Suuntaamattomia verkkoja lukiossa – itsetuotetun oppimateriaalin analysointia

Pro gradu -tutkielma
Jussi Kotilainen
165258
Itä-Suomen yliopisto
14. toukokuuta 2012

Sisältö

1 Johdanto

Itä-Suomen yliopistossa oli vuosien 2009-2011 aikana käynnissä Mestariluokka-projekti, jonka tavoitteena oli tarjota lukiolaisille ylimääräisiä opintoja matematiikan, fysiikan ja tietojenkäsittelytieteen parista sekä lisätä lukioiden ja yliopistojen yhteistyötä. Osana tätä projektia toteutettiin syksyllä 2011 Joensuun Normaalikoululla valinnainen matematiikan kurssi, jonka aiheena oli alunperin tarkoitus olla yliopiston matematiikan opintojen alussa tulevia asioita. Tästä aihe jalostui eteenpäin diskreettiä matematiikkaa käsitteleväksi, ja lopulta kurssin nimeksi annettiin Verkot ja relaatiot. Nimi oli kuitenkin sikäli harhaanjohtava, että verkot valtasivat koko ajan suuremman osan kurssille varatusta ajasta, ja loppujen lopuksi relaatioista ei puhuttu koko kurssin aikana.

Miksi sitten juuri verkot ja verkkoteoria valikoituivat kurssin pääpainoksi näiden monien vaiheiden jälkeen? Ja miksi esimerkiksi yliopisto-opinnoissa verkkoteoriaa edeltävät aiheet kuten joukko-oppi ja relaatiot päädyttiin jättämään pois, vaikka ne ovat välttämättömiä verkkoteorian täsmällisessä käsittelyssä? Syy on se, että verkot tuntuivat tarjoavan todella paljon mielenkiintoisia tapoja ratkaista elävästä elämästä kumpuavia ongelmia. Lisäksi verkkoteoria on aiheena jopa jossain määrin mediaseksikäs, liittyyhän se hyvin läheisesti tietoverkkoihin, sosiaalisiin verkostoihin ja muihin päivä päivältä merkityksellisemmiksi käyviin olioihin ja ilmiöihin.

Mutta miten verkkoteoriaa sitten pystyttiin opiskelemaan ilman matemaattisia taustatietoja, joita tarvitaan verkkoteorian käsitteiden formaaliin määrittelyyn ja täsmälliseen käsittelyyn? Helposti, sillä tavoitteeksi ei asetettukaan yliopistoista ja korkekouluista tuttua verkkoteorian perinteistä esittämistä ja käsittelyä, vaan pyrittiin kaikkien ymmärrettävissä olevaan tapaan käsitellä tätä pohjimmiltaan hyvin yksinkertaista aihealuetta. Tämä vaati matemaattisesta täsmällisyydestä joustamista, mutta se uhraus oltiin valmiita tekemään.

Tällaista verkkoteorian käsittelytapaa tukevaa opetusmateriaalia ei kuitenkaan ollut olemassa, joten se piti tuottaa itse. Kurssille laadittiin oppimateriaalipaketti kahden Mestariluokka-projektin työntekijän voimin. Koska matematiikka yleensäkin, ja verkkoteoria erityisesti, kehittyy erilaisten ongelmien ja niiden ratkaisemisen seurauksena, asetettiin oppimateriaalille heti kättelyssä ohjenuoraksi erilaisten ongelmien korostaminen. Koska matematiikka kehittyy myös yksilöiden henkilökohtaisena rakenteena pitkälti ongelmanratkaisuprosessin kautta, haluttiin oppimateriaalin etenevän nimenomaan erilaisten ongelmien ja niille esitettyjen ratkaisujen kautta. Käsitteitä määriteltiin aina tarpeen mukaan, mutta kaikessa pyrittiin koko ajan selkeään ja helppolukuiseen tekstiin.

Tässä pro gradu -tutkielmassa analysoidaan kurssia varten tuotetun oppimateriaalin ensimmäisen luvun ongelmia. Tutkielma jakautuu neljään osaan: aluksi kerrotaan verkkoteoriasta yleisesti, seuraavaksi käsitellään oppimateriaalin ensimmäisen luvun matemaattinen sisältö perinteisesti ja täsmällisesti, tämän jälkeen esitellään oppimateriaalin sekä kurssin opetuksen taustalla ollutta matematiikan didaktista teoriaa ja lopuksi suoritetaan varsinainen ongelmien analysointi. Tutkielman loppuun on vielä sisällytetty luettelo Mestariluokka-projektin puitteissa suunnitelluista ja toteutetuista verkkoteorian kursseista sekä oppimateriaaleista.

Oppimateriaalia on analysoitu myös Koposen pro gradu -tutkielmassa [9], jossa perehdytään oppimateriaalin kolmannen luvun painotettuja verkkoja käsitteleviin ongelmiin.

2 Verkkoteoriasta

Verkkoteoria on matematiikan osa-alue, joka tutkii verkoiksi kutsuttuja matemaattisia struktuureja. Parhaiten verkot soveltuvat malleiksi tarkasteltaessa diskreettejä, eritoten äärellisiä ilmiöitä tai tilanteita. Yksinkertaisimmillaan verkot koostuvat pisteistä ja niiden välisistä yhteyksistä – verkkoteorian termein solmuista ja kaarista. Verkkoina voidaan kuvata esimerkiksi reittien optimointiongelmia, tietokoneiden segmentointia, liikennevalojärjestelmien ohjelmointia ja useiden pelien voittostrategioita. Lisäksi useat systeemit ovat itsessään verkkoja kuten esimerkiksi tieto- ja sähkötekniset verkot, Internet ja liikenneverkostot. [17]

Nykypäivän verkkoteoreettiset ongelmat liittyvät yleensä niin suuriin verkkoihin, että ongelmien ratkaiseminen ilman tietokoneita on mahdotonta. Toisaalta optimiratkaisun löytyminen kohtuullisessa ajassa ei ole aina taattua edes tietokoneiden avulla. [17, s. 1]

Verkkoteorian kehitys voidaan karkeasti jakaa kahteen aaltoon. Ensimmäinen aalto alkoi Königsbergin siltaongelmasta vuonna 1736, jolloin matemaatikko Leonhard Paul Euler (1707-1783) määritteli verkon. Tämän lisäksi Euler esitti useita verkkoteorian perusteoreemoja 1700-luvun aikana. Ensimmäinen aalto jatkoi kehittymistään 1960-luvulle saakka, jolloin tietokoneet alkoivat tehdä tuloaan. Tällöin käynnistyi verkkoteorian kannalta kehityksen toinen aalto, jota voidaan kutsua nopean kehityksen aalloksi. [17, s. 2]

Tietokoneet toivat mukanaan toisaalta laskentatehoa sitä vaativiin matemaattisiin ongelmiin ja toisaalta tietokoneiden tietorakenteet olivat itsessään verkkoja, joten verkkoteorian kehittymistä auttoi tietokoneiden kehittyminen. Etenkin verkkoteorian algoritmit ovat tärkeänä välineenä tietojenkäsittelytieteiden ja matematiikan rajamailla. Kykymme ratkaista verkkoteoreettisia ongelmia on käytännössä yhtä hyvä kuin kykymme manipuloida suuria verkkoja tietokoneilla. [17]

Verkkoteorian algoritmit liittyvät usein käytännönläheisiin ongelmiin, jotka muunnetaan verkoksi, jonka jälkeen ne palautetaan verkkojen analysointitehtäviksi. Eräs kuuluisa verkkoteorian ongelma on neliväriongelma, joka perustui vanhojen kartanpiirtäjien kokemuksiin; tasokartat voidaan aina värittää käyttämällä korkeintaan neljää väriä siten, ettei yksikään vierekkäinen maapari ole samanvärinen. Neliväriongelma esitettiin ensimmäisen kerran vuonna 1852, jonka jälkeen useat matemaatikot ovat yrittäneet ratkaista ongelmaa. Ongelmaa tutkivat erityisesti Percy John Heawood (1861-1955) 1800-luvun loppupuolella ja Øystein Ore (1899-1968) 1960-luvulla. Vasta kun aikaa oli kulunut 124 vuotta ongelman esittämisestä, Kenneth Appel (1932-) ja Wolfgang Haken (1928-) Illinoisin yliopistosta todistivat neliväriteoreeman. Matematiikan kannalta merkityksellistä oli se, että todistus suoritettiin tarkastusta myöten puhtaasti tietokoneilla. Vuoden 1976 aikaisilta tietokoneilta kului aikaa todistuksen laskentaan yhteensä 1200 tuntia. [17]

Neliväriteoreema on vain yksi esimerkki verkkoteorian kombinatorisesta luonteesta – yksinkertaisen ja helposti ymmärrettävissä olevan ongelman todistaminen lyhyesti ja ilman tietokoneita saattaa olla mahdotonta.

3 Suuntaamattomat verkot

Tässä luvussa käydään lyhyesti läpi Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin ensimmäisessä luvussa esiintyvät verkkoteorian käsitteet sekä lauseet todistuksineen. Käsitteiden ja lauseiden esitystapa on tässä luvussa perinteisen matemaattinen ja poikkeaa huomattavasti oppimateriaalin käsittelytavasta.

Verkkojen peruskäsitteiden lähteenä on käytetty pääasiassa diskreettiä matematiikkaa käsitteleviä teoksia, kuten Johnsonbaughin [6] ja Matousekin [12] kirjat sekä Pesosen [15] ja Chenin [1] monisteet. Suomennoksia termeille on haettu pääasiassa Savolaisen kirjasta *Verkkoteoria* [17], jonka lisäksi suomennoksiin on käytetty Pesosen luentomonisteiden *Diskreetti matematiikka* [15] ja *Matematiikan johdantokurssi* [16] mukaisia termejä.

Tässä luvussa käytetään pääsääntöisesti seuraavia merkintöjä: joukkoja merkitään isoin kirjaimin ja joukon alkioita pienin kirjaimin. **Tässä luvussa rajoitutaan käsittelemään äärellisiä ja suuntaamattomia verkkoja, vaikka monet määritelmistä käyvät äärettömillekin verkoille.**

3.1 Suuntaamattomien verkkojen peruskäsitteitä

Määritelmä 3.1.1. Joukon $\mathbf{X}$ *ei-järjestetty tulo* itsensä kanssa on sen kaikkien järjestämättömien parien joukko

$$\mathbf{X} \,\&\, \mathbf{X} = \big\{\{a, b\} \mid a, b \in \mathbf{X}\big\}.$$

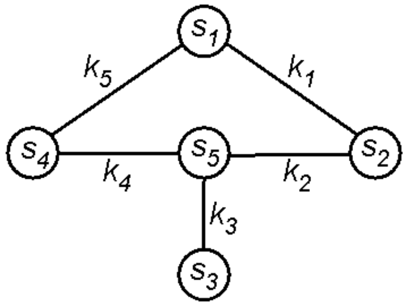
Määritelmä 3.1.2. *Suuntaamaton verkko (graph, network)* V on kolmikko (S, K, Φ), missä $S \neq \emptyset$ on *solmujen (vertex, node)* joukko, K on *kaarien (edge, link)* joukko ja $\Phi : K \to S \,\&\, S$ on funktio kaarien joukosta järjestämättömien solmuparien joukkoon.

Jos $k \in K$, $s_1, s_2 \in S$ ja $\Phi(k) = \{s_1, s_2\}$, kaari k *liittyy* solmuihin s_1 ja s_2. Koska Φ on funktio, liittyy suuntaamattoman verkon jokainen kaari yhteen tai kahteen solmuun. Solmut, joihin kaari on liittynyt, ovat kyseisen kaaren *päätesolmut (terminal vertex)*. Jos kaari liittyy vain yhteen solmuun, eli $s_1 = s_2$, on kaari *luuppi (loop)*.

Määritelmä 3.1.3. Suuntaamattoman verkon $V = (S, K, \Phi)$ solmujen lukumäärää merkitään $|S|$ ja kaarien lukumäärää $|K|$.

Äärellinen suuntaamaton verkko voidaan esittää esimerkiksi kaaviokuvana, luettelona, yhteysmatriisina tai vastaavuusmatriisina. Esitetään seuraavaksi eräs verkko $V = (S, K, \Phi)$ näillä neljällä eri tavalla.

1) *Kaaviokuva* muodostetaan siten, että piirretään $|S|$ solmua esimerkiksi pisteinä tai palloina, ja yhdistään ne kuvausta Φ vastaavilla kaarilla $k_i \in K$. Jos kaaviokuva on mahdollista piirtää tasoon niin etteivät kaaret leikkaa toisiaan, on verkko *tasoverkko (planar graph)*, muutoin kyseessä on *avaruusverkko (nonplanar graph)*. Olkoon esimerkkiverkkona tasoverkko (Kuva 1).



Kuva 1: Suuntaamaton verkko kaaviokuvana

2) *Luettelo* muodostetaan siten, että luetellaan suuntaamattoman verkon solmut, kaaret ja vastaavuus. Kuvan 1 esimerkkiverkon luettelo on seuraava:

solmut $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$,
kaaret $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$,
vastaavuus $\Phi(k_1) = \{s_1, s_2\}, \Phi(k_2) = \{s_2, s_5\}, \Phi(k_3) = \{s_3, s_5\}, \Phi(k_4) = \{s_4, s_5\}, \Phi(k_5) = \{s_1, s_4\}$.

3) *Yhteysmatriisi (adjacency matrix)* saadaan asettamalla

$$a_{ij} = |\Phi^{-1}(s_i, s_j)|.$$

Luku a_{ij} ilmoittaa solmujen s_i ja s_j välillä olevien kaarien lukumäärän. Kuvan 1 suuntaamaton verkko voidaan esittää yhteysmatriisina:

$$M = (a_{ij})_{5\times 5} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4) *Vastaavuusmatriisi (incidence matrix)* saadaan asettamalla $b_{ij} = 1$, jos kaari k_j liittyy solmuun s_i, muutoin $b_{ij} = 0$. Kuvan 1 verkko voidaan esittää vastaavuusmatriisina:

$$M = (b_{ij})_{5\times 5} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Määritelmä 3.1.4. Suuntaamattomassa verkossa on *moninkertaisia (multi-edge)* kaaria, jos kahden solmun välillä on useita kaaria. Suuntaamaton verkko on *yksinkertainen (simple graph)*, jos verkossa ei ole luuppeja eikä moninkertaisia kaaria. Solmut ovat *vierekkäiset (adjacent vertices)*, jos niiden välillä on kaari. Kaaret ovat *vierekkäiset (adjacent edges)*, jos niillä on yhteinen päätesolmu. Verkko on *täydellinen (complete graph)*, jos verkon jokaisen solmuparin $s_i \neq s_j$ solmut ovat vierekkäiset.

Määritelmä 3.1.5. Suuntaamattomassa verkossa $V = (S, K, \Phi)$ solmun $s \in S$ *aste* tai *asteluku (degree)* määritellään

$$a(s) = |\{k \in K \mid \Phi(k) = \{s, x\}, s \neq x, x \in S\}| + 2 \cdot |\{k \in K \mid \Phi(k) = \{s, s\}\}|.$$

Lause 3.1.6. *Äärellisessä suuntaamattomassa verkossa*

1) solmujen astelukujen summa on kaksi kertaa verkon kaarien lukumäärä,

2) parittoman asteluvun omaavien solmujen lukumäärä on aina parillinen.

Todistus. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ äärellinen suuntaamaton verkko.

1) Jos verkossa V kaarien lukumäärä $|K| = 1$, on joko yhden solmun asteluku 2 tai kahden solmun asteluku 1, joten verkon V solmujen astelukujen summa on 2. Uuden kaaren lisääminen verkkoon kasvattaa aina joko kahden solmun astelukua yhdellä tai yhden solmun astelukua kahdella, joten m kaaren lisääminen kasvattaa astelukujen summaa aina luvulla $2m$.

2) Kohdan 1) nojalla

$$2 \cdot |K| = \sum_{x \in S} a(x) = \sum_{a(x) parillinen} a(x) + \sum_{a(x) pariton} a(x),$$

joka on parillinen luku. Parillisasteisten solmujen astelukujen summa on parillinen luku, joten paritonasteisia solmuja on oltava parillinen määrä.

$\square$

Määritelmä 3.1.7. Suuntaamaton verkko $V' = (S', K', \Phi')$ on suuntaamattoman verkon $V = (S, K, \Phi)$ *aliverkko (subgraph)*, jos

1) $\emptyset \neq S' \subseteq S$,

2) $K' \subseteq K$,

3) $\Phi'(k) = \Phi(k) \quad \forall k \in K'$,

4) jos $k \in K'$ ja $\Phi(k) = \{x, y\}$, niin $x, y \in S'$.

Jos verkko $V' = (S', K', \Phi')$ on verkon $V = (S, K, \Phi)$ aliverkko, $S' = S$, $K' = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ ja $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}\}$, merkitään $V' = V - k_{m+1}$ tai $V = V' + k_{m+1}$.

Määritelmä 3.1.8. Suuntaamattomassa verkossa $V = (S, K, \Phi)$ kaarien $k_i \in K$ jono $C = (k_1, \ldots, k_m)$ on *ketju (walk, chain)*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1) $k_i \neq k_j$, kun $i \neq j$.

2) On olemassa solmujen $s_i \in S$ järjestetty joukko $(s_0, s_1 \ldots, s_m)$ siten, että $\Phi(k_i) = \{s_{i-1}, s_i\}$.

Ketju on *suljettu (closed)*, jos $s_0 = s_m$. Jos ketju ei ole suljettu, se on *avoin (open)*. Ketjun $C = (k_1, \ldots, k_m)$ kaarien joukkoa $\{k_1, \ldots, k_m\}$ merkitään K_C.

Määritelmä 3.1.9. Suuntaamattoman verkon $V = (S, K, \Phi)$ kaksi solmua $s_1, s_2 \in S$ ovat *yhteydessä (connected)*, jos niiden välillä on ketju. Suuntaamaton verkko on *yhtenäinen (connected graph)*, jos verkon V jokaisen solmuparin $\{s_i, s_j\} \in S$ & S solmut ovat yhteydessä kaikilla $i \neq j$.

Määritelmä 3.1.10. Suuntaamattoman verkon V *kaariyhtenäisyys* $y_k \in \mathbb{N}$ on minimimäärä kaaria, jotka verkosta on poistettava, että saadaan verkon V epäyhtenäinen aliverkko V_k. Suuntaamattoman verkon V *solmuyhtenäisyys* $y_s \in \mathbb{N}$ on minimimäärä solmuja, jotka verkosta on poistettava kyseisiin solmuihin liittyvine kaarineen, että saadaan verkon V epäyhtenäinen aliverkko V_s.

Määritelmä 3.1.11. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ suuntaamaton verkko. Verkon V aliverkko $V' = (S', K', \Phi')$ on verkon V *komponentti (component)*, jos

1) jokainen solmupari $\{s_i, s_j\} \in S'$ & S' on yhteydessä kaikilla $i \neq j$,

2) yksikään joukon S' alkio ei ole yhteydessä joukon $S \setminus S'$ alkioon.

Määritelmä 3.1.12. Suuntaamaton verkko on *puu (tree)*, jos verkko on yhtenäinen ja verkossa ei ole yhtään suljettua ketjua. Puu on verkon *alipuu (subtree)*, jos puu on verkon aliverkko.

Lause 3.1.13. *Jos puuhun lisätään kahden solmun välille kaari, muodostuu verkko, jossa on suljettu ketju.*

Todistus. Olkoon verkko $V = (S, K, \Phi)$ puu ja $x, y \in S$. Koska verkko V on puu, se on yhtenäinen, joten solmusta x on ketju $C = (k_1, \ldots k_m)$ solmuun y. Jos solmujen x ja y välille lisätään kaari k, muodostuu verkko V', jossa on suljettu ketju $C' = (k_1, \ldots, k_m, k)$, jonka aloitus- ja lopetussolmu on x. $\square$

Lause 3.1.14. *Jos äärellinen suuntaamaton verkko on vähintään kaksisolmuinen puu, on siinä vähintään yksi solmu, jonka asteluku on 1.*

Todistus. Olkoon äärellinen suuntaamaton verkko $V = (S, K, \Phi)$ vähintään kaksisolmuinen puu. Koska solmuja on ainakin kaksi, on puussa myös kaaria. Jokaiseen solmuun liittyy ainakin yksi kaari. Lisäksi jokaisella kaarella on päinään kaksi eri solmua. Puu V voidaan rakentaa uudelleen vaihe vaiheelta niin, että väite pitää paikkansa kullekin muodostettavalle entistä laajemmalle alipuulle ja lopulta itse puulle.

Vaihe 1: Muodostetaan puu P_1 valitsemalla yksi verkon V solmu s sekä lisäämällä siihen kyseiseen solmuun verkossa V liittyneet kaaret päätesolmuineen. Koska verkossa V oli ainakin kaksi solmua, tulee lisätyksi ainakin yksi kaari. Solmu s ei voi olla tämän kaaren ainoa päätesolmu, koska muutoin syntyisi suljettu ketju (tässä vaiheessa luuppi). Lisätyn kaaren myötä puuhun P_1 on siis tultava toinenkin solmu, jonka asteluku on näin ollen 1 puussa P_1. Jos $P_1 = V$, on asia selvä, muutoin puusta P_1 puuttuu ainakin yksi puun V solmu tai kaari.

Jos puuttuu solmu s', siitä puuttuu yhtenäisyyden nojalla ketju solmusta s' puuhun P_1. Joka tapauksessa siis puuttuu ainakin yksi kaari ja solmu.

Vaihe 2: P_2 on puu, jossa alipuuhun P_1 on lisätty puun V kaaret, joiden toinen pää on puussa P_1, ja näiden toiset päätesolmut. Lisättyjä kaaria on ainakin yksi, nimittäin em. ketjussa puuhun P_1 liittyvä kaari. Koska puuhun P_1 lisätään yksi kaari, on siihen lisättävä myös kaaren toinen päätesolmu, joka ei Lauseen 3.1.13 nojalla voi kuulua puuhun P_1. Tämän lisätyn pään asteluku on silloin 1 puussa P_2. Jos $P_2 = V$, on asia selvä, muutoin jatketaan kuten yllä. Koska puu V oli äärellinen, tulevat kaikki kaaret ja solmut yhtenäisyyden nojalla lopulta mukaan ja viimeisessä tilanteessakin jää ainakin yhden solmun asteeksi 1.

□

3.2 Eulerin ketju

Määritelmä 3.2.1. Suuntaamattoman verkon $V = (S, K, \Phi)$ ketju $(k_1, \ldots, k_m)$ on *Eulerin ketju (Eulerian trail, walk, chain)*, jos $\{k_1, \ldots, k_m\} = K$. Jos verkossa V on suljettu Eulerin ketju, on kyseinen verkko *Eulerin verkko (Euler graph, Eulerian graph)*.

Lause 3.2.2. *(Eulerian-Graph Characterization) Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja äärelliselle yhtenäiselle suuntaamattomalle verkolle.*

1. *Verkko on Eulerin verkko.*
2. *Verkon jokaisen solmun asteluku on parillinen.*
3. *Verkon kaarien joukko on kaarivieraiden erillisten suljettujen ketjujen*[1] *yhdiste.*

Todistus. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ äärellinen yhtenäinen suuntaamaton verkko. Jos $|S| = 1$ ja $|K| = 0$, pätee lause seuraavin perustein; Määritelmä 3.1.8 ei kiellä tyhjän kaarijoukon muodostamaa ketjua, joten tällainen suljettu ketju sisältää kaikki verkon V kaaret ja on näin ollen suljettu Eulerin ketju. Jos solmun asteluku on nolla, se on parillinen. Lisäksi jos verkossa ei ole kaaria, on kaarien joukko triviaalisti kaarivieraiden erillisten suljettujen ketjujen yhdiste. Lause pätee myös, jos $|S| = 1$ ja $|K| > 0$, sillä kulkemalla luupit jossakin järjestyksessä muodostuu suljettu Eulerin ketju. Luuppi kasvattaa solmun astelukua kahdella, joten solmun asteluku on väistämättä parillinen. Jokainen luuppi on suljettu ketju, joten kaarien joukko on kaarivieraiden erillisten suljettujen ketjujen yhdiste.

Tarkastellaan seuraavaksi tapauksia, joissa $|S| \geq 2$.

[1] Kaksi ketjua ovat keskenään kaarivieraat, jos ne eivät sisällä yhtään yhteistä kaarta.

(1 ⇒ 2) Olkoon V Eulerin verkko. Koska verkossa V on suljettu Eulerin ketju, on verkon jokainen solmu vähintään yhden suljetun Eulerin ketjun aloitussolmu. Olkoot C suljettu Eulerin ketju verkossa V ja solmu s ketjun C aloitussolmu. Aloitussolmu s on sama solmu kuin suljetun Eulerin ketjun lopetussolmu, joten solmun s asteluvun on oltava vähintään kaksi. Jos solmuun s liittyy tasan kaksi kaarta, on $a(s)$ parillinen. Oletetaan, että solmuun s liittyy useampi kuin kaksi kaarta. Jos solmuun s liittyisi kolme kaarta, ei kyseinen solmu voi olla suljetun Eulerin ketjun lopetussolmu, sillä solmuun s täytyy liittyä yhtä monta kaarta, joita pitkin suljettua ketjua myöten solmuun tullaan ja solmusta lähdetään. Vastaavalla päättelyllä voidaan osoittaa, että $a(s) \neq 5, 7, 9, \ldots$.

Verkon äärellisyyden nojalla aloitussolmuun s täytyy liittyä parillinen määrä kaaria. Koska verkon jokainen solmu on suljetun Eulerin ketjun aloitussolmu, pätee verkon jokaiselle solmulle sama tarkastelu kuin edellä tehtiin solmulle s, joten verkossa V jokaisen solmun asteluvun on oltava parilllinen.

(2 ⇒ 3) Olkoon verkon V jokaisen solmun asteluku parillinen. Verkko V ei voi olla puu (Lause 3.1.14), joten se sisältää yhtenäisyysoletuksen nojalla ainakin yhden suljetun ketjun C_1. Jos C_1 sisältää kaikki verkon V kaaret, seuraa väite 3.

Oletetaan, että ketju C_1 ei sisällä kaikkia verkon V kaaria. Olkoon V_1 verkko, josta on poistettu ketjuun C_1 kuuluvat kaaret. Koska ketju C_1 on suljettu ketju, on jokaisen verkon V solmun asteluku pienentynyt parillisella luvulla. Näin ollen verkko V_1 koostuu yhdestä tai useammasta erillisestä komponentista, joista jokainen on joko yksittäinen solmu, yksittäinen solmu johon on liittynyt luuppeja tai parillisen asteluvun omaavista solmuista sekä niihin liittyvistä kaarista koostuva yhtenäinen verkko. Nimitetään näitä komponentteja $V_{11}, V_{12}, \ldots, V_{1n_1}$. Tarkastellaan ainostaan niitä komponentteja, joissa on vähintään yksi kaari. Jokainen tällainen komponentti on ominaisuuksiltaan samanlainen kuin verkko V, joten jokaisesta komponentista voidaan poistaa yhden suljetun ketjun sisältämät kaaret. Kyseiset suljetut ketjut ja C_1 ovat kaarivieraita. Tällöin saadaan verkko V_2 joka koostuu ominaisuuksiltaan samanlaisista komponenteista kuin verkko V_1 koostui. Verkon V_2 komponenteista $V_{21}, V_{22}, \ldots, V_{2n_2}$ voidaan myös poistaa suljetut ketjut, jolloin saadaan verkko V_3 sekä kyseisen verkon komponentit $V_{31}, V_{32}, \ldots, V_{3n_3}$. Verkon V äärellisyyden nojalla menettelyä voidaan jatkaa niin pitkälle, että jää jäljelle verkko V_m, jossa ei ole yhtään kaarta. Koska jokainen poistettu kaari on kuulunut yhteen ja vain yhteen poistettuun suljettuun ketjuun, väite pätee.

(3 ⇒ 1) Oletetaan, että K_V on kaarivieraiden erillisten suljettujen ketjujen yhdiste. Jos yksi suljettu ketju sisältää kaikki kaaret, on tapaus triviaali. Oletetaan, että kaarivieraita suljettuja ketjuja on enemmän kuin yksi. Olkoon s_1 erään tällaisen suljetun ketjun C_1 aloitussolmu. Tällöin suljetussa ketjussa C_1 on verkon yhtenäisyyden nojalla oltava solmu s_2, joka aloittaa toisen suljetun ketjun C_2, joka on kaarivieras ketjun C_1 kanssa. (On myös mahdollista, että $s_1 = s_2$.) Ketjut C_1 ja C_2 voidaan kulkea siten, että kuljetaan solmusta s_1 solmuun s_2, kuljetaan suljettu ketju C_2 ja kuljetaan loppuosa suljetusta ketjusta C_1 palaten solmuun s_1. Jos kuljettu reitti muodostaa suljetun Eulerin ketjun verkossa V, seuraa väite.

Jos ketjut C_1 ja C_2 eivät sisällä kaikkia verkon V kaaria, on ketjuista C_1 ja C_2 muodostetussa suljetussa ketjussa C_{12} verkon yhtenäisyyden nojalla oltava solmu s_3, joka aloittaa kolmannen suljetun ketjun C_3, joka on kaarivieras ketjun C_{12} kanssa. Nämä ketjut voidaan kulkea siten, että kuljetaan mielivaltaisesta aloitussolmusta s_1 ketjua C_{12} kunnes kohdataan solmu s_3, jonka jälkeen kuljetaan ketju C_3 ja lopuksi solmusta s_3 solmuun s_1. Jos kuljettu ketju sisältää verkon kaikki kaaret, väite pätee. Jos kuljettu ketju ei sisällä kaikkia verkon kaaria, voidaan menettelyä jatkaa mielivaltaisen pitkälle, jolloin verkon äärellisyyden nojalla ketjujen yhdiste lopulta sisältää kaikki verkon kaaret. Näin ollen verkossa V täytyy olla suljetttu Eulerin ketju, joten verkko V on Eulerin verkko.

□

Lause 3.2.3. *Yhtenäisessä suuntaamattomassa verkossa on avoin Eulerin ketju jos ja vain jos verkossa on täsmälleen kaksi paritonasteista solmua. Tällöin avoin Eulerin ketju alkaa toisesta paritonasteisesta solmusta ja päättyy toiseen paritonasteiseen solmuun.*

Todistus. (⇒) Oletetaan, että ketju $(k_1, \ldots, k_m)$ on avoin Eulerin ketju solmusta s_1 solmuun s_n yhtenäisessä suuntaamattomassa verkossa V. Lisätään verkkoon V uusi kaari k siten, että kaari yhdistää avoimen Eulerin ketjun päätesolmut s_i ja s_n. Nyt verkossa $V^* = V + k$ on suljettu Eulerin ketju $(k_1, \ldots, k_m, k)$, joten Lauseen 3.2.2 mukaan verkon V^* jokaisen solmun aste on parillinen. Siis alkuperäisessä verkossa V jokaisen solmun asteluku, lukuunottamatta solmuja s_1 ja s_n, täytyy olla parillinen.

(⇐) Oletetaan, että s_1 ja s_n ovat ainoat paritonasteiset solmut verkossa V. Jos uusi kaari k yhdistää solmut s_1 ja s_n, on uudessa verkossa $V^* =$

$V + k$ kaikki solmut parillisasteisia. Tästä seuraa Lauseen 3.2.2 nojalla, että verkossa V^* on suljettu Eulerin ketju C_E. jos ketjusta C_E otetaan pois kaari k, on syntyvä ketju $C_E - k$ avoin Eulerin ketju. Siis verkko $V^* - k = V$ sisältää avoimen Eulerin ketjun. □

3.3 Hamiltonin ketju

Määritelmä 3.3.1. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ suuntaamaton verkko ja $C = (k_1, \ldots, k_m)$ ketju verkossa V. Olkoon $(s_0, s_1 \ldots, s_m)$ jono verkon V solmuja siten, että $\Phi(k_i) = \{s_{i-1}, s_i\}$. Ketju C on *Hamiltonin ketju (hamiltonian trail, walk, chain)*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1) $s_i \neq s_j$, kun $s_i \neq s_0$ ja $s_j \neq s_m$.

2) $\{s_0, s_1, \ldots, s_m\} = S$.

Jos verkossa V on suljettu Hamiltonin ketju, on verkko *Hamiltonin verkko (Hamilton graph, hamiltonian graph)*.

Huomautus 3.3.2. Käytännössä Määritelmä 3.3.1 tarkoittaa seuraavaa: verkon ketju on Hamiltonin ketju, jos se kulkee verkon kaikkien solmujen kautta täsmälleen kerran – aloitussolmu voi olla poikkeus.

Seuraus 3.3.3. *Hamiltonin ketjun määritelmästä saadaan seuraavat ehdot:*

1) *Jos verkossa on suljettu Hamiltonin ketju C, ja solmun s asteluku on 2, kuuluvat molemmat solmuun s liittyneet kaaret ketjuun C.*

2) *Jos verkossa on suljettu Hamiltonin ketju C, ja solmuun s liittyneistä kaarista kaksi kuuluu ketjuun C, eivät muut solmuun s liittyneet kaaret voi kuulua ketjuun C.*

3) *Jos verkossa muodostetaan suljettua Hamiltonin ketjua C, saa ketjuun C syntyä suljettu ketju ainoastaan silloin, kun ketjuun C liitetään viimeinen kaari.*

4) *Verkossa ei ole suljettua Hamiltonin ketjua, jos verkossa on solmu, jonka aseteluku on 1 tai 0, tai jos voidaan osoittaa, että jonkin solmun kaarista vain yksi voi kuulua Hamiltonin ketjuun.*

Esitetään seuraavaksi kaksi lausetta, joiden avulla monia verkkoja voidaan todistaa Hamiltonin verkoiksi. Lauseista vanhemman todisti Gabriel Adrew Dirac vuonna 1952. Uudemman lauseen todisti Øystein Ore vuonna 1960. [2, s. 269]

Diracin lause on suora seuraus Oren lauseesta, mutta todistetaan se kuitenkin ennen Oren lausetta. Diracin lauseen todistamiseksi tarvitaan seuraava lemma:

Lemma 3.3.4. *Mikä tahansa verkko $V = (S, K, \Phi)$ saadaan täydennettyä Hamiltonin verkoksi lisäämällä siihen solmuja ja kaaria siten, että kustakin lisätystä solmusta menee kaari jokaiseen verkon alkuperäiseen solmuun $s \in S$. Solmuja tarvitsee lisätä korkeintaan $n = |S|$ kappaletta.*

Todistus. On intuitiivisesti selvää, että mitä enemmän verkossa on kaaria, sitä todennäköisemmin sieltä löytyy suljettu Hamiltonin ketju. Siksi riittää tarkastella pelkästään verkkoja, joissa ei ole yhtään kaarta. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ verkko siten, että $|S| = n$ ja $|K| = 0$. Verkon V solmut voidaan asettaa ympyrämuodostelmaan, jolloin ne muodostavat jonon $(s_1, \ldots, s_n)$. Aletaan lisätä tähän muodostelmaan solmuja siten, että lisätään aina yksi solmu s_i^* solmujen s_i ja s_{i+1} väliin. Solmu s_n^* lisätään solmujen s_n ja s_1 väliin. Kun solmusta s_i^* lisätään kaaret kaikkiin verkon V solmuihin, on myös solmujen s_i^* ja s_i sekä s_i^* ja s_{i+1} välillä kaaret. Kun solmuja on lisätty verkkoon n kappaletta, on jokaisen verkon V solmuparin $\{s_i, s_{i+1}\}$ sekä parin $\{s_n, s_1\}$ välissä solmu s_i^*, josta menee kaaret solmuihin s_i ja s_{i+1}. Kaarijono

$$C = (\Phi^{-1}\{s_1, s_1^*\}, \Phi^{-1}\{s_1^*, s_2\}, \Phi^{-1}\{s_2, s_2^*\}, \ldots, \Phi^{-1}\{s_n, s_n^*\}, \Phi^{-1}\{s_n^*, s_1\})$$

on suljettu Hamiltonin ketju. □

Lause 3.3.5. *(Dirac, 1952) Olkoon suuntaamaton verkko yksinkertainen ja n-solmuinen, missä $n \geq 3$. Jos jokaisen solmun asteluku on vähintään $n/2$, on verkko Hamiltonin verkko.*

Todistus. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ lauseen ehdot täyttävä verkko. Lemman 3.3.4 mukaan verkko V saadaan täydennetyksi Hamiltonin verkoksi lisäämällä sinne m kappaletta solmuja, missä $m \leq n = |S|$, sekä asettamalla kaaret lisättyjen ja alkuperäisten solmujen välille. Olkoon tämä täydennetty verkko $V' = (S', K', \Phi')$. Olkoon m pienin määrä solmuja, jotka lisäämällä saadaan aikaiseksi Hamiltonin verkko V'. Osoitetaan, että $m = 0$ epäsuoralla todistuksella. Tehdään vastaoletus $m > 0$.

Verkossa V' on olemassa suljettu Hamiltonin ketju C. Nimetään ketjun C kaarien päätesolmut $C \cong (s_1, s', s_2, \ldots, s_n, s_1)$, missä $s_i \in S$ ja $s' \in S' \setminus S$.

Verkon V' solmut s_1 ja s_2 eivät saa olla vierekkäiset, sillä muutoin solmu s' on lisätty turhaan. Jos solmu s_i on vierekkäinen solmun s_1 kanssa, ei solmu s_{i+1} voi olla vierekkäinen solmun s_2 kanssa, sillä muuten löytyisi solmun s' tarpeettomaksi tekevä suljettu Hamiltonin ketju

$$C' = (s_1, s_i, s_{i-1}, \ldots, s_2, s_{i+1}, \ldots, s_n, s_1).$$

Verkosta V' löytyy siis yhtä monta solmun s_2 ei-vierekkäistä solmua, kuin solmulla s_1 on vierekkäisiä solmuja, joita puolestaan on $n/2 + m$ kappaletta. Toisaalta solmulla s_2 on lauseen oletusten mukaan $n/2 + m$ vierekkäistä solmua. Solmun s_2 vierekkäiset ja ei-vierekkäiset solmut tekevät siis yhteensä $n + 2m$ solmua. Mutta $|S'| = n + m$, joten $m = 0$, mikä on ristiriita vastaoletuksen kanssa. [15] $\square$

Lause 3.3.6. *(Ore, 1960) Olkoon V yksinkertainen ja yhtenäinen suuntaamaton n-solmuinen verkko, missä $n \geq 3$. Jos verkon V jokaiselle ei-vierekkäiselle solmulle x ja y on voimassa $a(x) + a(y) \geq n$, on verkko V Hamiltonin verkko.*

Todistus. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ Lauseen 3.3.6 ehdot täyttävä verkko. Jos $n = 3$, ainoastaan täydellinen verkko täyttää lauseen oletukset. Täydellinen verkko on Hamiltonin verkko, joten väite pätee kun $n = 3$.

Todistetaan tapaukset $n \geq 4$ epäsuoralla todistuksella. Olkoon verkko V sellainen ei-Hamiltonin verkko, joka täyttää Lauseen 3.3.6 ehdot. Ristiriidan aikaansaamiseksi riittää osoittaa, että on olemassa sellaiset verkon V ei-vierekkäiset solmut x ja y, joille on voimassa $a(x) + a(y) \leq n - 1$.

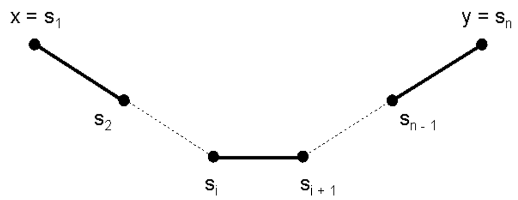
Jos verkkoon V lisätään kaaria siten, että verkko säilyttää yksinkertaisuuden, muuttuu verkko jossain vaiheessa Hamiltonin verkoksi (viimeistään siinä vaiheessa kun verkosta tulee täydellinen verkko). Muodostetaan yksinkertainen verkko V^* siten, että lisätään kaaria yksi kerrallaan verkkoon V niin kauan, että muodostuu Hamiltonin verkko, ja poistetaan tämän jälkeen viimeiseksi lisätty kaari k, jonka päätesolmut olkoot x ja y. Tällöin verkosta V^* löytyvät ei-vierekkäiset solmut x ja y, joiden välillä on avoin Hamiltonin ketju C. Jos $a(x) + a(y) \leq n - 1$ pätee verkossa V^*, on kyseinen epäyhtälö voimassa myös verkossa V.

Koska verkko V^* on yksinkertainen, voidaan ketjua C merkitä yksikäsitteisesti kirjoittamalla ylös ketjussa esiintyvät solmut järjestyksessä. Olkoon siis ketju

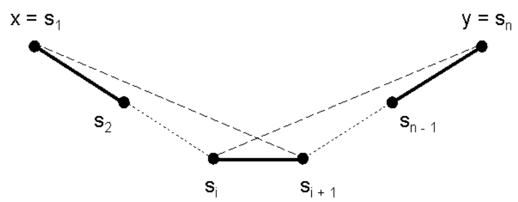
$$C \cong (s_1, s_2, \ldots, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{n-1}, s_n)$$

avoin Hamiltonin ketju verkossa V^*, missä ketjun päätesolmut ovat $x = s_1$ ja $y = s_n$ (Kuva 2).

Olkoot s_i ja s_{i+1} mielivaltaiset – ei kuitenkaan s_1 eikä s_n – vierekkäiset solmut, jotka tulevat peräkkäin ketjussa C. Solmupareista $\{s_1, s_{i+1}\}$ ja $\{s_i, s_n\}$ vähintään toisen parin solmujen on oltava ei-vierekkäisiä, koska muussa tapauksessa ketju $(s_1, s_2, \ldots, s_i, s_n, s_{n-1}, \ldots, s_{i+1}, s_1)$ on suljettu Hamiltonin ketju verkossa V^* (Kuva 3).



Kuva 2: Avoin Hamiltonin ketju $k : x \to y$ verkossa V^*



Kuva 3: Suljettu Hamiltonin ketju verkossa V^*

Tarkastellaan verkon V^* yhteysmatriisia, jossa solmut on indeksoitu ketjun C järjestyksen mukaiseksi. Yllä olevan tarkastelun nojalla tämän yhteysmatriisin luvuille $a_{i,j}$ on voimassa $a_{1,i+1} + a_{i,n} \leq 1$, kun $i = 2, \ldots, n-2$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
a(x) + a(y) &= \sum_{i=2}^{n-1} a_{1,i} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} \\
&= a_{1,2} + \sum_{i=3}^{n-1} a_{1,i} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{i,n} + a_{n-1,n} \\
&= 1 + \sum_{i=2}^{n-2} a_{1,i+1} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{i,n} + 1 \\
&= 2 + \sum_{i=2}^{n-2} (a_{1,i+1} + a_{i,n}) \\
&\leq 2 + n - 3 = n - 1.
\end{aligned}$$

Tällöin myös verkosta V löytyy ei-vierekkäiset solmut x ja y, joille pätee $a(x)+a(y) \leq n-1$, mikä on ristiriita lauseen oletuksen kanssa. [2, ss. 269-270] $\square$

4 Ainedidaktinen viitekehys

Tässä luvussa käydään läpi Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin taustalla olevaa matematiikan didaktista teoriaa. Luvun pääasiallisena lähteenä on käytetty Haapasalon kirjan vanhempaa [3] ja uudempaa [4] painosta.

4.1 Ongelman määrittely

Mikä on ongelma? Tämä kysymys tuottaa varmasti erilaisia vastauksia riippuen siitä keneltä kysytään. Sana "ongelma" tuottaa yleensä negatiivisia mielikuvia. Mutta jos ongelmat tarkoittavat automaattisesti jotain pahaa, ei matematiikan opiskelun perustaminen ongelmien varaan kuulosta kovin hyvältä idealta.

Jokin tilanne tai tehtävä ei automaattisesti ole ongelma kaikille ihmisille. Esimerkiksi jonkun mielestä oma alkoholin käyttö ei välttämättä ole ongelma, mutta puoliso voi olla asiasta hyvinkin eri mieltä. Tai vielä tarkemmin sanottuna, alkoholisti ei välttämättä koe tarvetta lopettaa juomistaan, kun taas lähiomaiset haluaisivat saada juomisen loppumaan, mutta eivät näe välittömiä keinoja tämän toteuttamiseen. Jos taas alkoholisti haluaisi lopettaa juomisen, mutta ei keksi miten pitää viinanhimoaan kurissa, näkee hän tilanteen itsekin ongelmana. Jos taas juomisen lopettaminen onnistuu helposti, ei tilanteessa ole mitään ongelmaa.

Vastaavanlainen tilanne pätee myös matematiikassa ratkaistaville ongelmille. Jos jonkin tehtävän tai ongelmatilanteen ratkaiseminen ei kiinnosta jotakuta oppilasta, ei kyseinen tehtävä ole hänelle ongelma. Jos tehtävä taas on liian helppo tai ratkaistavissa rutiininomaisesti, ei voida myöskään puhua ongelmasta.

Haapasalo määrittelee ongelman seuraavalla tavalla [3, s. 17]: *"Jotta tilanne olisi määrätyllä hetkellä tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä, juuri sillä hetkellä, tietoista, päämäärähakuista (ajattelu)toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja."*

4.2 Erilaisia ongelmatyyppejä

Ongelmia voidaan luokitella monin tavoin. Tässä työssä käytetään jaottelua kolmeen eri luokkaan: interpolaatio-ongelmat, analyysi-synteesi -ongelmat sekä dialektiset ongelmat. Luokitteluperusteina käytetään kolmea näkökulmaa: millaisia ominaisuuksia on ongelman lähtötilalla, millaisia ominaisuuksia on ongelman lopputilalla (halutulla ratkaisulla) sekä millaisia askeleita (operaatioita) tarvitaan ratkaisuun pääsemiseksi. [3, s. 37]

4.2.1 Interpolaatio-ongelmat

Interpolaatio-ongelma on nimensä mukaisesti kahden erillisen ”navan”, eli alku- ja lopputilan, yhdistämistä vaativa ongelma. Alku- ja lopputilat ovat tarkkaan tiedossa, ja varsinaisena tehtävänä on etsiä polku näiden kahden tilan välille. Ratkaisupolun löytämiseen johtavat operaatiot tulee käydä ilmi joko tehtävän asettelusta, tai niiden tulee olla ratkaisijalle ennestään tuttuja. [3, s. 38]

Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalissa ei esiinny interpolaatio-ongelmia, joten niitä ei tarkastella tässä tämän enempää.

4.2.2 Analyysi-synteesi -ongelmat

Interpolaatio-ongelmia astetta vaativampia ovat *analyysi-synteesi -ongelmat*. Siinä missä ensin mainitussa ongelmatyypissä tiedetään sekä alku- että lopputilat, analyysi-synteesi -ongelmissa voi jompikumpi tiloista olla hämärän peitossa. Olennainen ero näiden kahden ongelmatyypin välillä on myös siinä, että analyysi-synteesi -ongelmissa ratkaisuun johtavat operaatiot eivät saa käydä ilmi tehtävän asettelusta, ja ne voivat olla ongelmanratkaisijalle entuudestaan tuntemattomia. [3, s. 39]

4.2.3 Dialektiset ongelmat

Kolmas ongelmatyyppi, *dialektiset ongelmat*, menee aiemmin esiteltyjä ongelmatyyppejä pidemmälle vapaudessaan ja epämääräisyydessään. Dialektisten ongelmien tunnusmerkki on, että niissä ei ole annettu lopputilaa, ja alkutilakin voi olla epämääräinen. Ongelmanratkaisu voi alkaa alkutilan tarkemmalla määrittelemisellä ja lopputila voi puolestaan käydä ilmi ongelmanratkaisuprosessin aikana. Dialektisille ongelmille on myös tyypillistä lopputuloksen arvioinninvaraisuus; ratkaisu ei ole joko oikein tai väärin, vaan sen mielekkyys on kiinni ratkaisun perusteluista. Tätä seikkaa korostaa monesti dialektisten ongelmien kysymyksenasettelu, jossa käytetään usein fraaseja ”...mielestäsi...”, ”...oma näkökantasi...” jne. [3, s. 41]

4.3 Ongelmanratkaisusta

Tuskin kukaan kiistää, ettei ongelmanratkaisu ole merkittävä taito. Monet ovat varmasti myös sitä mieltä, että ongelmanratkaisua tulee opettaa koulussa. Se mitä hyvä ongelmanratkaisu on ei kuitenkaan ole niin selvää, puhumattakaan siitä, miten ongelmanratkaisua voidaan opettaa tehokkaasti. Jos hyvä ongelmanratkaisu tarkoittaa ainoastaan sitä, että ongelmaan saadaan hyvä ratkaisu, on hyvin vaikea lähteä tutkimaan ja analysoimaan ongelmanratkaisun opettamista. Siksi onkin syytä keskittyä siihen, mitä tapahtuu ongelmanratkaisun aikana. Näitä lopulta ratkaisuun johtavia prosesseja kutsutaan *heuristisiksi prosesseiksi.*

4.3.1 Heuristiset prosessit

Ongelmien ratkaiseminen edellyttää yleensä *asiatietoa.* Asiatiedolla voidaan tarkoittaa esimerkiksi faktoja, otaksumia sekä jopa kaavamaisia tai algoritmin tyyppisiä menettelyjä[2], tietoja, joita voidaan tarvittaessa palauttaa mieleen. Erityisesti tämä käy ilmi matemaattisista ongelmista, joissa sovelletaan lähes poikkeuksetta aiemmin opittua tietoa. [3, s. 25]

Jos kuitenkin pelkkä asiatieto riittää tehtävän ratkaisemiseen, ei kyseessä ole ongelma lainkaan. Eräs ongelman tunnusmerkki on, ettei siihen ole välittömästi näkyvissä ratkaisua (Luku 4.1). Ongelmanratkaisun on sisällettävä prosesseja, joissa valitaan ja käsitellään tilanteeseen sopivaa asiatietoa. Strategioita tällaisten prosessien suorittamiseksi sanotaan *menetelmällisiksi tiedoiksi*. [3, s. 25]

Ongelmanratkaisustrategiat sisältävät myös oman ajattelun arviointia ja kontrollia. Näistä voidaan käyttää nimitystä *metakognitiot*. Kontrollia on esimerkiksi se pieni ääni pään sisällä, joka sanoo: ”nyt tämä muodostamani yhtälö ei näytä ratkeavan mitenkään järkevään muotoon. Palataanpa askel taaksepäin ja katsotaan, onko yhtälö muodostettu oikein. Jos on, ei yhtälön muodostaminen vaikuta sittenkään käyttökelpoiselta ratkaisulta, ja voin harkita ongelman ratkaisuun jotain muuta keinoa.” Menetelmällisiä tietoja sekä metakognitioita voidaan nimittää yhteisellä nimellä heuristiset prosessit. [3, ss. 25-26]

Luvussa 4.1 esiintynyt ongelman määrittely voidaan heurististen prosessien avulla muotoilla yksinkertaisemmin [3, s. 26]: ”*Ongelma on tietynlainen epätasapaino- tai ristiriitatilanne, joka synnyttää yksilössä heuristisia prosesseja tähdäten tilanteen tasapainottamiseen eli ratkaisun löytämiseen.*”

4.3.2 Pólyan ongelmanratkaisuprosessi

Unkarilainen matematiikko George Pólya jakaa ongelmanratkaisuprosessin seuraaviin vaiheisiin [3, s. 178]:

1) ongelman ymmärtäminen,

2) ratkaisusuunnitelman laatiminen,

3) ratkaisusuunnitelman toteutus,

[2]Esimerkiksi rutinoitunut yhtälönratkaisu.

4) prosessin tulkinta ja feedback.

Ensimmäisessä vaiheessa tiedostetaan ongelmatilanne ja motivoidutaan ratkaisemaan ongelma. Tarvittavat henkiset toiminnat, tietojen valikoituminen ja käytännön toimenpiteen alkavat. Ongelman ymmärtäminen voi myös vaatia ongelmanasettelun uudelleen muotoilua. Myös mallin laatiminen on erittäin tehokas tapa ongelman ymmärtämiseksi. [3, s. 179]

Ratkaisusuunnitelman laatiminen voi alkaa ongelman täsmentämisellä sekä analysoimisella. Nämä vaiheet sisältävät mm. ongelman mielekkyyden tarkastelemista ja ongelman olennaisimpien osien tunnistamista. Varsinkin matematiikassa hyvin olennaista on myös annettujen tietojen ja ehtojen pohtiminen. Siis ovatko annetut tiedot ja ehdot riittävät ja ristiriidattomat. Jos annetut tiedot ja ehdot eivät ole riittävät, on niitä valittava lisää. Vastaavasti on tunnistettava, ovatko kaikki annetut tiedot ja ehdot ongelman ratkaisemisen kannalta olennaisia[3]. [3, s. 179]

Ratkaisusuunnitelman laatimisen tavoitteena on luonnollisesti ratkaisuidean löytäminen. Ratkaisuidea on tie, keino, suunnitelma, strategia tai muu vastaava menetelmä, joka johtaa todennäköisesti ratkaisun löytämiseen. Jos tätä ideaa ei meinaa löytyä, kannattaa varmistaa onko ymmärtänyt ja analysoinut ongelman oikein sekä miettiä, onko ongelma purettavissa pienemmiksi ongelmiksi tai vastaavasti osa laajempaa kokonaisuutta. Myös ongelman ehtojen muuttaminen on tehokas keino ongelman täsmentämiseksi. [3, s. 180]

Ratkaisuidean toteuttamisessa suoritetaan suunnittelussa ehdotetut toimenpiteet mahdollisimman huolellisesti. Tämän jälkeen tehdään ratkaisun määrittäminen, missä tarkastetaan, että toteutusvaiheessa on löytynyt ongelmalle ratkaisu. Lopuksi ratkaisu on vielä esitettävä. Pelkän ratkaisun lisäksi on yleensä myös hyvä esittää siihen johtaneet oleelliset askeleet ja päättelyt. Esittämisen muoto ja tarkkuus riippuvat yleensä tilanteesta, mutta innokas ongelmanratkaisija näkee tämän vaiheen aina tilaisuutena kehittää sujuvaa ja virheetöntä tiedon esittämistä. [3, s. 180]

Prosessin tulkinnassa varmistutaan saadun ratkaisun oikeellisuudesta varmistamalla, että se on sopusoinnussa ongelmanasettelun kanssa. Lisäksi voidaan esimerkiksi kokeilla ongelman ratkaisemista vaihtoehtoisilla menetelmillä ja katsoa päädytäänkö samaan lopputulokseen. Ongelmanratkaisua on syytä arvostaa kokonaisena prosessina, joten lopuksi kannattaa myös painaa mieleen ratkaisu ja siihen johtaneet menetelmät tulevaisuuden varalle. Ratkaisussa käytetyt ja mahdollisesti sitä varten kehitetyt työkalut voivat olla

[3]Koulussa yleisesti ratkaistavien tehtävien tekeminen ei kehitä näitä taitoja, sillä koulumatematiikan tehtävät sisältävät yleensä kaiken tarpeellisen tiedon eikä mitään ylimääräistä.

hyödyllisiä tulevaisuudessakin. Myös ratkaisun merkitystä voi arvioida, ja pohtia jopa ratkaisun yleistä julkistamistakin. [3, s. 181]

4.3.3 Ongelmanratkaisun opettamisesta

Mitä ongelmanratkaisun opettaminen tarkoittaa? Voiko ongelmanratkaisua opettaa? Jos voi, niin miten? Haapasalon mukaan heuristiikkojen oppiminen parantaa yksilön ongelmanratkaisukykyä ja heuristiikkoja puolestaan voi oppia [3, s. 126]. Tämän perusteella vastattavaksi jää ainoastaan viimeisenä esitetty kysymys, tosin uudelleen muotoiltuna: miten heuristiikkoja voi oppia?

Heuristiikkojen opettaminen tulisi aloittaa mahdollisimman yksinkertaisilla strategioilla, joiden omaksumiseen oppilailla on kehityspsykologiset ja kognitiiviset edellytykset. Alkuvaiheessa tällaisia strategioita voivat olla esimerkiksi johtopäätösten tekeminen sekä vaihtoehtojen muodostaminen. Opettaminen on voitava toteuttaa mahdollisimman selkeillä ja varmasti suoritettavissa olevilla ohjeilla, ja kun ensimmäisten strategioiden käyttö on opittu, opettajan tulee esittää ongelmia, joiden ratkaisemiseen ne sopivat. Positiiviset kokemukset ovat myös hyvin merkittävässä roolissa, sillä niiden kautta oppilas innostuu yrittämään yhä haasteellisempien ongelmien ratkaisemista. [3, s. 130]

Haapasalo esittää seuraavanlaisen jaon, joka luokittelee oppilaat heidän ongelmanratkaisukykynsä mukaan [3, s. 223]:

1. taso Oppilaalla ei ole mitään kuvaa siitä, miten ongelmatilanteessa tulisi käyttäytyä. Opettaja on hänelle ainoa malli ongelman ratkaisijasta.

2. taso Oppilas ymmärtää ongelmanratkaisun merkityksen, uskaltautuu käymään käsiksi tutun tuntuisiin ongelmiin, ideoi ryhmässä. Opettaja on tuki ja ”proteesi”.

3. taso Oppilaalla on hyvä käsitys ongelmanratkaisusta. Hän uskaltautuu jo kokeilemaan uudentyyppisiä strategioita. Opettaja on ongelmien ”toimittaja”.

4. taso Oppilas kykenee valitsemaan eri strategioista sopivimman, näkee variaatioita ja yleistyksiä sekä esittää niitä muille. Opettaja on ”edistäjä”.

Jos oppilas edustaa 1. tasoa, on syytä lähteä liikkeelle oppilaalle luonnollisista ja rakenteeltaan yksinkertaisista ongelmista. Tärkeintä on varmistaa, että oppilas saa onnistumisen elämyksiä ja kokemusta ongelmatilanteessa käyttäytymisestä sekä kokee ongelmanratkaisutilanteet mahdollisimman miellyttäviksi. Opettajan on osattava olla elävä malli siitä, miten ongelmanratkaisutilanteissa käyttäydytään. Oppilaalle ei opeteta uusia heuristiikkoja, vaan tarkoitus on saada esille hänessä mahdollisesti piilevät ongelmanratkaisutilanteen toimintamallit. Oppilasta olisi myös syytä tukea ongelman purkamisessa Luvussa 4.3.2 esitetyn Pólyan ongelmanratkaisuprosessin mukaisiin osavaiheisiin. [3, s. 223]

Kun ongelmanratkaisu alkaa olla luonnollinen osa opetusta ja oppilaat saavat siitä riittävästi kokemusta, heille kehittyy halu kehittää ajatteluaan. Lisäksi oppilaat alkavat toimia ongelmanratkaisutilanteissa varmemmin ja heidän kykynsä kommunikoida ja käyttää korkeamman tason metakognitiivista ajattelua kasvaa. Ollaan siis edetty 2. tasolle. Tässä vaiheessa opettaja voi yrittää harjoitella oppilaiden kanssa helpompia strategioita, kuten ongelman osien erottamista, niiden lisäämistä tai vähentämistä sekä yksinkertaisten vaihtoehtojen ja johtopäätösten tekemistä. [3, s. 224]

Oppilaille tulee tarjota ongelmia, jotka pakottavat heidät työskentelemään ryhmissä ja jakamaan ideat muiden kanssa sekä käyttämään teknisiä apuvälineitä. Lisäksi tulee tarjota ongelmia, joiden kautta havaitaan matematiikan hyödyllisyys ja voima. Vaikka alkuun onkin tärkeä ratkaista niin sanottuja ”oikean maailman” ongelmia, tulisi jossain vaiheessa ratkaista myös matematiikan tutkimisesta nousevia ongelmia, joissa joudutaan tekemään yleistyksiä ja käyttämään uusia käsitteitä. [3, s. 224]

Haapasalo mainitsee useita periaatteita, jotka ovat välttämättömiä, kun yritetään kehittää oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja [3, ss. 224-225]. Tässä niistä muutama:

- Ongelmanasettelun on oltava ymmärrettävä ja tapahduttava ilman outoja käsitteitä.
- On pyrittävä muotoilemaan ongelma yleensä avoimena tai dialektisessa muodossa, elleivät jotkin syyt vaadi menettelemään toisin.
- On yritettävä kytkeä ongelma oppilaan arkielämään ja kokemusmaailmaan.
- Ratkaisuprosessista tulisi aina tehdä yhteenveto ja mahdollinen yleistys selkeästi, ymmärrettävästi ja riittävän yksityiskohtaisesti.
- *Ei pidä ratkoa samantapaisia ongelmia samalla menetelmällä, vaan joko samoja ongelmia täysin eri menetelmällä tai täysin erilaisia ongelmia samalla yleisellä menetelmällä!*

4.4 Käsitteet

Haapasalo mainitsee *käsitteistä* seuraavaa [3, s.51]: *"Voidaan – hieman väljässä mielessä tulkittuna – sanoa, että mikä tahansa (uusi) koulussa opittava asia voidaan tulkita käsitteeksi... Käsitteet ymmärretään sekä yksilön henkisenä rakenteena että yhteisesti hyväksyttyinä ilmausten merkityksinä. Ne voidaan määritellä joko väljästi ilmoittamalla käsiteluokkaan kuuluvia tai kuulumattomia jäseniä tai esittämällä määritteleviä ominaisuuksia tai ehtoja."* Näitä määritteleviä ominaisuuksia tai ehtoja eli relevantteja tunnusmerkkejä Haapasalo nimittää käsitteen *attribuuteiksi* [3, s. 52].

Käsitteet ovat hyvin merkittävässä asemassa matematiikassa ja matematiikan opetuksessa. Tätä mieltä on myös Opetushallitus, jonka laatimasta perusopetuksen opetussuunnitelmasta [13] kymmenen sivua on varattu matematiikalle. Nämä sivut sisältävät vähän alle puolen sivun mittaisen kuvauksen matematiikan opetuksen tavoitteista sekä opetuksen toteutuksesta, jonka jälkeen esitellään suuntaviivat tietyille ikäkausille (vuosiluokat 1-2, 3-5 jne.). Nämä ikäluokkien opetuksen kuvaukset jakautuvat neljään osaan: aluksi on parin rivin mittainen selostus opetuksen ydintehtävistä kyseiselle ikäkaudelle, jonka jälkeen tulevat opetuksen tavoitteet, keskeiset sisällöt, sekä hyvät taidot kyseisen ikäkauden päättyessä. Osio keskeiset sisällöt keskittyy luettelemaan opetettavia käsitteitä sekä vie noin puolet kunkin ikäkauden opetuksen kuvailusta. Lähes puolet matematiikan opetussuunnitelmasta keskittyy siis pelkästään luettelemaan, mitä käsitteitä matematiikassa on opittava.

4.5 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

4.5.1 Konseptuaalinen tieto

Konseptuaalinen tieto on nimensä mukaisesti käsitteellistä tietoa (tai tietoa käsitteistä). Perinteisempien määritelmien mukaan konseptuaalinen tieto sisältää matematiikan tapauksessa esimerkiksi käsitteiden nimet, symbolit sekä ominaisuudet. Modernimman määrittelyn mukaan konseptuaalinen tieto ei kuitenkaan ole pelkkiä yksittäisiä tiedonmurusia, vaan se pitää sisällään myös käsitteiden väliset yhteydet. Hyvin toisiinsa linkittyneet käsitteet muodostavat yhdessä *semanttisen verkon*. Haapasalo määrittelee nimenomaan tämän verkon konseptuaaliseksi tiedoksi, ja korostaa lisäksi määritelmässään yksilön kykyä tulkita ja rakentaa oman verkkonsa solmuja ja linkkejä. [3, ss. 55-56]

4.5.2 Proseduraalinen tieto

Proseduraalinen tieto on tietoa siitä, miten toimitaan. Tähän on perinteisesti liitetty formaalien käsitteiden symboliset esitysmuodot sekä toimintamenetelmät ja algoritmit ongelmien ratkaisemiseksi. Ero proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välillä on vaikeasti määriteltävissä, mutta eräänä kriteerinä voidaan pitää toimintojen automatisaatiota. Esimerkiksi murtolukujen erilaisten esitysmuotojen (murtoluku, desimaaliluku, prosenttiluku) muodostama semanttinen verkko on aluksi konseptuaalista tietoa. Riittävän harjoittelun jälkeen esitysmuodosta toiseen siirtyminen on kuitenkin rutinoitunut, jolloin esitystavan muuntaminen toiseksi on proseduraalista tietoa. [3, ss. 55-58]

4.5.3 Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon linkittäminen

Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon linkittäminen liittyy olennaisesti kysymykseen, pitääkö osata tehdä ymmärtääkseen asian vai päinvastoin [4, s. 59]. Esimerkiksi autolla ajaminen voi onnistua varsin hyvin, vaikkei ymmärtäisi käytännössä mitään auton tekniikasta. Toisaalta auton tekniikkaa on kenties helpompi oppia ymmärtämään, jos on jo kokemusta auton käsittelystä. Tässä tapauksessa siis proseduraalinen tietämys voi edeltää konseptuaalista tietämystä.

Päinvastainen esimerkki löytyy esimerkiksi matematiikan puolelta. Opiskelija voi oppia suorittamaan erilaisten funktioiden rutiininomaista derivointia helpostikin, mutta tämä tuskin lisää hänen ymmärrystään derivaatan käsitteestä ja tuskin edes helpottaa käsitteen omaksumista. Sen sijaan sopivalla käsitteenmuodostusprosessilla voidaan saada aikaiseksi hyvää konseptuaalista tietämystä derivaatan käsitteestä, minkä jälkeen voidaan helpommin aloittaa derivoimissääntöjen eli proseduurien konstruoiminen.

Kehityksellisessä lähestymistavassa konseptuaaliseen tietoon edetään proseduraalisen tiedon kautta. Tällöin konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon suhde on joko *geneettinen* – proseduraalinen tieto on välttämätön, mutta ei riittävä ehto konseptuaaliselle tiedolle – tai *samanaikaisen aktivoinnin* -periaatteen – proseduraalinen tieto on välttämätön ja riittävä ehto konseptuaaliselle tiedolle – mukainen. [4, ss. 59-60]

Koulutuksellisessa lähestymistavassa proseduraalinen tieto saavutetaan hankkimalla ensiksi laadukasta konseptuaalista tietoa. Tällöin konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon suhde on joko *dynaamisen interaktion* (konseptuaalinen tieto on välttämätön mutta ei riittävä ehto proseduraalisen tiedon muodostumiselle) tai samanaikaisen aktivoinnin mukainen. [4, ss. 59-60]

4.6 Käsitteenmuodostusprosessi

Käsitteenmuodostusprosessi voidaan jakaa viiteen eri osavaiheeseen: orientaatioon, määrittelyyn, tunnistamiseen, tuottamiseen ja lujittamiseen. Nämä vaiheet voivat monissa tilanteissa mennä osin päällekkäin, joten tätä jakoa tulee pitää ainoastaan mallina, joka helpottaa opettajan opetuksen suunnittelua sekä opetusseurantaa. [3, ss. 201-202]

Orientaatiovaiheessa oppilaalle synnytetään *loogis-kognitiivinen ristiriita*, usein hyvän ongelmatehtävän avulla. Loogis-kognitiivinen ristiriita tarkoittaa tilannetta, jossa oppilas ei löydä sopivaa mentaalimallia tulkitsemaan ongelmaa. Tämä voi tarkoittaa jotain seuraavista vaihtoehdoista:

- ristiriita käytettävissä olevien strategioiden ja ongelman vaatimusten välillä,
- useiden erilaisten kilpailevien skeemojen[4] valinnasta aiheutuva ristiriita,
- ristiriita ongelman ratkaisun ja sen epäkäytännöllisyyden tai hankaluuden välillä tai
- ristiriita ratkaisun ja sen perustelun puuttumisen välillä.

Ratkaistessaan tätä ristiriitaa oppilas törmää väistämättä käsitteen olennaisiin tunnusmerkkeihin eli *attribuutteihin*. Tämän takia ongelman on oltava sellainen, että oppilas pystyy tulkitsemaan sitä mielikuviensa ja malliensa avulla. Myös ongelman esittäminen dialektisessa muodossa voi auttaa ristiriidan havaitsemista. [3, ss. 102-103, 203]

Määrittelyvaiheessa käsitteen attribuutit kootaan ja lyödään lukkoon. Ihanteellisessa konstruktivistisessa opiskeluympäristössä tämä kokoaminen tapahtuu siten, että oppilaat karsivat keskenään juttelemalla ja väittelemällä löytämistään tunnusmerkeistä niin sanotusti löysät pois, ja jäljelle jäävät vain kaikkein tärkeimmät seikat. [3, s. 204]

Tunnistamisvaihe on hyvin merkittävä käsitteen omaksumisen kannalta. Tunnistamisvaiheessa oppilaiden annetaan harjoitella sekä käsitteen tunnusmerkkien tunnistamista erilaisissa esitysmuodoissa[5], että tiedon muuntamista erilaisesta esitysmuodosta toiseen. Tehtävien on oltava aluksi hyvin helppoja, ja niiden pitää sisältää tiedon prosessoimista mahdollisimman vähän. Vähitellen voidaan siirtyä kohti haastavampia tunnistustehtäviä. [3, s. 205]

[4] Skeemalla tarkoitetaan, että ongelmaan osataan linkittää jokin ongelmanratkaisumetodi.

[5] Esitysmuoto on yleensä sanallinen, kuvallinen tai symbolinen

Kun käsite on omaksuttu riittävän hyvin, voidaan siirtyä *tuottamisvaiheeseen*. Tässä vaiheessa harjoitellaan käsitteen tunnusmerkkien tuottamista samojen esitysmuotojen välillä kuin tunnistamisvaiheessakin; kuvallisesta esityksestä sanalliseen, sanallisesta esityksestä symboliseen ja niin edelleen. Tämänkään vaiheen tehtävät eivät saa vaatia liiallista tiedon prosessointia oppilaalta. [3, s. 206]

Lujittamisvaiheessa oppilas syventää tietämystään opiskeltavasta käsitteestä. Tässä vaiheessa voidaan edellyttää jo tiedon prosessoimista. Lujittamisvaihe sisältää myös käsitteeseen liittyvien proseduurien johtamista. Käsitettä voidaan soveltaa niin rutiini- kuin ongelmatehtävissäkin. [3, s. 206]

4.7 Konstruktivismi

Vaikka *konstruktivismi* mielletäänkin monesti oppimisteoriaksi, on kyseessä paljon laajempi käsite kuin pelkästään oppimisteoria. Konstruktivismi on enemmänkin paradigma tai yleinen perspektiivi, mistä asioita tarkastellaan. [3, s. 95]

Konstruktivismi nivoutuu vahvasti yhteen tiedon subjektiivisuuden (mikään tieto ei ole kaikille samaa) kanssa. Haapasalo kirjoittaa, että konstruktivismista puhuttaessa on aina syytä erottaa toisistaan *tieto* ja *informaatio* [3, s. 96]. Esimerkiksi kellonaika on informaatiota, ja kysymykseen ”Paljonko kello on?” voidaan antaa vastaus suoraan, ja ihmiset tuskin tulkitsevat tätä vastausta eritavoin. Sen sijaan kysymykseen ”Mikä atomi on?” annetut vastaukset voivat saada hyvin erilaisia tulkintoja vastauksen kuulijasta riippuen. Vastaus ”positiivisen ja negatiivisen alkeisvarauksen omaavien sekä varauksen suhteen neutraalien hiukkasten muodostama kemiallisesti jakamaton aineen rakenneosa” saa varmasti erilaiset mielikuvat liikkeelle peruskoululaisessa, lukiolaisessa ja yliopisto-opiskelijassa. Paitsi että vastauksessa esiintyneet käsitteet kuten sähkövaraus ja hiukkanen voivat merkitä hyvin erilaisia mielikuvia, vaanii taustalla myös sanan atomi herättämät mielikuvat. Alakoululaisetkin ovat kuulleet puhuttavan atomipommista ja atomivoimalasta. Sana atomi voi hyvinkin alkaa hahmottua näiden mielikuvien perusteella. Sanasta atomi voi tulla mieleen jopa grilliherkku: atomipiirakka.

Haapasalo luettelee konstruktivismin sisältävän seuraavat peruspiirteet [3, s. 95]:

- yksilön tai sosiaalisten tiedeyhteisöjenkään muodostama tieto ei voi olla ontologisesti objektiivista, vaan
- jo ulkoisen maailman havaitseminen tapahtuu ikään kuin linssin läpi; se on aina valikoivaa ja tulkitsevaa sen viitekehyksen mukaan, mikä havaitsijalla on

- tiedon olemukseen vaikuttavat aina se kokemusmaailma, käsitteistö ja näkökulma, joka kulloinkin tietoa synnyttää tai tarkastelee

- tieto ei ole sellaisenaan välitettävissä yksilöltä toiselle, vaan se on jokaiselle erikseen persoonallista ja toisten luoksepääsemätöntä

- tieto on pohjimmiltaan yksilön kokemusmaailman uudelleen organisoitumista.

Jos ulkoisesta maailmasta saatavaa objektiivista tietoa pidetään mahdottomana, puhutaan *radikaalista konstruktivismista*. Tämän näkemyksen kannattajat pitävät usein kaikenlaisia opetussuunnitelmia ja tavoitteita sekä radikaalia konstruktivismia täysin yhteensovittamattomina. [3, ss. 97-98]

Radikaalille konstruktivismille eräänlaisen vastakohdan muodostaa *heikko konstruktivismi*, jossa ulkopuolista maailmaa pidetään objektiivisesti havaittavissa olevana ja hyväksytään objektiivisen tiedon olemassaolo. Heikko konstruktivismi ei tarjoa kovin suuria mahdollisuuksia yksilön omille konstruktioille, mutta se tarjoaa pelkän tiedon esittämisen ja mekaanisen siirtämisen asemasta paremman mahdollisuuden muodostaa pysyviä tietorakenteita. [3, ss. 98-99]

Koska matematiikassa pyritään saavuttamaan tietoa, joka on suhteellisen objektiivista, on hyödyllistä yhdistellä radikaalia ja heikkoa konstruktivismia. Tämä tapahtuu *lokaalin konstruktivismin* välityksellä. Oppilas voi suorittaa hyvinkin radikaaleja konstruktioprosesseja muovaillessaan tietoa, mutta vasta lopullisesti saavutetun tiedon luonne osoittaa, onko koko prosessi radikaali vai heikko konstruktio [3, ss. 100-102]. Oppilas on esimerkiksi voinut nelikulmioita luokitellessaan keksiä koverille nelikulmioille nimityksen ”melkein kolmio”, joka on radikaali lokaali konstruktio. Hänen kaverinsa on kuitenkin voinut kritisoida nimitystä sen epämääräisyyden vuoksi, jolloin oppilaat ovat lopulta päätyneet nimittämään koveraa nelikulmiota pelkästään nelikulmioksi, mikä on siis globaalissa mielessä heikko konstruktio.

4.8 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu (mathematical thinking) käsitteenä on vaikea määritellä, vaikka siihen törmää usein sekä didaktiikan kirjallisuudessa, että opetushallituksen asiakirjoissa. Esimerkiksi vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteissa sanotaan, että:

”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja”. [14, s. 118]

Opetussuunnitelman perusteissa ei kuitenkaan määritellä tarkemmin mitä matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan. Joutsenlahti määrittelee matemaattisen ajattelun seuraavalla tavalla [8, s. 367]:

"Matemaattinen ajattelu on oppijalle merkityksellisten matemaattisten taitojen (konseptuaalisten tietojen, proseduraalisten tietojen ja niiden yhdistelmien) prosessointia. Tiedon prosessointi voi olla esimerkiksi intentionaalista ongelmanratkaisua[6]*, opittavan aineksen ymmärtämistä tai omaehtoista tietojen tutkimista. Tietoisuus ajattelunprosesseissa ja niiden hallinnassa on toisaalta osa oppijan tietorakennetta. Ajatteluprosessia suuntaavat ja rajaavat oppilaan kyvyt, asenteet, uskomukset, senhetkiset tiedot ja taidot.".*

4.8.1 Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisu

Ongelmanratkaisu voidaan nähdä koko matemaattisen ajattelun ytimenä. Matemaattista ajattelua voidaan havainnoida kouluissa pääasiassa kahden prosessin avulla: ongelmanratkaisun ja käsitteenmuodostumisen avulla [7, s. 68]. Matemaattista ajattelua voi parhaiten oppia ongelmatilanteilla, jotka vaativat fyysistä, emotionaalista ja älyllistä osallistumista. Tämän takia ongelmatilanteiden tulee olla älyllisesti haastavia tehtäviä, joita ei voida ratkaista nopeasti ja rutiininomaisesti. Myös ongelmatilanteen tiedostamisprosessi ja ongelmanratkaisuprosessi ovat aina matemaattista ajattelua.

4.8.2 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen (mathematical profiency) muodostuu eri tekijöistä, jotka liittyvät matemaattiseen ajatteluun, ymmärtämiseen ja ongelmanratkaisuun. Nämä tekijät ovat:

1) *Konseptuaalinen ymmärtäminen* (conceptual understanding)
on matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja niiden suhteiden ymmärrystä.

2) *Proseduraalinen sujuvuus* (prosedural fluency)
on taitoa toteuttaa matemaattisia menettelytapoja tehokkaasti, täsmällisesti ja tarkoituksenmukaisesti.

3) *Strateginen kompetenssi* (strategic competence)
on taitoa muunnella, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.

4) *Soveltava päättely* (adaptive reasoning)
on kykyä selittää, perustella, reflektoida ja ajatella loogisesti.

[6] Intentionaalisella ongelmanratkaisulla tarkoitetaan, että oppija pyrkii aktiivisesti ja tarkoituksenmukaisesti etsimään strategioita ongelman ratkaisemiseksi.

5) *Yritteliäisyys* (productive disposition)
   on ahkeruudella ja tehokkuudella mitattavaa toimintaa.

Matemaattisen osaamisen avulla voidaan ratkaista matemaattisten ongelmien lisäksi myös muunlaisia ongelmia. Koponen määrittelee *matemaattisen ongelman (mathematical problem)* yksinkertaisesti: *"Ongelma on matemaattinen silloin, kun sen ratkaisemiseen käytetään jollakin tavoin matemaattisia keinoja."* [10, s. 159]. Matemaattinen osaaminen ei kuitenkaan kuulu pelkästään matematiikkaan ja matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen, vaan se on osa laajempaa kontekstia. Osa matemaattista osaamista on myös tunnistaa uusia tilanteita, joissa voidaan käyttää hyväksi erilaisia ajattelutapoja ja tekniikoita. Erilaiset ongelmanratkaisumenetelmät voidaan myös rinnastaa matemaattiseen ajatteluun.

4.8.3 Todistusajattelu

Todistusajattelua kehittävät tehtävät näyttäytyvät koulumatematiikassa pääasiassa logiikan päättelysääntöjen totuusarvotaulukoinnissa, vaikka niiden hyödyllisyys on kiistanalaista [11, s. 102]. Totuusarvotaulukoinnin ongelma on se, että se muuttaa todistamisen epähavainnolliseksi ja monimutkaiseksi. Näin oppilaille ei muodostu riittävää käsitystä todistusajattelusta ja sen hyödyllisyydestä.

Jos sen sijaan loogiset päätelmät liitetään käytännön ongelmatilanteisiin, monipuolistavat ne todistusajattelun kehittymistä. Käytännön ongelmatilanteisiin liittyvät todistustehtävät ovat kiinnostavia ja toimivat itsessään motivaattoreina. Tämä näkökulma liittää todistusajattelun kehittymisen myös ongelmanratkaisuprosesseihin.

Koulumatematiikan kannalta todistusajattelulla tarkoitetaan:

1) Logiikan päättelysääntöjen avulla tapahtuvaa systemaattista todistamista. Tätä edustaa esimerkiksi logiikan päättelysääntöjen totuusarvotaulukointi.

2) *Matemaattisen todistamisen* mallien avulla tapahtuvaa todistamista. Matemaattisella todistamisella tarkoitetaan vakiintuneita todistusmalleja, kuten esimerkiksi suora, epäsuora, induktio- ja olemassaolotodistus.

3) Ongelmanratkaisun avulla tapahtuvien kokeilujen ja arvailujen toteennäyttämistä. Nämä ongelmanratkaisut eivät yleensä sisällä matemaattisen todistamisen mukaista toimintaa, päättelyitä tai todistuksia.

Suurin osa koulumatematiikan todistamisesta tapahtuu logiikan päättelysääntöjen avulla. Todistaminen tapahtuu useimmiten mekaanisella ja rutiininomaisella tekniikalla, joka harjoittaa matemaattista todistamista, mutta ei kehitä oppilaan todistusajattelua.

Jos ongelmanratkaisu on jokaisessa ongelmatilanteessa erilainen, kehittää se oppilaan todistusajattelua, sillä ongelmia ei ole mahdollista ratkaista mekaanisella ja rutiininomaisella tekniikalla. Jos näin voitaisiin tehdä, ei kyseessä olisi aito ongelma.

5 Lukiolaisille tuotetun oppimateriaalin analysointia

5.1 Oppimateriaalin lyhyt esittely

Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaali (Liite 1) on oppikirjaa vastaava 119-sivuinen monistepaketti. Vaikka sivumäärä kuulostaa todella laajalta lukiomatematiikan oppikirjaksi, on huomattava, että Verkkoteoriaa lukiolaisille -moniste sisältää runsaasti kuvia. Materiaalissa on myös esimerkiksi usean sivun mittaisia kertauskoosteita jokaisen luvun päätteeksi.

Oppimateriaalin perusidea on seuraava: mahdollisimman moni uusi käsite tai proseduuri tulee ensimmäistä kertaa esille jonkin ongelman yhteydessä[7]. Moniste on siis kokoelma erilaisia ongelmia, joiden myötä verkkoteorian käsitteitä, lauseita ja ongelmanratkaisumenetelmiä otetaan esille sopivassa järjestyksessä niin, että oppimateriaali muodostaa loogisen kokonaisuuden. Koska ongelmat ovat olennaisin osa oppimateriaalia, on jokaisen ongelman merkitystä korostettu kehystämällä se. Jokaisen ongelman jälkeen tekstissä esitetään verkkoteorian välineistöön pohjautuva ratkaisu ongelmalle.

Toinen oppimateriaalin perusidea on, että siitä on karsittu matemaattiset symbolit niin vähiin kuin mahdollista. Monet verkkoteoriaa käsittelevät oppimateriaalit on kirjoitettu hyvin formaalilla matematiikan kielellä, jota on todella vaikea ymmärtää ilman perusteellista harjoittelua. Suurin osa tästä harjoittelusta tulee vasta korkeakouluopintojen myötä. Tämän takia Verkkoteoriaa lukiolaisille -monisteen tekstissä on pyritty kieleen, joka on kaikkien ymmärrettävissä. Tämä ei kuitenkaan ollut kirjoittajille helppoa, sillä vaikka monet verkkoteorian käsitteet ja ideat on helppo ymmärtää, on niiden lyhyt ja täsmällinen määritteleminen hankalaa ilman formaalia matemaattista kieltä. Tämän takia joissakin tapauksissa piti tehdä kompromissi täsmällisyyden, selkokielisyyden ja havainnollisuuden välillä, ja esimerkiksi oppimateriaalissa annettu ketjun määritelmä pitää sisällään virheellisiäkin ketjuja. Mutta vaikka tekstiä on pyritty muuttamaan pois matemaattisuudesta kohti proosallisempaa ilmaisua, muistuttaa tekstin muotoilu jossain määrin matemaattisen asiatekstin muotoilua, sillä kaikki määritelmät ja lauseet on nostettu muusta tekstistä selvästi erilleen ja numeroitu.

Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalia käytettiin Joensuun Normaalikoulun valinnaisella matematiikan kurssilla niin, että tunnit etenivät täysin oppimateriaalin ongelmia ratkoen. Oppimateriaali jaettiin kurssilaisille ns.

[7] Tämä on päinvastainen järjestys perinteisempiin matematiikan oppikirjoihin verrattuna, sillä niissä lähes poikkeuksetta käsitteen määrittely edeltää käsitteen soveltamista ongelmatehtävissä.

pala kerrallaan: jokaisen tunnin jälkeen oppilaille annettiin kyseisellä tunnilla käsitellyt luvut sisältävä osio kurssimateriaalista. Oppimateriaali soveltuu mainiosti myös aiheesta kiinnostuneelle itseopiskeltavaksi, sillä monet ongelmista ovat mukaansatempaavia, ja ratkaisun saatuaan on mielenkiintoista verrata omaa ratkaisua materiaalin laatijoiden esittelemiin ratkaisuihin.

Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaali koostuu kuudesta eri luvusta: suuntaamattomat verkot, suunnatut verkot, painotetut verkot, kaksijakoiset verkot, verkkojen värittäminen sekä pelit ja sovellukset. Viimeisen luvun nimen ei kuitenkaan pidä antaa hämätä, sillä verkkoteoriaa sovelletaan mitä moninaisimpiin ongelmiin kaikissa luvuissa, ei pelkästään viimeisessä.

5.2 Suuntaamattomat verkot -luvun rakenne

Suuntaamattomat verkot -luku aloittaa koko oppimateriaalin, joten kyseisen luvun ensimmäisen ongelman yhteydessä määritellään mitä suuntaamattomalla verkolla verkkoteoriassa tarkoitetaan. Tämän ongelman jälkeen esitellään myös muutamia suuntaamattomiin verkkoihin liittyviä käsitteitä, kuten vierekkäiset kaaret ja solmut, yksinkertaiset verkot sekä ketju. Näitä käsitteitä seuraa uusi ongelma, jonka yhteydessä määritellään solmun asteluku sekä Eulerin ketju. Tämän jälkeen tulee tehtävä, jossa on tarkoitus perustella Eulerin ketjun olemassaolo verkon solmujen astelukujen avulla.

Seuraavaksi siirrytään uuteen aiheeseen ja ratkaistaan ongelma, jonka yhteydessä määritellään verkon yhtenäisyys ja siihen liittyvät käsitteet solmuyhtenäisyys ja kaariyhtenäisyys. Suuntaamattomat verkot -luvun lopuksi tutustutaan vielä Hamiltonin ketjuihin kahden ongelman ja yhden tehtävän avulla, joista ensimmäisessä ongelmassa tutustutaan Hamiltonin ketjun määritelmään, toisessa ongelmassa tutustutaan muutamaan suljettuihin Hamiltonin ketjuihin liittyviin sääntöihin ja viimeisenä tulevassa tehtävässä harjoitellaan Hamiltonin ketjun olemassaolon perustelemista.

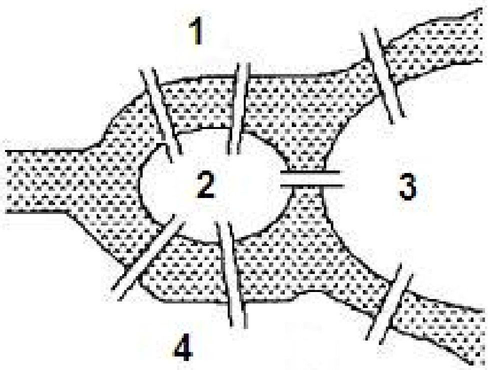
Suuntaamattomat verkot -luvussa esitellään Diracin ja Oren lauseet, joita ei kuitenkaan todisteta. Lauseiden todistamatta jättäminen johtuu pyrkimyksestä mahdollisimman yksinkertaiseen tekstiin. Todistukset alkavat usein näyttää tarpeettoman pitkiltä ja tylsiltä jaaritteluilta, jos ne kirjoitetaan liian seikkaperäisesti ja yksityiskohtaisesti auki. On myös otettava huomioon, onko lukiolaisilla vielä valmiuksia ymmärtää kyseisiä todistuksia. Luku sisältää myös Eulerin ketjujen olemassaoloon liittyvät lauseet (joita ei kuitenkaan sanota lauseiksi vaan väittämiksi) ja Seurauksen 3.3.3 mukaiset ehdot suljetulle Hamiltonin ketjulle.

5.3 Suuntaamattomat verkot -luvussa käytettyjen ongelmien analysointia

5.3.1 Königsbergin siltaongelma

Königsbergin siltaongelma:

Königsbergin kaupungissa on seitsemän siltaa. Kaupungin asukkaat kävivät mielellään sunnuntaikävelyllä pitkin kaupunkia. Asukkaat lähtivät kävelylle kukin omasta kaupungin osastaan $(1, 2, 3, 4)$ (Kuva 4) ja pyrkivät kulkemaan reitin, jossa kukin silta ylitettiin vain kerran ja tultiin takaisin lähtöpisteeseen. Oliko mahdollista kulkea kukin silta vain kerran ja päätyä takaisin lähtöpisteeseen? Entä oliko lähtöpisteellä vaikutusta tähän?



Kuva 4: Königsbergin sillat

Königsbergin siltaongelma valikoitui oppimateriaalin aloitusongelmaksi jo historiallisen taustansa ansiosta. Lisäksi tämä ongelma on hyvä esimerkki siitä, miten matematiikka kehittyy ongelmanratkaisun myötä; Eulerhan määritteli verkon käsitteen juuri tätä kyseistä ongelmaa varten.

Ongelman tarkoitus on johdattaa oppilaat verkon käsitteeseen, ja tutustuttaa heidät verkon kaikista olennaisimpiin attribuutteihin: kaariin ja solmuihin. Tässä ongelmassa oppilaat joutuvat suorittamaan proseduuria – Eulerin ketjun etsimistä – ennen kuin konseptuaaliseen tietoon päästään käsiksi, joten kyseessä on kehityksellinen lähestymistapa. Ongelman myötä on myös tarkoitus konstruoida lause Eulerin verkkojen ja verkon solmujen astelukujen välille. Kaiken kaikkiaan ongelma toimii orientaatiotehtävänä monelle käsitteelle ja lauseelle, joten tästä syystä siinä on pyritty dialektisen ongelman muotoiluun.

Tässä ongelmassa on havaittu syntyvän kahdenlaisia loogis-kognitiivisia ristiriitoja: (1) uskotaan, että siltaongelmaan löytyy ratkaisu (reitti, jossa kaikki sillat kuljetaan kerran ja vain kerran), mutta ei keksitä sitä, tai (2) uskotaan, että ratkaisua ei ole olemassakaan, mutta ei osata perustella tällaista väittämää.. Toisin sanoen syntyy ristiriita käytettävissä olevien strategioiden ja ongelman vaatimusten välille tai ristiriita joko ratkaisun tai sen perustelun puuttumisen välille (Luku 4.6).

Tässä vaiheessa on ymmärretty, että ollaan ongelmatilanteessa, joten Pólyan ongelmanratkaisuprosessin ensimmäinen vaihe on suoritettu, ja seuraavana vuorossa on ratkaisusuunnitelman laatiminen (Luku 4.3.2). Tämä vaihe on tarvittaessa aloitettava ongelman täsmentämisellä. Ei nimittäin ole mitenkään yhdentekevää, yritetäänkö siltaongelmaa ratkaista etsimällä ongelman ehdot täyttävä reitti vai perustelemalla ettei reittiä löydy. Kyseessä on oikeastaan vielä kaksi erilaista ongelmaa, ja nämä ongelmat saattavat kulkea jopa rinnakkain ratkaisijalla niin, että turhautuessaan toiseen hän yrittää aina välillä ratkaista toista. Ratkaistavaa ongelmaa ei tällaisessa tapauksessa ole vielä kiinnitetty. Tehokkaaksi havaittu keino ongelman täsmentämiseksi on muuttaa ongelman ehtoja. Kokemattomat ongelmanratkaisijat eivät välttämättä osaa tehdä tätä automaattisesti, joten oppimateriaalissa seuraavaksi esitettävä ongelma (Solmujen asteluku ja Eulerin ketjut, Luku 5.3.2) on analoginen ensimmäisen ongelman kanssa lukuunottamatta muutettuja ehtoja. Lisäksi ennen tätä ongelmaa esitellään ongelmanratkaisun kannalta hyödyllistä verkkoteoreettista käsitteistöä, jotka voidaan tässä yhteydessä tulkita ongelmasta tehtäväksi malliksi; malli on toinen tehokas tapa ongelman täsmentämiseksi.

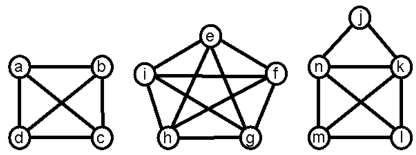
Ongelman ehtojen muuttelemista ei kuitenkaan kannata tehdä ongelmanratkaisijan puolesta, joten parempi keino tutustuttaa ongelmanratkaisija ehtojen muuttelemiseen on esittää seuraavalla tavalla muotoiltu jatko-ongelma ensimmäisen ongelman jälkeen: ”Entä muuttuuko tilanne, jos kartasta saa poistaa tai lisätä siltoja?” Tällä tavoin alkuperäisen ongelman ehtoja muuteltuaan ongelmanratkaisija päätyy hyvin todennäköisesti täsmentämään alkuperäisen ongelman jompaan kumpaan seuraavista muodoista: ”ilmeisesti reittiä ei ole mahdollista löytää, siis tehtävä on ratkaistu”, tai ”ilmeisesti reittiä ei ole mahdollista löytää, voinko minä perustella sen jotenkin?” Oppimateriaalissa seuraavana esiintyvän ongelman on tarkoitus johdattaa lukija ratkaisuidean löytymiseen.

5.3.2 Solmujen asteluku ja Eulerin ketjut

Jos oppilas ei ole vielä tähän mennessä motivoitunut etsimään perustelua Eulerin ketjun löytymättömyydelle Königsbergin siltaongelmaan, on tämän ongelman tarkoitus viimeistään herättää kiinnostus ratkaisun perusteluun. Toisin sanoen ongelman tarkoitus on motivoida lukijaa löytämään lause mutta ei vielä (välttämättä) todistamaan sitä. Kyseisessä ongelmassahan on tarkoitus tutkia kolmea erilaista verkkoa (Kuva 5), joista yhdestä löytyy suljettu Eulerin ketju, toisesta pelkästään avoin Eulerin ketju ja kolmannesta ei kumpaakaan. Tässä vaiheessa ei oppimateriaalissa kuitenkaan puhuta Eule-

Solmujen asteluku ja Eulerin ketjut:

Yritä piirtää paperille Kuvan 5 kaltaiset verkot siten, että kynää ei saa nostaa missään vaiheessa paperista ja kynä saa kulkea kutakin kaarta pitkin vain yhden kerran. Perustele miksi kaikkia verkkoja ei voida piirtää em. ehdoin.



Kuva 5: Voidaanko kuvan verkot piirtää yhdellä katkeamattomalla viivalla?

rin ketjuista vielä mitään, vaan tehtävä on muotoiltu hyvin yksinkertaiseksi ja jopa alakoululaiselle sopivaksi. Eulerin ketjun löytymistä vastaa verkon piirtäminen nostamatta kynää paperista kertaakaan sekä kulkematta jo piirrettyä kaarta pitkin, joten ongelmassa kehoitetaan piirtämään esimerkkiverkot tällä tavoin, sekä perustelemaan miksi kaikkia verkkoja ei voida piirtää tällä tavoin. Tällainen ongelmanasettelu sisältää kuitenkin liiaksi vihjeitä ongelman täsmentämisestä, joten parempi ongelmanasettelu voisi olla seuraavanlainen: ”voidaanko kuvan verkot piirtää siten, että kynää ei saa nostaa missään vaiheessa paperista ja kynä saa kulkea kutakin kaarta pitkin vain yhden kerran?” Tällainen ongelmanasettelu ei sisällä kehoitusta perustella vastaustaan, mutta toiveena onkin, että syntyvä loogis-kognitiivinen ristiriita synnyttäisi automaattisesti halun etsiä perustelua.

Lukija onnistuu piirtämään kaksi verkkoa ongelman ehtojen mukaan hyvinkin nopeasti, mutta todennäköisesti hän päätyy ihmettelemään, kuinka voi olla mahdollista ettei kolmannen verkon piirtäminen ehtojen mukaan onnistu. Syntyy ristiriita käytettävissä olevien strategioiden ja ongelman vaatimusten välillä (Luku 4.6). Tehokas strategia tässä tapauksessa (ja yleensäkin lauseiden löytämisessä) on hypoteesien tekeminen. Jotta hypoteeseja saataisiin aikaiseksi, täytyy olla jotain mihin kiinnittää huomionsa ja mitä voi tarvittaessa manipuloida. Tämän lauseen tapauksessa tarvitaan solmujen asteluvun käsitettä.

Jos tätä ongelmaa käytetään oppitunnilla, on opettajan tässä vaiheessa helppo esittää jatkokysymyksiä, kuten ”miten verkot eroavat toisistaan?”, ”onko verkoissa jotain, mitä pystyisi esimerkiksi laskemaan?” ja ”keksikää erilaisia verkkoja ja tutkikaa onko keksimienne verkkojen piirtäminen tehtävän ehtojen mukaisesti mahdollista”. Tällaisten kysymysten esittäminen ja oppilaiden rohkaiseminen omien hypoteesien tekemiseen voi hyvinkin johtaa sekä halutun strategian löytymiseen (tehtävän ehtojen muunteleminen ja hypoteesien tekeminen ja testaaminen) että asteluvun käsitteen konstruoimiseen ja lopulta myös halutun lauseen löytämiseen. Kun Eulerin ketjujen olemassaolon ehdot käsittävä lause on löytynyt, voidaan sen käyttöä harjoitella seuraavan tehtävän avulla.

5.3.3 Eulerin ketjujen perusteleminen

Eulerin ketjujen perusteleminen:

Etsi Kuvan 5 verkoista avoin tai suljettu Eulerin ketju, jos se on mahdollista. Perustele ketjujen olemassaolo väitteiden $1 - 3$ avulla.

1) Jos suuntaamattoman verkon kaikkien solmujen aste on parillinen, verkosta löytyy suljettu Eulerin ketju.

2) Jos suuntaamattomassa verkossa on korkeintaan kaksi paritonasteista solmua, verkosta löytyy avoin Eulerin ketju.

3) Jos suuntaamattomassa verkossa on enemmän kuin kaksi paritonasteista solmua, verkosta löytyy avointa eikä suljettua Eulerin ketju.

Tätä probleemaa on parempi kutsua tehtäväksi kuin ongelmaksi, sillä ratkaisun avaimet ovat jo valmiiksi lukijan käsissä. Ennen kyseistä tehtävää on esitetty asteluvun käsite, tehtävän yhteydessä esitellään Eulerin ketjujen olemassaoloon liittyvä lause kolmen väitteen muodossa[8] ja käsketään etsimään edellisen ongelman verkoista (Kuva 5) Eulerin ketjut sekä perustelemaan ketjujen olemassaolo väittämien avulla.

Tämä tehtävä soveltuu kuitenkin sikäli huonosti oppimateriaaliin itsenäisesti tutustuvalle, että se sivuuttaa lauseen löytämisprosessin kokonaan. Kyseistä tehtävää voisi edeltää seuraavalla tavalla muotoiltu dialektinen ongelma: ”voidaanko verkon astelukuja tutkimalla sanoa jotain Eulerin ketjun olemassaolosta?” Tämän ongelman ratkaiseminen mahdollistaisi myös oppimateriaaliin itsenäisesti tutustuvalle edellisessä luvussa kuvatun prosessin tyyppisen lauseen löytämisprosessin.

Eulerin ketjuja voi olla ainoastaan yhtenäisissä verkoissa. Yhtenäisen verkon käsite tulee oppimateriaalissa vasta seuraavan ongelman (Etelä- ja Keski-Suomen televerkko) myötä, joten Eulerin ketjujen olemassaoloa koskevien väitteiden yhteydessä ei yhtenäisistä verkoista puhuta mitään; ikään kuin

[8] Termiä väite käytetään termin lause sijasta, koska oppimateriaalissa ei esitetä todistusta kyseiselle lauseelle.

epäyhtenäisiä verkkoja ei olisi olemassakaan. Tällaiseen ratkaisuun päädyttiin, koska yhtenäisen verkon käsite haluttiin esitellä oman ongelman kautta, ja kyseisen ongelman integroiminen edellisten ongelmien yhteyteen olisi tehnyt materiaalista todella sekavan.

5.3.4 Etelä- ja Keski-Suomen televerkko

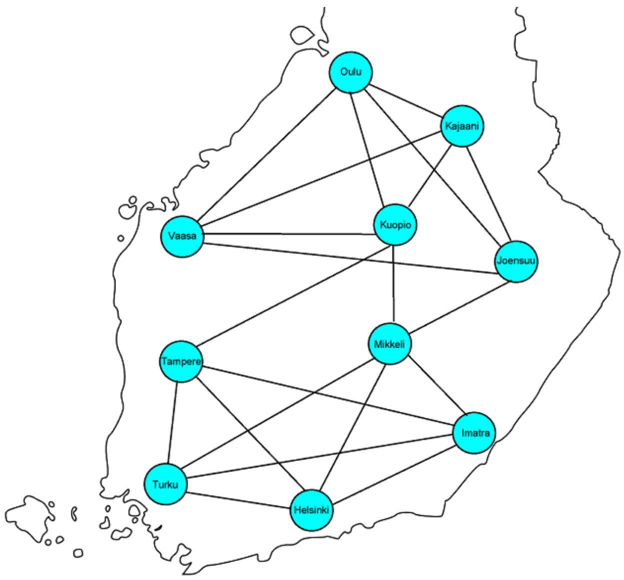
Etelä- ja Keski-Suomen televerkko:

Etelä- ja Keski-Suomen televerkkoon saapuvat matkapuhelinpuhelut ohjautuvat lähimpien tukiasemien kautta eteenpäin (Kuva 6). Ongelmia on ilmennyt eri kaupunkien välisissä yhteyksissä, ja ukkosmyrskyjen aikaan joidenkin tukiasemien kaikki yhteydet ovat saattaneet kaatua. Asiantuntijoiden tehtävä on laatia raportti televerkon haavoittuvuudesta. Heidän tulee ratkaista seuraavat kysymykset.

- Mikä on minimimäärä katkenneita yhteyksiä tai kaatuneita tukiasemia, joiden seurauksena kahden tai useamman kaupungin välillä ei ole yhteyttä?
- Mikä on maksimimäärä katkenneita yhteyksiä, jonka jälkeen kaikkien kaupunkien välillä on vielä yhteys?

Tämän ongelman tarkoitus on johdattaa lukija yhtenäisen verkon käsitteeseen. Ongelman myötä tulevat myös käsitteet solmuyhtenäisyys ja kaariyhtenäisyys. Ongelma ei ole kovin vaikea ratkaista, ja hyvinkin yksinkertaiset strategiat kuten yritys-ja-erehdys voivat johtaa nopeasti oikeaan lopputulokseen. Helpompienkin ongelmien ratkaiseminen on perusteltua varsinkin oppimateriaalin alkupuolella, sillä oppilaille pitää järjestää myös onnistumisen elämyksiä (Luku 4.3.3).

Ongelman pääasiallinen tarkoitus on antaa yhtenäisen verkon käsitteelle oppilaan kannalta mielekäs merkitys. Koska konseptuaalisen tiedon semanttisen verkon solmut ja linkit voivat olla myös ongelmia [4, s. 53], tarjoutuu tällaisella käsittelyllä tilaisuus konseptuaalisen tiedon monipuoliseen konstruointiin. Lisäksi käsitteen epäyhtenäinen verkko relevantein attribuutti (kahden solmun välillä ei ole ketjua) saa hyvin konkreettisen merkityksen (kahden kaupungin välillä ei ole televerkkoyhteyttä). Oppilaalle tarjoutuu myös mahdollisuus linkittää käsitteet solmuyhtenäisyys ja kaariyhtenäisyys yhtenäisen verkon käsitteeseen kyseisen ongelman välityksellä esimerkiksi seuraavaan tapaan: ”solmuyhtenäisyys vastasi sitä, miten monta tukiasemaa oli televerkosta minimissään poistettava, että televerkko muuttuisi epäyhtenäiseksi.”



Kuva 6: Etelä- ja Keski-Suomen televerkkoon saapuvat matkapuhelinpuhelut ohjautuvat lähimpien tukiasemien kautta eteenpäin

Yhtenäisen verkon käsitteen lisäksi tämän ongelman myötä saataisiin määriteltyä todella hyvin toinenkin käsite: virittävä puu. Ongelmassahan täytyy mm. ratkaista kuinka monta yhteyttä voi maksimissaan kaatua, että televerkko säilyy yhtenäisenä. Ratkaisu tuottaa väistämättä verkon virittävän puun, jolloin kyseisen käsitteen idea olisi helppo sisäistääolisi helppo sisäistää. Tämän takia virittävän puun määritelmä tulisi esittää tämän ongelman yhteydessä eikä luvussa ”Suunnatut verkot”, kuten se oppimateriaalin nykyisessä versiossa on.

5.3.5 Hamiltonin ketjun etsiminen

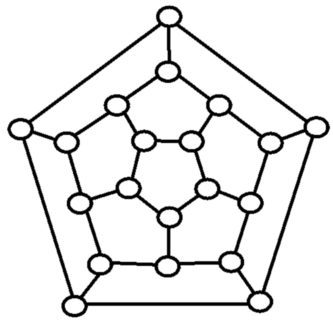
Tämä probleema pyörii ongelman ja tehtävän rajamailla, sillä ongelman määritelmän mukaan sen ratkaisuun ei saisi olla välittömästi havaittavissa olevia keinoja (Luku 4.1). Suurin osa ongelman ratkaisijoista kuitenkin havaitsee heti, että tähän ongelmaan ratkaisu löytyy yksinkertaisesti kokeilemalla.

Ongelmanasettelu on hyvin imperatiivinen, joten sitä voisi muuttaa esimerkiksi seuraavanlaiseksi: ”Löytyykö kuvan verkosta sellaista ketjua, joka sisältää verkon kaikki solmut täsmälleen kerran?” Ongelmanasettelu sisältää verkkoteorian käsitteistöä, mutta se on tässä vaiheessa perusteltua, sillä käsitteet eivät ole lukijalle enää uusia tai outoja.

Tämä ongelma ei ole orientoiva Luvun 4.6 mielessä, sillä se ei synnytä

Hamiltonin ketjun etsiminen:

Etsi Kuvan 7 suuntaamattomasta verkosta suljettu ketju, joka sisältää verkon kaikki solmut täsmälleen kerran.



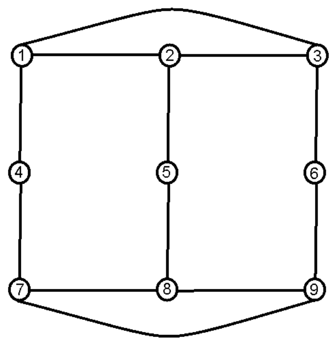
Kuva 7: Löytyykö verkosta kysyttyä ketjua?

loogis-kognitiivista ristiriitaa. Oppimateriaalia laadittaessa on luotettu siihen, että Hamiltonin verkon käsitteen ymmärtäminen on tässä vaiheessa sen verran yksinkertainen prosessi, ettei erillistä orientaatiovaihetta käsitteeseen tarvita, vaan voidaan hypätä suoraan määrittelyvaiheeseen. Ongelman varsinainen tarkoitus on antaa konkreettista kokemusta Hamiltonin verkon relevanteista attribuuteista ennen täsmälliseen määritelmään tutustumista. Tämä on yksinkertainen tapa tutustua uuteen käsitteeseen, vaikkakaan se ei ole konstruktivistisen tiedonmuodostuskäsityksen mukaista, sillä oppilaan omille konstruktioille ei tässä tapauksessa jää tilaa.

5.3.6 Hamiltonin verkon perusteleminen

Hamiltonin verkon perusteleminen:

Tutki ja perustele onko Kuvan 8 suuntaamaton verkko Hamiltonin verkko.



Kuva 8: Onko tämä verkko Hamiltonin verkko?

Tämän ongelman avulla on tarkoitus konstruoida erilaisia sääntöjä, joiden avulla voidaan osoittaa ettei jokin verkko ole Hamiltonin verkko. Ongelmanasettelu on jälleen hyvin imperatiivinen, ja sen voisi muotoilla esimerkiksi seuraavanlaisiksi: ”voidaanko kuvan verkosta sanoa, onko se Hamiltonin verkko?” tai ”millä tavalla voitaisiin perustella, onko kuvan verkko Hamiltonin verkko vai ei?” Ongelman sisältö ei tästä kuitenkaan olennaisesti muutu, sillä ratkaisua varten on suoritettava samat askeleet kuin alkuperäisessäkin ongelmanasettelussa kehoitetaan tekemään: tutkimaan ja perustelemaan onko kuvan verkko Hamiltonin verkko.

Ongelma on todennäköisesti ymmärretty nopeasti, ja ensimmäinen työtä vaativa vaihe tämän ongelman ratkaisuprosessissa on ratkaisusuunnitelman laatiminen. Tämä vaihe alkaa ongelman täsmentämisellä, sillä ongelmaan voi olla kolme vaihtoehtoista ratkaisua: verkko voidaan osoittaa Hamiltonin verkoksi, voidaan osoittaa ettei verkko ole Hamiltonin verkko tai verkosta ei voida sanoa, onko se Hamiltonin verkko vai ei. Ongelman täsmentäminen tarkoittaa tässä tapauksessa näistä jonkin vaihtoehdon valitsemista. Ensimmäinen tapaus olisi todennäköisesti yksinkertaisin näyttää toteen, joten siitä on hyvä aloittaa. Tämä on myös luonnollisin tapa aloittaa ongelman ratkaiseminen, sillä se mahdollistaa käymisen ongelman kimppuun ainoastaan yritystä ja erehdystä käyttäen ilman sen kummempia suunnitelmia. Kun tätä strategiaa on käytetty jonkin aikaa, havaitaan, että suljettua Hamiltonin ketjua ei tahdo löytyä. Riippuu paljon yksilöstä, missä vaiheessa hän kallistuu toisen vaihtoehdon kannalle; miettimään, voisiko ketjun löytymättömyyttä perustella jotenkin. Jotkut lopettavat ketjun etsimisen jo hyvinkin pian, toiset taas eivät halua lopettaa yrittämistä millään. Tähän vaikuttaa varmasti myös se, missä määrin oppilas on tietoinen ongelman ratkaisuvaihtoehdoista. Jos tätä ongelmaa ratkaistaan oppitunnilla, tarjoaa ongelmanratkaisun tämä vaihe oivallisen tilaisuuden oppilaiden metakognitioiden kehittämiseen (Luku 4.3.1). Tässä vaiheessahan mitataan jossain määrin ratkaisijan sinnikkyyttä sekä kykyä kääntyä takaisin jo valitulta tieltä. Metakognitioiden kehittäminen tarkoittaa oppilaiden tietoisuuden kehittämistä oman ongelmanratkaisuprosessinsa kontrollista, joten opettajan tehtäväksi jää auttaa oppilasta ymmärtämään omaa ajatteluaan. Tätä pyrkimystä tukevat parhaiten sopivat kysymykset, kuten ”minkälaista strategiaa olet käyttänyt?”, ”eikö ratkaisua näytä löytyvän?”, ”voisiko kenties kokeilla jotain muutakin strategiaa?” jne. Täytyy kuitenkin olla varovainen, ettei ohjaile oppilaan ongelmanratkaisua liikaa eikä keskeytä ratkaisuprosessia jos oppilas tekee innokkaasti töitä. Kysymykset kannattaa varata enemmänkin siihen vaiheeseen, kun oppilas turhautuu eikä työ näytä etenevän. Turhautumisen voittamisella voidaan parantaa oppilaan yritteliäisyyttä, jolloin kehitetään merkittävää matemaattisen osaamisen osa-aluetta (Luku 4.8.2).

Kun ongelman täsmentäminen on edennyt vaiheeseen, jossa on päädytty etsimään perusteluja sille, miksi verkosta ei löydy suljettua Hamiltonin ketjua, siirrytään ratkaisuidean keksimiseen. Ratkaisuidean löytymistä voivat helpottaa paljon ketjua etsittäessä syntyneet ideat ja skeemat, kuten "tuo keskellä oleva solmu on ongelmallinen" tai "jos vain saisi ottaa yhden solmun verkosta pois, niin tehtävä ratkeaisi heti". Jos ongelmaa käsitellään oppitunnilla, opettaja voi esimerkiksi pyytää oppilaita verbalisoimaan tekemiään havaintoja sekä kirjoittamaan ne ylös, ja esittää oppilaille sopivia kysymyksiä heidän havaintojaan hyödyntäen.

Eräs ratkaisua varten tarvittaviin Hamiltonin ketjun sääntöihin johtava idea on tarkastella kokonaisuuden sijasta pienempiä osia. Tämä on monissa verkkoteorian ongelmissa hyvä strategia; esimerkiksi verkkojen kromaattiset luvut[9] voidaan usein perustella kokonaisuuksien ja yksityiskohtien avulla. Todennäköisesti myös oppilaiden tekemät havainnot liittyvät joihinkin verkon yksittäisiin kohtiin ja osasiin. Tai jos havainnot ovat yleisiä, kuten "jos vain saisi poistaa yhden solmun...", voidaan ne mahdollisesti sopivilla kysymyksillä (esim. "minkä solmuista siinä tapauksessa poistaisit verkosta") ohjata yksityiskohtiin. Eräs tällaiseen suuntaan johdatteleva kysymys on myös esimerkiksi seuraava: "onko verkossa joitakin erikoisia tai muista poikkeavia solmuja?"

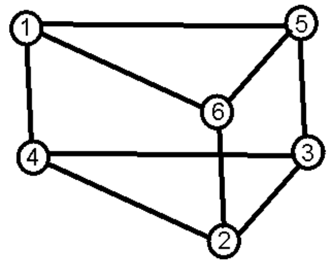
Kenties helpoin havainto, johon ohjaamisesta on hyvä aloittaa, on huomata, että asteluvun 2 omaaviin solmuihin liittyineiden kaarten on pakko kuulua Hamiltonin ketjuun, mikäli sellainen on olemassa. Toinen hyvin merkittävä havainto on, että jos solmuun liittyvistä kaarista kaksi kuuluu jo suljettuun Hamiltonin ketjuun, eivät muut kyseiseen solmuun liittyvät kaaret voi siihen enää kuulua. Näiden kahden havainnon tekeminen ongelman verkon avulla edellyttää antiteesin tekemistä. Antiteesi tarkoittaa tässä yhteydessä seuraavaa: vaikka ratkaisija on tietoisesti todistamassa, ettei ketjua ole olemassa, hänen on tehtävä vastaoletus "ketju on olemassa" ja kyettävä ajattelemaan, mitä tällöin tapahtuisi. Tässä avautuu lukiolaisille kenties entuudestaan tuntemattoman tehokkaan strategian opettelumahdollisuus sekä tilaisuus kehittää todistusajatteluaan. Näitä kahta havaintoa hyväksi käyttäen päästään kolmanteen ja tehtävän ratkaisun kannalta riittävään havaintoon. Jos liitetään jokin vaihtoehtona olevista kaarista antiteesin mukaiseen Hamiltonin ketjuun, päädytään havaittujen sääntöjen nojalla tilanteeseen, jossa johonkin solmuun liittyy vain yksi Hamiltonin ketjuun kuuluva kaari. On kuitenkin helppo todeta, että suljettu Hamiltonin ketju vaatii tasan kaksi kaarta jokaista solmua kohden, joten päädytään ristiriitaan, mikä todistaa antiteesin vääräksi.

[9] Verkon kromaattinen luku tarkoittaa kuinka monta väriä vähintään tarvitaan, että verkon solmut voidaan värittää niin, etteivät vierekkäiset solmut ole samanväriset.

5.3.7 Hamiltonin verkkoihin liittyvien lauseiden soveltaminen

Hamiltonin verkkoihin liittyvien lauseiden soveltaminen:

Osoita, että Kuvan 9 suuntaamaton verkko on Hamiltonin verkko.



Kuva 9: Osoita, että verkko Hamiltonin verkko

Tätä probleemaa ei ole tarkoitettu ongelmaksi vaan harjoitustehtäväksi, sillä ratkaisuun tarvittavat asiatiedot on esitelty ennen tehtävänantoa. Tämän harjoitustehtävän tarkoitus on antaa konkreettinen merkitys oppimateriaalissa esitellyille Oren ja Diracin lauseille. Vaikka kyseinen tehtävä ei olekaan ongelma, sen käsittely täyttäisi ongelmanratkaisutaidon kehittämiselle annetun kriteerin ”on ratkottava täysin erilaisia ongelmia samalla menetelmällä tai sama ongelma täysin erilaisilla menetelmillä” (Luku 4.3.3), sillä oppimateriaalissa esitellään kaksi hyvin erilaista menetelmää ratkaista tehtävä: Hamiltonin ketjun etsiminen sekä sopivan matemaattisen lauseen käyttäminen.

Sopivan lauseen käyttäminen osoitettaessa näin yksinkertaista verkkoa Hamiltonin verkoksi voi tuntua turhan järeältä keinolta, sillä tehtävä ratkeaa paljon helpommin etsimällä suljettu Hamiltonin ketju. Tehtävälle voisi kuitenkin olla jatkotehtävänä suuremman ja haastavamman verkon osoittaminen Hamiltonin verkoksi, jolloin ketjun etsimistä helpommaksi keinoksi osoittautuu verkon ominaisuuksien kuten solmujen astelukujen tarkasteleminen sekä sopivan lauseen käyttäminen. Tällainen tehtäväpari antaisi hyvän kuvan siitä, miten matematiikassa sopivat työvälineet kannattaa valita aina tilanteen mukaan.

6 Mestariluokka-projektissa tuotetut verkkoteorian kurssit ja oppimateriaalit

Mestariluokka-projektin puitteissa kehitettiin Joensuun normaalikoulun lukiossa järjestetyn Verkot ja relaatiot -kurssin lisäksi *Verkkoteoriaa lukiolaisille* -verkkokurssi Itä-Suomen virtuaaliseen oppimisympäristöön ISOverstaaseen.

Molempien kurssien pohjana olleen oppimateriaalin luominen aloitettiin kesällä 2011. Syksyyn mennessä kasassa oli oppimateriaalipaketti, jonka pääpaino on tässä tutkielmassa käsitelty ongelmalähtöinen kurssimoniste. Tämän lisäksi kehitettiin erilaisia verkkotehtäviä. Näiden pohjalta järjestettiin Verkot ja relaatiot -kurssi, jonka päätyttyä kaikki oppimateriaalit digitalisoitiin ja muunnettiin verkkokurssiksi ISOverstaaseen vuoden 2012 alussa.

6.1 Verkkoteoriaa lukiolaisille -verkkokurssi 2012

Verkkoteoria lukiolaisille on verkkokurssi ISOverstaan Moodle-järjestelmässä. Kurssi on tarjolla kaikille kouluille Suomessa ja ulkomailla.

- Kurssimoniste:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/Kurssimoniste/VerkkoteoriaaLukiolaisille.pdf`
- Kurssin kotisivut:
  `https://isoverstas.moodle.fi/course/view.php?id=3630`

6.2 Verkot ja relaatiot -kurssi 2011

Verkot ja relaatiot kuului Joensuun normaalikoulun lukion valinnaisiin luonnontieteiden opintoihin. Kurssin suoritti hyväksytysti kymmenen lukiolaista.

- Kurssimoniste:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/Kurssimoniste/Verkotjarelaatiot.pdf`
- Oppimateriaalit:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/verkot_ja_relaatiot_kurssimateriaali.html`
- Kurssin kotisivut:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/index.html`

Viitteet

[1] Chen, W. *Discrete mathematics.* University of London, 1982.

[2] Gross, J. Yellen, J. *Graph Theory and its applications.* Chapman & Hall/CRC, United States of America, 2006.

[3] Haapasalo, L. *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu.* MEDUSA-Software, Joensuu, 2000.

[4] Haapasalo, L. *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu.* MEDUSA-Software, Joensuu, 2012.

[5] Itä-Suomen yliopisto. 2011. *Matemaattisten aineiden mestariluokat Itä-Suomessa.* [WWW-dokumentti]. `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/HuippuvalmennusMatemaattisissaAineissa/index.html`. (Luettu 27.2.2012).

[6] Johnsonbaugh, R. *Discrete Mathematics - Fifth Edition.* Prentice-Hall Inc, New Jersey, 2001.

[7] Joutsenlahti, J. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä.* Tampereen yliopisto, 2005.

[8] Joutsenlahti, J. *Matemaattinen ajattelu lukiossa.* Teoksessa Räsänen, P. Kupari, P, Ahonen T, Malinen P. *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Yliopistopaino, Jyväskylä, 2004.

[9] Koponen, M. *Voidaanko verkkoteoriaa opettaa lukiolaisille? – Tuotetun oppimateriaalin analysointia aiheesta painotetut verkot.* Itä-Suomen yliopisto, Joensuu, 2012.

[10] Koponen, R. *Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille.* Jyväskylä, 1995.

[11] Malinen, P. *Oppilaiden kehittyminen todistusajatteluun.* Teoksessa Räsänen, P. Kupari, P, Ahonen T, Malinen P. *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Yliopistopaino, Jyväskylä, 1997.

[12] Matousek, J. Nesetril, J. *Invitation to Discrete Mathematics.* Oxford university, 2008.

[13] Opetushallitus. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.* Vammalan kirjapaino Oy. Vammala, 2004.

[14] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.* [WWW-dokumentti]. http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf. (Luettu 8.3.2012)

[15] Pesonen, M. *Diskreetti matematiikka.* Joensuu, 2010.

[16] Pesonen, M. Smolander, P. *Matematiikan johdantokurssi.* Joensuu, 2010.

[17] Savolainen, V. *Verkkoteoria.* Docendo Finland Oy, Porvoo, 2001.