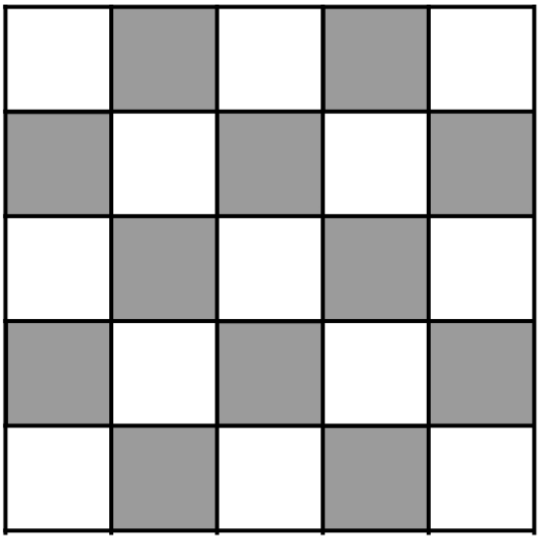
6 Pelit ja sovellukset

6.1 Shakkiratsun reittiongelma

Shakkiratsu pystyy liikkumaan shakkilaudalla L-kirjaimen muotoisia siirtoja pitkin (kaksi ruutua eteen ja yksi vasemmalle tai oikealla). Etsi shakkiratsulle reitti, jossa ratsu kulkee kaikkien ruutujen kautta täsmälleen kerran, kun shakkilaudan koko on 5×5 ruutua (Kuva 144).



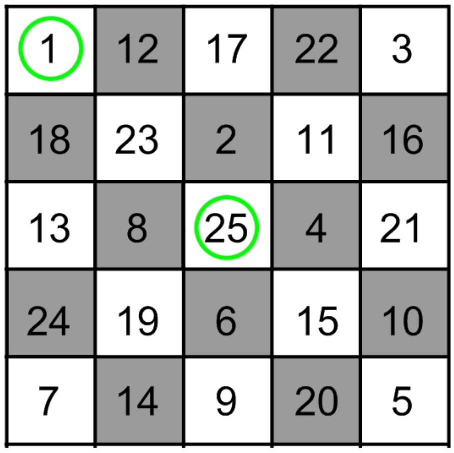
Kuva 144: Etsi shakkiratsulle reitti, jossa ratsu kulkee kaikkien ruutujen kautta täsmälleen kerran.

Eräs ratkaisu on esitetty Kuvassa 145, missä ruutujen numerot ovat siirtojen järjestysnumeroita. Kuvaan on ympyröity lähtöruutu 1 ja reitin viimeinen ruutu 25.

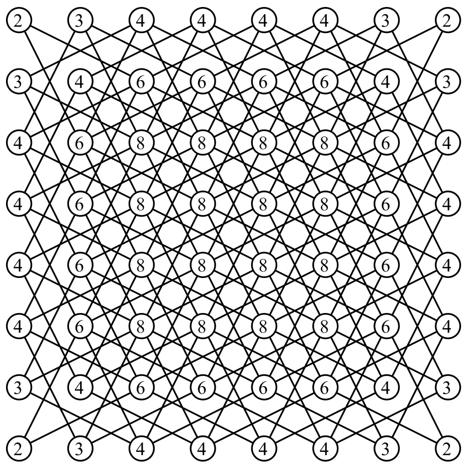
Tehtävä muuttuu verkkoteoreettiseksi ongelmaksi, kun shakkilauta muunnetaan suuntaamattomaksi verkoksi ja etsitään verkosta Hamiltonin ketju. Tätä klassisempi ongelma on etsiä $m \times n$ -kokoisesta shakkilaudasta suljettu Hamiltonin ketju eli *ratsunkierros.*

Määritelmä 6.1.1. Olkoon shakkiratsun siirto joko kaksi ruutua ylös tai alas sekä yksi ruutu oikealle tai vasemmalle, tai yksi ruutu ylös tai alas ja kaksi ruutua oikealle tai vasemmalle $m \times n$ -kokoisella shakkilaudalla. *Ratsunkierros* on reitti, jossa ratsu kulkee kaikkien ruutujen kautta palaten lähtöruutuun.

Huomautus 6.1.2. Shakkilauta muunnetaan suuntaamattomaksi verkoksi siten, että solmuja vastaavat shakkilaudan ruudut ja kaaria vastaavat ratsun mahdolliset siirtymät. Tällöin ratsunkierrosta vastaa suljettu Hamiltonin ketju. Kuvassa 146 on muunnettu 8×8 pelilauta suuntaamattomaksi verkoksi, missä solmun sisällä oleva luku on solmun asteluku, joka kuvastaa shakkiratsun mahdollisia siirtymiä.



Kuva 145: Eräs ratkaisu shakkiratsun reittiongelmaan 5×5 pelilaudalla.



Kuva 146: Shakkilauta muunnettuna suuntaamattomaksi verkoksi

Tutki ja perustele onko ratsunkierros mahdollinen 3×3, 3×4 tai 6×6 shakkilaudalle.

Ratsunkierros ei ole mahdollinen 3×3 shakkilaudalle, koska shakkilautaa vastaava suuntaamaton verkko ei ole yhtenäinen. Tehdään muutama yleinen havainto ennen kuin käsitellään 3×4 shakkilautaa.

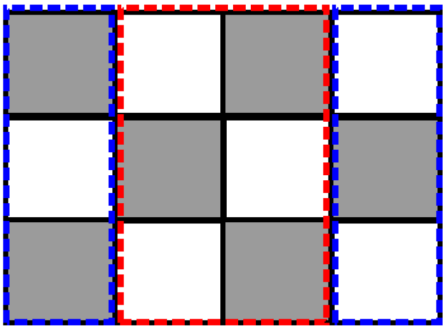
Shakkilaudassa värit musta ja valkoinen vaihtelevat siten, että vierekkäiset ruudut ovat eriväriset ja kulmittain olevat ruudut ovat samanväriset. Näin ollen ratsun siirrot osuvat välttämättä vuoronperään valkoiseen ja mustaan ruutuun.

Kun shakkilauta muunnetaan suuntaamattomaksi verkoksi, jokaisen kaaren toinen päätesolmu on valkoinen ja toinen päätesolmu on musta. Verkko on siis välttämättä kaksijakoinen verkko.

Missä tahansa $m \times n$ shakkilaudassa on aina yhtä paljon mustia ja valkoisia ruutuja. Koska shakkilauta on muodoltaan $m \times n$, ovat kulmaruutuja vastaavien solmujen asteluvut aina 2. Kulmaruudun viereisiä ruutuja vastaavien solmujen asteluvut ovat 3. Ruutuja vastaavien solmujen korkein mahdollinen asteluku on 8.

Tutkitaan seuraavaksi onko ratsunkierros mahdollinen 3×4 shakkilaudalle. Jaetaan 3×4 pelilaudan mustat ja valkoiset ruudut punaiseen ja siniseen alueeseen Kuvan 147 osoittamalla tavalla.

Sinisestä alueesta on pakko siirtyä aina punaiseen alueeseen, ja koska sekä sinisessä alueessa että punaisessa alueessa on sama määrä valkoisia ja mustia ruutuja, tulisi ratsun siirtojen vuorotella sinisen ja punaisen alueen välillä. Ratsun ei kuitenkaan ole mahdollista siirtyä em. tavalla, joten ratsunkierros ei ole mahdollinen 3×4 shakkilaudalla.

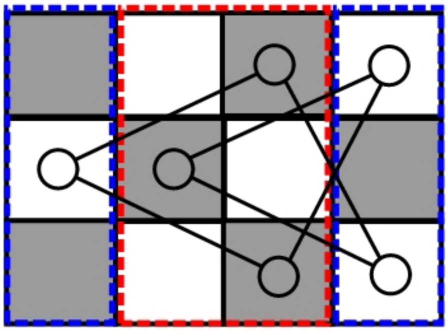


Kuva 147: Jaetaan mustat ja valkoiset ruudut punaiseen ja siniseen alueeseen.

Osoitetaan vielä, että ratsunkierros ei ole mahdollinen 3×4 shakkilaudalle muuntamalla shakkilauta suuntaamattomaksi verkoksi ja osoittamalla, että verkossa ei ole suljettua Hamiltonin ketjua. Käytetään apuna suljetun Hamiltonin ketjun sääntöjä (s. 8).

Jos solmun aste on 2, kuuluvat solmuihin liittyneet kaaret suljettuun Hamiltonin ketjuun (*Sääntö* 1). Kaikkien sinisellä alueella olevien solmujen asteluku on kaksi, joten sinisellä alueella oleviin solmuihin liittyneet kaaret kuuluvat suljettuun Hamiltonin ketjuun.

Koska sinisellä alueella olevia valkoisia ruutuja vastaaviin solmuihin liittyneet kaaret muodostavat suljetun ketjun, ei verkossa ole suljettua Hamiltonin ketjua *Säännön X* nojalla. Näin ollen ratsunkierros ei ole mahdollinen 3×4 shakkilaudalle (Kuva 148).



Kuva 148: Sinisellä alueella oleviin valkoisiin solmuihin liittyneet kaaret muodostavat suljetun ketjun.

Kuvassa 149 on esitetty eräs ratsunkierros 6×6 shakkilaudalle.

27	2	25	16	29	8
24	15	28	9	36	17
3	26	1	18	7	30
14	23	32	35	10	19
33	4	21	12	31	6
22	13	34	5	20	11

Kuva 149: Ruudussa oleva luku kuvastaa ratsun siirtojen järjestysnumeroita.

Lause 6.1.3. *Ratsunkierros on olemassa $m \times n$ $(m \leq n)$ shakkilaudalla, jos ja vain jos mikään seuraavista ehdoista ei ole voimassa:*

1. *m ja n ovat parittomia;*
2. *$m \in \{1, 2, 4\}$;*
3. *$m = 3$ ja $n = \{4, 6, 8\}$.*

On olemassa myös eräs sääntö, joka helpottaa ratsunkierroksen etsimistä.

Lause 6.1.4. *Warnsdorffin sääntö: Siirrä shakkiratsu vaihtoehtoina olevista ruuduista siihen, josta on vähiten vaihtoehtoja siirtyä eteenpäin.*

Warnsdorffin sääntö voidaan muokata algoritmiksi:

Ratsunkierros Warnsdorffin säännöllä

Tämä algoritmi tuottaa ratsunkierroksen siten, että shakkiratsua siirretään ensisijaisesti niihin ruutuihin, joista on vähiten vaihtoehtoja siirtyä eteenpäin.

1) Valitse mikä tahansa aloitusruutu eli aloitussolmu. Väritä aloitussolmu vihreäksi ja merkitse solmun sisään siirron järjestysnumero.

2) Väritä sinisellä ne solmut, joihin ratsu voi siirtyä seuraavaksi.

3) Merkitse sinisten solmujen sisään luku, joka kuvastaa kuinka moneen ruutuun kyseisestä ruudusta voidaan siirtyä.

4) Valitse numeroista pienin ja siirrä ratsu siihen ruutuun. Väritä valittu solmu ja siihen liittyvä kaari vihreäksi. Jos valittavana on useita saman numeron omaavia solmuja, valitse niistä vapaasti jokin.

5) Toista kohtia $2-4$ kunnes ratsunkierros on saavutettu, tai jos päädytään umpikujaan, siirry kohtaan 6.

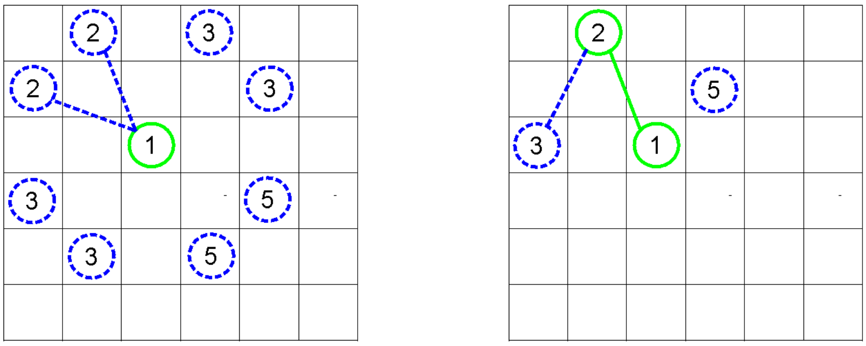
6) Palaa vihreää ketjua pitkin takaisin kunnes saavutat solmun, josta on mahdollista mennä kahteen tai useampaan eri solmuun. Valitse niistä jokin toinen solmu ja siirrä ratsu siihen. Jatka kohdasta 2.

Kokeillaan Ratsunkierros Warnsdorffin säännöllä -algoritmia 6×6 shakkilaudalle. Valitaan jokin aloitusruutu eli aloitussolmu. Väritetään se vihreäksi ja merkitään sisään aloitusruutua kuvaava luku 1.

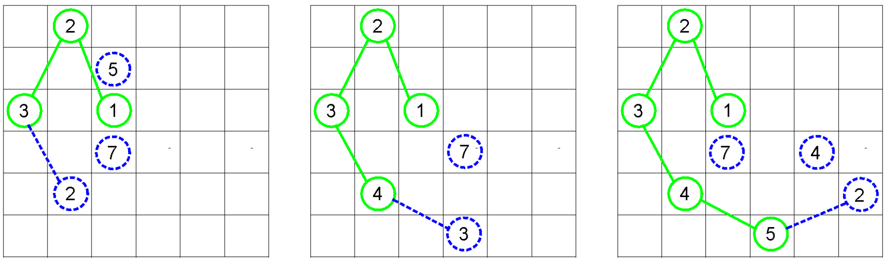
Ruudusta 1 voidaan siirtyä 8 eri ruutuun (Kuva 150). Kulmaruudun viereisistä ruuduista voidaan siirtyä eteenpäin kahdella eri tavalla; siis merkitään niihin ruutuihin sinisen solmun sisään numero 2. Muista vaihtoehtoina olevista ruuduista pääsee eteenpäin 3 tai 5 tavalla, joten merkitään nämä luvut solmuihin Kuvan 150 osoittamalla tavalla. Kulmaruudun viereisissä ruuduissa on solmujen sisällä pienimmät luvut, joten valitaan niistä toinen (Kuvassa 150 vasemmalla).

Väritetään kyseisen ruudun solmu ja siihen liittyvä kaari vihreäksi. Merkitään ko. ruudun solmua numerolla 2, koska kyseessä on järjestyksessään toinen siirto. Nyt vaihtoehtoja shakkiratsun seuraavaan siirtoon on kaksi. Toisesta ruudusta shakkiratsu voi siirtyä eteenpäin 3 tavalla ja toisesta 5:llä. Valitaan näistä pienempi.

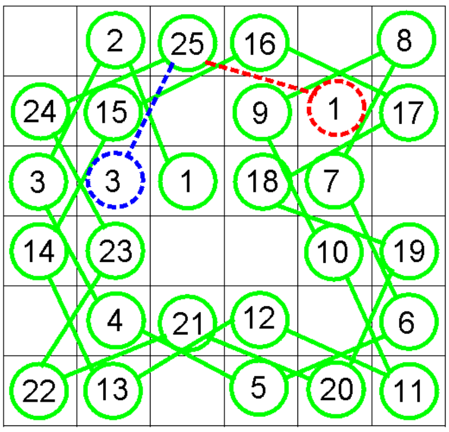
Jatketaan menettelyä vastaavalla tavalla. Kuvassa 151 on esitetty seuraavat kolme Warnsdorffin säännön mukaista siirtoa.



Kuva 150: Warnsdorffin säännön kohdat $1-3$ vasemmanpuoleisessa kuvassa ja kohta 4 oikeassa.



Kuva 151: Seuraavat kolme Warnsdorffin mukaista siirtoa.



Kuva 152: Eräs Warnsdorffin säännön ongelma on, ettei se huomioi viimeistä siirtoa.

Monet tunnetut ratsunkierroksen tuottavat algoritmit ovat hitaita suurissa shakkilaudoissa. Sen sijaan Warnsdorffin säännön mukainen algoritmi on erityisen nopea. Warnsdorffin sääntöä voidaan parantaa monin tavoin, esimerkiksi ottamalla huomioon viimeinen siirto.

Ratsunkierros Warnsdorffin säännöllä -algoritmi saattaa johtaa Kuvan 152 kaltaiseen tilanteeseen, jossa shakkiratsu tulee siirtää algoritmin mukaan punaiseen solmuun. Ratsunkierrosta ajatellen kyseinen solmu on viimeinen solmu, josta on mahdollista siirtyä aloitussolmuun. Näin ollen voidaan jo tässä vaiheessa valita toinen reitti, vaikka solmu olisi asteeltaan suurempi, koska punaisen solmun reitti päätyy umpikujaan.

6.2 Poliisi ja rosvo -peli

Olkoon suuntaamaton verkko valtio siten, että solmut ovat kaupunkeja ja kaaret niitä yhdistäviä teitä. Poliisi ja rosvo -peliä pelataan kaksinpelinä siten, että toinen pelaajista on rosvopelaaja ja toinen poliisipelaaja.

Pelin alussa sovitaan, kuinka monta poliisia ja helikopteria poliisipelajalla on käytössä. Poliisipelaaja voi vuorollaan siirtää yhtä monta poliisinappulaa minkä tahansa tien päälle, kuin hänellä on helikoptereita käytössä.

Rosvopelaaja siirtää pelinappulaansa kaupunkien välillä. Rosvopelaaja voi liikuttaa pelinappulaansa mihin tahansa sellaiseen kaupunkiin, johon pääsee vapaana olevia teitä pitkin. Rosvopelaaja voi myös halutessaan olla paikallaan.

Poliisipelaajan tavoite on saartaa rosvo johonkin kaupunkiin siten, että kaikkien kaupunkia ympäröivien teiden päällä on poliisi. Poliisipelaaja voittaa, jos hän onnistuu saartamaan rosvon.

Rosvopelaaja voittaa, jos pelaajat tarpeeksi kauan pelattuaan päättävät yhdessä, etteivät poliisit voi saartaa rosvoa.

Pelaa ystäväsi kanssa Poliisi ja rosvo -peliä. Käyttäkää erilaisia pelilautoja ja kirjatkaa kunkin pelilaudan vieressä olevaan taulukkoon kumpi pelaajista voitti, kun poliiseja on pelissä p ja helikoptereita h.

Keskustele ja kehitä ystäväsi kanssa erilaisia pelistragioita, joilla poliisi- tai rosvopelaaja voittaa varmasti.

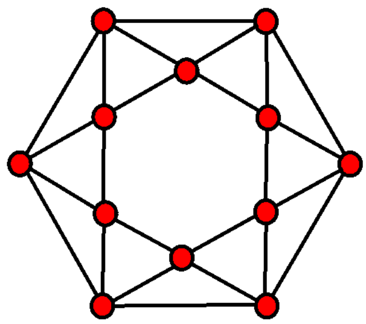
Käydään läpi muutamia esimerkkejä pelistrategioista eri pelilaudoille.

- Poliisipelaaja ei voi voittaa, jos pelissä on yksikin kaupunki, jota ympäröi neljä tietä, kun poliiseja on kolme. Toisin sanoen, jos verkon solmujen korkein asteluku on p, poliisinappuloita täytyy olla vähintään p kappaletta.
- Olkoon valtiossa 4 kaupunkia, joista jokaisesta lähtee 3 tietä. Jos poliisipelaajalla on 3 poliisia ja helikopteri, voittaa rosvopelaaja aina. Rosvopelaajan voittostrategia on siirtää rosvonappula aina sellaiseen kaupunkiin, jossa on vähintään kaksi tietä vapaana. Jos poliisipelaajalla on 3 poliisia ja 2 helikopteria, voittaa poliisipelaaja aina. Poliisinappulat on mahdollista asettaa siten, että jokaisen kaupungin mahdollisista pakoreiteistä on vähintään yksi tukittuna. Näin ollen poliisipelaaja voittaa seuraavalla vuorollaan. Poliisipelaaja voittaa myös, jos poliisinappuloita on 4 ja helikoptereita yksi. Poliisipelaaja voi asettaa poliisinappulat siten, että jokaisen

kaupungin mahdolliset pakoreitit on yhtä lukuunottamatta tukittu. Näin ollen poliisipelaaja voi saartaa rosvon seuraavalla pelivuorollaan.

- Olkoon valtiossa 6 kaupunkia, joista jokaisesta lähtee 4 tietä. Jos poliisipelaajalla on 4 poliisia ja 3 helikopteria, voittaa poliisipelaaja aina. Poliisipelaajan on mahdollista asettaa poliisinappulat siten, että jokaisen kaupungin mahdollisista pakoreiteistä on vähintään yksi tukittuna. Näin ollen poliisipelaaja voittaa seuraavalla vuorollaan.

Kuvassa 153 on Poliisi ja rosvo -pelilauta. Poliisipelaajalla on 6 poliisia ja 2 helikopteria. Onko olemassa voittostrategiaa, jolla toinen pelaajista voittaa aina?



Kuva 153: Onko olemassa voittostrategiaa Poliisi ja rosvo -pelissä, kun poliiseja on 6 ja helikoptereita 2.

Poliiseja täytyy olla vähintään 4, koska verkon jokaisen solmun asteluku on 4. Jos poliisipelaajalla on 4 poliisia ja 4 helikopteria, voidaan rosvo saartaa välittömästi.

Olkoon poliisipelaajalla käytössään 6 poliisia ja 2 helikopteria. Poliisipelaajan voittostrategia on jakaa valtio ensin kahtia siten, että kummallekin puolelle jää 6 kaupunkia, eikä rosvo pääse puolelta toiselle. Koska poliisipelaajalla on käytössään 2 helikopteria, hän voi vuorollaan siirtää kahta poliisi siten, että rosvon liikkumisalue pienenee jokaisella pelivuorolla. Jos poliisipelaajalla olisi vain yksi helikopteri, ei kyseinen strategia toimisi, koska yhtä poliisinappulaa siirrettäessä syntyy väkisin pakoreitti poliisien rajaaman alueen toiselle puolelle.

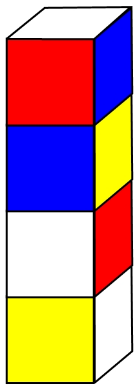
Poliisipelaaja voi estää rosvon pääsyn saartorenkaan toiselle puolelle, jos hänellä on yksi helikopteri ja seitsemän poliisinappulaa. Jos poliisipelaajalla on 5 poliisia ja 3 helikopteria ei saartaminen onnistu, koska 5 poliisia voi tukkia pakoreitin korkeintaan 10 kaupungista. Tällöin jää ainakin kaksi täysin vaapaata kaupunkia. Rosvopelaajan voittostrategia on siirtyä aina vapaana olevaan kaupunkiin. Taulukossa 16 on esitetty Kuvan 153 pelilaudalle olemassa olevat varmat voittajat.

	4 poliisia	5 poliisia	6 poliisia	7 poliisia
1 helikopteri	rosvo	rosvo	rosvo	poliisit
2 helikopteria	rosvo	rosvo	poliisit	poliisit
3 helikopteria	rosvo	rosvo	poliisit	poliisit
4 helikopteria	poliisit	poliisit	poliisit	poliisit

Taulukko 16: Varmat voittajat Kuvan 153 Poliisi ja rosvo -pelilaudalle.

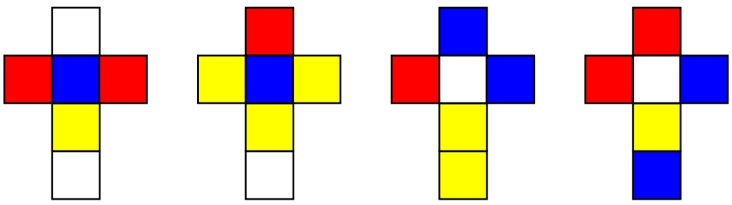
6.3 Instant Insanity

Pinoa kuutiot siten, että jokainen neljästä väristä esiintyy tornin sivuilla täsmälleen kerran (Kuva 154).
Vihje: Tähän tehtävään tarvitse kuutiot, jotka on väritetty Kuvan 155 mukaisesti.



Kuva 154: Instant insanity -kuutiot tulee kasata siten, että jokainen neljästä väristä esiintyy tornin sivuilla täsmälleen kerran.

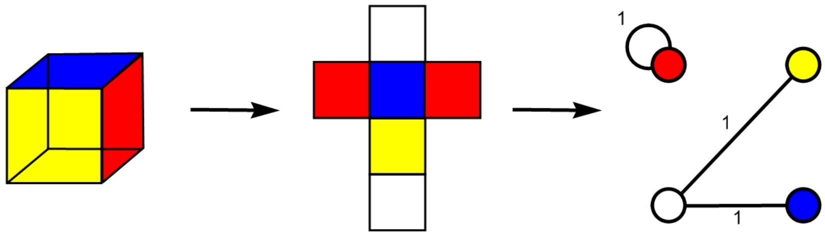
Tehtävä voidaan ratkaista yritys ja erehdys -menetelmällä tai verkkoteorian keinoin. Tarkastellaan aluksi verkkoteoreettista ratkaisumallia. Ratkaisumalli perustuu siihen, että jokaisessa kuutiossa vastakkaisten sivujen värit pysyvät muuttumattomina (vrt. noppakuutiossa vastakkaisten sivujen silmälukujen summa on aina 7). Kuvassa 155 on neljä Instant insanity -kuutiota levitettynä tasoon.



Kuva 155: Instant insanity -kuutiot

Kuutiot voidaan muuntaa verkoiksi siten, että jokaista kuutiota vastaavassa verkossa on sama määrä solmuja ja kaaria. Koska kuutiot on väritetty käyttäen neljää eri väriä, on jokaista kuutiota vastaavassa verkossa neljä eriväristä solmua. Solmujen värit vastaavat kuutioissa käytettyjä värejä: sininen, punainen, keltainen ja valkoinen. Verkkoon lisätään kaaria siten, että kaaren päätesolmut vastaavat kuutiossa vastakkaisten sivujen värejä.

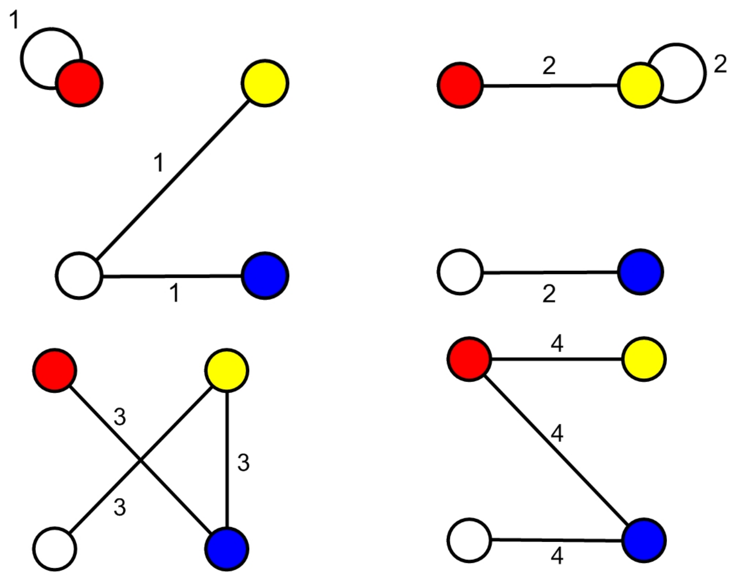
Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin miten Kuvan 155 ensimmäinen kuutio muuntuu verkoksi (Kuva 156).



Kuva 156: Kuvan 155 ensimmäinen kuutio muunnettuna verkoksi.

Kyseisessä kuutiossa vastakkaisten sivujen väriparit ovat punainen-punainen, keltainen-valkoinen ja sininen-valkoinen. Tästä johtuen verkossa on luuppi punaisessa solmussa, keltaisen ja valkoisen solmun yhdistävä kaari sekä valkoisen ja sinisen solmun yhdistävä kaari. Merkitään verkon jokaista kaarta numerolla 1 sen merkiksi, että kaaret kuuluvat Kuvan 155 ensimmäiselle kuutiolle.

Kun Kuvan 155 kaikki kuutiot on muunnettu verkoiksi, saadaan seuraavat verkot (Kuva 157).



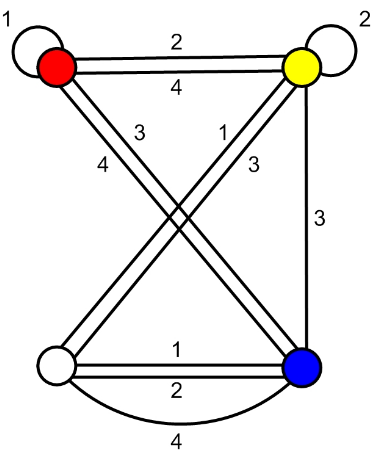
Kuva 157: Jokaista kuutiota vastaavat verkot.

Seuraavassa vaiheessa kuutioita vastaavat verkot yhdistetään yhdeksi 4-solmuiseksi verkoksi (Kuva 158). Nyt Kuvan 158 verkko on luettavissa siten, että esimerkiksi;

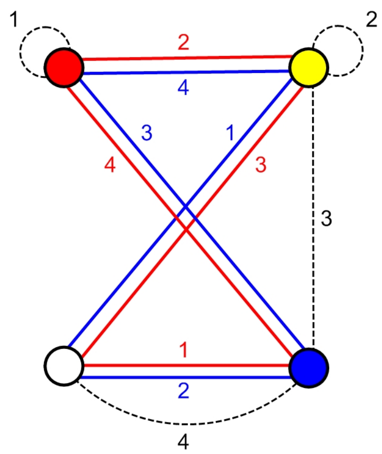
- luuppi keltaisessa solmussa tarkoittaa, että kuutiossa 2 on vastakkaiset sivut, joiden värit ovat keltainen-keltainen,
- koska keltaisen ja sinisen solmun välillä on vain yksi kaari, on vain kuutiossa 3 vastakkaiset sivut, joiden värit ovat keltainen-sininen,
- valkoisen ja sinisen solmun välillä on kolme kaarta, joten kuutioissa $1, 2$ ja 4 on vastakkaiset sivut, joiden värit ovat valkoinen-sininen.

Nyt suljettu Hamiltonin ketju, joka koostuu satunnaisessa järjestyksessä kaarista $1, 2, 3$ ja 4, tarkoittaa sitä, että kaikki neljä kuutiota on mahdollista asettaa päällekäin siten, että tornin vasemmalla ja oikealla puolella jokainen neljästä väristä esiintyy täsmälleen kerran.

Kaksi erillistä suljettua Hamiltonin ketjua, jotka koostuvat satunnaisessa järjestyksessä kaarista $1, 2, 3$ ja 4, tarkoittavat sitä, että kaikki neljä kuutiota on mahdollista asettaa päällekäin siten, että tornin vasemmalla, oikealla, etu- ja takapuolella jokainen neljästä väristä esiintyy täsmälleen kerran (Kuva 159).



Kuva 158: Kuutioita vastaavat verkot voidaan yhdistää yhdeksi verkoksi.



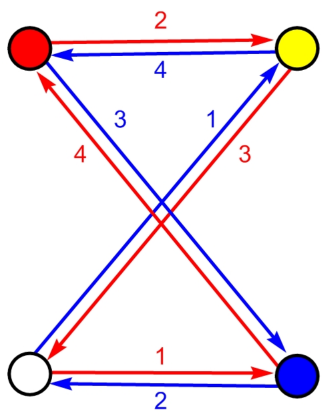
Kuva 159: Verkon kaksi kaarista $1, 2, 3, 4$ koostuvaa suljettua Hamiltonin ketjua

Karsitaan Kuvan 159 verkosta katkoviivalla merkityt kaaret pois, koska ratkaisu löytyy kahdesta suljetusta Hamiltonin ketjusta. Lisätään sinisiin ja punaisiin kaariin nuolet siten, että suljetuista Hamiltonin ketjuista tulee suljettuja Hamiltonin polkuja (Kuva 160).

Nyt kuutiot voidaan pinota päällekäin siten, että sinisen nuolen alkusolmua vastaa tornin etupuoli ja loppusolmua vastaa tornin takapuoli (Taulukko 17).

Vastaavasti punaisen nuolen alkusolmua vastaa tornin oikea puoli ja loppusolmua vastaa tornin vasen puoli (Taulukko 18).

Ensimmäinen kuutio asetetaan pöydälle siten, että kuution valkoinen sivu on etupuolella, keltainen sivu on takapuolella, valkoinen sivu on oikealla ja sininen sivu on tornin vasemmalla puolella. Toinen kuutio asetetaan ensimmäisen



Kuva 160: Suljetut Hamiltonin ketjut muutetaan suljetuiksi Hamiltonin poluiksi.

Kuutio	Edestä (Sinisen nuolen alkusolmu)	Takaa (Sinisen nuolen loppusolmu)
1	Valkoinen	Keltainen
2	Sininen	Valkoinen
3	Punainen	Sininen
4	Keltainen	Punainen

Taulukko 17: Kuvan 160 sinisen nuolen alkusolmua vastaa kuutio edestä ja loppusolmua kuutio takaa.

Kuutio	Oikelta (Punaisen nuolen alkusolmu)	Vasemmalta (Punaisen nuolen loppusolmu)
1	Valkoinen	Sininen
2	Punainen	Keltainen
3	Keltainen	Valkoinen
4	Sininen	Punainen

Taulukko 18: Kuvan 160 punaisen nuolen alkusolmua vastaa kuutio oikealta ja loppusolmua kuutio vasemmalta.

kuution päällä siten, että kuution sininen sivu on edessä, valkoinen sivu takana, punainen sivu oikella ja keltainen sivu vasemmalla puolella. Vastaavalla tavalla jatkamalla saadaan kaikki kuutiot pinottua päällekäin niin, että jokainen neljästä väristä esiintyy tornin sivuilla täsmälleen kerran.

Lasketaan vielä lopuksi kuinka monella eri tavalla torni voidaan pinota, jotta voimme verrata verkkoteoreettista -ratkaisumallia yritys ja erehdys -menetelmään.

Kun ensimmäinen kuutio asetetaan pöydälle, kuution vastakkaisista väripareista yksi jää "piiloon", sillä kuution ylä- ja alapuoli eivät ole näkyvissä tornista. Tästä johtuen ensimmäinen kuutio voidaan asettaa pöydälle kolmella eri tavalla, koska jokaisessa kuutiossa vastakkaisia väripareja on kolme.

Seuraavan kuution asettaminen torniin sitoo tornin sivuilla olevat värit toisiinsa. Koska kuutioissa on kuusi sivua, voidaan seuraava kuutio asettaa ensimmäisen kuutiot päälle kuudella eri tavalla. Sen lisäksi kuutiota voidaan pyörittää neljään eri asentoon ensimmäisen kuution päällä, joten vaihtoehtoja toisen kuution asettamiseen tulee yhteensä $4 \cdot 6 = 24$.

Myös seuraavat kuutiot voidaan asettaa edellisen kuution päälle 24 eri tavalla, joten neljä kuutiota voidaan pinota päällekkäin

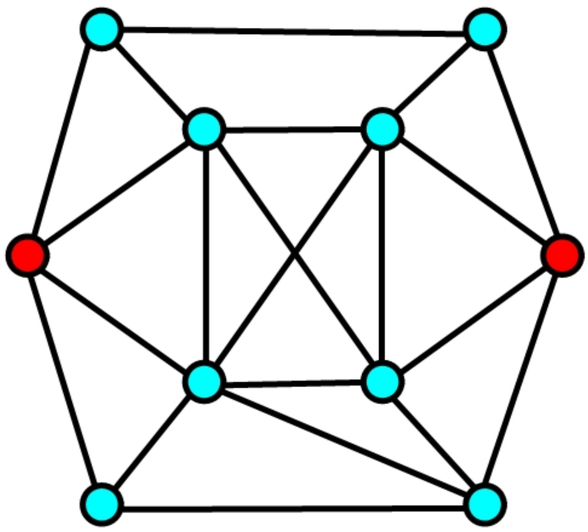
$$3 \cdot 24^3 = 41\ 742 \text{ eri tavalla.}$$

Instant insanity -kuutiot tulee pinota siten, että jokainen neljästä väristä esiintyy tornin sivuilla täsmälleen kerran. Kuinka monella eri tavalla Instant insanity -kuutiot voidaan pinota, jotta torni vastaa tehtävänantoa? *Harjoitustehtävä.*

6.4 Shannon switching game

Shannon swiching game -pelilauta koostuu yksinkertaisesta suuntaamattomasta verkosta, jossa on kaksi erikoissolmua. Pelissä on kaksi pelaajaa. Pelaajan Short tehtävä on värittää verkon kaaria siten, että erikoissolmut yhdistyvät. Pelaajan Cut tehtävä on katkoa verkon kaaria niin, ettei erikoissolmujen yhdistäminen ole mahdollista. Peliä pelataan vuorotellen: Cut voi vuorollaan katkaista verkosta yhden kaaren ja Short voi vuorollaan värittää verkosta yhden kaaren. Short voittaa, jos hän onnistuu yhdistämään erikoissolmut, muutoin Cut voittaa.

Pelaa Shannon switching -peliä ystäväsi kanssa Kuvan 161 pelilaudalla. Keskustele ja kehitä ystäväsi kanssa erilaisia pelistrategioita.



Kuva 161: Esimerkki Shannon switching game -pelilaudasta.

Shannon switching -peliin on olemassa erilaisia voittostrategioita tietyn tyyppisille pelilaudoille. Voiton takaavia verkkotyyppejä on kolme. Yhdessä voittaa pelaaja Short, toisessa pelaaja Cut ja kolmannessa aloittava pelaaja. Kaikissa voittostrategioissa hyödynnetään sitä, että puussa kahden solmun välillä on vain yksi ketju.

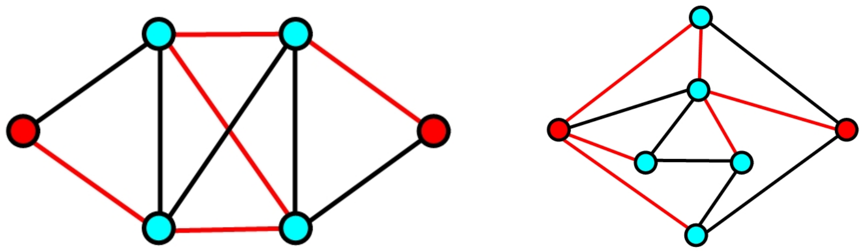
Määritelmä 6.4.1. Virittävä puu on *katkennut virittävä puu*, jos virittävästä puusta on poistettu täsmälleen yksi kaari.

Voittostrategiat määräytyy verkon ominaisuuksien mukaan seuraavalla tavalla. Jos verkossa on

1) kaksi erillistä virittävää puuta - pelaaja Short voittaa,
2) kaksi erillistä katkennutta virittävää puuta - pelaaja Cut voittaa,
3) erilliset virittävä puu ja katkennut virittävä puu - pelaaja, joka aloittaa, voittaa.

1) Kaksi virittävää puuta - Pelaaja Short voittaa

Tarkastelaan ensimmäisenä tyypin 1 verkkoja. Kuvassa 162 on esitetty kaksi esimerkkiä tyypin 1 verkosta, jossa sekä punaisista että mustista kaarista muodostuu kaksi erillistä verkon virittävää puuta.



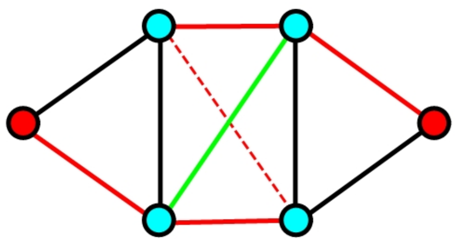
Kuva 162: Tyypin 1 verkoissa on kaksi erillistä virittävää puuta.

Osoitetaan, että tyypin 1 verkot voidaan aina pelata siten, että ennen viimeistä siirtoaan voi pelaaja Short valita vähintään kahdesta kaarivaihtoehdosta, jotka yhdistävät erikoissolmut.

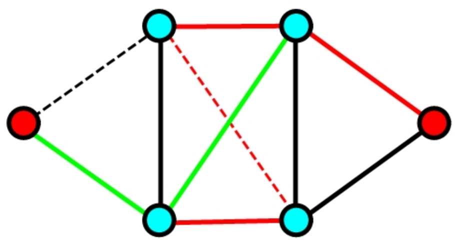
Pelataan esimerkkipeli Kuvan 162 vasemmanpuoleisella pelilaudalla. Pelaaja Cut saa aloittaa ja poistaa jonkin verkon kaarista. Sanotaan, että Cut poistaa punaisen kaaren verkosta, jolloin punaisesta virittävästä puusta tulee katkennut virittävä puu.

Nyt pelaaja Short voi valita verkosta sellaisen mustan kaaren, joka yhdistää katkenneen punaisen virittävän puun. Pelaaja Short värittää valitun kaaren vihreäksi (Kuva 163).

Jos Cut katkaisee seuraavaksi verkosta jonkin mustan kaaren, on pelaajan Short väritettävä sellainen punainen kaari vihreäksi, joka yhdistää katkenneen mustan virittävän puun (Kuva 164).

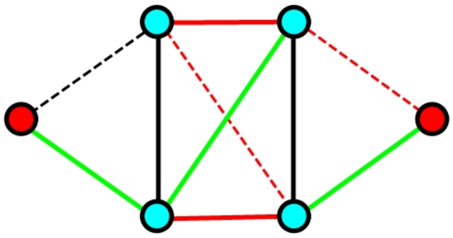


Kuva 163: Jos Cut katkaisee punaisen kaaren, Short värittää sellaisen mustan kaaren vihreäksi, joka yhdistää katkenneen punaisen virittävän puun.

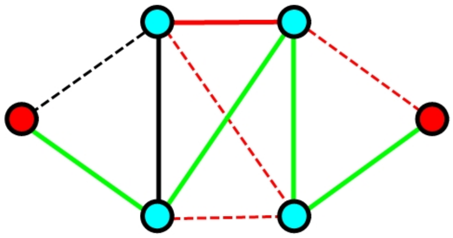


Kuva 164: Jos Cut katkaisee mustan kaaren, Short värittää sellaisen punaisen kaaren vihreäksi, joka yhdistää katkenneen mustan virittävän puun.

Vastaavalla tavalla jatkamalla ennen viimeistä pelikierrosta tyypin 1 verkot päätyvät aina tilanteeseen, jossa erikoissolmut voidaan yhdistää kahdella eri kaarella (Kuva 165). Jos Cut katkaisee toisen niistä kaarista, voi Short yhdistää erikoissolmut jäljelle jääneellä kaarella (Kuva 166).



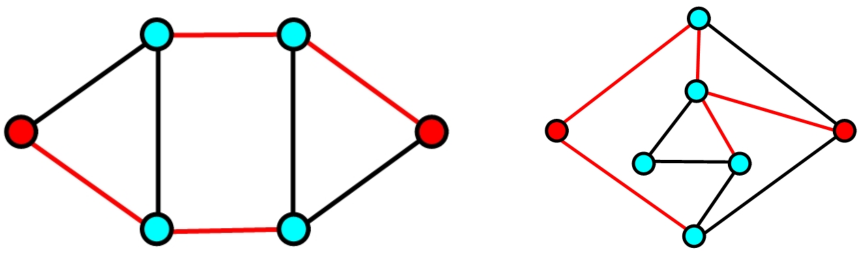
Kuva 165: Ennen viimeistä pelikierrosta on erikoissolmut mahdollista yhdistää kahdella eri tavalla.



Kuva 166: Short voittaa pelin.

2) Kaksi katkennutta virittävää puuta - Pelaaja Cut voittaa

Tarkastellaan seuraavaksi Tyypin 2 verkkoja; siis niitä verkkoja, joissa on kaksi erillistä katkennutta virittävää puuta. Kuvan 167 verkoissa punaisista ja mustista kaarista muodostuu kaksi erillistä katkennutta virittävää puuta.



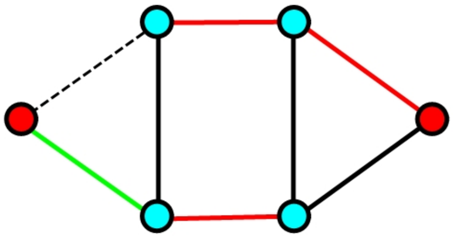
Kuva 167: Tyypin 2 verkoissa on kaksi erillistä katkennutta virittävää puuta.

Osoitetaan, että tyypin 2 verkot voidaan aina pelata siten, että pelaaja Cut voittaa. Pelaajan Cut täytyy aina poistaa erivärinen kaari kuin pelaaja Short on yhdistänyt. Pelaajan Cut on valittava poistettava kaari tarvittaessa siten, että se estää pelaaajan Short voittamisen.

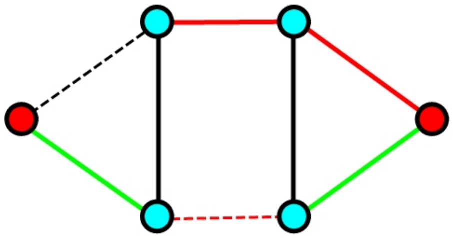
Pelataan esimerkkipeli Kuvan 167 vasemmanpuoleisella pelilaudalla. Pelaaja Short saa aloittaa ja värittää jonkin verkon kaarista vihreäksi. Sanotaan, että Short värittää vihreäksi verkon jonkin punaisen kaaren.

Nyt Pelaaja Cut voi katkaista verkosta jonkin mustista kaarista (Kuva 168). Jos pelaaja Short värittää seuraavaksi verkosta mustan kaaren, tulee pelaajan Cut katkaista sellainen punainen kaari, joka estää pelaajaa Short voittamasta seuraavalla pelikierroksella (Kuva 169).

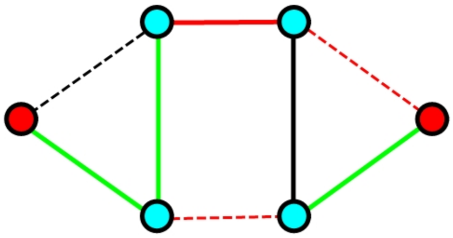
Ennen viimeistä pelikierrosta tyypin 2 verkot päätyvät aina tilanteeseen, jossa erikoissolmujen yhdistyminen on kahden kaaren päässä (Kuva 170). Jos Short värittää toisen näistä kaarista vihreäksi, voi Cut katkaista jäljelle jääneen kaaren (Kuva 171).



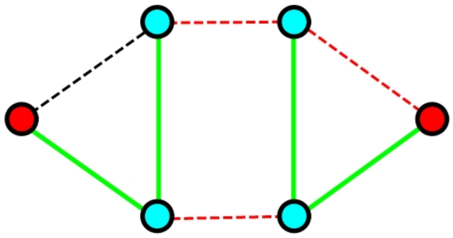
Kuva 168: Jos Short värittää vihreäksi verkon punaisen kaaren, katkaisee Cut verkosta jonkin mustan kaaren.



Kuva 169: Jos Short värittää vihreäksi verkon mustan kaaren, katkaisee Cut verkosta sellaisen punaisen kaaren, ettei pelaaja Short voita seuraavalla kierroksella.



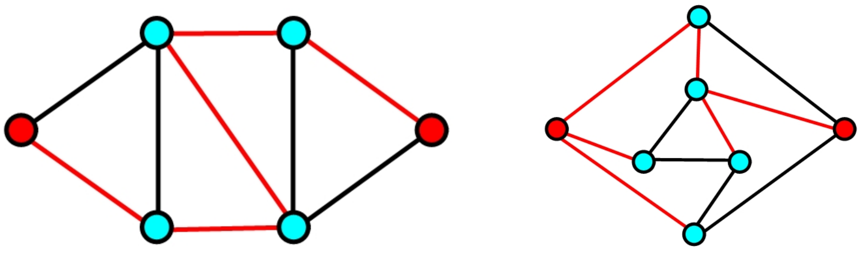
Kuva 170: Verkkotyypille 2 ominainen pelitilanne ennen viimeistä pelikierrosta.



Kuva 171: Cut voittaa pelin.

3) Virittävä puu ja katkennut virittävä puu - Aloittava pelaaja voittaa

Tyypin 3 verkoissa on katkennut virittävä puu ja erillinen virittävä puu (Kuva 172). Kuvan 172 verkoissa punaisista kaarista muodostuu virittävä puu ja mustista kaarista muodostuu katkennut virittävä puu. Verkkotyypin 3 pelilaudoille on voittostrategia sille pelaajalle, joka aloittaa ensin.

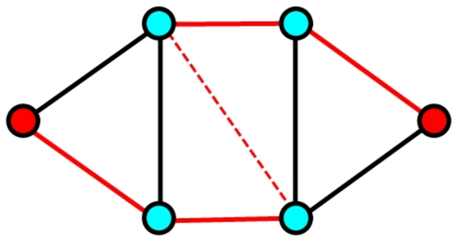


Kuva 172: Tyypin 3 verkoissa on virittävä puu ja erillinen katkennut virittävä puu.

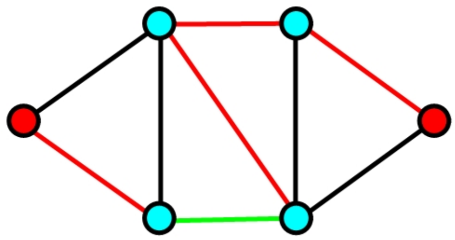
Pelin aloittava pelaaja voittaa, koska hän voi hyödyntää edellä mainittuja pelistrategioita. Pelataan kaksi esimerkkipeliä Kuvan 172 vasemmanpuoleiselle pelilaudalle.

Olkoon ensimmäisessä pelissä aloittava pelaaja Cut. Pelaaaja Cut voi katkaista jonkun Kuvan 173 verkon punaisista kaarista, jolloin verkossa on kaksi katkennutta virittävää puuta. Nyt verkko on tyyppiä 2 ja pelaaja Cut voittaa aina, jos hän pelaa strategian 2 mukaisesti.

Olkoon toisessa pelissä aloittava pelaaja Short. Short voi värittää vihreäksi sellaisen punaisen kaaren, joka yhdistää katkenneen mustan virittävän puun (Kuva 174). Nyt vihreä kaari on yhteinen kahdelle virittävälle puulle, joten tilanne on sama kuin tyypin 1 verkossa ensimmäisten siirtojen jälkeen. Pelaaja Short voittaa, jos hän pelaa strategian 1 mukaisesti.



Kuva 173: Jos Cut aloittaa ja katkaisee jonkun punaisista kaarista, on verkko tyyppiä 2.



Kuva 174: Pelaajan Short siirron jälkeen tilanne on sama, kuin tyypin 1 verkossa ensimmäisten siirtojen jälkeen.

Solmujen ja kaarien lukumäärien tarkastelulla on mahdollista tunnistaa, minkä tyypin verkko on kyseessä. Puulle ominaista on se, että puussa on kaaria yksi vähemmän kuin solmuja. Koska tyypin 1 verkoissa on kaksi erillistä virittävää puuta on kaarien lukumäärän $|K|$ ja solmujen lukumäärän $|S|$ välillä yhteys $|K| = 2|S| - 2$.

Kun tyypin 1 verkosta poistetaan kaaria kaksi, on verkko tyyppiä 2. Tyypin 2 verkossa on siis kaaria $|K| = 2|S| - 4$.

Tyypin 3 verkossa on yksi virittävä puu ja yksi katkennut virittävä puu, joten verkossa on kaaria yksi vähemmän kuin tyypin 1 verkossa. Siis $|K| = 2|S| - 3$. Verkkotyyppi määrää kaarien lukumäärän suhteessa solmujen lukumäärään (Taulukko 19).

Tyyppi	Solmuja/Kaaria	Sisältää
1	$2\|S\| - \|K\| = 2$	2 x virittävää puuta
2	$2\|S\| - \|K\| = 4$	2 x katkennutta virittävää puuta
3	$2\|S\| - \|K\| = 3$	1 x virittävä puu, 1 x katkennut virittävä puu

Taulukko 19: Verkkotyyppi määrää kaarien lukumäärän suhteessa solmujen lukumäärään.

6.5 Tehtäviä

Tehtävä 6.5.1. Harjoittele Eulerin ja Hamiltonin ketjujen etsimistä lankaverkoilla osoitteessa:

`http://home.scarlet.be/~bbonte/portal/icosien.html`

Tehtävä 6.5.2. Ratkaise salakirjoitettu arvoitus (Kuva ??).
Vihje I: Etsi verkosta Ratsunkierros.
Vihje II: Aloita sanasta "Etsi".

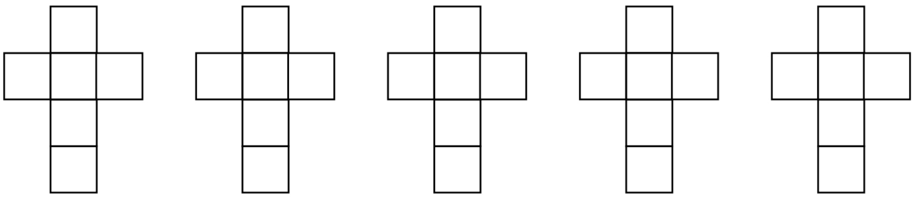
Shakespeare	Jopa	ja	siteerattiin	kuten	Scottin
kierros	keksitty	Dante	Walter	ratkaiset	oltu
64	ja	arvoituksissa	vielä	kirjoituksia	kirjailijoiden
ratkottiin	ratsun	kierrokseen	sanoma-lehdissä	ei	sala-kirjoituksen
perustuvia	sanan	luvulla	Kun	Kuuluisien	julkaistiin
Etsi	ratsun	arvoituksia	arvoituksia	1800	ristikoita

Kuva 175: Ratkaise salakirjoitettu arvoitus.

Tehtävä 6.5.3. Etsi ratsunkierros 8×8 shakkilaudalle ja harjoittele Warnsdorffin sääntöä osoiteessa:

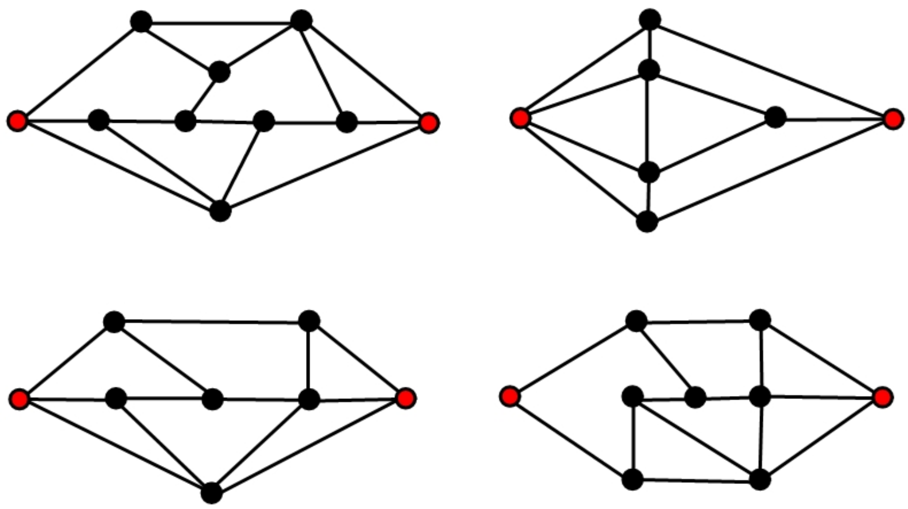
`http://mirran.web.surftown.se/knight/eWarnsd.htm`

Tehtävä 6.5.4. Suunnittele omat Instant insanity -kuutiot, jossa on viisi kuutiota.



Kuva 176: Suunnittele oma Instant insanity -peli viidellä kuutiolla.

Tehtävä 6.5.5. Kuvassa 176 on esitetty erilaisia Shannon switching -pelilautoja. Tutki ja perustele ovatko pelilaudan verkot tyyppiä $1, 2, 3$ vai jotain muuta. Etsi verkosta kutakin verkkotyyppiä vastaavat virittävät ja katkenneet virittävät puut.

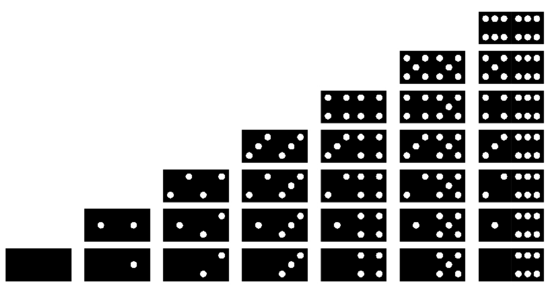


Kuva 177: Tutki mitä verkkotyyppiä kuvan verkot ovat.

Tehtävä 6.5.6. Pelaa Shannon switching peliä osoitteessa:

`http://www.coolmath-games.com/graphgame/index.html`

Tehtävä 6.5.7. Dominopeli koostuu 28 erilaisesta dominopalikasta (Kuva 177). Jokaisessa dominopalikassa kaksi neliötä, joissa on silmäluku 1:sta 6:teen. Dominopalikat asetetaan pöydälle peräkkäin ketjuksi siten, että samat silmäluvut ovat vastakkain. Tuplasilmäluvuilla oleva dominopalikka asetetaan poikittain. Onko mahdollista asettaa kaikki dominopalikat yhdeksi ketjuksi? Perustele väitteesi verkkoteorian keinoin.



Kuva 178: Dominopeli koostuu 28 erilaisesta dominopalikasta.

Tehtävä 6.5.8. Pelaa seuraava peliä parisi kanssa. Piirrä tyhjälle paperille n kappaletta solmuja. Ensimmäinen pelaaja yhdistää valitsemansa kaksi solmua kaarella ja lisää piirtämäänsä kaaren varrelle solmun. Toinen pelaaja jatkaa yhdistämällä kaksi valitsemaansa solmua kaarella siten, että kaari ei leikkaa yhtäkään kaarta tai solmua. Myös toinen pelaaja lisää piirtämäänsä kaaren varrelle solmun. Peliä jatketaan vastaavalla tavalla vuoronperään kuitenkin niin, että kunkin solmun asteluku saa kasvaa maksimissaan kolmeen. Pelin voittaa pelaaja, joka tekee viimeisen siirron.

Tehtävä 6.5.9. Tutki miten peli eroaa, jos Tehtävän 6.5.7 peliä muutetaan siten, että solmujen asteluku saa olla maksimissaan neljä.

Tehtävä 6.5.10. Baarimikolla on käytössään 3 cl ja 5 cl mitat. Yksi ravintola-annos alkoholia on 4 cl. Onko mahdollista, että baarimikko pystyy mittaamaan käytettävissä olevilla mitoilla täsmälleen 4 cl alkoholia?