4 Kaksijakoiset verkot

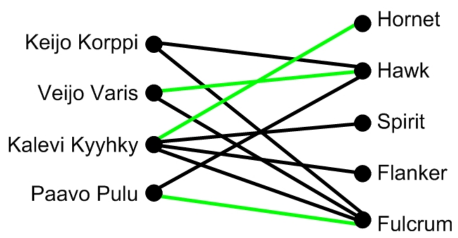
4.1 Parittaminen

Hävittäjälentäjien harjoituksessa käytettiin viittä hävittäjää: Hornet, Hawk, Spirit, Flanker ja Fulcrum. Kaikki lentäjät eivät kuitenkaan voineet lentää kaikilla hävittäjillä koulutuksellisista seikoista johtuen. Mikä on maksimäärä hävittäjiä, joita voitiin saada yhtäaikaa ilmaan, kun lentäjät pystyivät lentämään hävittäjiä Taulukon 5 mukaisesti?

Lentäjä	Hävittäjä
Keijo Korppi	Hawk, Fulcrum
Veijo Varis	Hawk, Fulcrum
Kalevi Kyyhky	Hornet, Spirit, Flanker, Fulcrum
Paavo Pulu	Hawk, Fulcrum

Taulukko 5: Taulukossa on esitetty lentäjän kyky lentää hävittäjiä Hornet, Hawk, Spirit, Flanker, Fulcrum.

Lentäjiä on neljä ja hävittäjiä viisi, joten hävittäjiä voi olla yhtäaikaa ilmassa korkeintaan neljä. Harjoitukseen osallistuneet Korppi, Varis ja Pulu pystyivät kukin lentämään samoja hävittäjiä. Jos Korppi lentää Hawkilla ja Varis Fulcrumilla, niin Pululle ei jää hävittäjää. Näin ollen yhden lentäjän on jäätävä seuraamaan harjoitusta maan kamaralle. Hävittäjiä voi siis olla yhtäaikaisesti ilmassa maksimissaan kolme. Esitetään lentäjät ja hävittäjät verkkona (Kuva 80).



Kuva 80: Lentäjä osaa lentää hävittäjää mikäli heitä yhdistää kaari. Verkossa vihreillä kaarilla on esitetty eräs ratkaisu tehtävälle.

Edellä kuvattu ongelma on verkkoteorian eräs osa-alue, jossa *kaksijakoisen verkon* kahden joukon välille (lentäjät ja hävittäjät) pyritään löytämään *maksimaalinen paritus*.

Määritelmä 4.1.1. Verkko on *kaksijakoinen*, jos verkon solmut voidaan jakaa kahteen joukkoon A ja B siten, että jokaisen kaaren toinen päätesolmu kuuluu joukkoon A ja toinen joukkoon B.

Kuvan 80 verkko on kaksijakoinen, koska jokaisen kaaren toinen päätesolmu on joukossa lentäjät ja toinen päätesolmu joukossa hävittäjät.

Määritelmä 4.1.2. Kaksijakoisen verkon kaaret, joilla ei ole yhteisiä päätesolmuja muodostavat *parituksen*. Tällöin päätesolmuista käytetään nimitystä *paritettu*.

Kuvassa 80 paritettu ovat esimerkiksi Korppi-Fulcrum, Kyyhky-Spirit ja Varis-Hawk.

Määritelmä 4.1.3. *Maksimaalisen parituksen* muodostaa kaarten joukko, jossa on paritettu maksimimäärä solmuja.

Kuvan 80 vihreillä kaarilla paritetut Varis-Hawk, Kyyhky-Hornet ja Pulu-Fulcrum muodostavat erään maksimaalisen parituksen.

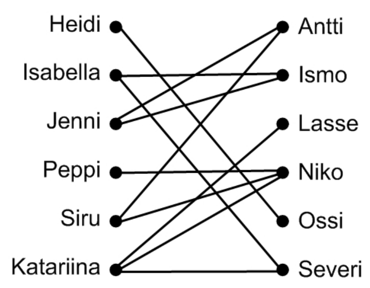
4.2 Täydellinen paritus

Opettaja haluaa tyttöjen ja poikien istuvan vierekkäin luokassa. Tytöt saavat kirjoittaa paperille vähintään yhden ja maksimissaan kolme pojan nimeä, joiden vieressä haluaisivat istua. Opettaja saa Taulukon 6 mukaisen listan. Onko mahdollista, että tytöistä jokainen saisi istua itselleen mieluisan pojan vieressä?

Tyttö	Mieluisa poika
Heidi	Ossi
Isabella	Ismo, Severi
Jenni	Antti, Ismo
Peppi	Niko
Siru	Antti
Katariina	Lasse, Niko, Severi

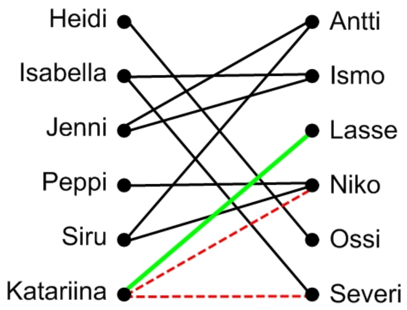
Taulukko 6: Onko mahdollista, että tytöistä jokainen saisi istua itselleen mieluisan pojan vieressä?

Tehdään Taulukkoa 6 vastaava kaksijakoinen verkko (Kuva 81).

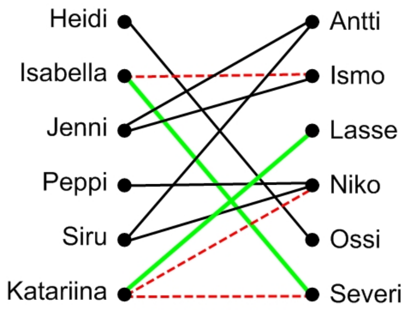


Kuva 81: Taulukkoa 6 vastaava kaksijakoinen verkko.

Nyt tehtävä voidaan muotoilla matemaattisesti: Etsi Kuvan 81 kaksijakoisesta verkosta maksimaalinen paritus.



Kuva 82: Olkoot Katariina ja Lasse pari, jolloin Katariina ei voi olla kenenkään muun pari.



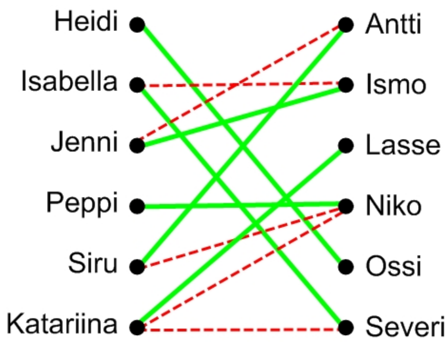
Kuva 83: Nyt Severin pariksi kelpaa vain Isabella ja Isabella ei voi olla kenenkään muun pari.

Solmun asteluku kuvastaa kuinka monta vaihtoehtoa on henkilön pariksi. Siis mitä suurempi solmun asteluku on, sitä enemmän vaihtoehtoja on paritukseen. Jos solmun asteluku on nolla, ei paritus ole mahdollinen. Jos solmun asteluku on yksi, ei ole vaihtoehtoja paritukseen.

Aloitetaan parien muodostaminen solmusta, jonka asteluku on mahdollisimman pieni eli yksi. Esimerkiksi Lassen asteluku on yksi, joten hänen parikseen kelpaa vain Katariina. Olkoot Katariina ja Lasse pari. Nyt Katariina ei voi olla kenenkään muun pari, joten Katariinaan liittyneet muut kaaret voidaan värittää sen merkiksi punaisella (Kuva 82).

Nyt Severin pariksi kelpaa vain Isabella, joten olkoot he pari. Nyt Isabella ei voi olla kenenkään muun pari, joten Isabellaan liittyneet muut kaaret voidaan värittää punaisella (Kuva 83)

Tässä kyseisessä tapauksessa vastaavan menettelyn jatkaminen tuottaa kaikkia tyttöjä miellyttävän lopputuloksen (Kuva 84), sillä tytöistä jokainen saa istua mieluisen pojan vieressä. Tällöin paritus on *täydellinen paritus*.



Kuva 84: Jos paritus sisältää kaikki verkon solmut, paritus on täydellinen.

Määritelmä 4.2.1. Kaksijakoisessa verkossa paritus on *täydellinen paritus*, jos paritus sisältää kaikki verkon solmut.

Koulu järjestää juhlat opiskelijoille. Juhliin osallistuu 300 opiskelijaa. Jokainen tyttö tuntee juhlista täsmälleen 50 poikaa ja jokainen poika tuntee juhlista täsmälleen 50 tyttöä. Onko tyttöjen ja poikien mahdollista tanssia keskenään siten, että tanssiparit tuntevat toisensa?
Oletetaan, että tunteminen on molemminpuolista; jos Maija tuntee Mikon, myös Mikko tuntee Maijan.

Tehtävässä haetaan vastausta kysymykseen onko kyseisessä kaksijakoisessa verkossa täydellinen paritus mahdollista. Täydellinen paritus ei ole mahdollista, jos tyttöjä ja poikia ei ole saman verran. Onko tyttöjä ja poikia välttämättä saman verran?

Olkoon tyttöjen ja poikien joukot

$$\begin{aligned} T &= \{t_1, t_2, t_3, ..., t_n\}, \text{ missä } n = \text{tyttöjen lukumäärä, ja} \\ P &= \{p_1, p_2, p_3, ..., p_m\}, \text{ missä } m = \text{poikien lukumäärä.} \end{aligned}$$

Oletetaan, että tyttöjä on $n = 250$ ja poikia on $m = 50$. Siis tyttöjen joukko on $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_{250}\}$ ja poikien joukko on $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_{50}\}$. Olkoon kaksijakoisessa verkossa tytöt vasemmalla puolella ja pojat oikealla puolella. Tyttöjen $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_{50}\}$ täytyy tuntea kaikki 50 poikaa. Vastaavasti tyttöjen $\{t_2, t_3, t_4, .., t_{51}\}$ ja $\{t_3, t_4, t_5, ..., t_{52}\}$ täytyy tuntea kaikki pojat.

Tämä väistämättä johtaa siihen, että pojat tuntevat kaikki tytöt, joka on ristiriidassa tehtävän kanssa.

Samaa menetelmää käyttämällä voidaan osoittaa, että tyttöjä ja poikia täytyy olla saman verran ($n = 150$ ja $m = 150$). Verkko on siis kaksijakoinen, jonka molemmissa joukoissa täytyy olla 150 solmua ja jokaisen solmun asteluku on 50.

Lause 4.2.2. *Jos kaksijakoisessa verkossa kaikkien solmujen asteluku on sama, tällöin molemmissa joukoissa on sama määrä solmuja.*

Todistus. Olkoot kaksijakoisen verkon solmujoukot A ja B. Triviaalisti, jos jokaisen solmun asteluku on yksi, niin joukoissa täytyy olla sama määrä solmuja.

Kaksijakoiseen verkkoon voidaan lisätä kaaria vain siten, että toinen päätesolmu kuuluu joukkoon A ja toinen joukkoon B. Jokaisen kaaren lisääminen nostaa molempien joukkojen A ja B solmujen astelukujen summaa yhdellä.

Oletuksen mukaan kaksijakoisen verkon kaikkien solmujen asteluku tulee olla sama, joten kaaria täytyy lisätä vähintään yhtä monta kuin joukossa A on solmuja. Jokaisen kaaren lisääminen nostaa molempien solmujoukkojen astelukujen summaa saman verran.

Tästä seuraa, että joukoissa A ja B täytyy olla sama määrä solmuja. □

Lause 4.2.3. *Jos kaksijakoisessa verkossa kaikkien solmujen asteluku on sama, verkossa on täydellinen paritus.*

Todistus. Lauseen 4.2.3 todistus sivuutetaan.

Sivun 61 tehtävän mukaan kyseessä on kaksijakoinen verkko, missä jokaisen solmun asteluku on sama. Osoitimme, että tällöin juhlissa täytyy olla sama määrä tyttöjä ja poikia (Lause 4.2.2).

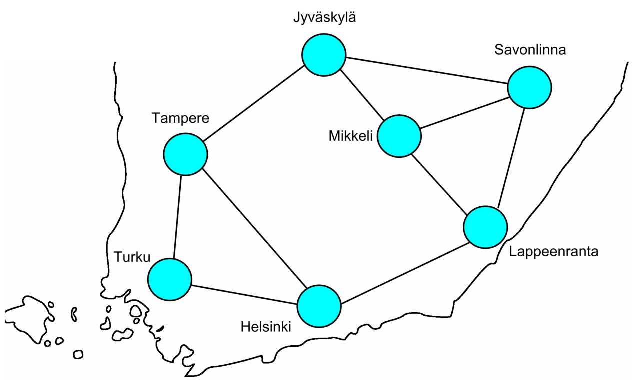
Jos kaksijakoisen verkon jokaisen solmun asteluku on sama, Lauseen 4.2.3 mukaan täydellinen paritus on mahdollista.

Tämän perusteella kaikki juhlissa olevat voivat tanssia yhtäaikaa itselleen entuudestaan tutun tanssiparin kanssa.

4.3 Minimaalinen peitto

Huoltomatkat Oy aloittaa toimintansa Etelä-Suomessa. Yritys tarjoaa asiakkaille linja-autokuljetuksia eri kaupunkien välillä Kuvan 85 osoittamalla tavalla.

Kunkin kaupunkiparin väliä liikennöi yksi linja-auto, joka päivän päätteeksi ajetaan jompaan kumpaan kaupunkiin varikolle. Kuinka monta varikkoa tarvitaan, jotta kaikki kaikki 10 linja-autoa voidaan ajaa reitin varrella olevaan kaupunkiin? Miten varikot tulisi tulisi sijoittaa? Mikä on pienin määrä varikkoja?



Kuva 85: Linja-autoreitit ovat kaupunkien välisiä kaaria.

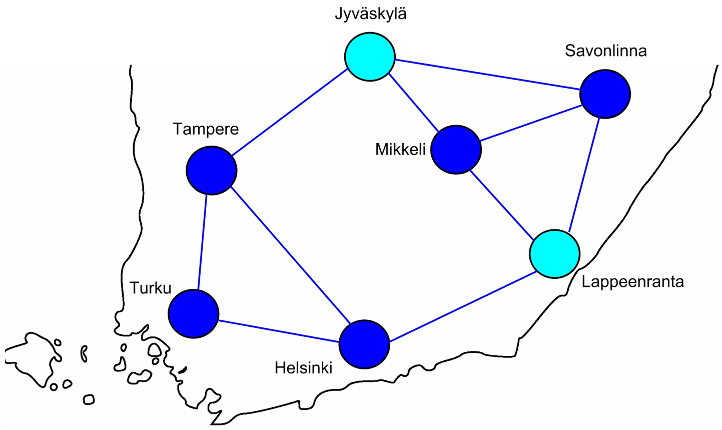
Esimerkiksi, jos varikko perustetaan Tampereelle, tällöin reittejä Tampere-Turku, Tampere-Helsinki ja Tampere-Jyväskylä liikennöivät linja-autot voidaan sijoittaa Tampereen varikolle. Tämän lisäksi varikkoja tulee perustaa myös muualle, jotta kaikki 10 linja-autoa saadaan ajettua päivän päätteeksi varikoille.

Kuvan 85 verkosta täytyy siis valita solmuja siten, että verkon kaikki kaaret ovat liittyneet valittuihin solmuihin.

Tehtävä olisi triviaali, jos ei etsittäisi pienintä määrää solmuja, jotka ovat liittyneet verkon kaikkiin kaariin. Nimittäin, valittaessa kaikki solmut, nämä kattavat automaattisesti myös kaikki verkon kaaret. Jos siis kaikkiin kaupunkeihin perustetaan varikko, voidaan linja-auto ajaa päivän päätteeksi mihin tahansa kaupunkiin.

Jos varikot rakennetaan Turkuun, Helsinkiin, Tampereelle, Mikkeliin ja Savonlinnaan, kaikki verkon kaaret ovat liittyneet valittuihin solmuihin (Kuva 86).

Jos verkon kaikki kaaret ovat liittyneet valittuihin solmuihin, valittuja solmuja sanotaan *peitoksi* tai *solmujen peitoksi*.



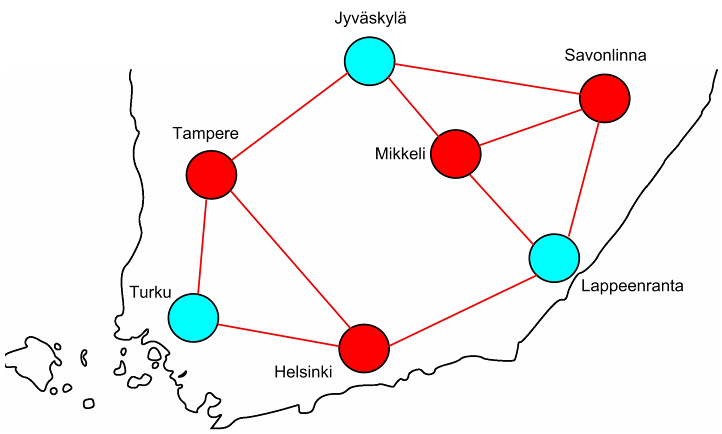
Kuva 86: Siniset solmut muodostavat verkon erään peiton.

Määritelmä 4.3.1. Verkon solmujen osajoukko on *peitto* tai *solmujen peitto*, jos verkon jokainen kaari on liittynyt vähintään yhteen kyseisen osajoukon solmuun. Peitto on *minimaalinen peitto*, jos peitossa on minimimäärä solmuja.

Nyt tehtävä voidaan muotoilla lyhyesti ja matemaattisesti: Etsi Kuvan 85 verkosta minimaalinen peitto. Näyttäisi siltä, että neljää solmua pienempää peittoa ei saada muodostettua.

Perustellaan, että kolme solmua ei voi muodostaa peittoa Kuvan 85 verkossa. Verkko sisältää kolme suljettua kolmen kaaren mittaista ketjua Jyväskylä-Savonlinna-Mikkeli, Mikkeli-Savonlinna-Lappeenranta ja Turku-Tampere-Helsinki. Selvästikään yksi solmu ei voi olla peitto kahdelle ketjulle. Sen sijaan kahden solmun peitto Mikkeli, Savonlinna muodostaa peiton ketjuille Jyväskylä-Savonlinna-Mikkeli ja Mikkeli-Savonlinna-Lappeenranta. Yhdellä solmulla ei voida muodostaa peittoa Turku-Tampere-Helsinki ketjulle, koska verkossa ei ole solmua, joka liittyy kaikkiin ketjun kaariin. Koska näille kolmelle ketjulle ei voida muodostaa peittoa kolmella solmulla, ei se ole mahdollista koko verkollekaan. Tästä johtuen voidaan sanoa, että tämän verkon minimaalisessa peitossa täytyy olla enemmän kuin kolme solmua.

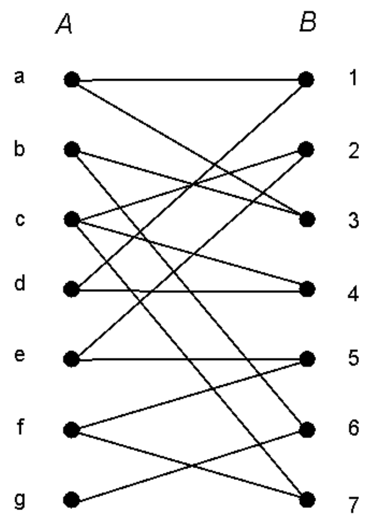
Koska neljän solmun peitossa on minimimäärä solmuja, on neljän solmun peitto minimaalinen peitto. Täytyy huomata, että minimaalisia peittoja voi olla useita. Eräs minimaalinen peitto muodostuu, jos varikot rakennetaan Tampereelle, Helsinkiin, Mikkeliin ja Savonlinnaan (Kuva 87).



Kuva 87: Punaiset solmut muodostavat erään minimaalisen peiton.

4.4 Hamiltonin ketjut ja paritus

Etsi Kuvan 88 kaksijakoisesta verkosta avoin Hamiltonin ketju. Miten voisit muodostaa avoimen Hamiltonin ketjun avulla täydellisen parituksen?

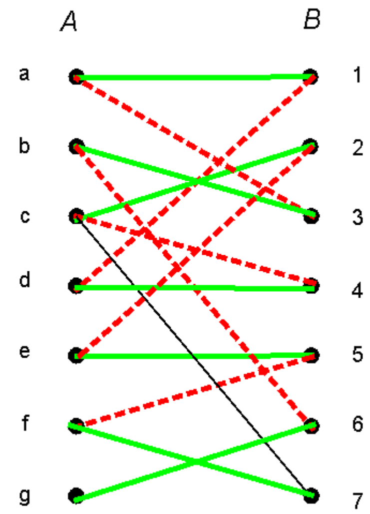


Kuva 88: Etsi verkosta avoin Hamiltonin ketju ja täydellinen paritus.

Eräs keino etsiä täydellistä tai maksimaalista paritusta on etsiä verkosta Hamiltonin ketju. Jos nimittäin kaksijakoisessa verkossa on avoin tai suljettu Hamiltonin ketju ja molemmissa solmujoukoissa on yhtä monta solmua, verkossa on täydellinen paritus. Jos kaksijakoisen verkon solmujoukoissa on eri määrä solmuja, maksimaalinen paritus löytyy Hamiltonin ketjusta.

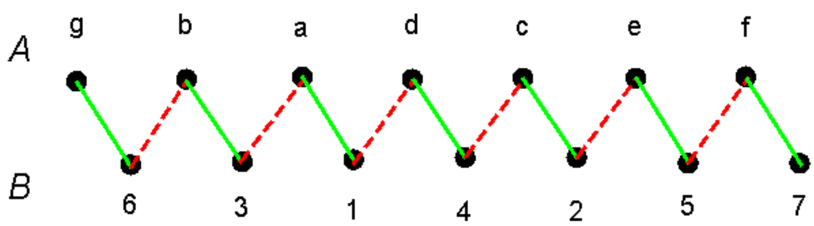
Kuvan 88 verkossa ei voi olla suljettua Hamiltonin ketjua, koska solmun g asteluku on yksi. Avoin Hamiltonin ketju muodostuu esimerkiksi ketjusta (Kuva 89)

$$k : g - 6 - b - 3 - a - 1 - d - 4 - c - 2 - e - 5 - f - 7.$$



Kuva 89: Eräs avoin Hamiltonin ketju muodostuu punavihreästä ketjusta aloitussolmusta g päätyen solmuun 7.

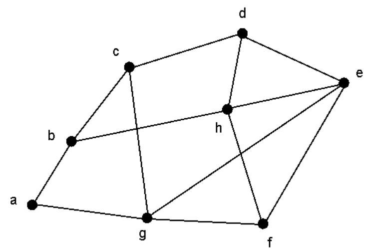
Täydellinen paritus saadaan, kun valitaan Hamiltonin ketjusta joka toinen kaari. Täydellisen parituksen ja avoimen Hamiltonin ketjun välinen yhteys voidaan havainnollistaa, jos vaihdetaan sopivasti solmujen järjestystä. Näin ollen saamme Kuvan 90 kaltaisen verkon, jossa vihreät kaaret muodostavat täydellisen parituksen. Tämä havainto voidaan muotoilla seuraavaksi lauseeksi:



Kuva 90: Hamiltonin ketjun vihreät kaaret muodostavat täydellisen parituksen.

Lause 4.4.1. *Olkoon kaksijakoisen verkon molemmissa solmujoukoissa saman verran solmuja. Jos verkossa on (avoin tai suljettu) Hamiltonin ketju, verkossa on täydellinen paritus.*

Tutki ja perustele onko Kuvan 91 verkko kaksijakoinen.

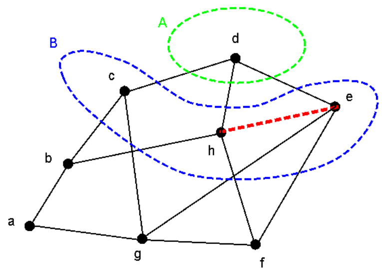


Kuva 91: Onko kuvan verkko kaksijakoinen?

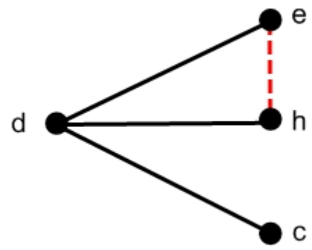
Kaksijakoisen verkon määritelmän mukaan verkon solmut tulee olla jaettavissa kahteen joukkoon A ja B siten, että jokaisen kaaren toinen päätesolmu on joukossa A ja toinen joukossa B. Tämä luo edellytykset seuraavalle menetelmälle.

Valitaan Kuvan 91 verkosta mikä tahansa solmu. Olkoon valittu solmu d ja sanotaan, että se kuuluu joukkoon A. Tällöin kaikkien solmun d viereisten solmujen täytyy kuulua joukkoon B. Solmun d viereisiä solmuja ovat solmut c, e ja h (Kuva 92).

Nyt jokaisen joukkoon B kuuluvan solmun viereinen solmu tulee kuulua joukkoon A. Solmun d viereinen solmu on solmu h, jonka täytyy kuulua joukkoon A. Tämä on ristiriita, koska solmu h kuuluu jo joukkoon B, joten verkko ei voi olla kaksijakoinen (Kuva 93).



Kuva 92: Jos valittu solmu d kuuluu joukkoon A, valitun solmun viereiset solmut c, h ja e kuuluvat joukkoon B.



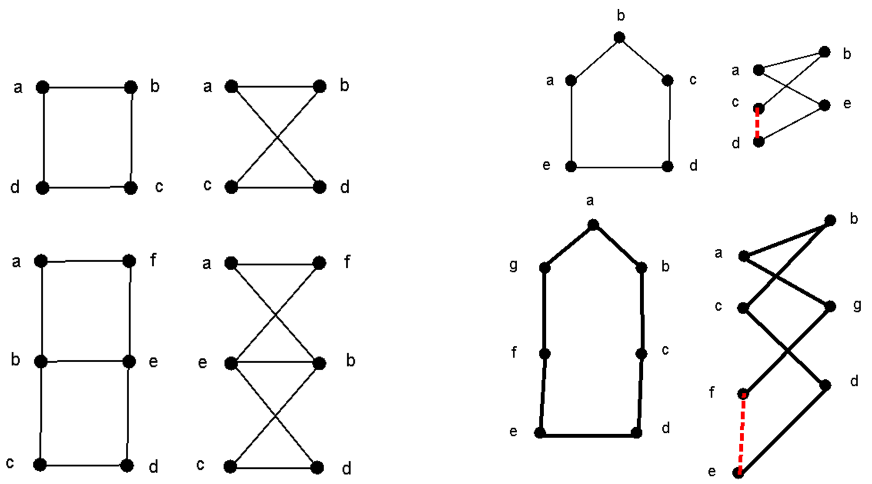
Kuva 93: Verkko ei voi olla kaksijakoinen.

Yleisessä tapauksessa, jos valitaan mielivaltaisesti jokin verkon solmu ja sovitaan, että se kuuluu joukkoon A, valitun solmun kaikkien viereisten solmujen on kuuluttava joukkoon B.

Joukon B solmujen kaikki viereiset solmut tulee kuulua joukkoon A ja vastaavasti kaikki joukon A solmujen viereiset solmut tulee kuulua joukkoon B. Tämä johtaa siihen, että verkko on kaksijakoinen vain silloin, kun siinä ei ole yhtään suljettua ketjua, jossa on pariton määrä kaaria.

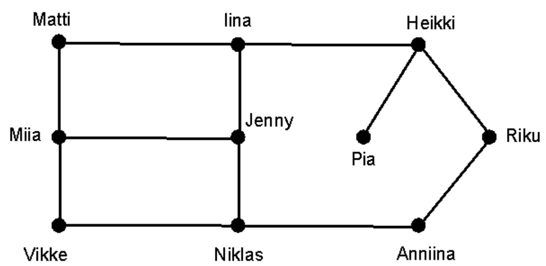
Lause 4.4.2. *Suuntaamaton verkko on kaksijakoinen, jos ja vain jos siinä ei ole yhtään suljettua ketjua, jossa on pariton määrä kaaria.*

Kuvassa 94 on neljä verkkoa joista kahdesta on saatu muotoiltua kaksijakoinen verkko ja kahdesta ei.



Kuva 94: Suuntaamaton verkko on kaksijakoinen, jos ja vain jos siinä ei ole yhtään suljettua ketjua, jossa on pariton määrä kaaria.

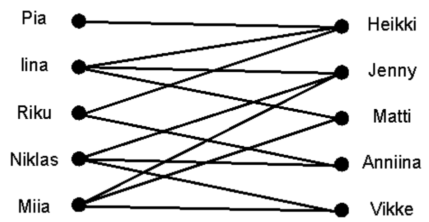
Opiskelijat ovat Facebookissa ystäviä Kuvan 95 verkon osoittamalla tavalla. Onko mahdollista, että jokainen opiskelija istuisi oppitunnilla Facebookkaverin vieressä?
Vihje 1: Onko verkko kaksijakoinen?
Vihje 2: Onko tässä kaksijakoisessa verkossa Hamiltonin ketju?



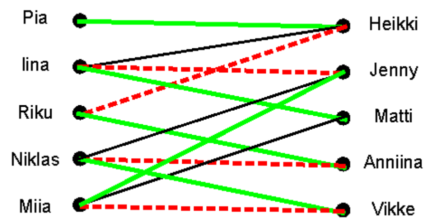
Kuva 95: Opiskelijoiden Facebook-ystävyyttä kuvaava verkko. Jos henkilöt ovat ystäviä Facebookissa, heidän välillään on kaari.

Kuvan 95 verkosta voidaan muodostaa kaksijakoinen verkko Lauseen 4.4.2 nojalla. Kyseisessä verkossa on suljettuja ketjuja, joiden pituudet ovat $4, 6$ tai 8, mutta verkossa ei ole yhtään suljettua ketjua, jonka pituus on pariton.

Tehdään verkosta kaksijakoinen sivulla 66 esitellyn tavan mukaisesti. Olkoot kaksijakoisen verkon joukot "Vasen"ja "Oikea". Valitaan mielivaltaisesti jokin solmu, esimerkiksi Pia, ja sanotaan, että se kuuluu Vasempaan. Pian viereinen solmu on Heikki, joten Heikki kuuluu Oikeaan. Heikin viereisiä solmuja ovat Riku ja Iina, joten he kuuluvat Vasempaan. Rikun ja Iinan viereisiä solmuja ovat Matti, Jenny ja Anniina, joten he kuuluvat Oikeaan. Menetelmää jatkamalla syntyy kaksijakoinen verkko. (Kuva 96)



Kuva 96: Muodostetaan Facebook-verkosta kaksijakoinen verkko

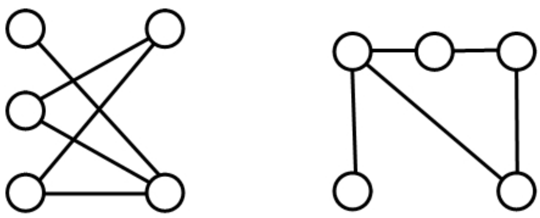


Kuva 97: Täydellinen paritus on mahdollista, koska verkossa on avoin Hamiltonin ketju.

Etsitään tästä kaksijakoisesta verkosta avoin Hamiltonin ketju. Täydellinen paritus on mahdollista, koska verkossa on avoin Hamiltonin ketju (Kuva 97).

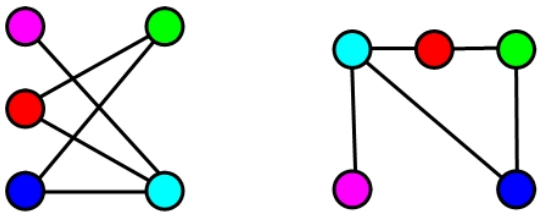
4.5 Isomorfisuus

Väritä Kuvan 98 molempien verkkojen solmut käyttämällä viittä väriä. Yhden verkon kaikki solmut tulee värittää erivärisiksi. Väritä ensimmäisen verkon ja toisen verkon solmu samanväriseksi, jos niiden asteluku on sama ja solmun viereiset solmut ovat saman väriset.



Kuva 98: Väritä verkkojen solmut viidellä värillä tehtävänannon mukaisesti.

Molemmissa verkoissa on yksi solmu, jonka asteluku on yksi. Väritetään se solmu molemmista verkoista violetilla. Molemmissa verkoissa violetin solmun viereisen solmun asteluku on kolme. Väritetään se solmu molemmista verkoista turkoosilla. Nyt turkoosin viereisiä värittämättömiä solmuja on kaksi. Väritetään ne sinisellä ja punaisella. Viimeinen solmu voidaan värittää vihreällä. (Kuva 99)



Kuva 99: Näissä verkoissa solmut ovat väritetty samanväriseksi, jos solmut vastaavat toisiaan.

Verkkoteoriassa kaksi verkkoa ovat *isomorfisia*, jos kahden verkon kaikkien solmujen ja kaikkien kaarien välillä vallitsee yksikäsitteinen vastaavuus. Yksikäsitteinen vastaavuus tarkoittaa sitä, että Kuvan 99 verkoissa punaisen solmun asteluku tulee olla sama molemmissa verkoissa ja punaisen solmun viereiset solmut tulevat olla saman väriset. Jos tämä pätee kaikille verkon solmuille ja kaarille, verkot ovat isomorfiset.

Määritelmä 4.5.1. Verkot ovat keskenään *isomorfisia*, jos ja vain jos verkot voidaan saada täsmälleen samanlaisiksi muuntamalla verkon solmujen paikkoja.

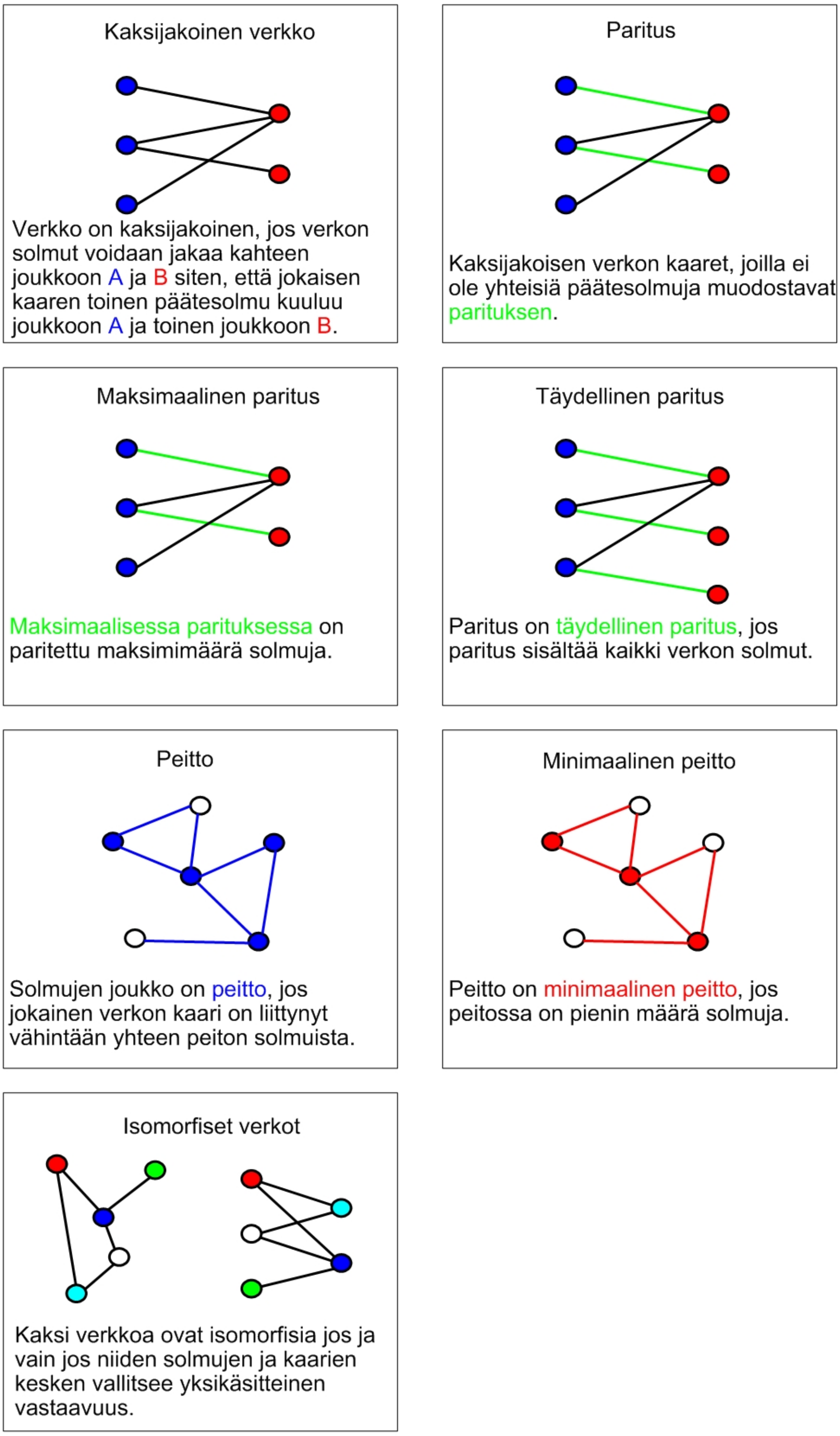
Verkkojen isomorfisuudesta seuraa myös se, että molemmissa verkoissa tulee olla toisiaan vastaavat ketjut. Esimerkiksi Kuvan 99 molemmissa verkoissa on

suljettu ketju: sininen - vihreä - punainen - turkoosi - sininen ja
avoin ketju: violetti - turkoosi - punainen - vihreä - sininen.

4.6 Käsitteiden kertausta

Tässä kapppaleessa on käsitelty kaksijakoisia verkkoja ja muun muassa käsitteitä: kaksijakoinen verkko, paritus, maksimaalinen paritus, täydellinen paritus, peitto, minimaalinen peitto ja isomorfisuus.

Kertaa aiempia käsitteitä sivulta 70.



Kuva 100: Kappaleen 4 käsitteiden kertausta.

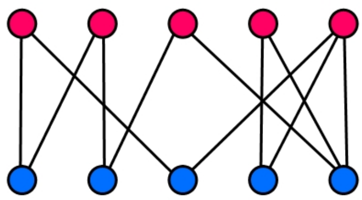
4.7 Tehtäviä

Tehtävä 4.7.1. Istuva tirolilainen matikkakoira on saanut viisi suloista koiranpentua; Haukku, Musti, Nuusku, Rekku ja Tessu. Koiranpentuja on tullut katsomaan seisemän tyttöä Iines, Ira, Jasmin, Linnea, Nea, Pihla ja Säde. Kukin tytöistä kirjoittaa haluamansa koiranpennun nimen listaan ja esittää mahdollisen varavalinnan (Taulukko 7). Tee taulukosta kaksijakoinen verkko ja etsi maksimaalinen paritus.

Tyttö	Koiranpentu
Iines	Haukku, Musti
Ira	Rekku
Jasmin	Haukku, Nuusku
Linnea	Nuusku
Nea	Musti, Tessu
Pihla	Rekku
Säde	Tessu

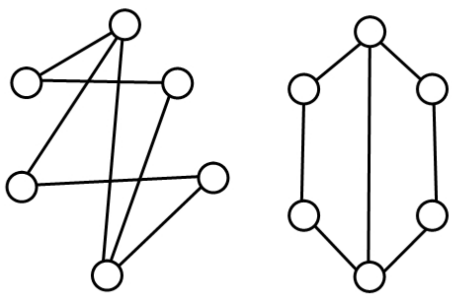
Taulukko 7: Taulukossa esitetty kunkin tytön toive haluamastaan koiranpennusta ja mahdollinen varavalinta.

Tehtävä 4.7.2. Tutki ja perustele onko Kuvan 101 kaksijakoiselle verkolle mahdollista muodostaa täydellinen paritus.



Kuva 101: Ovatko kuvan verkot isomorfiset?

Tehtävä 4.7.3. Tutki ja perustele värittämällä ovatko Kuvan 102 verkot isomorfiset.



Kuva 102: Ovatko kuvan verkot isomorfiset?

Tehtävä 4.7.4. Piirrä kaksi isomorfista verkkoa ja anna parisi värittää verkoista toisiaan vastaavat solmut.

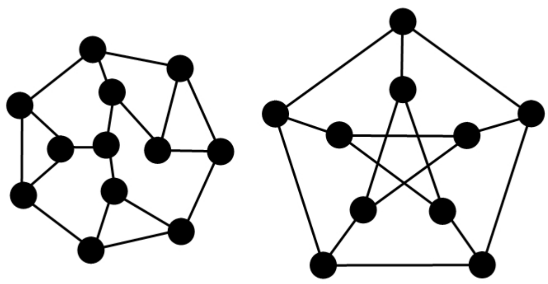
Tehtävä 4.7.5. Lemmikit Ry:llä on ongelma. Heille on tuotu viikonlopuksi hoitoon yhdeksän eläintä, joita ei voida kaikkia sijoittaa samaan huoneeseen.

Onko Lemmikit Ry:n mahdollista ottaa kaikki lemmikit hoitoon, jos heillä on vain kaksi huonetta käytössä lemmikien säilyttämiseen? Taulukossa 8 on esitetty mitä lemmikkejä ei voida laittaa samaan huoneeseen.

Lemmikki	Samassa huoneessa ei voi olla yhtäaikaa
Hamsteri	Käärme, Kilpikonna
Hiiri	Kissa, Kilpikonna
Kani	Koira, Kissa
Kilpikonna	Käärme, Hiiri
Kissa	Koira, Kultakala, Papukaija, Hiiri
Koira	Kani, Kissa
Kultakala	Kissa
Käärme	Kani, Hamsteri, Kilpikonna
Papukaija	Kissa

Taulukko 8: Taulukossa esitetty mitä lemmikkejä ei voida laittaa samaan huoneeseen.

Tehtävä 4.7.6. Etsi Kuvan 103 molemmille verkoille minimaalinen peitto.



Kuva 103: Kummanko verkon minimaalinen peitto on pienempi?

Tehtävä 4.7.7. Perustele ovatko Kuvan 103 verkot kaksijakoisia.