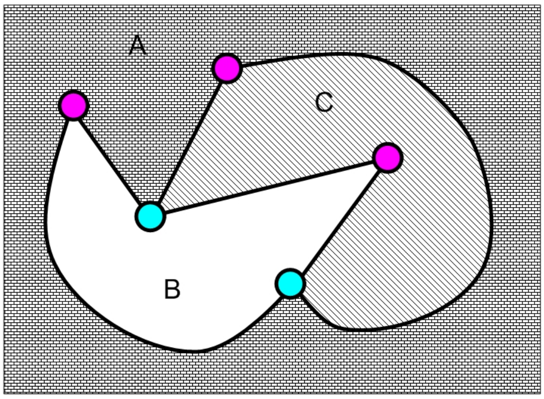
5 Verkkojen värittäminen

5.1 Tasoverkot

Olipa kerran kolme taloa, joiden läheisyydessä oli kaksi kaivoa. Jokaisesta talosta oli tie molemmille kaivoille. Talojen ihmiset halusivat porata vielä yhden kaivon ja rakentaa tiet siten, että jokaisesta talosta on tie kaikille kaivoille. Keksitkö miten kaivo ja tiet tulisi sijoittaa, ettei teihin tulisi risteyksiä?

Kolme taloa (violetit solmut) ja kaksi kaivoa (turkoosit solmut) voivat olla sijoitettuna esimerkiksi Kuvan 104 mukaisesti. Kolmas kaivo voidaan sijoittaa johonkin kolmesta alueesta eli *tahkosta* A, B tai C.



Kuva 104: Kolmas kaivo voidaan sijoittaa johonkin kolmesta alueesta eli tahkosta.

Määritelmä 5.1.1. Suuntaamaton verkko on *tasoverkko*, jos se voidaan piirtää tasoon siten, että kaaret eivät leikkaa toisiaan. Muussa tapauksessa suuntaamaton verkko on *avaruusverkko*.

Määritelmä 5.1.2. Yhtenäisessä tasoverkossa *tahko* T on sellaisen suljetun ketjun rajaama alue, jonka sisäpuolella ei ole yhtäkään suljettua ketjua. Tasoverkon ulkopuolinen alue on myös tahko.

Kuvassa 104 verkon ulkopuolinen alue A muodostaa yhden tahkon ja suljettujen ketjujen rajaamat alueet B ja C muodostavat kaksi tahkoa.

Määritelmä 5.1.3. Yksinkertainen kaksijakoinen verkko on *täydellinen kaksijakoinen verkko*, jos joukon A jokainen solmu on yhdistetty jokaiseen solmuun joukossa B. Täydellistä kaksijakoista verkkoa merkitään $K_{m,n}$, missä m on joukon A solmujen lukumäärä ja n on joukon B solmujen lukumäärä.

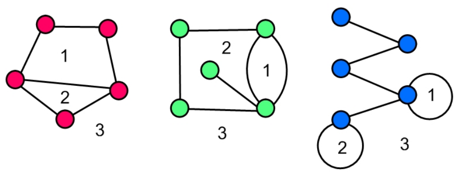
Piirrä kolme mielivaltaista yhtenäistä tasoverkkoa, kun solmujen, kaarien tai tahkojen lukumääristä kaksi tunnetaan. Laske piirtämästäsi kuvasta puuttuva lukumäärä, kun

a) $|S| = 5$, $|K| = 6$, $T = ?$ b) $|S| = 4$, $|K| = 7$, $T = ?$

c) $|S| = 3$, $|K| = ?$, $T = 5$ d) $|S| = 6$, $|K| = 9$, $T = ?$

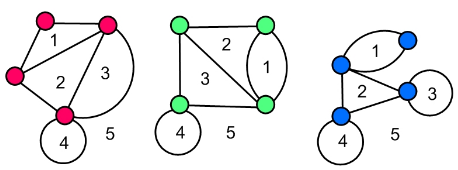
Löydätkö tasoverkon solmujen, kaarien ja tahkojen lukumäärille yhteyden?

Jos yhtenäisessä tasoverkossa on viisi solmua ja kuusi kaarta, niin näyttäisi siltä, että verkossa on aina kolme tahkoa (Kuva 105).



Kuva 105: Näissä yhtenäisissä tasoverkoissa on kolme tahkoa.

Jos yhtenäisessä tasoverkossa on neljä solmua ja seitsemän kaarta, niin näyttäisi siltä, että verkossa on aina viisi tahkoa. (Kuva 106)



Kuva 106: Näissä yhtenäisissä tasoverkoissa on viisi tahkoa.

Voidaan itseasiassa osoittaa, että yhtenäisen tasoverkon solmuille, kaarille ja tahkoille on voimassa seuraava yhtälö:

Lause 5.1.4. *(Eulerin kaava tasoverkoille) Olkoon verkko V yhtenäinen tasoverkko. Tällöin*

$$|S| - |K| + |T| = 2.$$

Nyt tehtävä voidaan ratkaista Lauseen 5.1.4 yhtälön avulla, koska tehtävässä täytyi ratkaista yhtenäisen tasoverkon solmujen, kaarien tai tahkojen lukumäärä, kun kaksi niistä tunnetaan.

Palataan vielä kolmen talon ja kolmen kaivon ongelmaan (s. 73). Osoitetaan, että kolmesta talosta ei voi olla tietä kaikille kolmelle kaivolle ilman, että tiet risteävät. Verkko on täydellinen kaksijakoinen verkko, koska siinä on kaksi joukkoa (talot ja kaivot), ja jokainen talo ja kaivo on yhdistetty. Tällöin talojen ja kaivojen verkkoa voidaan merkitä $K_{3,3}$. Osoitetaan, että täydellinen kaksijakoinen verkko $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko.

Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että $K_{3,3}$ on tasoverkko. Verkossa on solmujen lukumäärä $|S| = 6$ ja kaarien lukumäärä $|K| = 9$, joten Lauseen 5.1.4 mukaan tahkoja täytyy olla

$$|T| = |K| - |S| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Yhden kaaren mittainen suljettu ketju ei voi rajata tahkoa, koska yksinkertaisessa verkossa ei ole luuppeja. Kahden kaaren mittainen suljettu ketju ei voi rajata tahkoa, koska yksinkertaisessa verkossa ei ole rinnakkaisia kaaria. Kolmen kaaren mittainen suljettu ketju ei voi rajata tahkoa, koska verkko on kaksijakoinen (Lause 4.4.2). Jokaista tahkoa ympäröi siis vähintään 4 kaarta.

Aiemmin osoitettiin, että verkossa täytyy olla viisi tahkoa. Jos jokaista tahkoa ympäröi vähintään 4 kaarta, on verkossa $4 \cdot 5 = 20$ kaarta. Yhden kaaren molemmin puolin voi olla korkeintaan kaksi tahkoa, joten verkossa täytyy olla vähintään $\frac{20}{2} = 10$ kaarta. Tämä on ristiriita, koska verkossa on kaaria vain 9. Tästä seuraa, että $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko, vaan avaruusverkko.

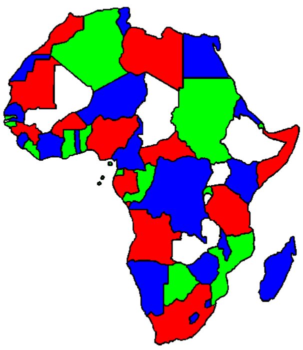
Lause 5.1.5. *Täydellinen verkko K_n ei ole tasoverkko, jos $n \geq 5$. Täydellinen kaksijakoinen verkko $K_{m,n}$ ei ole tasoverkko, jos $m \geq 3$ ja $n \geq 3$.*

5.2 Kartan väritysongelma

Väritä Kuvan 107 kartta siten, että vierekkäiset maat eivät saa olla samanväriset. Käytä mahdollisimman vähän värejä. Maat ovat vierekkäiset, jos mailla on yhteistä rajaa enemmän kuin yhden pisteen verran.

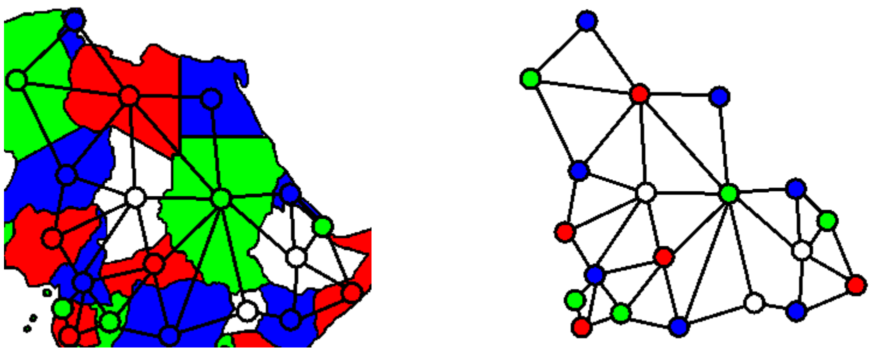
Kuva 107: Väritä kartta siten, että vierekkäiset valtiot eivät saa olla samanväriset. Käytä mahdollisimman vähän värejä.

Kyseistä karttaa ei voida värittää käyttämällä kolmea väriä, mutta sen sijaan neljällä värillä kartta voidaan värittää niin, että vierekkäiset maat eivät ole samanväriset (Kuva 108).



Kuva 108: Kuvan kartta voidaan värittää käyttämällä neljää väriä siten, että vierekkäiset maat eivät ole samanväriset.

Kartan väritysongelma voidaan muuntaa verkon solmujen väritysongelmaksi siten, että solmuja vastaavat maat ja maita yhdistävät kaaret, jos maat ovat keskenään vierekkäiset (Kuva 109)



Kuva 109: Kartan väritysongelma muuntuu solmujen väritysongelmaksi, kun maita vastaavat solmut ja kaaret kuvaavat naapuruutta.

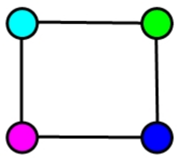
5.3 Solmujen värittäminen

Määritelmä 5.3.1. Verkon solmut ovat *k-väriset*, jos solmut on väritetty k:lla eri värillä. Verkon kaikkia samanvärisiä solmuja kutsutaan *väriluokaksi*.

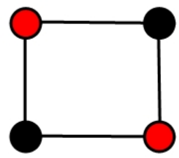
Kuvan 109 verkot ovat 4-värisiä, koska ne on väritetty neljällä värillä. Tällöin väriluokkia on neljä ja ne ovat $C = \{\text{Sininen, Vihreä, Punainen, Valkoinen}\}$.

Määritelmä 5.3.2. Verkon solmut on väritetty *asianmukaisesti*, jos jokaisen kaaren päätesolmut ovat eriväriset. Verkon *kromaattinen luku* on pienin määrä värejä, joita tarvitaan verkon asianmukaiseen värittämiseen. Jos verkon V kromaattinen luku on k, sanotaan verkon olevan *k-kromaattinen*, jota merkitään $\chi(V) = k$.

Kuvan 110 verkko on väritetty asianmukaisesti, koska jokaisen kaaren päätesolmut ovat eri väriset. Verkko on 4-värinen, koska verkon värittämiseen on käytetty neljää eri väriä.



Kuva 110: Tämä verkko on väritetty asianmukaisesti neljällä värillä.



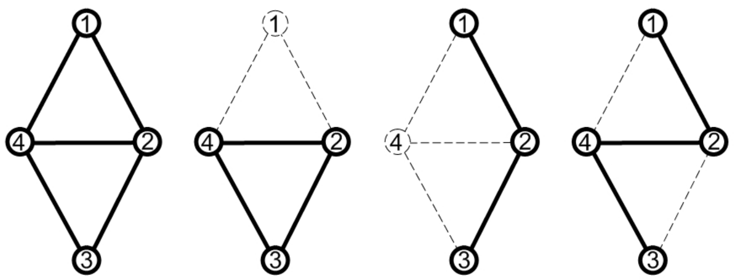
Kuva 111: Tämä verkko on väritetty asianmukaisesti käyttäen pienintä määrää värejä.

Kuvan 111 verkko on väritetty asianmukaisesti käyttämällä pienintä määrää värejä, jota asianmukainen värittäminen vaatii. Tällöin verkosta voidaan sanoa, että se on 2-kromaattinen.

Huomautus 5.3.3. Jos verkko on a-värinen, verkko on väritetty asianmukaisesti b-väriseksi tai verkossa on c-väriluokkaa, kuvastavat ne vain sitä, miten verkko on sillä hetkellä väritetty. Sen sijaan verkon k-kromaattisuus, on verkon ominaisuus, johon ei vaikuta miten verkko on väritetty.

Määritelmä 5.3.4. Verkko V on yhtenäisen verkon G *aliverkko*, jos verkko V koostuu osasta verkon G solmuja ja osasta näitä yhdistäviä verkon G kaaria.

Kuvassa 112 vasemmalla on verkko G, jonka aliverkkoja ovat kaikki muut kuvan verkot, koska ne koostuvat osasta verkon G solmuja ja niiden välisiä kaaria.

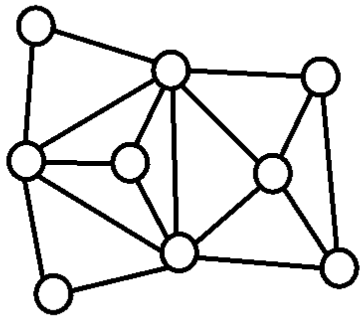


Kuva 112: Vasemmalla on verkko G, jonka eräitä aliverkkoja ovat muut verkot. Verkon G virittävä aliverkko on kuvassa oikealla.

Määritelmä 5.3.5. Aliverkko V on verkon G *virittävä aliverkko*, jos se sisältää kaikki verkon G solmut ja verkon ne kaaret, jotka tekevät verkosta yhtenäisen.

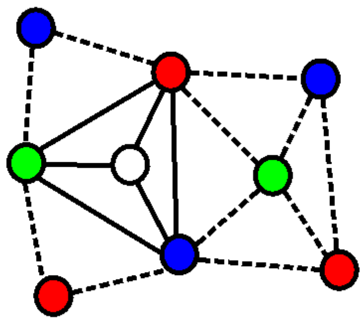
Kuvassa 112 vasemmalla on verkko G. Kuvan oikeanpuoleinen verkko on verkon G virittävä aliverkko, koska se sisältää kaikki verkon G solmut ja ne kaaret, jotka tekevät verkosta yhtenäisen.

Mikä on Kuvan 113 verkon kromaattinen luku? Perustele verkon k-kromaattisuus käyttämällä k-solmuista aliverkkoa, jonka kromaattinen luku on k.



Kuva 113: Mikä on kuvan verkon kromaattinen luku?

Verkon solmut voidaan värittää käyttämällä maksimissaan yhdeksää eri väriä, koska verkossa on yhdeksän solmua. Kokeilemalla saadaan selville, että verkko voidaan värittää asianmukaisesti neljällä värillä. Verkkoa ei voida värittää asianmukaisesti kolmella värillä, koska verkko sisältää 4-solmuisen aliverkon, jota ei voida värittää asianmukaisesti kolmella värillä. Siis verkko on 4-kromaattinen.



Kuva 114: Verkko on 4-kromaattinen, koska verkossa on neljäsolmuinen aliverkko, jota ei voida värittää asianmukaisesti kolmella värillä.

Määritelmä 5.3.6. Olkoon verkon V solmuista suurimman asteluku x ja pienimmän asteluku y. Tällöin verkosta käytetään merkintää $a_{max}(V) = x$ ja $a_{min}(V) = y$.

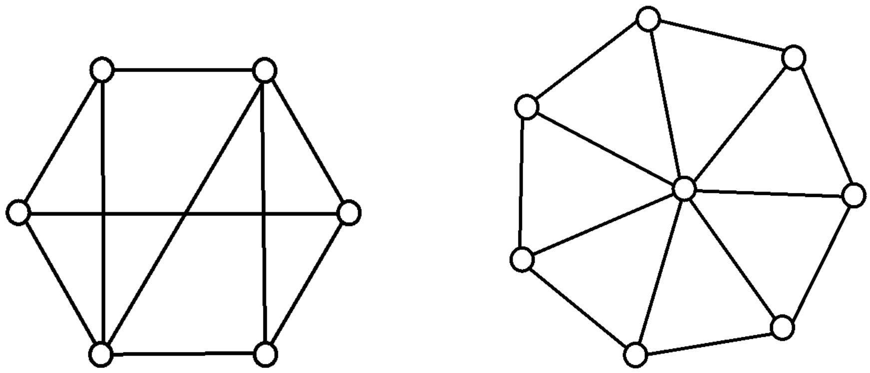
Kuvan 113 verkon solmuista suurimman asteluku on 6 ja pienimmän 2, joten verkosta voidaan käyttää merkintöjä $a_{max}(V) = 6$ ja $a_{min}(V) = 2$.

Lause 5.3.7. *Yksinkertaisessa verkossa V verkon kromaattinen luku $\chi(V) \leq a_{max}(V) + 1$.*

Jaetaan verkon kromaattisen luvun etsiminen kahteen osioon:

- *Alaraja:* Osoitetaan, että $\chi(V) \geq k$ eli verkon solmujen asianmukaiseen värittämiseen tarvitaan vähintään tietty määrä värejä. Tämä osoitetaan yleensä etsimällä k-solmuinen aliverkko, jonka asianmukaiseen värittämiseen vaaditaan k väriä.
- *Yläraja:* Osoitetaan, että $\chi(V) \leq k$ eli tietty määrä värejä riittää solmujen asianmukaiseen värittämiseen. Tämä osoitetaan yleensä värittämällä verkko asianmukaisesti k-väriseksi.

Perustele verkkojen kromaattiset luvut ylä- ja alarajan avulla (Kuva 115).



Kuva 115: Perustele verkkojen kromaattisuudet ylä- ja alarajan avulla.

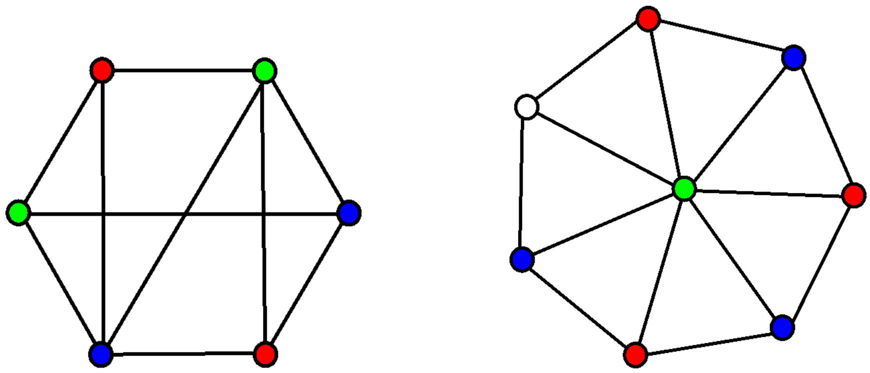
Värittämällä verkot asianmukaisesti saadaan verkkojen kromaattisen luvun ylärajat. Vasemmanpuoleisessa verkossa yläraja on $\chi(V) \leq 3$, koska kyseinen verkko voidaan värittää asianmukaisesti kolmella värillä. Oikeanpuoleisen verkon yläraja on $\chi(V) \leq 4$ (Kuva 116).

Vasemmanpuoleisen verkon alaraja on $\chi(V) \geq 3$, koska verkossa on kolmen kaaren pituinen suljettu ketju. Toisin sanoen verkossa on kolme solmua, jotka ovat kaikki keskenään vierekkäisiä. Koska ala- ja yläraja on 3, niin verkon kromaatinen luku on 3.

Määritelmä 5.3.8. Olkoon yksinkertainen verkko n-solmuinen suljettu ketju. Jos verkkoon lisätään yksi solmu, joka on yhdistetty kaikkiin verkon solmuihin, niin tällöin verkko on *pyörä* P_n, missä $n \geq 3$.

Kuvan 115 oikeanpuoleinen verkko on pyörä, jonka keskellä oleva solmu on yhteydessä kaikkiin muihin verkon solmuihin. Keskellä olevan solmun täytyy olla erivärinen kuin muut solmut. Jos suljetussa ketjussa on parillinen määrä solmuja, suljettu ketju voidaan värittää vuorottelemalla kahta väriä. Jos suljetussa ketjussa on pariton määrä solmuja, suljetun ketjun värittämiseen tarvitaan kolmea eri väriä.

Tästä seuraa, että Kuvan 115 pyörän P_7 alaraja on $\chi(V) \geq 4$. Pyörän P_7 yläraja on $\chi(V) \leq 4$, koska kyseinen pyörä voidaan värittää asianmukaisesti



Kuva 116: Vasemmanpuoleinen verkko voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä vähintään kolmea väriä, joten verkon yläraja on $\chi(V) \leq 3$. Oikeanpuoleisen verkon yläraja on $\chi(V) \leq 4$.

neljällä värillä. Koska verkon kromaattisuuden ylä- ja alaraja ovat samat, niin verkon kromaattisuus on 4.

Lause 5.3.9. *Verkon V kromaattinen luku $\chi(V) = 1$, jos ja vain jos verkossa ei ole kaaria.*

Todistus. Jokaisen kaaren päätesolmujen täytyy olla eriväriset. □

Lause 5.3.10. *Jos verkko V on kaksijakoinen, puu tai avoin ketju, niin tällöin $\chi(V) = 2$.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 5.3.11. *Olkoon verkko V suljettu ketju. Jos ketjussa on parillinen määrä solmuja, niin tällöin verkon kromaattinen luku on $\chi(V) = 2$. Jos ketjussa on pariton määrä solmuja, niin $\chi(V) = 3$.*

Lause 5.3.12. *Olkoon verkko muotoa P_n oleva pyörä. Kun n on parillinen, on kromaattinen luku $\chi(V) = 3$. Kun n on pariton, on kromaattinen luku $\chi(V) = 4$.*

Verkko V	$\chi(V)$
Kaksijakoinen verkko	2
Avoin ketju	2
Puu	2
Suljettu ($2n$-solmuinen) ketju	2
Suljettu ($2n + 1$-solmuinen) ketju	3
Pyörä P_{2n}	3
Pyörä P_{2n+1}	4
Täydellinen verkko K_n	n

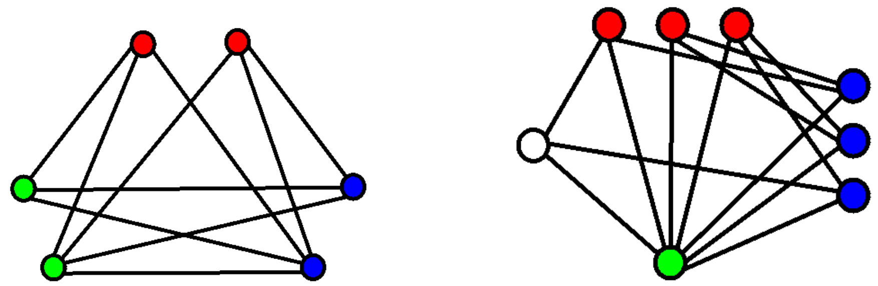
Taulukko 9: Verkkojen kromaattisia lukuja.

Taulukossa 9 on esitetty erilaisten verkkojen kromaattisia lukuja. Sekä kappaleessa 4 että tässä kappaleessa on tutustuttu kaksijakoisiin verkkoihin. Yleistetään seuraavaksi tämä käsite "useampijakoisille"eli k-jakoisille verkoille.

Määritelmä 5.3.13. Suuntaamaton yksinkertainen verkko on *k-jakoinen* verkko, jos verkon solmut voidaan jakaa k osajoukoksi siten, että yhdenkään kaaren päätesolmut eivät kuulu samaan osajoukkoon.

Lause 5.3.14. *Jos verkko on k-kromaattinen, niin tällöin verkko on k-jakoinen.*

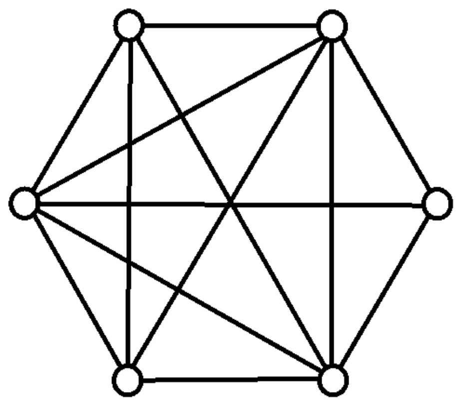
Jos verkko voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä k väriä, tällöin verkko on k-jakoinen. Kuvan 116 verkot voidaan muuntaa väriluokkien mukaisesti $3-$ ja $4-$jakoisiksi verkoiksi (Kuva 117).



Kuva 117: Jos verkko on k-kromaattinen, tällöin verkko on k-jakoinen. Kuvan 116 verkot muunnettuna $3-$ ja $4-$jakoiseksi.

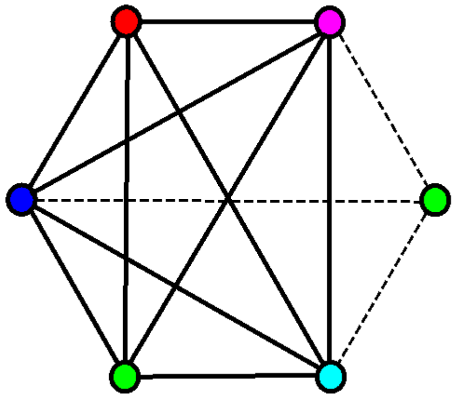
Lause 5.3.15. *(Brooks Theorem, 1941) Olkoon verkko V yksinkertainen eitäydellinen suuntaamaton verkko, jonka solmujen korkein asteluku on $a_{max}(s) \geq 3$. Tällöin $\chi(V) \leq a_{max}(s)$.*

Tutki ja perustele Kuvan 118 verkon kromaattinen luku. Perustele verkon kromaattisuuden yläraja käyttäen Lausettta 5.3.15.



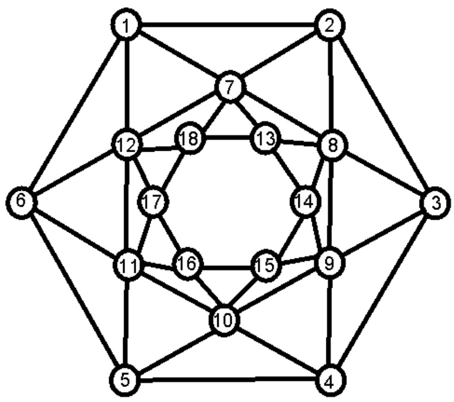
Kuva 118: Tutki ja perustele verkon kromaattisuus.

Kuva 118 verkko on 6-solmuinen, yksinkertainen ja ei-täydellinen, joten Lausetta 5.3.15 voidaan soveltaa kyseiseen verkkoon. Verkon solmujen korkein asteluku on 5, joten Lauseen 5.3.15 mukaan verkon kromaattisuus on korkeintaan 5. Koska verkko sisältää 5-solmuisen täydellisen aliverkon K_5, on verkon kromaattisuus vähintään 5. Tästä seuraa, että verkko on 5-kromaattinen.



Kuva 119: Verkko sisältää täydellisen aliverkon K_5.

Tutustu Suurin aste ensin -algoritmiin ja väritä Kuvan 120 verkko algoritmin mukaisesti. Tutki tuottaako algoritmi kromaattista lukua vastaavan verkon?



Kuva 120: Väritä verkko käyttämällä Suurin aste ensin -algoritmia.

Solmujen värittäminen: Suurin aste ensin

1. Merkitse värejä numeroin $\{1 = \text{punainen}, 2 = \text{sininen}, 3 = \text{vihreä}$ $4 = \text{valkoinen}, ...\}$.
2. Väritä asteluvultaan suurin solmu värillä 1.
3. Väritä värittämättömistä solmuista asteluvultaan suurin värillä 1, jos värittäminen onnistuu asianmukaisesti. Jos värittäminen ei onnistu asianmukaisesti käytä väriä 2.
4. Väritä solmut suurimmasta asteluvusta pienimpään käyttämällä numerokoodiltaan mahdollisimman pientä väriä.
5. Lopeta, kun viimeinen solmu on väritetty.

Verkon solmujen asteluvut ovat

$$\begin{aligned} a(s) &= 6, \text{ missä } s = 7, 8, 9, 10, 11, 12 \\ a(s) &= 4, \text{ missä } s \neq 7, 8, 9, 10, 11, 12. \end{aligned}$$

Järjestetään solmut taulukkoon suurimmasta asteluvusta pienimpään. Väritetään solmut asianmukaisesti suurimmista asteista pienempiin käyttämällä numerokoodiltaan mahdollisimman pientä väriä ja kirjataan taulukkoon käytetty väri (Taulukko 10).

Solmu	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	13	14	15	16	17	18
Väri	1	2	1	2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

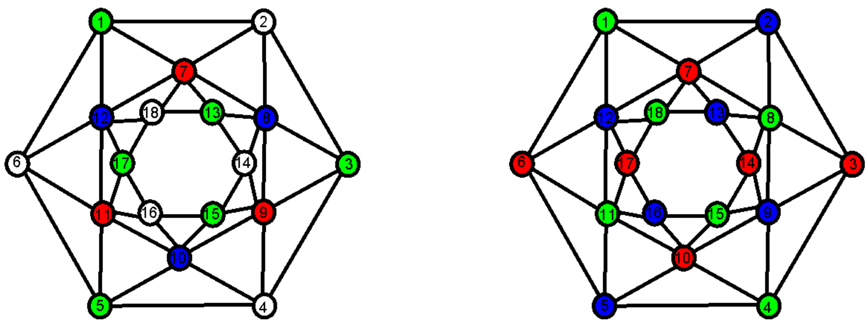
Taulukko 10: Suurin aste ensin -algoritmin tuottamat solmua vastaavat värit.

Algoritmi tuottaa 4-värisen verkon (Kuvassa 121 vasemmalla). Algoritmi ei kuitenkaan tuota kromaattista lukua vastaavaa verkkoa, koska kyseinen verkko voidaan värittää asianmukaisesti käyttäen kolmea väriä (Kuvassa 121 oikealla).

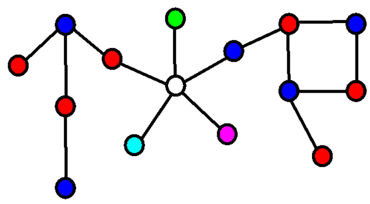
Kuvan 122 verkko on väritetty asianmukaisesti käyttämällä kuutta väriä. Miten muuttaisit solmujen värejä, jotta saisit valkoisen solmun väritettyä punaisella tai sinisellä värillä? Saat vaihdella vain ja ainoastaan sinisten ja punaisten värien paikkoja.

Jos Kuvan 122 verkon valkoinen solmu halutaan värittää punaiseksi, niin valkoisen solmun viereinen punainen solmu tulee vaihtaa siniseksi. Vaihdetun sinisen solmun viereinen solmu tulee vaihtaa punaiseksi ja niin edelleen.

Määritelmä 5.3.16. Olkoon verkko väritetty asianmukaisesti. Verkon *kaksivärinen aliverkko* on aliverkko, joka sisältää kaikki verkon i ja j väriset solmut ja niitä yhdistävät kaaret.



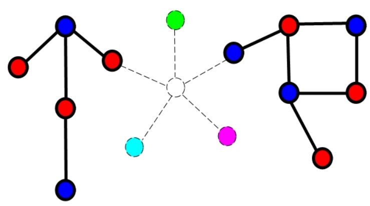
Kuva 121: Suurin aste ensin -algoritmi tuottaa 4-värisen verkon (vasemmalla), vaikka verkon kromaattinen luku $\chi(V) = 3$ (oikealla).



Kuva 122: Miten muuttaisit solmujen värejä, jotta saisit valkoisen solmun väritettyä punaisella tai sinisellä?

Määritelmä 5.3.17. Verkon *komponentti* on verkon yksi yhtenäinen osa. Komponentti sisältää kaikki ne solmut ja niihin liittyneet kaaret, jotka ovat yhdistetty.

Olkoon kaksivärisen aliverkon värit sininen ja punainen. Tällöin Kuvan 122 verkon kaksiväriseen aliverkkoon kuuluvat kaikki verkon siniset ja punaiset solmut ja niitä yhdistävät kaaret. Kyseinen kaksivärinen verkko koostuu kahdesta komponentista (Kuva 123).



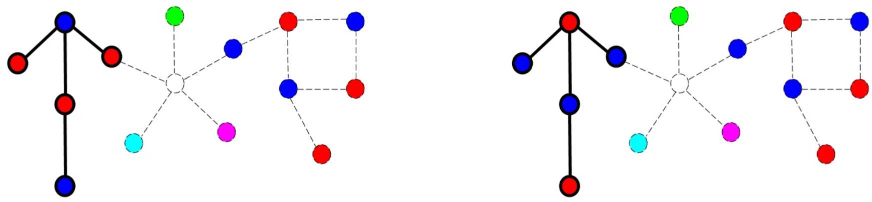
Kuva 123: Kuvan 122 verkon sinipunainen aliverkko muodostuu kahdesta komponentista.

Määritelmä 5.3.18. Kaksivärisen aliverkon komponentti on *Kempen i–j ketju*, missä i ja j ovat kaksivärisen aliverkon värit.

Koska Kuvan 123 kaksivärinen aliverkko sisältää kaksi komponenttia, on verkossa kaksi Kempen ketjua (kuvassa oikealla ja vasemmalla). Käsitellään aluksi vasemmanpuoleista Kempen ketjua.

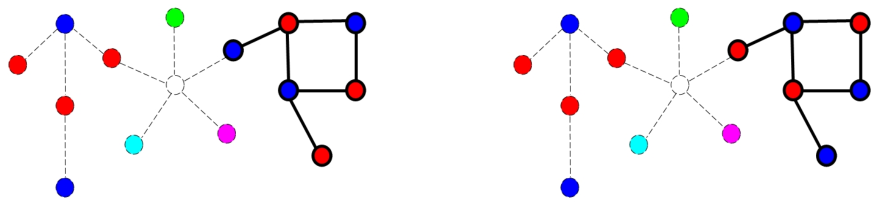
Kempen ketjussa sininen ja punainen väri vuorottelevat, koska verkko on väritetty asianmukaisesti. Muutetaan Kempen punainen-sininen ketjussa punaiset solmut sinisiksi ja siniset solmut punaisiksi. Näin muodostuu uusi Kempun ketju, jossa värit ovat päinvastoin (Kuvassa 124 oikealla).

Myös uusi Kempen ketju on väritetty asianmukaisesti. Nyt valkoisen solmun viereisenä solmuna ei ole enää punaista solmua, joten valkoinen solmu voidaan värittää punaiseksi.



Kuva 124: Jos Kempen ketjun värit vaihdetaan päinvastaisiksi, valkoinen solmu voidaan värittää punaiseksi.

Tarkastellaan seuraavaksi Kuvan 123 oikeanpuoleista Kempen ketjua. Myös tässä Kempen ketjussa vaihtamalla sinisten ja punaisten solmujen värejä on uusi verkko väritetty asianmukaisesti. Kempen ketju saa sisältää myös suljettuja ketjuja (Kuva 125). Nyt valkoinen solmu voidaan värittää siniseksi.



Kuva 125: Jos Kempen ketjun värit vaihdetaan päinvastaisiksi, valkoinen solmu voidaan värittää siniseksi.

Jokainen asianmukaisesti vähintään kahdella värillä väritetty verkko sisältää kaksivärisen aliverkon. Kempen ketjun värien vaihdos toimii kaikissa asianmukaisesti väritetyissä verkoissa. Kempen ketjun värien vaihdoksella voidaan muokata verkon värien paikkoja (kuten edellisessä tehtävässä), jotta väriluokkien määrää voidaan vähentää.

Edellisessä tehtävässä osoitettiin kahdella eri tavalla, että käytettyjen värien lukumäärää voidaan vähentää kuudesta väristä viiteen. Lisäksi Kuvan 122 verkon vihreä, turkoosi ja violetti solmu voidaan vaihtaa siniseksi tai punaiseksi, joten verkko voidaan värittää asianmukaisesti käyttäen vähintään kolmea väriä. Verkko on siis 3-kromaattinen.

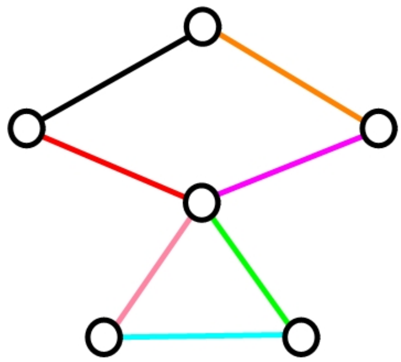
5.4 Kaarien värittäminen

Määritelmä 5.4.1. Verkon kaaret ovat *k-väriset*, jos kaaret on väritetty k:lla eri värillä. Verkon kaikkia samanvärisiä kaaria kutsutaan *kaariväriluokaksi.*

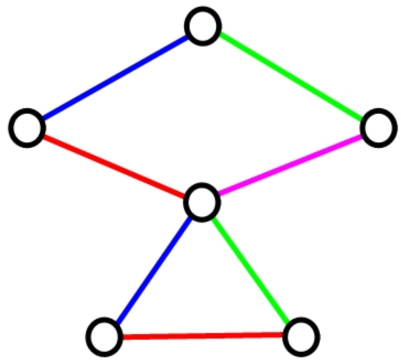
Kuvan 126 verkon kaaret ovat väritetty seitsemällä eri värillä, joten verkon kaaret ovat 7-väriset.

Määritelmä 5.4.2. Verkon kaaret on väritetty *asiamukaisesti*, jos verkon jokainen vierekkäinen kaari on erivärinen. Verkon *kaarikromaattinen luku* on pienin määrä värejä, joita verkon kaarien asianmukaiseen värittämiseen tarvitaan. Tällöin verkko V on *k-kaarikromaattinen* ja tätä merkitään $\chi'(V) = k$.

Kuvan 126 verkon kaaret on väritetty asianmukaisesti, koska jokainen vierekkäinen kaari on erivärinen. Kuvassa 127 verkon kaaret on väritetty asianmukaisesti käyttämällä minimäärää värejä, joten verkko on 4-kaarikromaattinen.

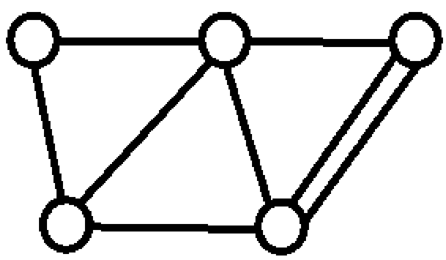


Kuva 126: Verkon kaaret ovat 7-väriset, koska verkon kaarien värittämiseen on käytetty seitsemää eri väriä.



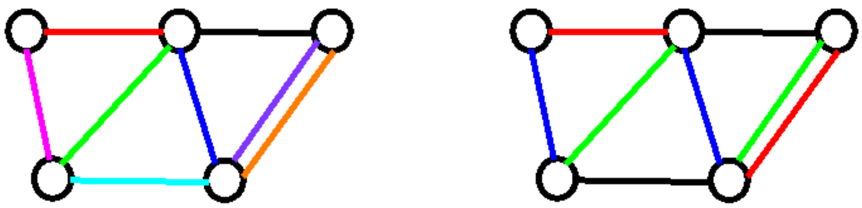
Kuva 127: Verkko on 4-kromaattinen, koska neljä on minimäärä värejä, joilla verkon kaaret voidaan asianmukaisesti värittää.

Väritä Kuvan 128 verkon kaaret asianmukaisesti. Mikä on verkon kaarikromaattinen luku?



Kuva 128: Väritä verkon kaaret asianmukaisesti ja tutki mikä on verkon kaarikromaattisuus.

Kaaret voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä maksimissaan 8 väriä, koska verkossa on 8 kaarta. Kaaret voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä vain 4 väriä. Minimimäärä värejä on neljä, koska verkossa on 4-asteinen solmu. Tästä seuraa, että verkko on 4-kaarikromaattinen (Kuva 129).



Kuva 129: Kaaret voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä 8 väriä. Verkko on 4-kaarikromaattinen.

Jaetaan verkon kaarikromaattisen luvun etsiminen kahteeen osioon:

- *Alaraja:* Osoitetaan, että $\chi'(V) \geq k$ eli kaarien asianmukaiseen värittämiseen tarvitaan vähintään tietty määrä värejä. Tämä osoitetaan yleensä käyttämällä verkon V ominaisuuksia.
- *Yläraja:* Osoitetaan, että $\chi'(V) \leq k$ eli tietty määrä värejä riittää kaarien asianmukaiseen värittämiseen. Tämä osoitetaan yleensä värittämällä asianmukaisesti verkon kaaret k-väriseksi.

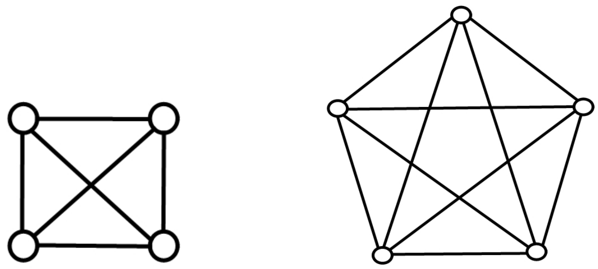
Lause 5.4.3. *(Vizing, 1964, 1965)(Gupta, 1966) Olkoon verkko V yksinkertainen. Tällöin verkon kaarikromaattinen luku on korkeintaan $\chi'(V) \geq a_{max}(V) + 1$.*

Seuraus 5.4.4. *Yksinkertaisessa verkossa V verkon kaarikromaattisuus on joko $\chi'(V) = a_{max}(V)$ tai $\chi'(V) = a_{max}(V) + 1$.*

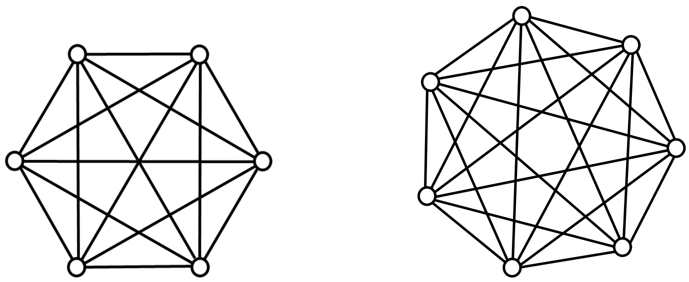
Seurauksen 5.4.4 mukaan yksinkertaiset verkot voidaan jakaa kahteen luokkaan; kaarikromaattisuus on yhtäsuuri kuin solmujen korkein asteluku tai kaarikromaattisuus on yhtä suurempi kuin solmujen korkein asteluku. Tutki värittämällä verkon kaaria kumpaanko luokkaan täydelliset K_4, K_5, K_6 ja K_7 verkot kuuluvat (Kuvat 130 ja 131).

Täydellisten verkkojen K_4 ja K_6 kaaret voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä vähintään yhtä montaa väriä kuin solmujen korkein asteluku on (Kuva 132). Täydellisen K_4 verkon kaarikromaattisuus on kolme ja täydellisen K_6 verkon kaarikromaattisuus on viisi. Jos täydellisessä verkossa on parillinen määrä solmuja, kaarikromaattisuus on yhtäsuuri kuin solmujen korkein asteluku.

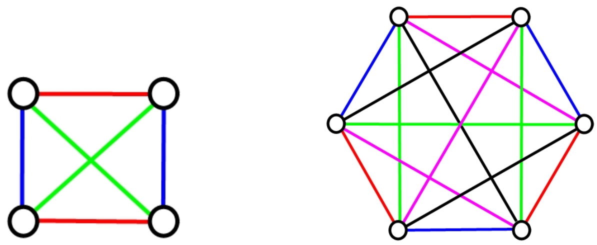
Täydellisen K_5 verkon kaaret voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä vähintään viittä väriä. Täydellisen K_7 verkon kaaret voidaan värittää asianmukaisesti käyttämällä vähintään seitsemää väriä (Kuva 132). Jos täydellisessä verkossa on pariton määrä solmuja, kaarikromaattisuus on yhtä suurempi kuin solmujen korkein asteluku.



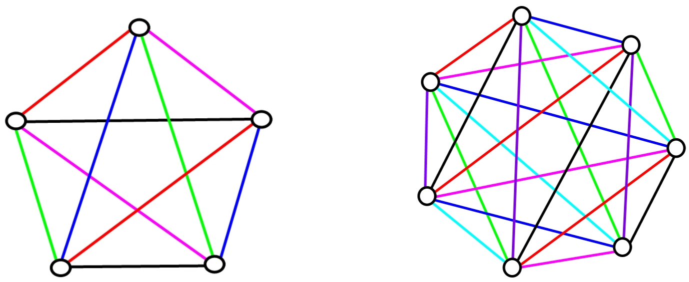
Kuva 130: Tutki värittämällä mitkä ovat kuvan täydellisten verkkojen kaarikromaattiset luvut.



Kuva 131: Tutki värittämällä mitkä ovat kuvan täydellisten verkkojen kaarikromaattiset luvut.



Kuva 132: Jos täydellisessä verkossa on parillinen määrä solmuja, kaarikromaattisuus on yhtäsuuri kuin solmujen korkein asteluku.



Kuva 133: Jos täydellisessä verkossa on pariton määrä solmuja, kaarikromaattisuus on yhtä suurempi kuin solmujen korkein asteluku.

Lause 5.4.5. *Verkon kaarikromaattisuus on yksi, jos ja vain jos verkon solmujen korkein asteluku on yksi.*

Lause 5.4.6. *Täydellisen verkon K_n kaarikromaatisuus $\chi'(V) = n$, jos n on pariton ja $\chi'(V) = n - 1$, jos n on parillinen.*

Lause 5.4.7. *Kaksijakoisessa verkossa tai puussa kaarikromaattisuus on yhtäsuuri kuin solmujen korkein asteluku.*

Taulukossa 11 on esitetty edellä mainittujen lauseiden lisäksi muutamia muita kaarikromaattisuuksia.

Verkko V	$\chi'(V)$
Kaksijakoinen verkko	$a_{max}(V)$
Avoin ketju	2
Puu	$a_{max}(V)$
Suljettu ($2n$-solmuinen) ketju	2
Suljettu ($2n+1$-solmuinen) ketju	3
Pyörä P_n	n
Täydellinen verkko K_{2n}	$2n-1$
Täydellinen verkko K_{2n+1}	$2n+1$

Taulukko 11: Verkkojen kaarikromaattisia lukuja.

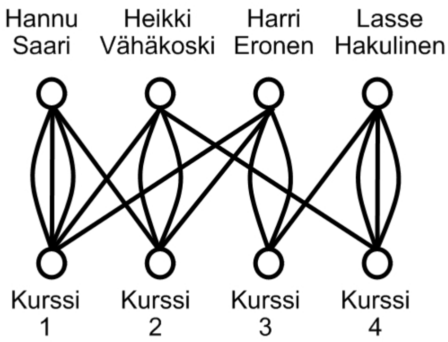
Joensuun Normaalikoulun neljälle opettajalla on määrätty oppitunnit Taulukon 12 mukaisesti. Jokainen kurssi pidetään omassa luokkahuoneessaan, joten yhtä kurssia ei voida järjestää samanaikaisesti kahdessa paikassa. Laadi opettajille lukujärjestykset. Mikä on minimimäärä eri aikaan järjestettäviä oppitunteja, jotta kaikki tunnit tulevat pidetyiksi päivän aikana? *Vihje: Tee Taulukosta 12 kaksijakoinen verkko ja väritä verkon kaaret käyttäen mahdollisimman vähän värejä.*

Opettaja	Kurssi 1	Kurssi 2	Kurssi 3	Kurssi 4
Hannu Saari	3	1	0	0
Heikki Vähäkoski	1	2	0	1
Harri Eronen	1	1	2	0
Lasse Hakulinen	0	0	1	3

Taulukko 12: Jokainen opettaja opettaa neljä tuntia päivässä taulukon mukaisia kursseja.

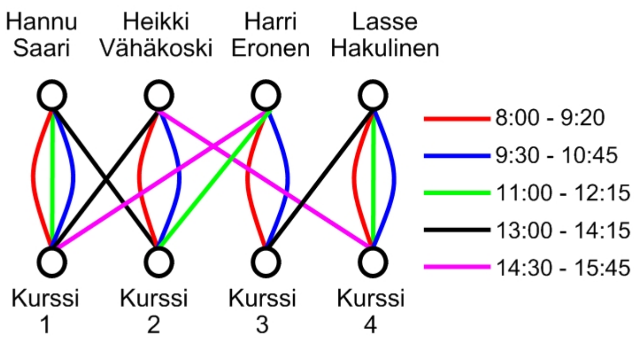
Taulukosta voidaan tehdä kaksijakoinen verkko, missä solmujoukko jaetaan opettajien joukkoon {Saari, Vähäkoski, Eronen, Hakulinen} ja kurssien joukkoon $\{1, 2, 3, 4\}$. Esimerkiksi Saaren ja kurssin 1 välille tulee kolme kaarta ja Saaren ja kurssin 2 välille tulee yksi kaari. Kaaria vastaavat kullekin opettajalle määrätyt oppitunnit (Kuva 134).

Olkoon kaarien värit oppituntien pitoaikoja siten, että esimerkiksi punainen kaari tarkoittaa päivän ensimmäistä oppituntia, siis aikaväliä 8 : 00 - 9 : 20. Väritetään Kuvan 134 verkon kaaret asianmukaisesti käyttäen mahdollisimman



Kuva 134: Opettajalle määrättyä oppituntia vastaa kaari kuvan kaksijakoissa verkossa.

vähän värejä. Verkon kaaret voidaan värittää asianmukaisesti käyttäen vähintään viittä eri väriä. Esimerkiksi solmun Kurssi 1 asteluku on viisi, joten viisi väriä on myös minimimäärä värejä, jotka kaarien asianmukainen värittäminen vaatii. Verkon kaarikromaattisuus on $\chi'(V) = 5$, joten oppitunteja tulee järjestää viitenä eri aikana (Kuva 135).



Kuva 135: Oppitunteja tulee järjestää viitenä eri aikana.

Kuvan 135 verkosta voidaan tehdä lukujärjestys. Lukujärjestyksestä näkyy mitä kurssia kukin opettaja opettaa tiettynä kellonaikana (Taulukko 13).

	Hannu Saari	Heikki Vähäkoski	Harri Eronen	Lasse Hakulinen
8 : 00 - 9 : 20	1	2	3	4
9 : 30 - 10 : 45	1	2	3	4
11 : 00 - 12 : 15	1	–	2	4
13 : 00 - 14 : 15	2	1	–	3
14 : 30 - 15 : 45	–	4	1	–

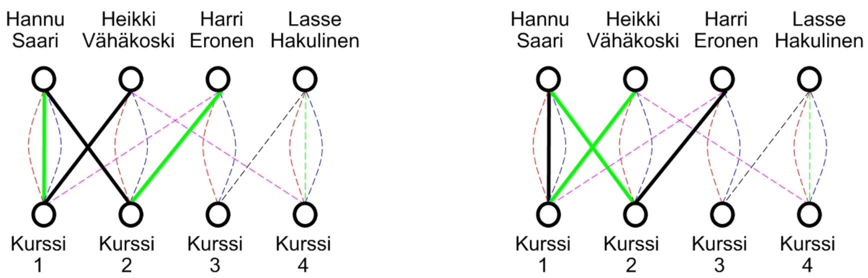
Taulukko 13: Opettajien lukujärjestykset.

Heikki Vähäkoski ja Harri Eronen ovat tyytymättömiä Taulukon 13 lukujärjestykseen. Onko mahdollista muuttaa lukujärjestystä siten, ettei opettajille tulisi "hyppytunteja"?

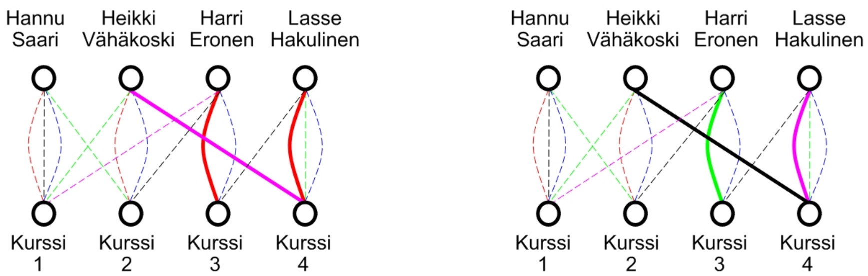
Määritelmä 5.4.8. Olkoon verkon kaaret väritetty asianmukaisesti. Verkon *kaksivärinen aliverkko* on aliverkko, joka sisältää kaikki verkon i ja j väriset kaaret ja niiden päätesolmut.

Määritelmä 5.4.9. Kaksivärisen aliverkon komponentti on *Kempen* $i{-}j$*-kaariketju*, missä i ja j ovat kaksivärisen aliverkon värit.

Lukujärjestystä voidaan muuntaa esimerkiksi siten, että etsitään Kuvan 135 verkosta kaksivärinen Kempen kaariketju ja vaihdetaan värien paikkaa. Vaihdetaan musta-vihreän Kempen kaariketjun värejä (Kuvan 136). Vaihdetaan vielä kolmen kaaren värit (Kuva 137). Nyt verkko näyttää tältä (Kuva 138).



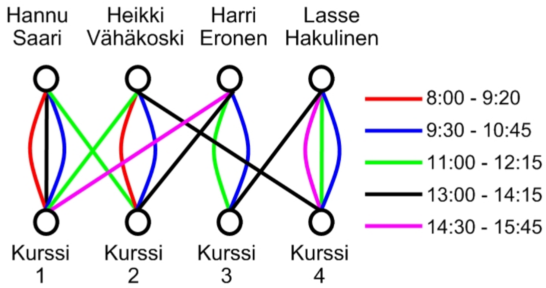
Kuva 136: Vaihdetaan musta-vihreän Kempen kaariketjun värejä.



Kuva 137: Vaihdetaan vielä kolmen kaaren värit.

Nyt Kuvan 138 verkosta voidaan tehdä lukujärjestys, jossa ei ole hyppytunteja (Taulukko 14).

Toinen vaihtoehto on, että vaihdetaan Taulukon 13 sarakkeissa kurssien paikkoja kuitenkin niin, että samalla rivillä ei saa olla samaa kurssia.



Kuva 138: Nyt verkko näyttää tältä.

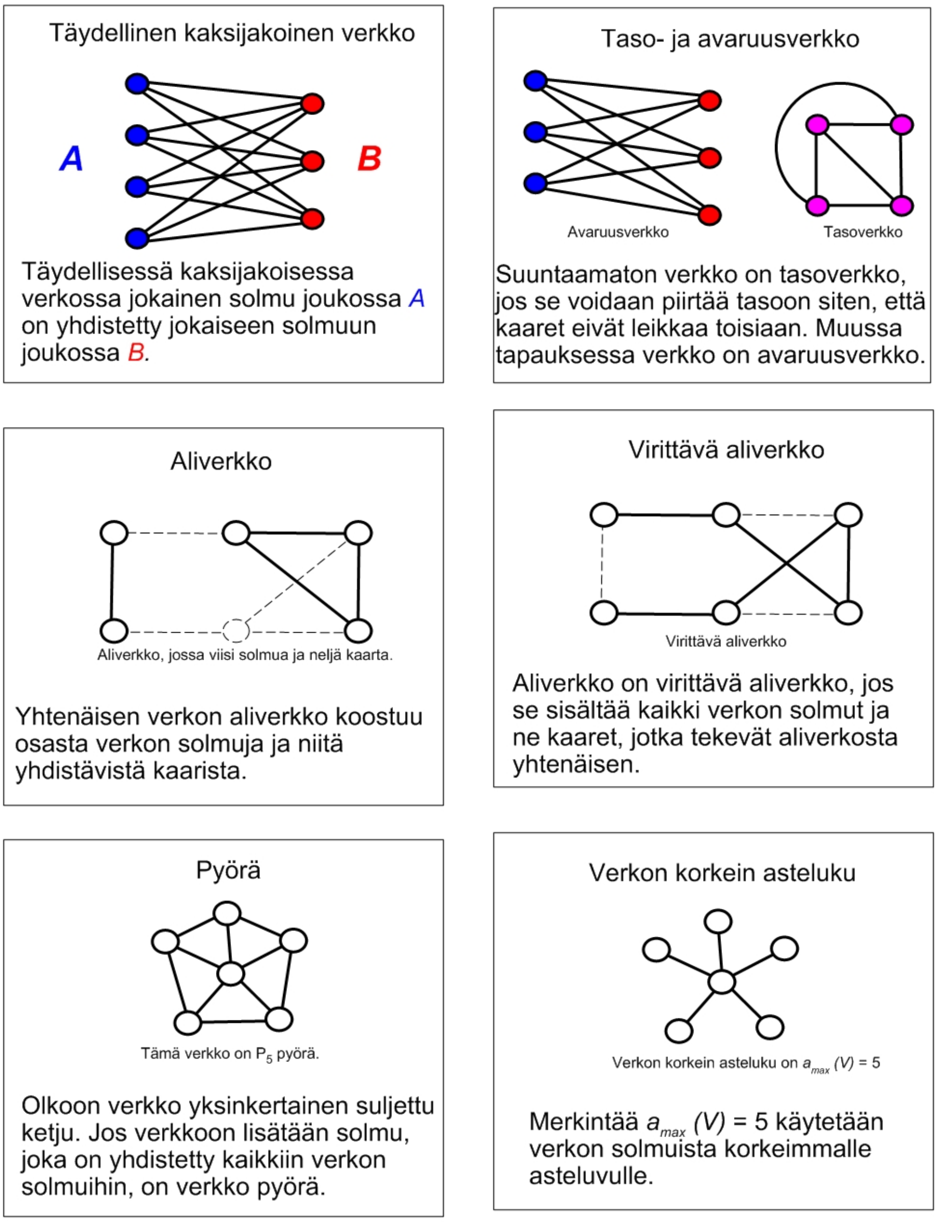
	Hannu Saari	Heikki Vähäkoski	Harri Eronen	Lasse Hakulinen
8 : 00 - 9 : 20	1	2	–	–
9 : 30 - 10 : 45	1	2	3	4
11 : 00 - 12 : 15	2	1	3	4
13 : 00 - 14 : 15	1	4	2	3
14 : 30 - 15 : 45	–	–	1	4

Taulukko 14: Opettajien uusi lukujärjestys.

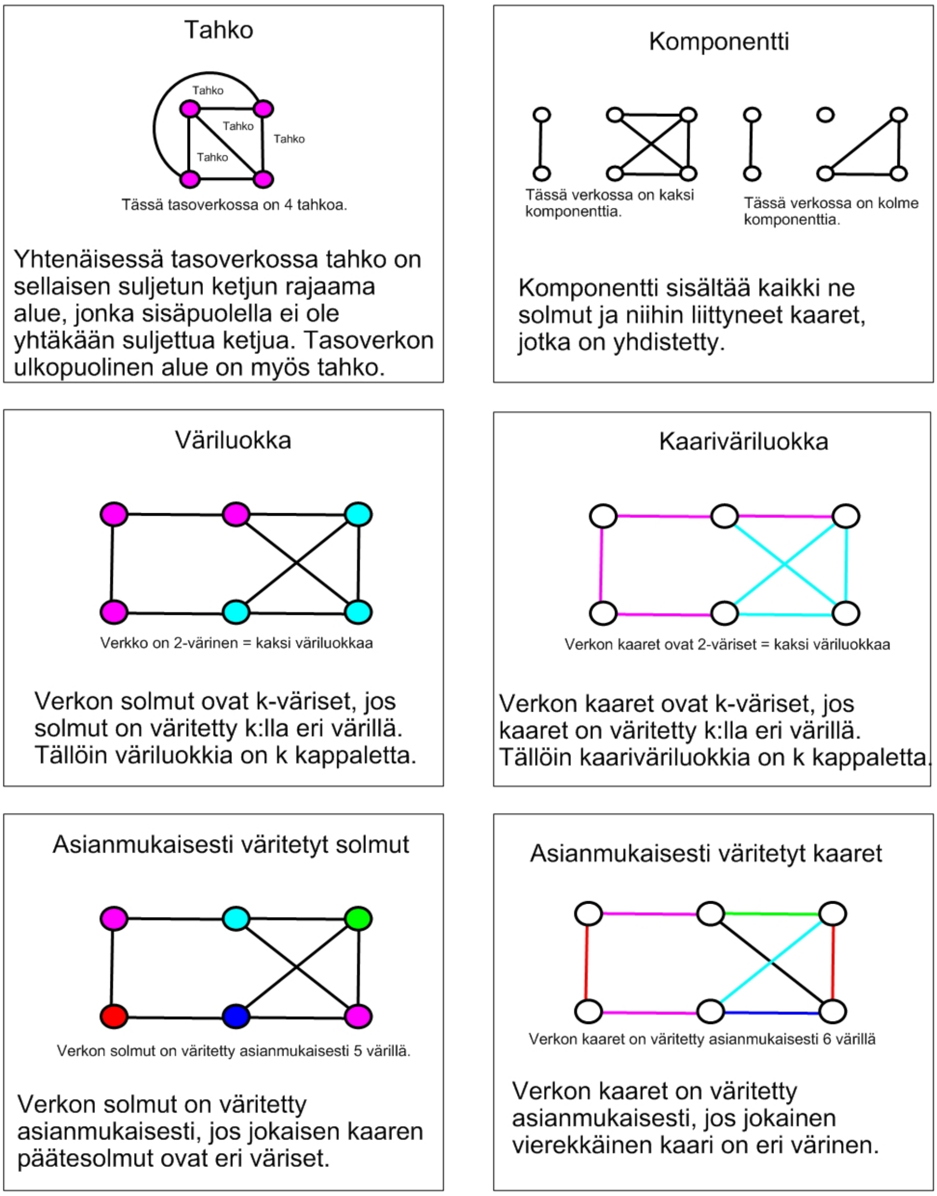
5.5 Käsitteiden kertausta

Tässä kappaleessa on käsitelty pääasiassa verkkojen värittämistä ja muun muassa seuraavia käsitteitä: taso- ja avaruusverkko, tahko, komponentti, täydellinen kaksijakoinen verkko, aliverkko, virittävä aliverkko, solmujen korkein asteluku, pyörä, k-jakoinen verkko, sekä solmujen että kaarten värittäminen, asianmukainen värittäminen, kromaattisuus, kaksivärinen aliverkko, Kempen $i{-}j$-ketju ja kaariketju. Lisäksi tutuksi on tullut Suurin aste ensin -algoritmi.

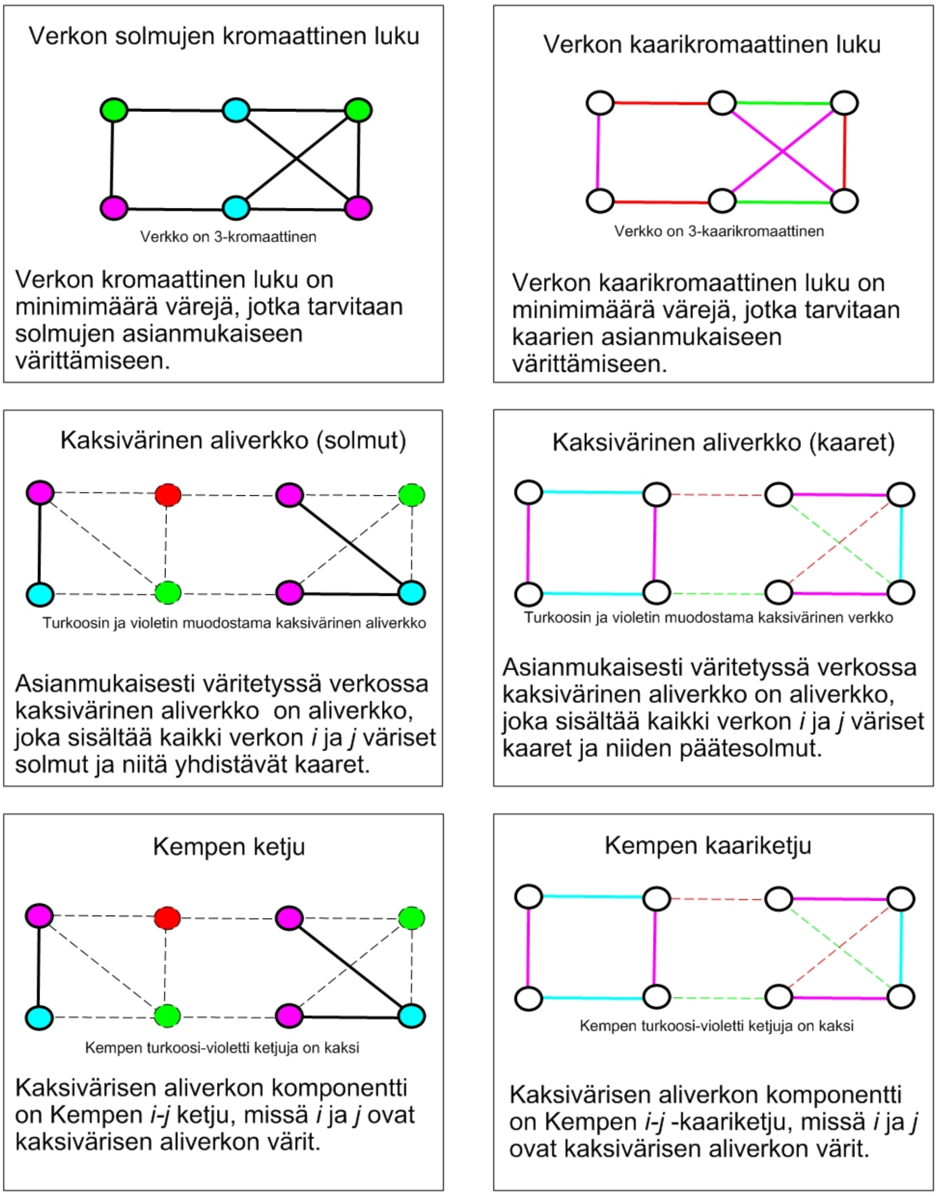
Kertaa aiempia käsitteitä sivuilta 93- 95.



Kuva 139: Kappaleen 5 käsitteiden kertausta.



Kuva 140: Kappaleen 5 käsitteiden kertausta.

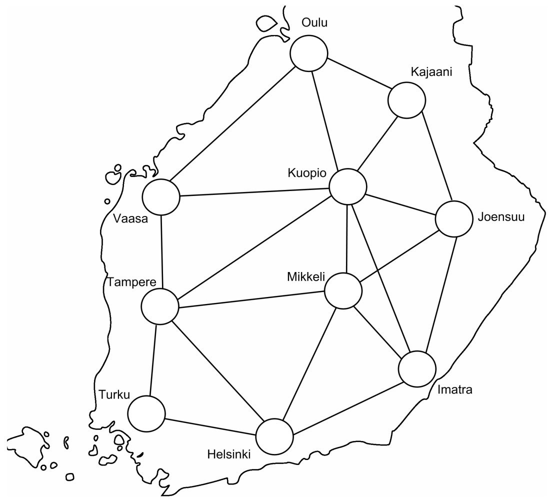


Kuva 141: Kappaleen 5 käsitteiden kertausta.

5.6 Tehtäviä

Tehtävä 5.6.1. Perustele, että Kuvan 107 karttaa ei ole mahdollista värittää kolmella värillä, jos vierekkäiset maat eivät saa olla samanväriset.

Tehtävä 5.6.2. Kuvan 142 jokaisessa kaupungissa on paikallisradioasema, jolla on lähetystä tietyllä taajuudella. Radion kuuluvuudessa on esiintynyt häiriöitä, koska vierekkäisillä kaupungeilla on ollut lähetystä samalla taajuudella. Mikä on pienin määrä eri taajuuksia, jotta kaikkilla kaupungeilla on vain häiriötöntä lähetystä?



Kuva 142: Mikä on pienin määrä eri taajuuksia, jotta häiriöitä ei esiinny lähetyksessä?

Tehtävä 5.6.3. Väritä Kuvan 142 verkon solmut asianmukaisesti käyttäen mahdollisimman vähän värejä.

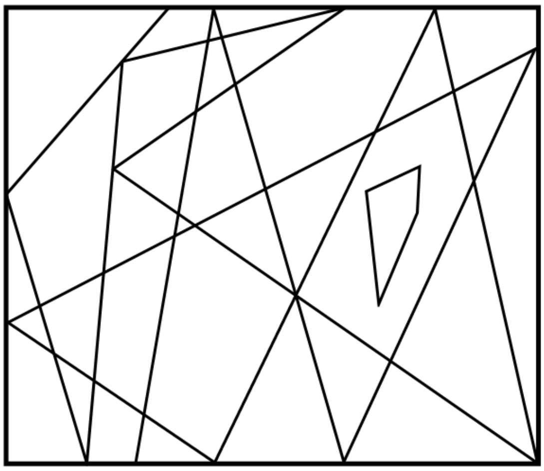
a) Mikä on verkon kromaattinen luku? Perustele.

b) Etsi väritetystä verkosta pisin Kempen ketju. Minkä kaupunkien välille ketju muodostuu?

c) Muodostuuko pisin Kempen ketju aina ko. kaupunkien välille vai voidaanko solmujen värejä vaihtaa siten, että pisin Kempen ketju muodostuu eri kaupunkien välille?

Tehtävä 5.6.4. Kuninkaalla oli testamenttia tehdessään neljä poikaa, joiden kesken maa piti jakaa siten, että jokainen pojista saisi oman maansa. Lisäksi kunkin maan pääkaupungista oli rakennettava tie kaikkien muiden maiden pääkaupunkeihin kuitenkin niin, ettei yksikään tie mene toisen maan halki eivätkä tiet risteä muualla kuin pääkaupungissa. Kuninkaan neuvonantajat laativatkin tällaisen jaon. Neuvonantajien harmiksi kuninkaalle syntyi kuitenkin vielä viides poika, jolloin maa oli jaettava ja teiden rakentaminen suunniteltava uudelleen. Olet neuvonantajien neuvonantaja. Miten neuvoisit neuvonantajia?

Tehtävä 5.6.5. Väritä Kuvan 143 alueet siten, että vierekkäiset alueet eivät ole samanväriset. Käytä mahdollisimman vähän värejä.



Kuva 143: Väritä kuva siten, että vierekkäiset alueet eivät ole samanväriset.

Tehtävä 5.6.6. Lemmikit Ry:llä on ongelma. Heille on tuotu viikonlopuksi hoitoon yhdeksän eläintä, joita ei voida kaikkia sijoittaa samaan huoneeseen.

Kuinka monta erillistä huonetta Lemmikit Ry:llä on oltava, jotta kaikki eläimet voidaan ottaa hoitoon? Taulukko 15 kertoo mitä lemmikkejä ei voida laittaa samaan huoneeseen.

Lemmikki	Samassa huoneessa ei voi olla yhtäaikaa
hamsteri	käärme, kilpikonna
hiiri	kissa, kilpikonna
kani	koira, kissa
kilpikonna	käärme, hiiri
kissa	koira, kultakala, papukaija, hiiri
koira	kani, kissa
kultakala	kissa
käärme	kani, hamsteri, kilpikonna
papukaija	kissa

Taulukko 15: Lemmikit, joita ei voida laittaa samaan huoneeseen.