qquad \int_C \omega = f(P_1) - f(P_0)$$

kaikille poluille C, jotka yhdistävät P_0:n ja P_1:n. Voimme näin ollen käyttää kaavaa $(*)$ integraalin määritelmänä siinä tapauksessa, että C ei ole edes paloittain jatkuvasti differentioituva. (Ilmeistä on, että tämä määritelmä yhtyy aikaisempaan, kun C on kyllin säännöllinen.)

Jos $\tilde{f}$ on toinen funktio, jolle $\omega = d\tilde{f}$, niin $f - \tilde{f}$ on vakio. Näin ollen integraali (*) ei riipu funktiosta f.

Jos C on mielivaltainen polku, niin $I = [0,1]$ voidaan jakaa äärelliseen määrään osaan $I_k = [t_{k-1}, t_k]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$, siten että polun $C_k = C|I_k$ jälki sisältyy parametrisoituun D_k. Olkoon $\omega = df_k$ parametrisoidussa D_k ja merkitään $P_k = C(t_k)$. Asetetaan

$$\int_C \omega = \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} df_k = \sum_{k=1}^{m} \left(f_k(P_k) - f_k(P_{k-1}) \right).$$

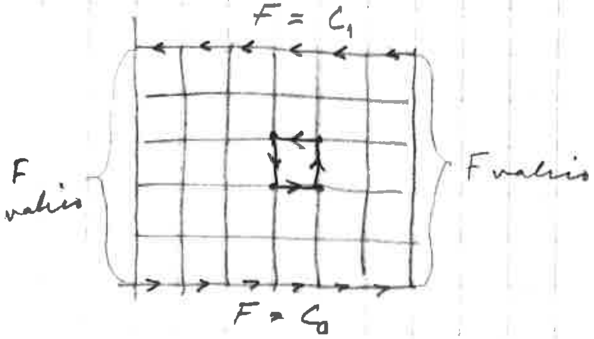
Aikaisempaan tapaan voidaan osoittaa, että integraalin arvo ei riipu käytetystä jaosta.

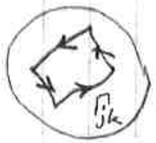
Kaavoja:

$$\int_{C^{-1}} \omega = - \int_C \omega,$$

$$\int_{C_1 C_2} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega,$$

$$\int_C \omega = 0, \text{ jos } C \text{ on vakio.}$$





m^2 neliöitä, joiden kärkipisteet muotoa

$$\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{m}\right), \left(\frac{j+1}{m}, \frac{k}{m}\right), \left(\frac{j+1}{m}, \frac{k+1}{m}\right), \left(\frac{j}{m}, \frac{k+1}{m}\right)$$

$j, k = 1, \ldots, m.$

$$\int_C df = f(c(1)) - f(c(0))$$

$$\int_C df = 0, \text{ jos } C \text{ suljettu}$$

Lause 2.4. Jos $C_0 \simeq C_1$ ja ω on suljettu, niin

$$\int_{C_0} \omega = \int_{C_1} \omega .$$

Todistus. Olkoon $F : C_0 \simeq C_1$ homotopia. Neliö $I \times I$ voidaan jakaa m^2 kappaleeseen yhteneviä neliöitä niin, että jokainen neliön kuva sisältyy yhteen parametrisoluun. Neliön kuvan reuna muodostaa suljetun polun Γ_{jk}, $j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, m$. Koska ω on eksakti jokaisessa parametrisolussa, on

$$\int_{\Gamma_{jk}} \omega = 0.$$

Toisaalta on helppo päätellä:

$$\int_{C_0} \omega - \int_{C_1} \omega = \sum_{j,k} \int_{\Gamma_{jk}} \omega . \quad \square$$

Olkoon $P \in S$ ja tarkastellaan perusryhmää $\pi_1(S,P)$. Jos ω on suljettu differentiaali, niin yhtälö

$$[C] \mapsto \int_C \omega.$$

määrittelee homomorfismin $\pi_1(S,P) \to \mathbb{C}$. Koska $\mathbb{C}$ on kommutatiivinen, sisältää homomorfismin ydin ainakin muutakin kuin $\pi_1(S,P)$:n neutraalialkion, esim. kaikki <u>kommutaattorit</u> $[C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1}]$, sillä:

$$[C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1}] \mapsto \int_{C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1}} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega$$

$$- \int_{C_1} \omega - \int_{C_2} \omega = 0.$$

Kaikkien kommutaattorien virittämää $\pi_1(S,P)$:n aliryhmää kutsutaan <u>kommutaattorialiryhmäksi</u> Γ. Se on normaali aliryhmä, joten voidaan muodostaa tekijäryhmä $\pi_1(S,P) / \Gamma = H^1$. Tätä kutsutaan S:n (ensimmäiseksi) <u>homologiaryhmäksi</u>. H' on Abelin

Merkitään $C_1 \sim C_2$, jos $C_1 C_2^{-1} \sim 0$.
Silloin $C_1 C_2 \sim C_2 C_1$, koska $C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1} \sim 0$

21. luento

ryhmä (se on ns. $\pi_1(S, P)$:n abelisointi)
Jokainen suljettu polku C pisteestä P määrää H^1:n alkion. C on nollahomologinen, $C \sim 0$, jos C määrää neutraalialkion. Nyt pätee:

<u>Lause 2.5.</u> Jos $C \sim 0$, niin $\int_C \omega = 0$.

Merkitsemällä $C_1 + C_2$ tarkoitetaan polun $C_1 C_2$ homologialuokkaa. Silloin $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$. Täten saamme H^1:n laskutoimitusta merkitä $+$:lla.

3. Stokesin lause

Olkoon $\omega = p\,dx + q\,dy \in C^1$. Liitetään ensimmäisen kertaluvun differentiaaliin


Riemannin pinnat
Kl-80/1
A5/20 · 7×7mm 70g/m²
11025
Riemannin pinnat
Kl-80/2
A5/20 · 7×7mm · 70g/m²
11025
Riemannin pinnat
Kl-80/3
A5/20 · 7×7mm · 70g/m²
11025
Riemannin pinnat
Kl-80/4
A5/40 7×7mm 70g/m²
11031
Riemannin pinnat
Kl.-80/5
A5/40 7×7mm 70g/m²
11031