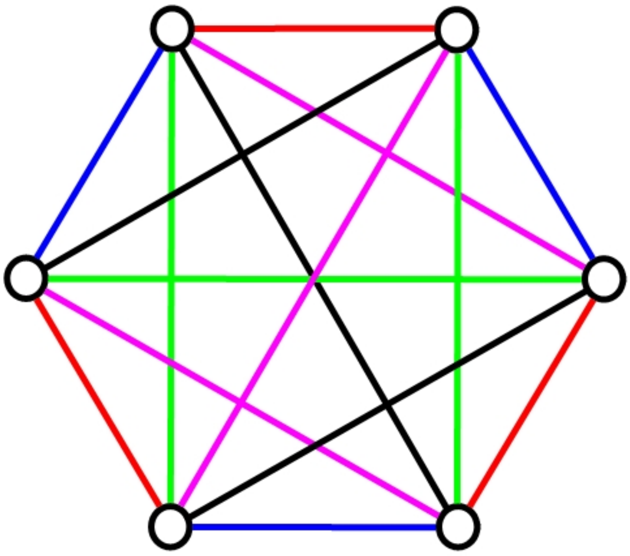
RELAATIOT JA VERKOT

Mika Koponen Jussi Kotilainen

13. lokakuuta 2011



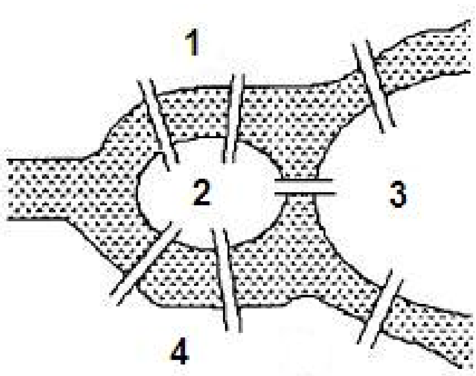
Sisältö

1 Suuntaamattomat verkot

Verkkoteorian katsotaan alkaneen Königsbergin siltaongelmasta, sillä kyseisen ongelman pohjalta Leonhard Euler määritteli verkon vuonna 1736. Sanaa verkko käytettiin kuitenkin ensimmäisen kerran vasta vuonna 1878. Astutaan verkkoteorian kiehtovaan maailmaan aivan, kuten Euler aikanaan otti ensi askeleensa.

1.1 Königsbergin siltaongelma

Königsbergin kaupungissa on seitsemän siltaa. Kaupungin asukkaat kävivät mielellään sunnuntaikävelyllä pitkin kaupunkia. Asukkaat lähtivät kävelylle kukin omasta kaupungin osastaan $(1, 2, 3, 4)$ (Kuva 1) ja pyrkivät kulkemaan reitin, jossa kukin silta ylitettiin vain kerran ja tultiin takaisin lähtöpisteeseen. Oliko mahdollista kulkea kukin silta vain kerran ja päätyä takaisin lähtöpisteeseen? Entä oliko lähtöpisteellä vaikutusta tähän?



Kuva 1: Königsbergin sillat.

Aluksi Euler yksinkertaisti Königsbergin karttaa poistamalla ylimääräisiä piirteitä karttakuvasta. Uuteen kuvaan jäivät vain maamassat, niitä erottavat vedet ja seitsemän siltaa. Tähänkään Euler ei ollut tyytyväinen vaan yksinkertaisti entisestään tilannetta. Vaihe vaiheelta Königsbergin kartta muuntui *verkoksi*, jossa maamassoja vastaavat *solmut* ja siltoja vastaavat *kaaret*. (Kuva 2).

Euler osoitti, että siltaongelmaan ei ole ratkaisua. Ei siis ole mahdollista löytää reittiä, jossa jokainen silta ylitetään vain kerran ja päädytään takaisin lähtöpisteeseen. Entä jos luovutaan vaatimuksesta palata takaisin lähtöpisteeseen? Itseasiassa siltaongelmaan ei ole ratkaisua edes silloin.

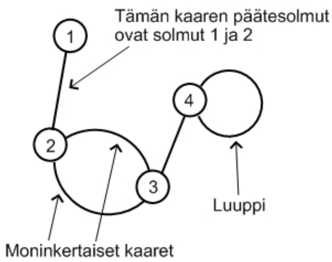
1.2 Suuntaamaton verkko

Suuntaamaton verkko muodostuu *solmujen* ja *kaarien* joukoista. Suuntaamattomassa verkossa täytyy olla vähintään yksi solmu, jotta se on verkko. Jokainen verkon kaari määritellään solmujen avulla.

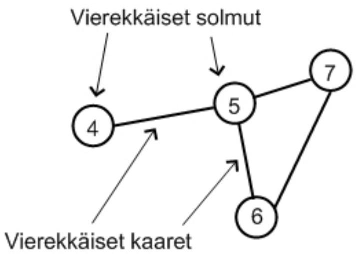
Kuva 2: Königsbergin siltaongelma muuntui verkko-ongelmaksi.

Määritelmä 1.2.1. *Suuntaamaton verkko* V muodostuu *solmujen* joukosta $S \neq \emptyset$ [1] ja *kaarten* joukosta K. Jokainen kaari liittyy yhteen tai kahteen solmuun.

Määritelmä 1.2.2. Suuntaamattomassa verkossa on *rinnakkaisia* kaaria, jos kahden solmun välillä on useita kaaria. Jos kaari määräytyy yhden solmun välille, niin tällöin kaari on *luuppi*. Kaaren määrittävät solmut ovat *päätesolmuja*. Suuntaamaton verkko on *yksinkertainen*, jos verkossa ei ole luuppeja eikä rinnakkaisia kaaria. Solmut ovat *vierekkäiset*, jos niiden välillä on kaari. Kaaret ovat *vierekkäiset*, jos niillä on yhteinen päätesolmu. (Kuvat 3 ja 4)



Kuva 3: Tämä verkko ei ole yksinkertainen



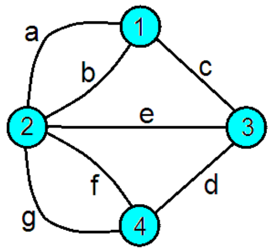
Kuva 4: Tämä verkko on yksinkertainen

Königsbergin siltaongelmaa vastaavaa verkkokuvaus voidaan esittää solmujen joukkona $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ja kaarten joukkona $K = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ (Kuva 5).

Königsbergin siltaongelmassa tehtävänä oli löytää reitti, jossa ei kuljeta kahdesti saman sillan yli. Verkossa tämä tarkoittaa sitä, ettei käytetä kahdesti samaa kaarta. Lisäksi reitissä siltojen tulee olla loogisessa järjestyksessä; ei ole mahdollista mennä ensin saarten 1 ja 2 välisestä sillasta ja seuraavaksi saarten 3 ja 4 välisestä sillasta. Verkossa tämä tarkoittaa, että seuraavan kaaren on oltava aina edellisen kaaren viereinen kaari. Tällaista reittiä sanotaan ketjuksi, ja sitä voidaan merkitä esimerkiksi kirjoittamalla kaaret jonoon kulkujärjestyksessä.

Määritelmä 1.2.3. *Ketju* on sellainen jono kaaria, jossa peräkkäiset kaaret ovat aina vierekkäisiä, ja yksikään kaari ei ole jonossa useammin kuin kerran.

[1] Merkintä $S \neq \emptyset$ tarkoittaa, että joukko S on epätyhjä. Toisin sanoen solmujen joukossa on vähintään yksi solmu.



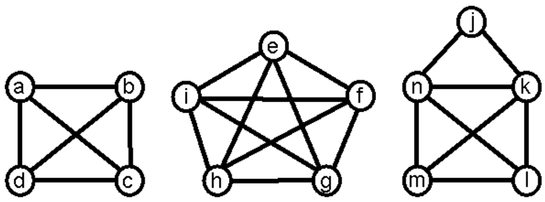
Kuva 5: Königsbergin seitsemän siltaa voidaan esittää kaarina ja maamassat solmuina.

Ketju on *suljettu ketju*, jos se alkaa ja loppuu samaan solmuun. Ketju on *avoin ketju*, jos se alkaa ja loppuu eri solmuun.

Huomaathan, että ketjun ei tarvitse määritelmänsä mukaan sisältää kaikkia verkon kaaria! Esimerkiksi Königsbergin siltojen verkkokuvauksen kaarien jono (a, g, d) on avoin ketju.

1.3 Solmujen asteluku ja Eulerin ketjut

Yritä piirtää paperille Kuvan 6 kaltaiset verkot siten, että kynää ei saa nostaa missään vaiheessa paperista ja kynä saa kulkea kutakin kaarta pitkin vain yhden kerran. Perustele miksi kaikkia verkkoja ei voida piirtää em. ehdoin.



Kuva 6: Kokeile piirtää nämä kolme verkkoa kynää paperista nostamatta. Kutakin kaarta pitkin kynä saa kulkea vain yhden kerran.

Nämä kolme verkkoa ovat kaikki suuntaamattomia yksinkertaisia verkkoja, koska niissä ei ole rinnakkaisia kaaria tai luuppeja (Kuva 6). Solmujoukosta $S_1 = \{a, b, c, d, \}$ koostuvaa verkkoa ei ole mahdollista piirtää tehtävän ehtojen mukaisesti. Solmujoukosta $S_2 = \{e, f, g, h, i\}$ muodostuva verkko on mahdollista piirtää useilla eri tavoilla. Solmujoukosta $S_3 = \{j, k, l, m, n\}$ koostuva verkko voidaan piirtää vain aloittamalla solmusta m tai l.

Edellä ollut piirtämisongelma voidaan myös muotoilla matemaattisemmaksi ja täsmällisemmäksi, jos käytetään aiemmin määriteltyä ketjun käsitettä. Tällöin tehtävä kuuluu: onko mahdollista löytää sellainen ketju, joka sisältää kaikki verkon kaaret. Tällaista ketjua, joka sisältää kaikki verkon kaaret, sanotaan Eulerin ketjuksi.

Määritelmä 1.3.1. Suuntaamattoman verkon ketju on *Eulerin ketju*, jos se sisältää verkon jokaisen kaaren.

Eulerin ketjut voivat olla suljettuja tai avoimia.

Määritelmä 1.3.2. Ketju on *suljettu Eulerin ketju*, jos Eulerin ketju alkaa ja loppuu samaan solmuun, muutoin Eulerin ketju on *avoin Eulerin ketju*. Suuntaamaton verkko on *Eulerin verkko*, jos se sisältää Eulerin suljetun ketjun.

Myös Königsbergin siltaongelman ratkaiseminen tarkoittaa suljetun Eulerin ketjun etsimistä.
Seuraavaksi määriteltävän solmun asteluvun avulla voidaan tarkastella, milloin verkosta löytyy avoin tai suljettu Eulerin ketju.

Määritelmä 1.3.3. Solmun *aste tai asteluku* on solmuun *liittyneiden* kaarien lukumäärä. Luupit nostavat solmun astelukua kahdella. Solmun s asteesta käytetään merkintää $a(s)$.

Esimerkiksi Königsbergin silloista tehdyssä verkossa solmun 1 asteluku on 3. Tämä voidaan merkitä lyhyemmin $a(1) = 3$. Muiden kyseisen verkon solmujen asteluvut ovat seuraavat: $a(2) = 5, a(3) = 3$ ja $a(4) = 3$.

Etsi Kuvan 6 verkoista avoin tai suljettu Eulerin ketju, jos se on mahdollista. Perustele ketjujen olemassaolo väitteiden $1 - 3$ avulla.

Väite 1: Jos suuntaamattoman verkon kaikkien solmujen aste on parillinen, verkosta löytyy suljettu Eulerin ketju.

Väite 2: Jos suuntaamattomassa verkossa on korkeintaan kaksi paritonasteista solmua, verkosta löytyy avoin Eulerin ketju.

Väite 3: Jos suuntaamattomassa verkossa on enemmän kuin kaksi paritonasteista solmua, verkosta löytyy avointa eikä suljettua Eulerin ketju.

Aloitetaan Kuvan 6 keskimmäisestä verkosta. Väitteen 1 mukaan tässä verkossa on suljettu Eulerin ketju, koska verkon jokaisen solmun asteluku on 4. Tämä ketju voidaan esittää seuraavalla tavalla: [2]

$$k : e - f - g - h - i - e - g - i - f - h - e,$$

Tarkastellaan seuraavaksi Kuvan 6 oikean puoleista verkkoa. Väitteen 2 mukaan tässä verkossa on avoin Eulerin ketju, koska verkossa on kaksi paritonasteista solmua. Nimittäin solmujen m ja l asteluku on kolme.
Avoin Eulerin ketju voidaan aloittaa joko solmusta m tai solmusta l. Tällöin kyseinen ketju päättyy solmuun l tai solmuun m. Avoimia Eulerin ketjuja ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned} k:&\quad m - l - n - j - k - m - n - k - l, \\ k:&\quad l - m - n - j - k - n - l - k - m. \end{aligned}$$

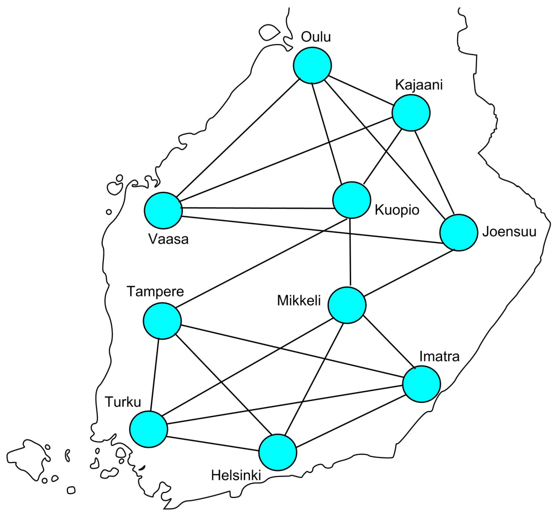
[2] Yksinkertaisessa verkossa ketju voidaan ilmaista lyhennetyssä muodossa ilman kaarien nimiä, koska kaksi solmua määräävät kaaren yksikäsitteisesti.

Todetaan lopuksi, että Kuvan 6 vasemman puoleisessa verkossa ei väitteen 3 mukaan ole avointa eikä suljettua Eulerin ketjua, koska kaikkien solmujen aste on pariton.

1.4 Verkon yhtenäisyys

Etelä- ja Keski-Suomen televerkkoon saapuvat matkapuhelinpuhelut ohjautuvat lähimpien tukiasemien kautta eteenpäin (Kuva 7). Ongelmia on ilmennyt eri kaupunkien välisissä yhteyksissä, ja ukkosmyrskyjen aikaan joidenkin tukiasemien kaikki yhteydet ovat saattaneet kaatua. Asiantuntijoiden tehtävä on laatia raportti televerkon haavoittuvuudesta. Heidän tulee ratkaista seuraavat kysymykset.

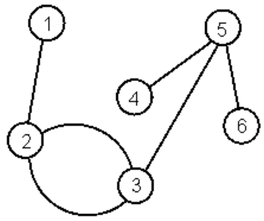
- Mikä on minimimäärä katkenneita yhteyksiä tai kaatuneita tukiasemia, joiden seurauksena kahden tai useamman kaupungin välillä ei ole yhteyttä?
- Mikä on maksimimäärä katkenneita yhteyksiä, jonka jälkeen kaikkien kaupunkien välillä on vielä yhteys?



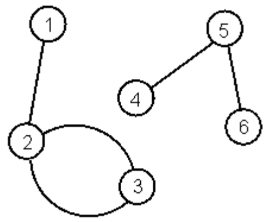
Kuva 7: Etelä- ja Keski-Suomen televerkkoon saapuvat matkapuhelinpuhelut ohjautuvat lähimpien tukiasemien kautta eteenpäin.

Kuvan 7 suuntaamaton verkko näyttäisi olevan haavoittuvainen Etelä- ja Keski-Suomen väliltä, jossa on vain 3 kaarta yhdistämässä verkkoa. Useiden kaupunkien väliltä katoaa yhteys, jos kaupunkien Joensuu-Mikkeli, Kuopio-Mikkeli ja Kuopio-Tampere väliset yhteydet katoavat. Toisaalta, jos esimerkiksi Mikkelin tukiasema kaatuu, niin tällöin Etelä- ja Keski-Suomen väliset puhelut ovat enää yhden yhteyden varassa (Tampere-Kuopio). Jos Mikkelin ja Kuopion Tukiasemat kaatuvat, tällöin Etelä- ja Keski-Suomen väliltä katovat yhteydet, joten verkko ei ole enää *yhtenäinen*.

Määritelmä 1.4.1. Verkon kaksi solmua on *yhdistetty*, jos niiden välillä on ketju. Verkko on *yhtenäinen*, jos mitkä tahansa kaksi solmua on yhdistetty. (Kuvat 8 ja 9)



Kuva 8: Yhtenäinen verkko



Kuva 9: Epäyhtenäinen verkko

Määritelmä 1.4.2. Yhtenäisen verkon *solmuyhtenäisyys* y_s on minimimäärä solmuja, joiden poistamisesta seuraa, että verkko ei ole yhtenäinen.

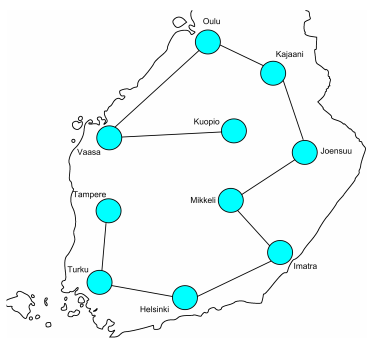
Määritelmä 1.4.3. Yhtenäisen verkon *kaariyhtenäisyys* y_k on minimimäärä kaaria, joiden poistamisesta seuraa, että verkko ei ole yhtenäinen.

Kuvan 7 verkko ei ole yhtenäinen, jos siitä poistetaan 3 kaarta tai 2 solmua. Nyt verkon haavoittuvuutta voidaan kuvata kaariyhtenäisyydellä $y_k = 3$ ja solmuyhtenäisyydellä $y_s = 2$.

Asiantuntijoille asetettu toinen kysymys oli selvittää maksimimäärä katkenneita yhteyksiä, jonka jälkeen verkko on edelleen yhtenäinen. Tällöin kahden tukiaseman välillä täytyy olla vähintään yksi yhteys. Jos muodostetaan verkossa avoin ketju, joka sisältää kaikki solmut, voidaan tämän jälkeen kaikki muut yhteydet katkaista. Verkko on yhtenäinen, jos esimerkiksi ketjun

Tampere - Turku - Helsinki - Imatra - Mikkeli -
Joensuu - Kajaani - Oulu - Vaasa - Kuopio

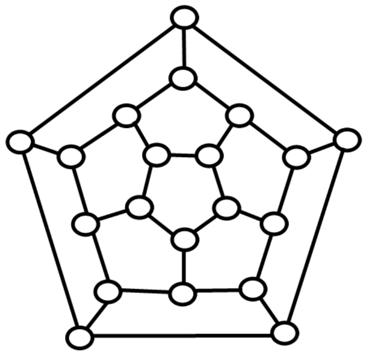
yhdeksän kaarta kuuluvat verkkoon. Tällöin voidaan poistaa loput 12 kaarta ja verkko on edelleen yhtenäinen.



Kuva 10: Verkosta on poistettu maksimimäärä yhteyksiä siten, että kaikkien kaupunkien välillä on edelleen yhteys.

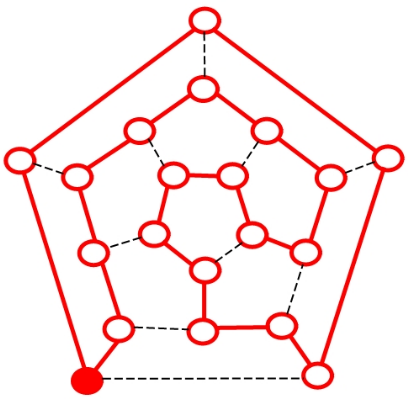
1.5 Hamiltonin ketjut

Etsi Kuvan 11 suuntaamattomasta verkosta suljettu ketju, joka sisältää verkon kaikki solmut täsmälleen kerran.

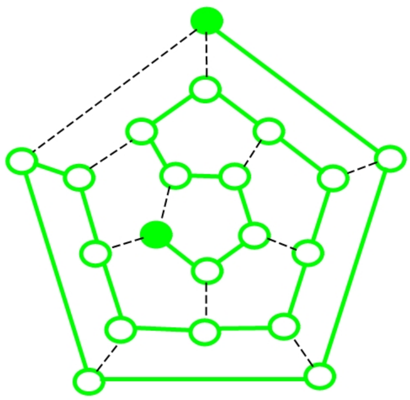


Kuva 11: Etsi verkosta suljettu ketju, joka sisältää verkon kaikki solmut.

Kuvan 11 verkosta on mahdollista löytää suljettu ketju, joka sisältää verkon kaikki solmut täsmälleen kerran. Kuvasta 12 löytyy eräs tällainen ratkaisu. Kuvasta 13 löytyy avoin ketju, joka sisältää kaikki verkon solmut. Näitä ketjuja nimitetään Hamiltonin ketjuiksi.



Kuva 12: Suljettu Hamiltonin ketju

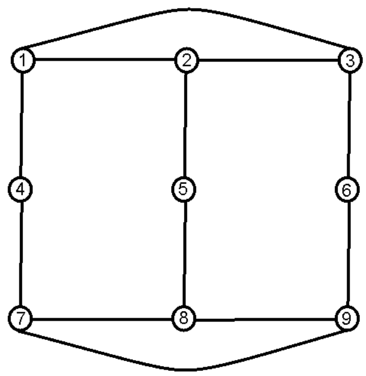


Kuva 13: Avoin Hamiltonin ketju

Määritelmä 1.5.1. Suuntaamattoman verkon avoin ketju on *avoin Hamiltonin ketju*, jos se sisältää kaikki verkon solmut täsmälleen kerran.

Määritelmä 1.5.2. Suuntaamattoman verkon suljettu ketju on *suljettu Hamiltonin ketju*, jos siinä esiintyy kaikki verkon solmut (aloitussolmua lukuunottamatta) täsmälleen kerran ja aloitussolmu täsmälleen kaksi kertaa. Suuntaamaton verkko on *Hamiltonin verkko*, jos se sisältää suljetun Hamiltonin ketjun.

Tutki ja perustele onko Kuvan 14 suuntaamaton verkko Hamiltonin verkko.



Kuva 14: Onko tämä suuntaamaton verkko Hamiltonin verkko?

Tehdään muutamia havaintoja siitä, miten suljettu Hamiltonin ketju rakentuu. Aluksi voidaan todeta, että verkko ei ole Hamiltonin verkko, jos siinä on yksikin solmu, jonka asteluku on 0 tai 1. Jos verkon jonkun solmun asteluku on 0, ei verkko ole yhtenäinen. Suljettua ketjua ei voida muodostaa, jos verkossa on solmu, jonka asteluku on 1.

Jos jonkun solmun asteluku on 2, niin tällöin molempien kaarien on oltava osana suljettua Hamiltonin ketjua.

Jos solmun asteluku on suurempi kuin 2, niin solmuun liittyvistä kaarista täsmälleen kaksi on osana suljettua Hamiltonin ketjua. Jos voidaan osoittaa, että solmuun s liittyneistä kaarista kaksi on osana suljettua Hamiltonin ketjua, voidaan solmuun s liittyneet muut kaaret poistaa.

Vain viimeistä solmua valitessa saa ketjuun muodostua suljettu ketju. Tehdään näistä havainnoista säännöt, jotka helpottavat suljetun Hamiltonin ketjun etsimistä.

Suljetun Hamiltonin ketjun säännöt:

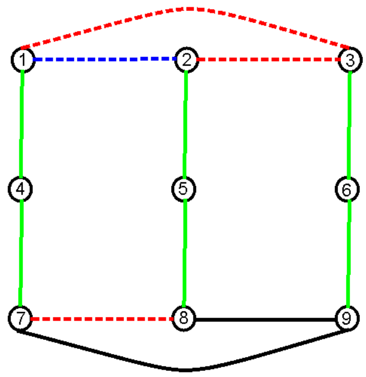
Sääntö 1) Jos solmun asteluku on 2, kuuluvat molemmat solmuun liittyneet kaaret suljettuun Hamiltonin ketjuun.

Sääntö 2) Ketjuun saa syntyä suljettu ketju vain silloin, kun ketjuun liitetään verkon viimeinen solmu.

Sääntö 3) Jos osoitetaan, että kaksi samaan solmuun s liittynyttä kaarta on osana suljettua Hamiltonin ketjua, niin tällöin solmuun s liittyneet muut kaaret voidaan poistaa.

Sääntö X) Verkossa ei ole suljettua Hamiltonin ketjua, jos jonkun solmun asteluku on 0 tai 1, tai jos voidaan osoittaa, että solmuun s liittyneistä kaarista korkeintaan yksi voi olla osana ketjua.

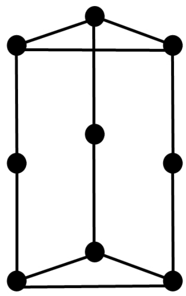
Tutkitaan jälleen Kuvan 14 verkkoa. Säännön 1 nojalla solmuihin 4, 5 ja 6 liittyneiden kaarien on oltava osa suljettua Hamiltonin ketjua (Kuva 15).



Kuva 15: Vihreiden kaarien on kuuluttava suljettuun Hamiltonin ketjuun. Jos valitaan sininen kaari, niin punaiset eivät voi kuulua suljettuun Hamiltonin ketjuun.

Käytetään solmujen 1 ja 2 välisestä kaaresta merkintää $(1, 2)$. Jos kaari $(1, 2)$ kuuluu suljettuun Hamiltonin ketjuun, niin tällöin Säännön 3 nojalla kaaret $(1, 3)$ ja $(2, 3)$ eivät voi olla osana ketjua. Säännön 2 nojalla kaari $(7, 8)$ ei voi olla osana ketjua. Nyt solmuun 3 liittyneistä kaarista vain yksi voi olla osana ketjua, joten Säännön X nojalla verkko ei sisällä suljettua Hamiltonin ketjua, eikä siitä syystä ole Hamiltonin verkko.

Kuvan 15 verkon kaaret vastaavat toisiaan lukuunottamatta solmuihin $4, 5$ ja 6 liittyneitä kaaria. Tämä voidaan havaita muuntamalla verkko kolmiopohjaiseksi lieriöksi (Kuva 16). Tästä syystä edelliset perustelut riittävät osoittamaan, että kaaret $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(7, 8)$, $(7, 9)$ ja $(8, 9)$ eivät voi olla osana suljettua Hamiltonin ketjua. Siis verkossa voi olla suljettua Hamiltonin ketjua, ja verkko ei voi olla Hamiltonin verkko.



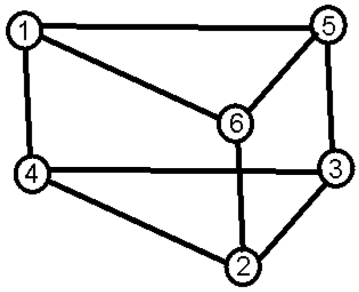
Kuva 16: Kuvan 15 verkko muunnettuna kolmiopohjaiseksi lieriöksi.

On olemassa kaksi lausetta, joista seuraa, että mitä enemmän yksinkertaisessa verkossa on kaaria, sitä todennäköisempää on, että verkko on Hamiltonin verkko.

Lause 1.5.3. *(Dirac, 1952) Olkoon suuntaamaton verkko yksinkertainen ja n-solmuinen, missä $n \geq 3$. Jos jokaisen solmun aste on vähintään $\frac{n}{2}$, tällöin verkko on Hamiltonin verkko.*

Lause 1.5.4. *(Ore, 1960) Olkoon suuntaamaton verkko yksinkertainen ja n-solmuinen, missä $n \geq 3$. Jos kahden ei-vierekkäisen solmun astelukujen summa on vähintään n, tällöin verkko on Hamiltonin verkko.*

Osoita, että Kuvan 17 suuntaamaton verkko on Hamiltonin verkko.



Kuva 17: Osoita, että verkko on Hamiltonin verkko

Tapa 1: Etsitään verkosta suljettu Hamiltonin ketju. Suljettu Hamiltonin ketju on esimerkiksi

$$k : 1 - 6 - 5 - 3 - 2 - 4 - 1.$$

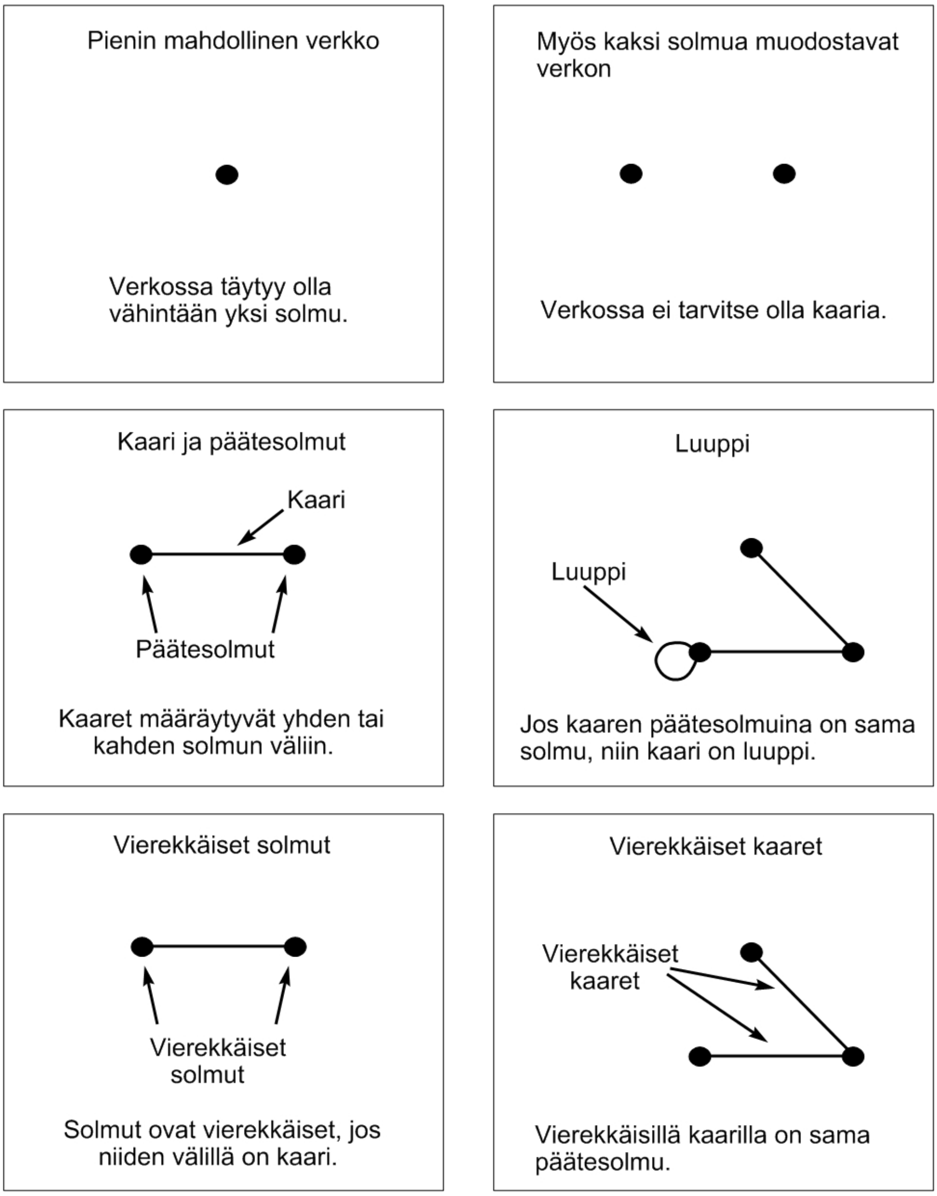
Tapa 2: Käytetään Lausetta 1.5.3. Verkossa on kuusi solmua, joten $n = 6$. Kaikkien solmujen asteluku on kolme (merkitään $a(s) = 3$). Lauseen 1.5.3 mukaan, jos verkon kaikille solmuille toteutuu epäyhtälö $\frac{n}{2} \geq a(s)$, on verkko Hamiltonin verkko. Koska $\frac{n}{2} = 3 \geq a(s)$ on verkko Hamiltonin verkko.

Tapa 3: Kuvan 17 verkko on Hamiltonin verkko Lauseen 1.5.4 nojalla. *(Harjoitustehtävä)*

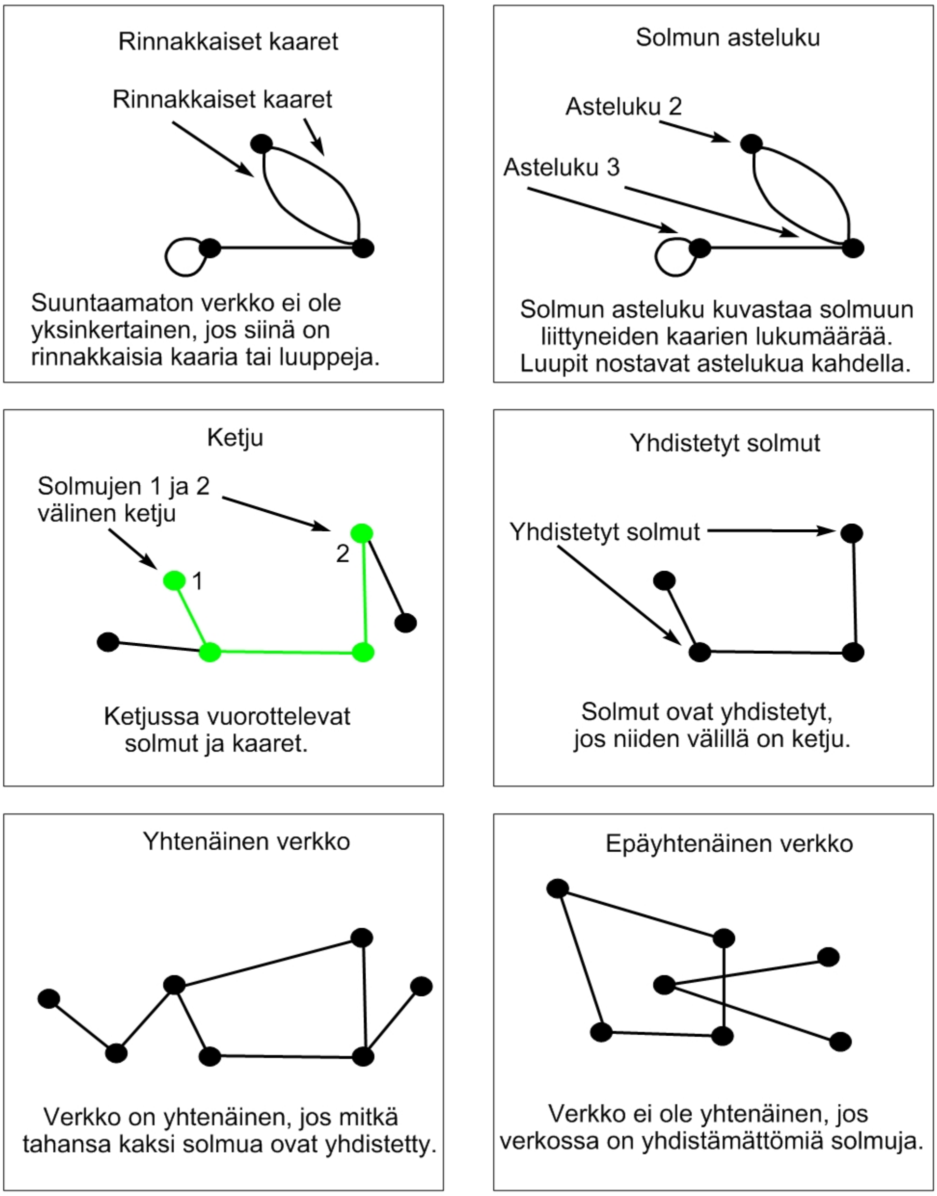
1.6 Käsitteiden kertausta

Verkot jaetaan usein suuntaamattomiin, suunnattuihin ja painotettuihin verkkoihin. Tässä kapppaleessa on käsitelty suuntaamattomia verkkoja ja muun muassa käsitteitä: päätesolmut, vierekkäiset solmut ja kaaret, rinnakkaiset kaaret, luuppi, asteluku, ketju, yhdistetyt solmut, yhtenäinen ja yksinkertainen verkko sekä Hamiltonin ja Eulerin ketjut.

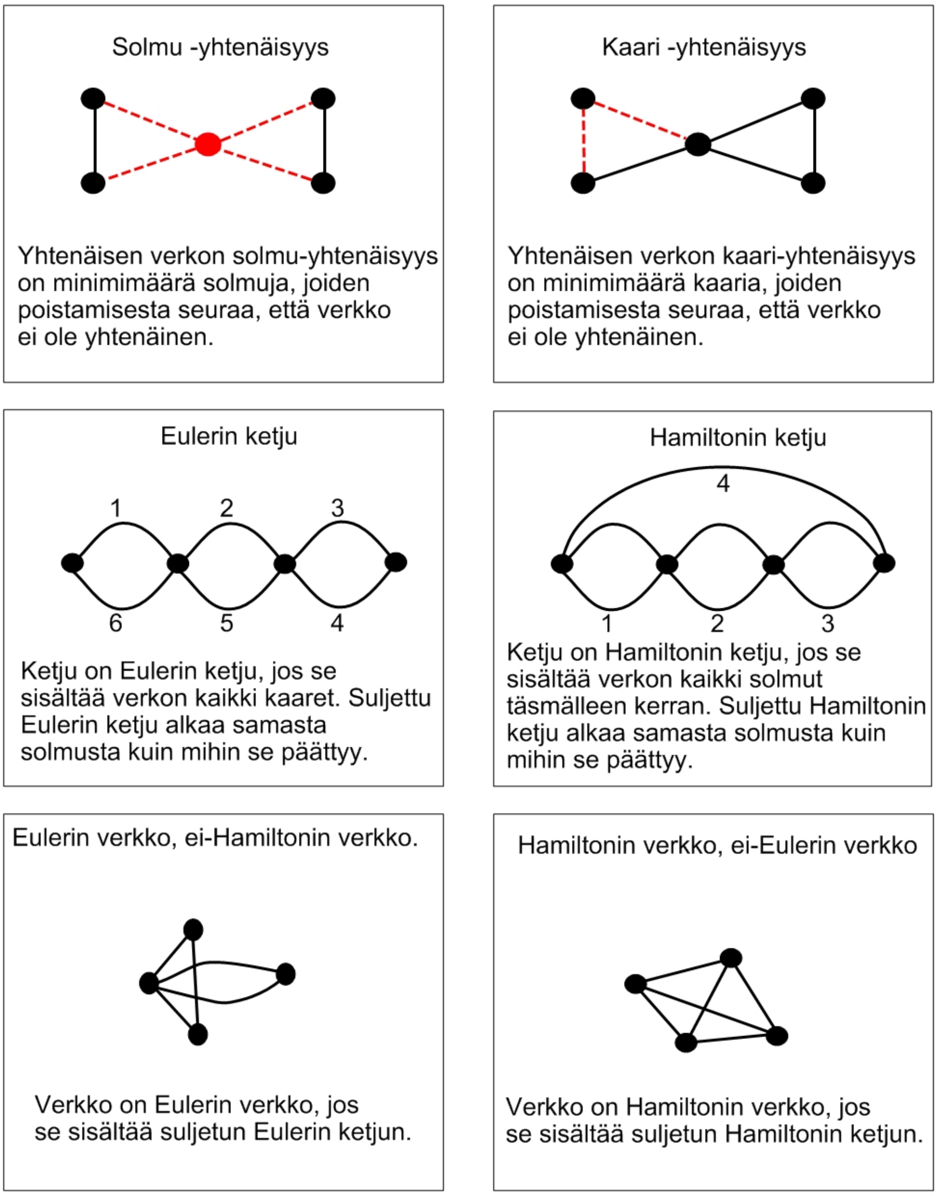
Kertaa aiempia käsitteitä sivuilta 11 - 13.



Kuva 18: Kappaleen 1 käsitteiden kertausta - Osa 1.



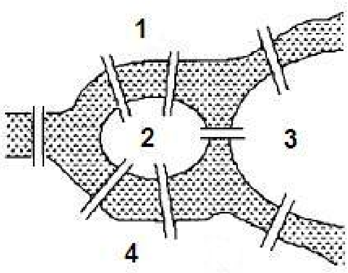
Kuva 19: Kappaleen 1 käsitteiden kertausta - Osa 2.



Kuva 20: Kappaleen 1 käsitteiden kertausta - Osa 3.

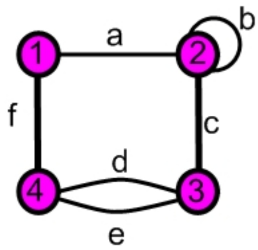
1.7 Tehtäviä

Tehtävä 1.7.1. Muunna karttakuva verkoksi ja etsi verkosta avoin Eulerin ketju (Kuva 21). Perustele, miksi verkko ei voi sisältää suljettua Eulerin ketjua.



Kuva 21: Muunna karttakuva verkoksi ja etsi verkosta avoin Eulerin ketju.

Tehtävä 1.7.2. Lisää lauseisiin $a - j$ puuttuvat käsitteet Kuvasta 22.



Kuva 22: Etsi kuvasta käsitteet.

a) Objektit $1, 2, 3$ ja 4 ovat verkon ______________.

b) Objektit a, b, c, d, e ja f ovat verkon ______________.

c) Solmut 1 ja 4 ovat kaaren f ______________.

d) Solmut 2 ja 3 ovat ______________ solmut.

e) Kaaret c ja d ovat ______________ kaaret.

f) Kaari b on ______________.

g) Kaaret d ja e ovat ______________ kaaret.

h) Solmun 2 asteluku on ______________

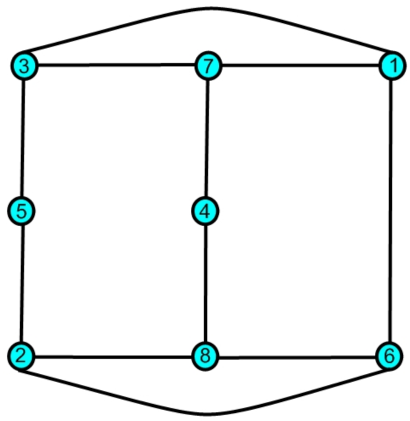
i) Kaarijono (a, b, c, d, e) on ______________.

j) Solmujen 1 ja 3 välillä on ketju, joten ne ovat ______________ solmut.

Tehtävä 1.7.3. Piirrä 4-solmuinen verkko, jonka solmuista kahden asteluku on 2 ja kahden 3.

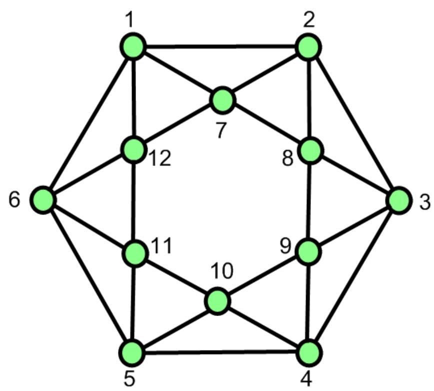
Tehtävä 1.7.4. Onko mahdollista piirtää 5-solmuinen verkko, joka solmujen asteluvut ovat $1, 2, 3, 4$ ja 5?

Tehtävä 1.7.5. Tutki ja perustele onko Kuvan 23 verkko Hamiltonin verkko?



Kuva 23: Onko kuvan verkko Hamiltonin verkko?

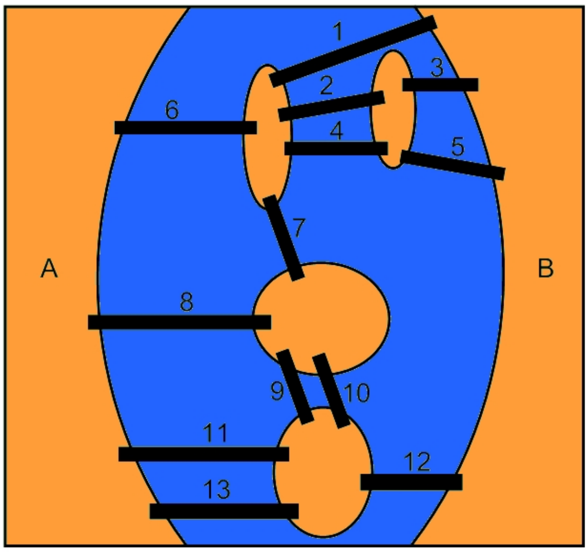
Tehtävä 1.7.6. Miten kuvailisit Kuvan 24 verkkoa?
Vihje: Tutki millaisia ketjuja verkosta on mahdollista löytää.



Kuva 24: Miten kuvailisit kuvan verkkoa?

Tehtävä 1.7.7. Piirrä yhtenäinen verkko, jossa on viisi solmua ja neljä kaarta. Onko mahdollista piirtää yhtenäinen verkko, jos kaaria olisi vähemmän? Entä onko mahdollista piirtää yhtenäinen ja yksinkertainen verkko, jossa on viisi solmua ja viisi kaarta?

Tehtävä 1.7.8. Kansainvälinen tilanne on kärjistynyt. Vihollisjoukot ovat ryhmittyneet joen rannalle B ja valmistautuvat hyökkäämään siltoja pitkin rannalle A. Tehtävänäsi on tuhota siltayhteydet käyttämällä mahdollisimman vähän pommeja (yksi pommi siltaa kohti). Mitkä sillat on tuhottava, jotta vihollinen ei onnistu aikeissaan?

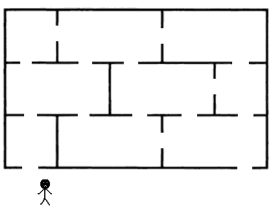


Kuva 25: Mikä on minimimäärä pommeja, joilla siltayhteydet rantojen A ja B väliltä saadaan katkaistua?

Tehtävä 1.7.9. Piirrä Tehtävän 1.7.8 kartasta verkko ja kuvaile verkon haavoittuvuutta solmu- ja kaariyhtenäisyydellä.

Tehtävä 1.7.10. Perustele, että seuraava väite pitää paikkaansa: Solmujen astelukujen summa on aina kaksinkertainen kaarien lukumäärään verrattuna.

Tehtävä 1.7.11. Pepe on koulun vahtimestarina. Hänen tehtävänsä on lukita kaikki koulun ovet. Onko Kuvan 26 rakennuksessa mahdollista kulkea jokaisen oviaukon läpi täsmälleen kerran?



Kuva 26: Keksitkö Pepelle reitin, jossa jokaisesta oviaukosta kuljetaan täsmälleen kerran.