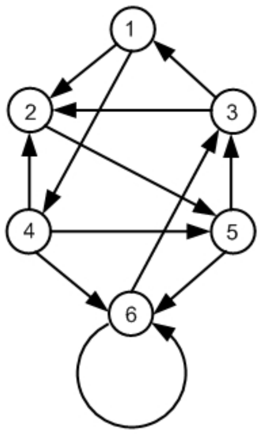
2 Suunnatut verkot

Onko Kuvan 27 verkossa sellainen reitti, jossa kuljetaan kerran kaikkien solmujen kautta ja käytetään kutakin kaarta korkeintaan kerran? Kaaria saa kulkea vain nuolien osoittamaan suuntaan.



Kuva 27: Löytyykö verkolle sellainen nuolien suuntainen reitti, jossa käydään läpi kaikki solmut eikä kuljeta kahdesti saman kaaren kautta?

Kuvan 27 verkkoa sanotaan suunnatuksi verkoksi. Suunnattu verkko eroaa suuntaamattomasta verkosta siten, että jokaiseen kaareen liittyy suunta. Kun piirretään suunnattu verkko, kuvataan kaaria aina nuolilla.

2.1 Suunnatun verkon märittely

Suunnattu verkko määritellään seuraavalla tavalla:

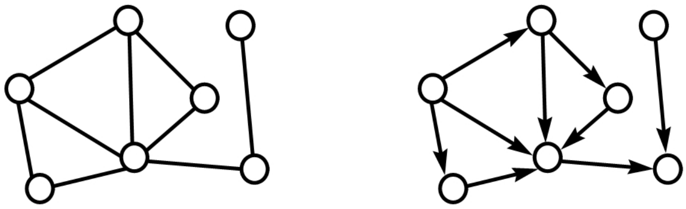
Määritelmä 2.1.1. *Suunnattu verkko* V muodostuu solmujen joukosta $S \neq \emptyset$ ja suunnattujen kaarien eli *nuolien* joukosta K. Jokainen nuoli liittyy yhteen tai kahteen solmuun. Nuolen päätesolmut ovat *alkusolmu* ja *loppusolmu*.

Määritelmä 2.1.2. Suunnatussa verkossa on *rinnakkaisia* nuolia, jos kahden solmun välillä on useita nuolia. Jos nuoli liittyy vain yhteen solmuun, nuoli on *luuppi*. Suunnattu verkko on *yksinkertainen*, jos verkossa ei ole rinnakkaisia nuolia eikä luuppeja. Solmut ovat *vierekkäiset*, jos niiden välillä on nuoli. Nuolet ovat *peräkkäiset*, jos ensimmäisen nuolen loppusolmu on sama kuin toisen nuolen alkusolmu.

Suuntaamattoman verkon ketjua vastaa suunnatussa verkossa polku, jota voi kulkea vain peräkkäisten nuolten mukaan.

Määritelmä 2.1.3. *Polku* on sellainen jono peräkkäisiä nuolia, jossa yksikään nuoli ei ole jonossa useammin kuin kerran. Polku on *suljettu polku*, jos se alkaa ja loppuu samaan solmuun, muutoin polku on *avoin polku*.

Määritelmä 2.1.4. Suunnattu verkko on *yhtenäinen*, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko on yhtenäinen. (Kuva 28)



Kuva 28: Suunnattu verkko on yhtenäinen, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko on yhtenäinen.

Suunnatuissa verkoissa solmun asteluku (solmuun liittyneiden nuolten lukumäärä) jaetaan kahteen osaan *tuloaste* ja *lähtöaste*.

Määritelmä 2.1.5. Suunnatussa verkossa solmun *tuloaste* on solmuun tulevien nuolten lukumäärä ja *lähtöaste* on solmusta lähtevien nuolten lukumäärä.

Esimerkiksi Kuvan 27 verkossa solmun 1 lähtöaste on 2 ja tuloaste on 1. Solmun 6 tuloaste on puolestaan 3 ja lähtöaste 2, sillä luuppi kasvattaa molempia asteita yhdellä.

2.2 Eulerin polut

Suuntaamattomista verkoista tuttua Eulerin ketjua vastaa suunnattujen verkkojen Eulerin polku.

Määritelmä 2.2.1. Polku on *Eulerin polku*, jos se sisältää verkon jokaisen nuolen täsmälleen kerran. Polku on *suljettu Eulerin polku*, jos Eulerin polku alkaa ja loppuu samaan solmuun, muutoin kyseessä on *avoin Eulerin polku*. Suunnattu verkko on *Eulerin verkko*, jos se sisältää suljetun Eulerin polun.

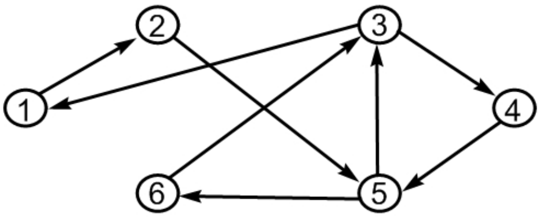
> Etsi Kuvan 29 suunnatusta verkosta suljettu Eulerin polku. Miten suuntaamattomille verkoille tarkoitettua Lausetta 2.2.2 tulisi muuttaa, jotta se sopisi suunnatuille verkoille?

Lause 2.2.2. *Suuntaamattomassa yhtenäisessä verkossa on suljettu Eulerin ketju täsmälleen silloin, kun kaikkien solmujen asteluku on parillinen.*

Eräs suljettu Eulerin polku muodostuu nuolijonosta

$$p : 1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3 \to 1.$$

Suunnatuissa verkoissa solmujen tulo- ja lähtöasteet ovat ratkaisevassa asemassa, kun etsitään suljettua Eulerin polkua. Suunnatussa verkossa on suljettu Eulerin polku, jos jokaisen solmun tuloaste on yhtäsuuri kuin lähtoaste.

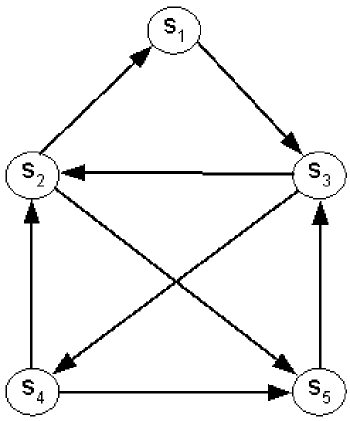


Kuva 29: Etsi suunnatusta verkosta suljettu Eulerin polku.

Lause 2.2.3. *Suunnattu yhtenäinen verkko sisältää suljetun Eulerin polun täsmälleen silloin, kun jokaisen solmun lähtöaste on yhtä suuri kuin tuloaste.*

Etsi Kuvan 30 suunnatusta verkosta avoin Eulerin polku. Miten suuntaamattomille verkoille tarkoitettua Lausetta 2.2.4 tulisi muuttaa, jotta se sopisi suunnatuille verkoille?

Lause 2.2.4. *Suuntaamattomassa yhtenäisessä verkossa on avoin Eulerin ketju täsmälleen silloin, kun siinä on kaksi tai ei yhtään solmua, joiden aste on pariton. Jos verkossa on kaksi asteeltaan paritonta solmua, alkaa avoin Eulerin ketju toisesta solmusta ja päättyy toiseen solmuun.*



Kuva 30: Etsi suunnatusta verkosta Eulerin polku.

Eräs avoin Eulerin polku saadaan nuolijonosta

$$p : s_4 \to s_5 \to s_3 \to s_2 \to s_1 \to s_3 \to s_4 \to s_2 \to s_5.$$

Solmujen tulo- ja lähtöasteet ovat yhtäsuuria solmuille s_1, s_2 ja s_3. Solmun s_4 tuloaste on 1 ja lähtöaste on 2. Solmun s_5 tuloaste on 2 ja lähtöaste on 1.

Lause 2.2.5. *Suunnatussa yhtenäisessä verkossa on avoin Eulerin polku, jos ja vain jos*

1) *jokaisen solmun tuloaste on yhtäsuuri kuin lähtöaste, tai*

2) *jokaisen verkon solmun tuloaste = lähtöaste lukuunottamatta kahta solmua, joista*

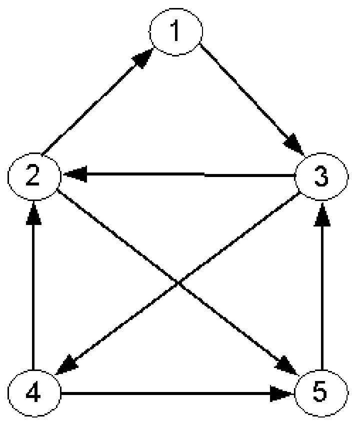
toisen solmun tuloaste = lähtöaste + 1 ja
toisen solmun tuloaste = lähtöaste -1.

Kuvan 30 verkossa kaikkien solmujen tuloaste ei ole yhtä suuri kuin lähtöaste, joten verkossa ei ole suljettua Eulerin polkua. Suunnattu verkko toteuttaa kuitenkin Lauseen 2.2.5 edellytykset, joten verkko sisältää avoimen Eulerin polun.

2.3 Hamiltonin polut

Määritelmä 2.3.1. Polku on *Hamiltonin polku*, jos se sisältää verkon jokaisen solmun täsmälleen kerran. Polku on *suljettu Hamiltonin polku*, jos Hamiltonin polku alkaa ja loppuu samaan solmuun, muutoin kyseessä on *avoin Hamiltonin polku*. Suunnattu verkko on *Hamiltonin verkko*, jos se sisältää suljetun Hamiltonin polun.

Tutki onko Kuvan 31 verkko Hamiltonin verkko.



Kuva 31: Etsi kuvan verkosta suljetut Hamiltonin polut.

On olemassa eräs menetelmä, jolla on mahdollista tutkia onko verkossa suljettua Hamiltonin polkua.

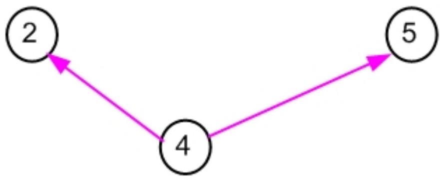
Varmistetaan ensin, että verkko on yhtenäinen, mikä on minimivaatimus Hamiltonin poluille. Suunnattu verkko on yhtenäinen, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko on yhtenäinen. Muutetaan siis verkon nuolet pelkiksi suuntaamattomiksi kaariksi, ja varmistetaan että jokaisen solmun välillä ketju.

Seuraavaksi kirjoitetaan lista, jossa ilmaistaan, mistä solmusta menee nuoli mihinkin solmuun. Esimerkiksi solmusta 2 menee nuoli solmuihin 1 ja 5, joten merkitään nämä yhteydet 2 $\rightarrow$ 1 + 5 omalle rivilleen. Kun käydään kaikki solmut tällä tavoin läpi saadaan seuraava lista:

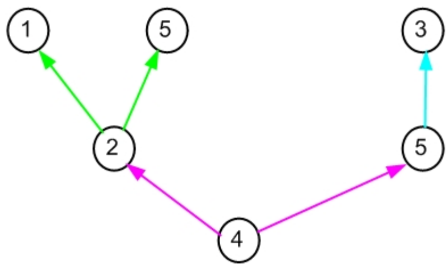
- 1 $\rightarrow$ 3 (punainen nuoli)
- 2 $\rightarrow$ 1 + 5 (vihreä nuoli)
- 3 $\rightarrow$ 2 + 4 (sininen nuoli)
- 4 $\rightarrow$ 2 + 5 (violetti nuoli)
- 5 $\rightarrow$ 3 (turkoosi nuoli).

Valitaan seuraavaksi jokin solmuista, ja aletaan rakentaa tästä solmusta uutta verkkoa. Tätä verkkoa sanotaan *puuksi*, ja valittua solmua puolestaan sanotaan puun *juureksi*.

Valitaan juureksi esimerkiksi solmu 4. Listan mukaan solmusta 4 on nuolet solmuihin 2 ja 5. Merkitään solmun 4 yläpuolelle solmut 2 ja 5 ja piirretään nuolet solmusta 4 näihin solmuihin (Kuva 32).



Kuva 32: Uutta verkkoa on lähdetty muodostamaan solmusta 4.



Kuva 33: Solmusta 2 päästään solmuihin 1 ja 5. Solmusta 5 päästään solmuun 3.

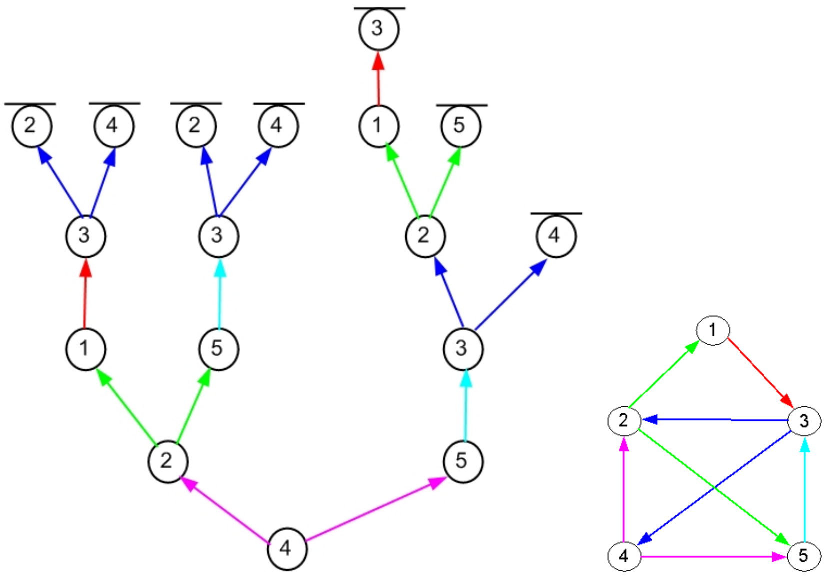
Seuraavaksi tarkastellaan Kuvan 32 solmuja, joiden lähtöaste on nolla eli solmuja 2 ja 5. Listan mukaan solmusta 2 päästään solmuihin 1 ja 5, solmusta 5 päästään solmuun 3, joten täydennetään verkkoa kyseisillä nuolilla (Kuva 33).

Jatketaan verkon kasvattamista tällä tavoin, eli merkitään aina uuden solmun yläpuolelle ne solmut, joihin menee nuoli kyseisestä solmusta. Jos jossakin nuoliketjussa tulee uudestaan jo aiemmin samassa nuoliketjussa esiintynyt solmu, laitetaan solmun päälle viiva, ja lopetetaan kyseisen haaran kasvattaminen tähän. Lopulta kaikkien haarojen viimeisten solmujen päällä on viiva ja puu on valmis (Kuva 34).

Nyt riittää tarkastella Kuvan 34 puun pisintä polkua, joka muodostuu polusta

$$p : 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3.$$

Vaikka pisin polku sisältää kaikki verkon solmut, se ei pääty solmuun 4, joten kyseessä ei ole suljettu Hamiltonin polku. Koska puun pisin polku ei ole suljettua Hamiltonin polku, ei verkko ole Hamiltonin verkko.



Kuva 34: Kasvatetaan suunnattu puu juuresta 4. Puusta nähdään, että siinä ei ole suljettua Hamiltonin polkua.

Annetaan seuraavaksi jo aiemmin esiintyneen käsitteen puu tarkka määritelmä:

Määritelmä 2.3.2. *Puu* on yksinkertainen suuntaamaton verkko, jossa kunkin kahden eri solmun välillä on tasan yksi ketju. Suunnattu verkko on *suunnattu puu*, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko on puu.

Määritellään myös tarkemmin aiemmin esiintynyt käsite juuri:

Määritelmä 2.3.3. Suunnatun puun solmu on puun *juuri*, jos kyseisestä solmusta on polku puun jokaiseen muuhun solmuun. Suunnattu puu on *juurellinen puu*, jos puussa on juuri. [3]

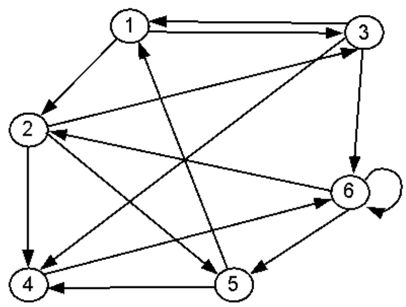
Määritelmä 2.3.4. Juurellisen puun kaikki solmut ovat joko *lehtiä* tai *haaroja*.

- Solmu on puun *lehti*, jos solmun lähtöaste on nolla.
- Solmu on puun *haara*, jos solmun lähtöaste on suurempi kuin nolla.

Kuten jo aiemmin todettiin Kuvan 34 suunnatun puun alin solmu 4 on puun juuri. Tämä puu on siis juurellinen puu. Juurellisen puun tapauksessa käytämme solmuista termejä lehti, haara ja juuri. Puun juuri on aina myös puun haara. Kuvassa 34 solmut, joiden päällä on viiva ovat lehtiä ja kaikki muut solmut ovat haaroja.

[3] Termit *polku* ja *juuri* esiintyvät myös tietojenkäsittelytieteissä. Tietorakenteet ovat juurellisia puita, missä esimerkiksi *c:* on juuri, josta on polku kaikkiin tallennettuihin tiedostoihin. Polku *c:\tiedostot \kuvat \picture.jpg* alkaa juuressa *c:* ja kulkee solmujen *tiedostot* ja *kuvat* kautta kohdetiedostoon *picture.jpg* .

Tutki onko Kuvan 35 verkko Hamiltonin verkko. Kasvata puu käyttämällä juurta 4.



Kuva 35: Tutki onko verkko Hamiltonin verkko.

Kirjoitetaan lista, mistä solmusta menee nuoli mihinkin solmuun:

- 1 → 2 + 3 (punainen nuoli)
- 2 → 3 + 4 + 5 (vihreä nuoli)
- 3 → 1 + 4 + 6 (sininen nuoli)
- 4 → 6 (harmaa nuoli)
- 5 → 1 + 4 (violetti nuoli)
- 6 → 2 + 5 (turkoosi nuoli).

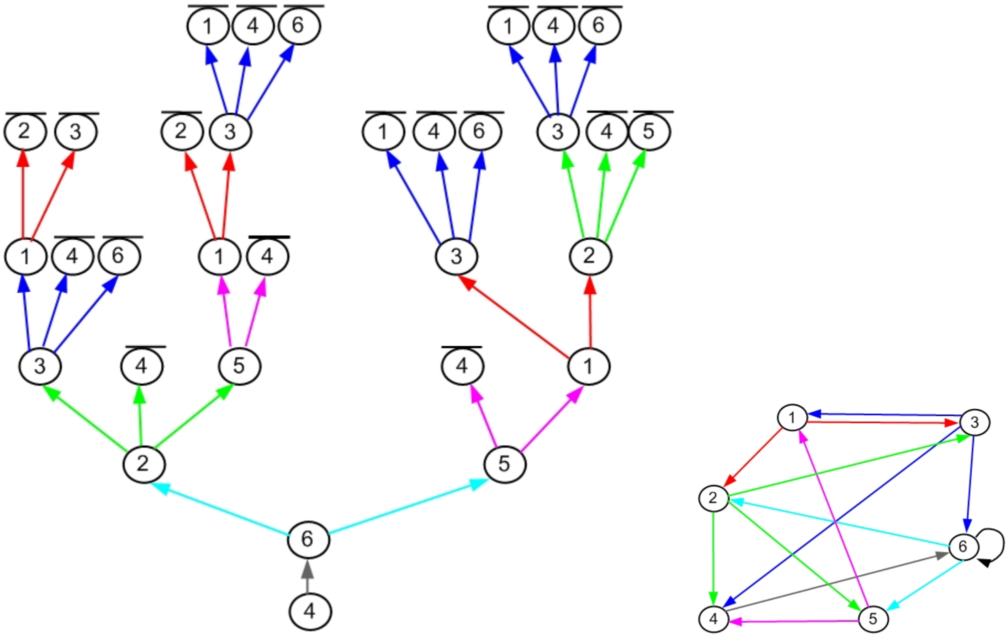
Kasvatetaan suunnattu puu juuresta 4 (Kuva 36). Kuvasta nähdään, että kaksi suljettua Hamiltonin polkua muodostuu poluista

$$\begin{aligned} p_1: &\quad 4 \to 6 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \text{ ja} \\ p_2: &\quad 4 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 \to 3 \to 4. \end{aligned}$$

Koska puu sisältää kaikki solmusta 4 alkavat polut, voidaan sen avulla etsiä myös kaikki solmusta 4 alkavat avoimet Hamiltonin polut.

Alkuperäinen verkko sisältää 5 solmua, joten myös avoimessa Hamiltonin polussa täytyy olla 5 solmua. Siis solmusta 4 alkavat avoimet Hamiltonin polut löytyvät puun toisiksi ylimmältä riviltä. Tätä riviä tarkastelemalla havaitaan, että löytyy vain kaksi solmusta 4 alkavaa avointa Hamiltonin ketjua.

Näin ollen puusta voidaan laskea, että kyseinen suunnattu verkko sisältää kaksi suljettua Hamiltonin polkua ja kaksi solmusta 4 alkavaa avointa Hamiltonin polkua.



Kuva 36: Kasvatetaan suunnattu puu juuresta 4. Puusta nähdään, että siinä on kaksi suljettua Hamiltonin polkua.

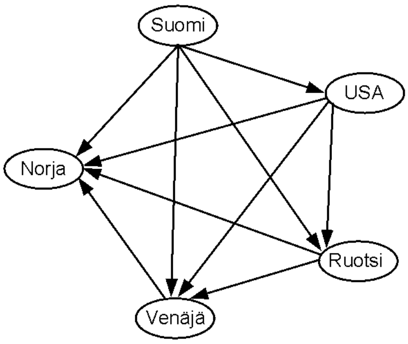
2.4 Turnaukset

Jääkiekon MM-kisaturnauksessa viisi maata taistelee kisojen voitosta. Tasapelitilanteessa ottelut ratkaistaan rangaistuslaukauskilpailulla. Taulukossa 1 on esitetty otteluiden lopputulokset. Tee taulukon perusteella viisisolmuinen verkko, jossa solmut vastaavat maita ja kunkin solmun lähtöaste kuvastaa voitettuja otteluita. Miten turnauksen mitalisijat jakautuivat? Olisiko turnaus voinut päättyä tasapeliin?

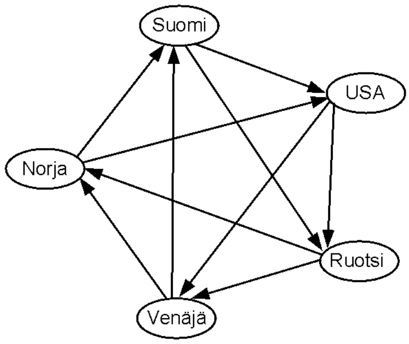
Ottelu	Lopputulos	Ottelu	Lopputulos
Norja - Ruotsi	1 - 7	Norja - Suomi	3 - 4
Ruotsi - USA	1 - 4	Ruotsi - Venäjä	3 - 1
Suomi - Ruotsi	6 - 2	Suomi - Venäjä	3 - 2
USA - Norja	4 - 1	USA - Suomi	0 - 1
Venäjä - Norja	3 - 1	Venäjä - USA	2 - 6

Taulukko 1: Jääkiekon MM-kisojen lopputulokset.

Olkoot solmut turnauksessa pelaavia maita ja kaaret maiden välisiä otteluita. Piirretään aluksi viisi solmua ja nimetään ne maiden mukaan. Taulukosta 1 nähdään, että kaikki maat pelaavat kaikkia vastaan täsmälleen yhden ottelun, joten verkossa ei ole rinnakkaisia kaaria,ja jokaisesta solmusta menee kaari kaikkiin muihin solmuihin. Tällaista verkkoa sanotaan täydelliseksi verkoksi.



Kuva 37: Turnaus on täydellinen suunnattu verkko, jossa lähtöaste kuvastaa voitettuja otteluita.



Kuva 38: Jos turnauksessa kaikki voittavat yhtä monta ottelua, on kyseessä säännöllinen turnaus.

Määritelmä 2.4.1. Yksinkertainen suuntaamaton verkko on *täydellinen*, jos verkon jokaisen solmun välillä on kaari. Täydellistä n-solmuista verkkoa merkitään K_n.

Kisaturnauksesta saadaan siis viisisolmuinen täydellinen suuntaamaton verkko. Täydennetään verkkoa kaarien suunnilla siten, että lähtöaste kuvastaa voitettuja otteluita. Esimerkiksi ottelun Norja - Ruotsi voitti Ruotsi, joten suunnatussa verkossa ottelua kuvaavan nuolen suunta on solmusta Ruotsi solmuun Norja. Lopputuloksena saadaan yksinkertainen täydellinen suunnattu verkko, jonka solmujen lähtöaste kuvastaa voitettuja otteluita (Kuva 37). Solmujen lähtöasteesta nähdään kunkin maan voittamat ottelut: Suomi 4, USA 3, Ruotsi 2, Venäjä 1 ja Norja 0.

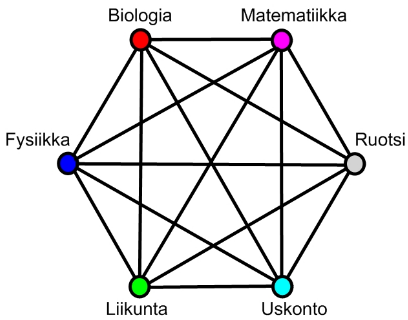
Tällä tavalla järjestetty MM-kisaturnaus ei ole käytännössä järkevä, koska kyseinen kisaturnaus voi päättyä tasapeliin. On mahdollista, että jokainen maa voittaa ja häviää saman määrän otteluita. Kuvassa 38 on esitetty eräs turnaus, jossa kaikki voittavat saman määrä otteluita.

Verkkoteoriassa yksinkertaisesta täydellisestä suunnatusta verkosta käytetään nimitystä *turnaus*. Jos turnauksessa kaikkien solmujen tuloaste on sama niin tällöin kyseessä on *säännöllinen turnaus*.

Määritelmä 2.4.2. Täydellinen suunnattu verkko on *turnaus*. Turnaus on *säännöllinen turnaus*, jos jokaisen solmun tuloaste on sama.

Olisiko lopputuloksena voinut olla säännöllinen turnaus, jos MM-kisoissa olisi ollut mukana edellä mainittujen maiden lisäksi vielä Kanada?

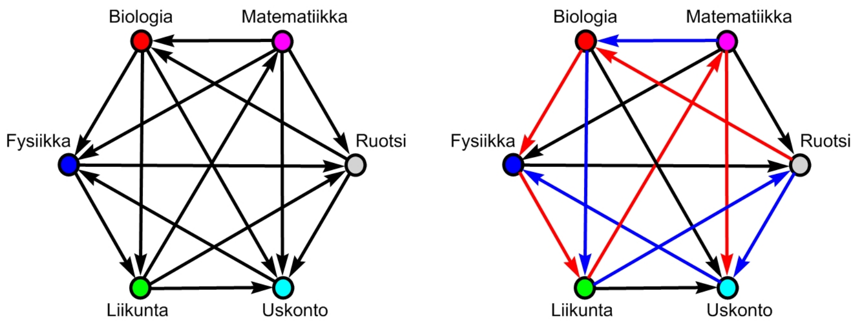
Kuvan 39 täydellisessä verkossa on esitetty kuusi oppiainetta. Täydennä verkko kaarien nuolilla siten, että vertaat kaikkia oppiaineita pareittain. Jokaisen nuolen alkusolmu kuvastaa mieluisampaa oppiainetta kuin nuolen loppusolmu. Voidaanko oppiaineet laittaa aina ns. paremmuusjärjestykseen?



Kuva 39: Muodosta verkosta turnaus, jossa nuolen alkusolmu esittää mieluisampaa oppiainetta koulussa, kun oppiaineita vertaillaan pareittain.

Tehtävänä on vertailla kutakin oppiainetta pareittain siten, että nuolen alkusolmu kuvastaa mieluisampaa oppiainetta kuin nuolen loppusolmu. Kun kaikki täydellisen verkon kaaret on korvattu nuolilla muodostuu turnaus. Turnauksesta on aina löydettävissä jonkinlainen järjestys. Toisin sanoen turnauksesta on aina löydettävissä avoin Hamiltonin polku.

Lause 2.4.3. *Jokainen turnaus sisältää avoimen Hamiltonin polun.*

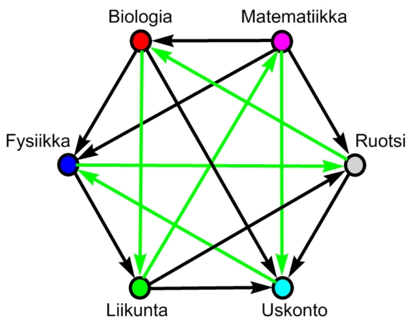


Kuva 40: Jokainen turnaus sisältää avoimen Hamiltonin polun. Toisaalta, jos Hamiltonin polkuja on useita, ei oppiaineita voida asettaa yksikäsitteiseen järjestykseen.

Kuvassa 40 vasemmalla on esitetty eräs turnaus, josta on löydettävissä ainakin kaksi avointa Hamiltonin polkua. Kuvassa esitetyt Hamiltonin polut ovat

Matematiikka → Biologia → Liikunta → Ruotsi → Uskonto → Fysiikka,
Ruotsi → Biologia → Fysiikka → Liikunta → Matematiikka → Uskonto .

Erikoista tässä on se, että jos kaikkia oppiaineita verrataan vain pareittain, niin joissakin tapauksissa turnauksen perusteella ei oppiaineita voida asettaa yksikäsitteiseen paremmuusjärjestykseen. Kuvassa 41 nuolista muodostuu suljettu Hamiltonin ketju.



Kuva 41: Oppiaineita ei voida asettaa yksikäsitteiseen paremmuusjärjestykseen, jos turnaus sisältää Hamiltonin suljetun ketjun.

Tämä tunnetaan niin matematiikassa kuin monissa muissakin tieteissä nimellä *Condorcet'n paradoksi.*

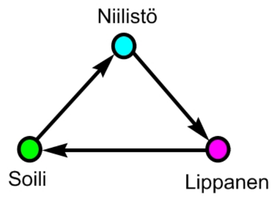
Presidentinvaalit lähestyvät. Ehdokkaina ovat Saukko Niilistö, Paavi Lippanen ja Tino Soili. Kukin ehdokas on esittänyt kantansa kahteen alla olevista kysymyksistä:

- Pitäisikö Suomen liittyä sotilasliitto Natoon?
  Soili - EI, Niilistö - KYLLÄ
- Pitäisikö Suomen erota Euroopan Unionista?
  Niilistö - EI, Lippanen - KYLLÄ
- Pitäisikö Suomeen tuoda Robin Hood -vero?
  Lippanen - EI, Soili - KYLLÄ

Tutkimuksen mukaan 70% äänestäjistä kannattaa ehdokasta, joka vastaisi kaikkiin kysymyksiin EI. Kenestä tulee Suomen seuraava presidentti?

Tutkimuksen mukaan äänestäjistä suurin osa kannattaa ehdokasta, joka vastaisi kaikkiin kysymyksiin kielteisesti. Kukin ehdokas on esittänyt kantansa vain kahteen kysymykseen, joten ehdokkaita voidaan vertailla vain pareittain.

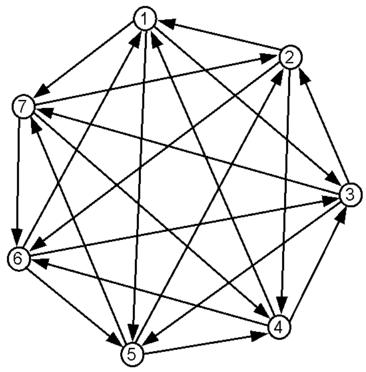
Ensimmäisen kysymyksen perusteella kansan suosikki olisi Soili verrattuna Niilistöön. Toisen kysymyksen perusteella Niilistö saisi paremman kannatuksen verrattuna Lippaseen. Viimeisen kysymyksen kohdalla Lippanen on kansan suosiossa, kun häntä verrataan Soiliin. Esitetään pareittain vertailu turnauksena. (Kuva 42)



Kuva 42: Ehdokkaiden pareittain vertailu saattaa johtaa Condorcet'n paradoksiin.

Condorcet'n paradoksi voi muodostua, jos presidentinvaalin ehdokkaita vertaillaan vain pareittain. Tässä tapauksessa ehdokkaiden paremmuusjärjestyksestä eli vaalien lopputuloksesta ei voida sanoa mitään.

Etsi Kuvan 43 säännöllisestä turnauksesta mahdollimman monta suljettua Hamiltonin polkua. Entä montako suljettua Hamiltonin polkua löydät Kuvan 38 turnauksesta.



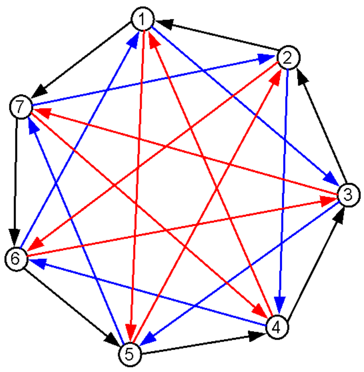
Kuva 43: Etsi säännöllisestä turnauksesta mohdollisimman monta suljettua Hamiltonin polkua.

Kuvan 43 turnauksesta on löydettävissä kolme suljettua Hamiltonin polkua (Kuva 44)

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 1$$
$$1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 2 \to 4 \to 6 \to 1$$
$$1 \to 5 \to 2 \to 6 \to 3 \to 7 \to 4 \to 1$$

Kuvan 38 5-solmuisesta säännöllisestä turnauksesta on löydettävissä kaksi suljettua Hamiltonin polkua.

$$p_1: \quad \text{Suomi} \to \text{USA} \to \text{Ruotsi} \to \text{Venäjä} \to \text{Norja} \to \text{Suomi},$$
$$p_2: \quad \text{Suomi} \to \text{Ruotsi} \to \text{Norja} \to \text{USA} \to \text{Venäjä} \to \text{Suomi}.$$



Kuva 44: Säännöllisestä 7-solmuisesta turnauksesta on löydettävissä kolme suljettua Hamiltonin polkua.

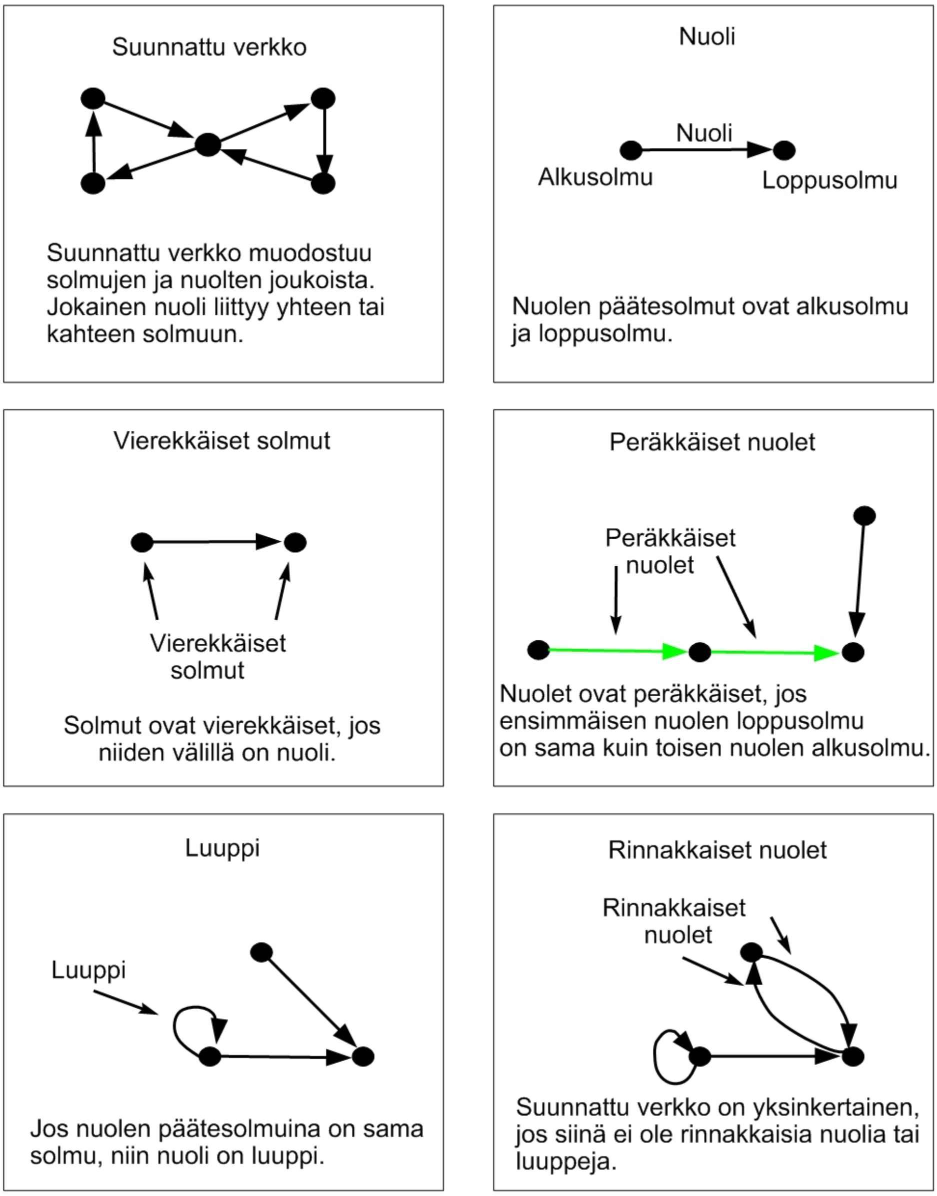
Lause 2.4.4. *Säännöllisen n-solmuisen turnauksen nuolijoukko voidaan jakaa $\frac{n-1}{2}$ osajoukkoon, joista jokainen osajoukko sisältää suljetun Hamiltonin polun.*

Lauseen 2.4.4 mukaan Kuvan 43 7-solmuisen säännöllisen turnauksen nuolet voidaan jakaa $\frac{7-1}{2} = 3$ osajoukkoon, joista jokainen sisältää suljetun Hamiltonin polun.

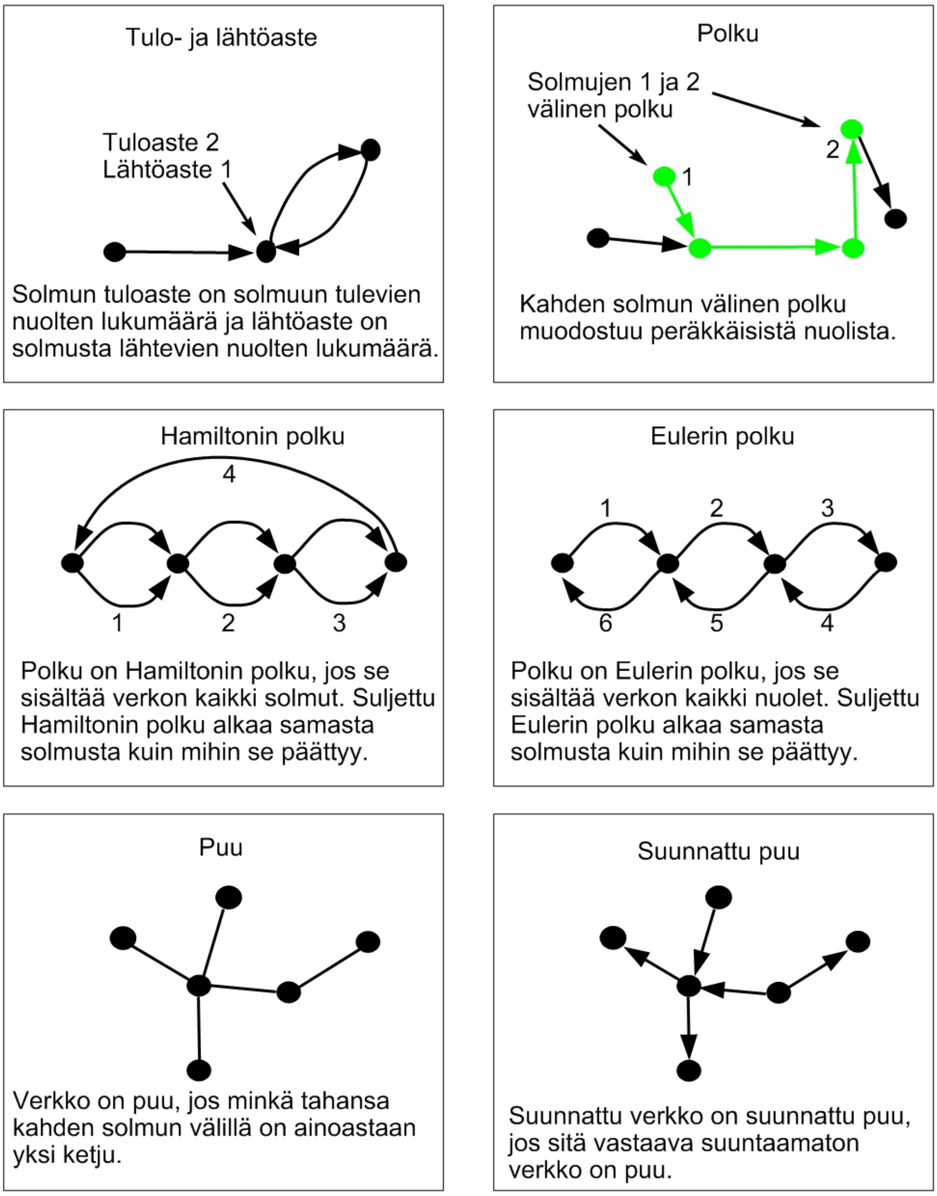
2.5 Käsitteiden kertausta

Tässä kapppaleessa on käsitelty suunnattuja verkkoja ja muun muassa käsitteitä: alku- ja loppusolmu, vierekkäiset solmut, peräkkäiset nuolet, rinnakkaiset nuolet, luuppi, tulo- ja lähtoaste, polku, Hamiltonin ja Eulerin polut, puu, juuri, täydelliset verkot ja turnaukset.

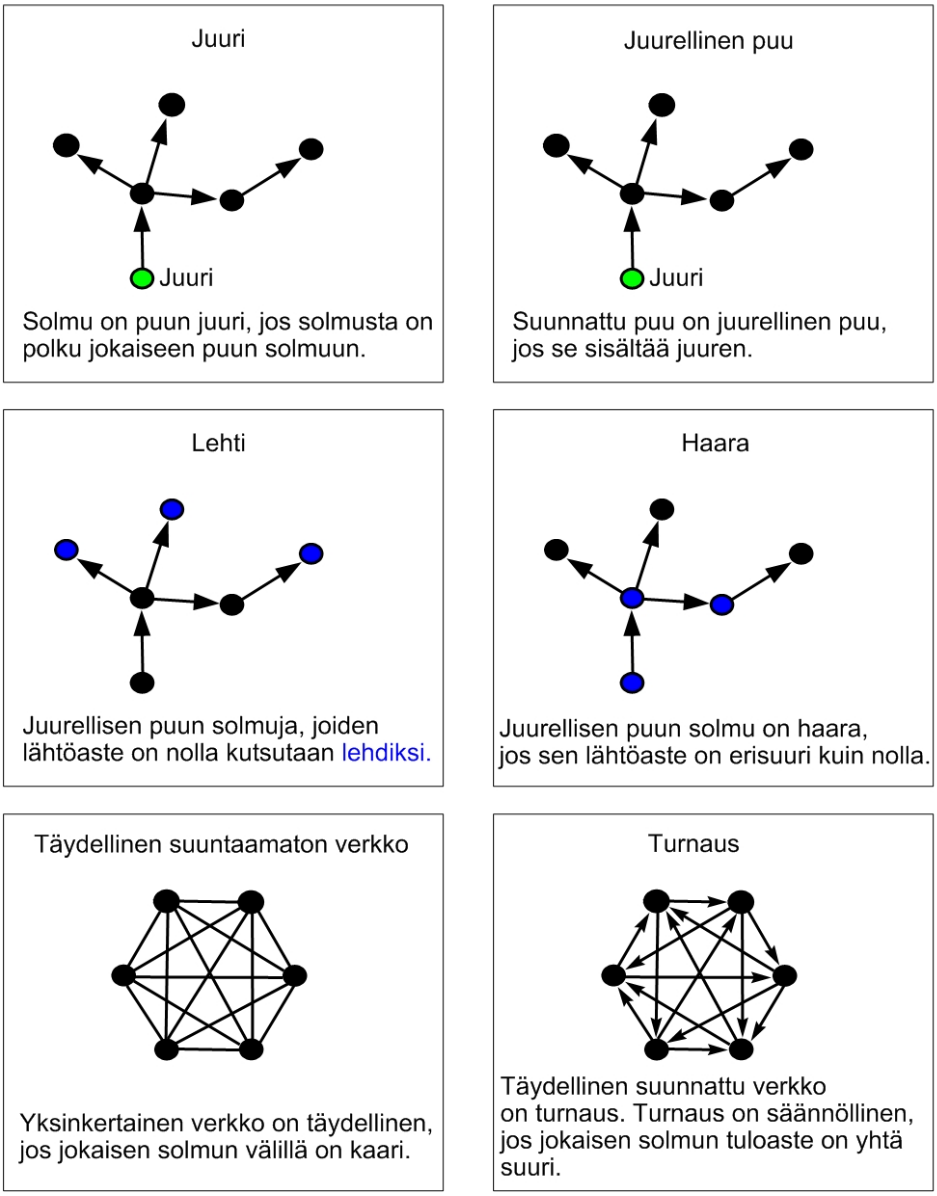
Kertaa aiempia käsitteitä sivuilta 30 - 32.



Kuva 45: Kappaleen 2 käsitteiden kertausta - Osa 1.



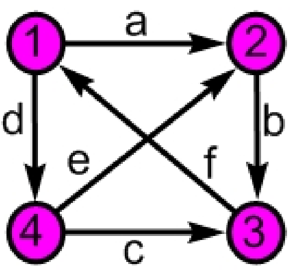
Kuva 46: Kappaleen 2 käsitteiden kertausta - Osa 2.



Kuva 47: Kappaleen 2 käsitteiden kertausta - Osa 3.

2.6 Tehtäviä

Tehtävä 2.6.1. Etsi Kuvasta 48 käsitteet ja täydennä lauseet $a - h$.



Kuva 48: Etsi kuvasta käsitteet.

a) Objektit a, b, c, d, e ja f ovat ____________________.

b) Solmu 2 on nuolen b ____________________.

c) Solmu 3 on nuolen c ____________________.

d) Nuolet f ja d ovat ____________________ nuolet.

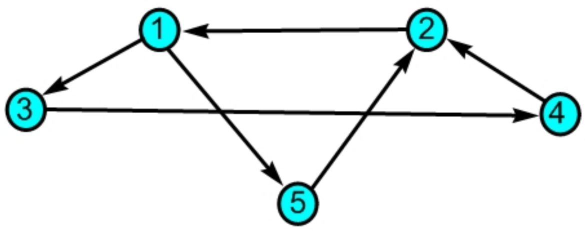
e) Solmun 2 tuloaste on ____________________

f) Solmun 4 lähtöaste on ____________________

g) Nuolijono (a, b, f) on ____________________.

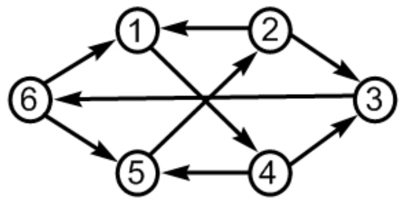
h) Suunnattu verkko on ____________________.

Tehtävä 2.6.2. Etsi verkosta avoin Eulerin polku (Kuva 49). Perustele miksi verkossa ei voi olla suljettua Eulerin polkua.



Kuva 49: Etsi verkosta avoin Eulerin polku.

Tehtävä 2.6.3. Piirrä 5-solmuinen suunnattu verkko, joka sisältää suljetun Eulerin polkun, ja jonka jokaisen solmun lähtöaste on kaksi.



Kuva 50: Etsi verkosta suljettu Hamiltonin polku.

Tehtävä 2.6.4. Etsi verkosta suljettu Hamiltonin polku kasvattamalla verkosta juurellinen puu (Kuva 50).

Tehtävä 2.6.5. Onko mahdollista piirtää 5-solmuinen turnaus, jossa ei ole avointa Hamiltonin polkua? Entä suljettua Hamiltonin polkua?

Tehtävä 2.6.6. Kallisarvoinen taideteos on varastettu museosta. Museossa kävi kuusi henkilöä, nimittäin A, B, C, D, E ja F, kukin kerran. Jos kaksi henkilöä oli museossa yhtäaikaa ainakin osan ajastaan, niin silloin ainakin toinen näki toisen. Kuulusteluissa

A väitti nähneensä B:n ja E:n,

B väitti nähneensä A:n ja F:n,

C väitti nähneensä D:n ja F:n,

D väitti nähneensä A:n ja F:n,

E väitti nähneensä C:n ja B:n,

F väitti nähneensä C:n ja E:n.

Yksi heistä valehteli. Sinun tehtäväsi on selvittää kuka?