# Voidaanko verkkoteoriaa opettaa lukiolaisille?

## Tuotetun oppimateriaalin analysointia aiheesta painotetut verkot

Pro gradu -tutkielma

Mika Koponen
Itä-Suomen yliopisto
Fysiikan ja matematiikan laitos

**1. toukokuuta 2012**

# Sisältö

# 1 Johdanto

Itä-Suomen yliopistossa oli vuosien 2009-2011 aikana käynnissä Mestariluokka-projekti, jonka tavoitteena oli tarjota lukiolaisille ylimääräisiä opintoja matematiikan, fysiikan ja tietojenkäsittelytieteen parista sekä lisätä lukioiden ja yliopistojen yhteistyötä [5]. Osana tätä projektia toteutettiin syksyllä 2011 Joensuun normaalikoululla valinnainen matematiikan kurssi, jonka aiheena oli alun perin tarkoitus olla yliopiston matematiikan opintojen alussa tulevia asioita. Tästä aihe jalostui eteenpäin diskreettiä matematiikkaa käsitteleväksi ja lopulta kurssin nimeksi annettiin Verkot ja relaatiot. Nimi oli kuitenkin sikäli harhaanjohtava, että verkot valtasivat koko ajan suuremman osan kurssille varatusta ajasta, ja loppujen lopuksi relaatioista ei puhuttu kurssilla lainkaan.

Miksi sitten juuri verkot ja verkkoteoria valikoituivat kurssin pääpainoksi näiden monien vaiheiden jälkeen? Ja miksi esimerkiksi yliopisto-opinnoissa verkkoteoriaa edeltävät aiheet kuten joukko-oppi ja relaatiot päädyttiin jättämään pois, vaikka ne ovat välttämättömiä verkkoteorian täsmällisessä käsittelyssä? Syy on se, että verkot tuntuivat tarjoavan todella paljon mielenkiintoisia tapoja ratkaista elävästä elämästä kumpuavia ongelmia. Lisäksi verkkoteoria on aiheena jopa jossain määrin mediaseksikäs, liittyyhän se hyvin läheisesti tietoverkkoihin, sosiaalisiin verkostoihin ja muihin päivä päivältä merkityksellisemmiksi käyviin olioihin ja ilmiöihin.

Mutta miten verkkoteoriaa sitten pystyttiin opiskelemaan ilman matemaattisia taustatietoja, joita tarvitaan verkkoteorian käsitteiden formaaliin määrittelyyn ja täsmälliseen käsittelyyn? Helposti, sillä tavoitteeksi ei asetettukaan yliopistoista ja korkeakouluista tuttua verkkoteorian perinteistä esittämistä ja käsittelyä, vaan pyrittiin kaikkien ymmärrettävissä olevaan tapaan käsittelemään tätä pohjimmiltaan hyvin yksinkertaista aihealuetta. Tämä vaati matemaattisesta täsmällisyydestä joustamista, mutta se uhraus oltiin valmiita tekemään.

Tällaista verkkoteorian käsittelytapaa tukevaa opetusmateriaalia ei kuitenkaan ollut olemassa, joten se piti tuottaa itse. Kurssille laadittiin oppimateriaalipaketti kahden Mestariluokka-projektin työntekijän voimin (luku 6). Koska matematiikka yleensäkin, ja verkkoteoria erityisesti, kehittyy erilaisten ongelmien ja niiden ratkaisemisen seurauksena, asetettiin oppimateriaalille alusta alkaen ohjenuoraksi erilaisten ongelmien korostaminen. Koska matematiikka kehittyy myös yksilöiden henkilökohtaisena rakenteena pitkälti ongelmanratkaisuprosessin kautta, haluttiin oppimateriaalin etenevän nimenomaan erilaisten ongelmien ja niille esitettyjen ratkaisujen kautta. Käsitteitä määriteltiin aina tarpeen mukaan, mutta kaikessa pyrittiin koko ajan selkeään ja helppolukuiseen tekstiin.

Verkot ja relaatiot -kurssin oppimateriaali muokattiin *Verkkoteoriaa lukiolaisille* -verkkokurssiksi itäsuomalaiseen oppimisverkostoon ISOverstaaseen vuoden 2012 alussa. Tässä pro gradu -tutkielmassa analysoidaan kyseisen kurssin kurssimonisteen (Liite 1) kolmannen luvun ongelmia, mikä eroaa hieman Verkot ja relaatiot -kurssilla käytetystä oppimateriaalista.

**Tutkielma jakautuu seuraaviin osiin:**

Luku 2) Luodaan lyhyt yleiskatsaus verkkoteoriaan.

Luku 3) Käsitellään oppimateriaalin ensimmäisen, toisen ja kolmannen luvun matemaattinen sisältö perinteisesti ja täsmällisesti.

Luku 4) Esitellään oppimateriaalin ja kurssin opetuksen taustalla ollutta matematiikan didaktista teoriaa.

Luku 5) Analysoidaan oppimateriaalin kolmannen luvun ongelmia.

Luku 6) Luettelo Verkot ja relaatiot -kurssin ja Verkkoteoriaa lukiolaisille -verkkokurssin oppimateriaaleista.

Liite 1) **Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaali (versio 16. tammikuuta 2012)**.

Liite 2) Toimintaohje tutkijan lumityö -ongelmaan lukiolaisten tyyliin.

Liite 3) Suomen tietoverkko -ongelma esillä AbiTour2011-2012 -kiertueella.

Oppimateriaalin ensimmäisen luvun ongelmia analysoidaan Kotilaisen pro gradu -tutkielmassa [12].

# 2 Verkkoteoriasta

Verkkoteoria on matematiikan osa-alue, jossa tutkitaan verkoiksi kutsuttuja matemaattisia struktuureja. Parhaiten verkot soveltuvat malleiksi tarkasteltaessa diskreettejä, eritoten äärellisiä ilmiöitä ja tilanteita. Yksinkertaisimmillaan verkko koostuu pisteistä ja niiden välisistä yhteyksistä – verkkoteorian termein solmuista ja kaarista. Verkkoina voidaan kuvata esimerkiksi reittien optimointiongelmia, tietokoneiden segmentointia, liikennevalojärjestelmien ohjelmointia ja useiden pelien voittostrategioita. Lisäksi useat systeemit ovat itsessään verkkoja kuten esimerkiksi tieto- ja sähkötekniset verkot, Internet ja liikenneverkostot. [21]

Nykypäivän verkkoteoreettiset ongelmat liittyvät yleensä niin suuriin verkkoihin, että ongelmien ratkaiseminen ilman tietokoneita on mahdotonta. Toisaalta optimiratkaisun löytyminen kohtuullisessa ajassa ei ole aina taattua edes tietokoneiden avulla. [21, s. 1]

Verkkoteorian kehitys voidaan karkeasti jakaa kahteen aaltoon. Ensimmäinen aalto alkoi Königsbergin siltaongelmasta vuonna 1736, jolloin matematiikko Leonhard Paul Euler (1707-1783) määritteli verkon. Tämän lisäksi Euler esitti useita verkkoteorian perusteoreemoja 1700-luvun aikana. Ensimmäinen aalto jatkoi kehittymistään 1960-luvulle saakka, jolloin tietokoneet alkoivat tehdä tuloaan. Tällöin käynnistyi verkkoteorian kannalta nopean kehityksen aalto. [21, s. 2]

Tietokoneet toivat mukanaan toisaalta laskentatehoa sitä vaativiin matemaattisiin ongelmiin ja toisaalta tietokoneiden tietorakenteet olivat itsessään verkkoja, joten verkkoteorian kehittymistä auttoi tietokoneiden kehittyminen. Etenkin verkkoteorian algoritmit ovat tärkeänä välineenä tietojenkäsittelytieteiden ja matematiikan rajamailla. Kykymme ratkaista verkkoteoreettisia ongelmia on käytännössä yhtä hyvä kuin kykymme manipuloida suuria verkkoja tietokoneilla. [21]

Verkkoteorian algoritmit liittyvät usein käytännönläheisiin ongelmiin, jotka muunnetaan verkoksi, jonka jälkeen ne palautetaan verkkojen analysointitehtäviksi. Eräs kuuluisa verkkoteorian ongelma on kartanväritysongelma, joka perustui vanhojen kartanpiirtäjien kokemuksiin: Tasokartat voidaan aina värittää käyttämällä korkeintaan neljää väriä siten, ettei yksikään vierekkäinen maapari ole samanvärinen. Kartanväritysongelma esitettiin ensimmäisen kerran vuonna 1852, jonka jälkeen useat matemaatikot ovat yrittäneet ratkaista ongelmaa. Ongelmaa tutkivat erityisesti Percy John Heawood (1861-1955) 1800-luvun loppupuolella ja Øystein Ore (1899-1968) 1960- ja 1970-lukujen vaihteessa. Vasta kun aikaa oli kulunut 124 vuotta ongelman esittämisestä, Kenneth Appel (1932-) ja Wolfgang Haken (1928-) Illinoisin yliopistosta todistivat, että kaikki tasokartat voidaan värittää käyttämällä korkeintaan neljää väriä niin, että vierekkäiset maat eivät ole samanväriset. [21]

Matematiikan kannalta merkityksellistä oli se, että todistus suoritettiin tarkastusta myöten puhtaasti tietokoneilla. Vuoden 1976 aikaisilta tietokoneilta kului aikaa todistuksen laskentaan yhteensä 1200 tuntia. [21] Kartanväritysongelma on osoitus verkkoteorian kombinatorisesta luonteesta: yksinkertainen ja helposti ymmärrettävissä olevan ongelman todistaminen lyhyesti ja ilman tietokoneita saattaa olla mahdotonta.

# 3 Verkkojen peruskäsitteitä

Tässä luvussa käydään läpi Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin luvuissa $1 - 3$[1] esiintyvät käsitteet ja lauseet sekä algoritmit todistuksineen. Matematiikka esitetään perinteisen formaalisti, mikä poikkeaa huomattavasti oppimateriaalin käsittelytavasta.

Verkkojen peruskäsitteiden lähteenä on käytetty pääasiassa diskreettiä matematiikkaa käsitteleviä teoksia kuten Johnsonbaughin [7] ja Matousekin [14] kirjat sekä Pesosen [18] ja Chenin [1] monisteet. Suomennoksia termeille on haettu pääasiassa Savolaisen kirjasta *Verkkoteoria* [21], jonka lisäksi suomennoksiin on käytetty Pesosen luentomonisteiden *Diskreetti matematiikka* [18] ja *Matematiikan johdantokurssi* [19] mukaisia termejä. Muutamien käsitteiden suomennoksien kohdalla on päädytty keksimään itse kuvaavampia ja osuvampia suomennoksia, joita esiintyy pääasiassa Liitteessä *Verkkoteoriaa lukiolaisille.*

Tässä luvussa käytetään pääsääntöisesti seuraavia merkintöjä: joukkoja merkitään isoin kirjaimin ja joukon alkioita pienin kirjaimin. **Tässä luvussa rajoitutaan tarkastelemaan äärellisiä verkkoja, vaikka monet määritelmistä soveltuvat myös äärettömille verkoille.**

## 3.1 Suuntaamattomat verkot

Yksinkertaisimmillaan verkot koostuvat solmuista ja suuntaamattomista kaarista, jolloin niistä käytetään nimitystä suuntaamattomat verkot. Tässä luvussa käsitellään suuntaamattomien verkkojen peruskäsitteitä ja muutamia esitystapoja.

### 3.1.1 Suuntaamattoman verkon määrittely

**Määritelmä 3.1.1.** Joukon $X$ *ei-järjestetty tulo (pair set)* itsensä kanssa on sen järjestämättömien parien $\{a, b\}$ joukko

$$X \mathbin{\&} X \;=\; \big\{\{a,b\} \mid a, b \in X\big\}.$$

**Määritelmä 3.1.2.** Kolmikko $V = (S, K, \Phi)$ on *suuntaamaton verkko (graph, network)*, jos $S \neq \emptyset$ ja $K$ ovat joukkoja ja $\Phi : K \to S \mathbin{\&} S$ on kuvaus. Joukon $S$ alkiot ovat verkon $V$ *solmuja (vertex, node)*, joukon $K$ alkiot ovat verkon $V$ *kaaria (edge, link)* ja kuvaus $\Phi$ on *vastaavuuskuvaus (incidence mapping)*.

Suuntaamattoman verkon jokainen kaari *liittyy (join)* yhteen tai kahteen solmuun. Jos $k \in K$, $s_1, s_2 \in S$ ja $\Phi(k) = \{s_1, s_2\}$, kaari $k$ liittyy solmuihin

[1] Luvut 1-3 käsittelevät suuntaamattomia, suunnattuja ja painotettuja verkkoja.

$s_1$ ja $s_2$. Kaareen liittyvät solmut ovat kaaren *päätesolmut (terminal vertex)*. Jos kaari liittyy samaan solmuun, on kaari *luuppi (loop)*.

**Määritelmä 3.1.3.** Suuntaamattomassa verkossa on *moninkertaisia (multi-edge)* kaaria, jos kahden solmun välillä on useita kaaria. Suuntaamaton verkko on *yksinkertainen (simple graph)*, jos verkossa ei ole luuppeja eikä moninkertaisia kaaria. Suuntaamaton verkko on *täydellinen* (complete graph), jos jokaisen solmuparin $s_1 \neq s_2$ välillä on vähintään yksi kaari. Solmut ovat *vierekkäiset (adjacent vertices)*, jos niiden välillä on kaari. Kaaret ovat *vierekkäiset (adjacent edges)*, jos niillä on yhteinen päätesolmu. Jos verkko on yksinkertainen ja $\Phi(k) = \{s_1, s_2\}$, voidaan kaari $k$ *samaistaa (identify)* järjestämättömän solmuparin kanssa $k \cong \{s_1, s_2\}$.

**Määritelmä 3.1.4.** Suuntaamattoman verkon $V = (S, K, \Phi)$ solmujen lukumäärää merkitään $|S|$ ja kaarien lukumäärää $|K|$. Suuntaamattomassa verkossa solmun $x \in S$ *asteluku (degree of vertex)* on

$$a(x) = |\big\{k \in K \mid \Phi(k) = \{x, y\}, x \neq y\big\}| + 2 \cdot |\big\{k \in K \mid \Phi(k) = \{x, x\}\big\}|.$$

**Lause 3.1.5.** *Äärellisessä suuntaamattomassa verkossa* $V = (S, K, \Phi)$

*a)* $\sum_{i=1}^{n} a(s_i) = 2 \cdot |K|$, *missä* $n = |S|$,

*b) paritonasteisia solmuja on parillinen määrä.*

*Todistus.*

a) Jokaisen kaaren lisääminen nostaa astelukujen summaa kahdella.

b) Kohdan $a$) mukaan solmujen astelukujen summa on parillinen luku. Parillisasteisten solmujen astelukujen summa on parillinen, joten paritonasteisia solmuja täytyy olla parillinen määrä. □

**Määritelmä 3.1.6.** Suuntaamaton verkko $V' = (S', K', \Phi')$ on suuntaamattoman verkon $V = (S, K, \Phi)$ *aliverkko (subgraph)*, jos

1) $\emptyset \neq S' \subseteq S$,

2) $K' \subseteq K$,

3) $\Phi'(k) = \Phi(k) \quad \forall k \in K'$,

4) jos $k \in K'$ ja $\Phi(k) = \{x, y\}$, niin $x, y \in S'$.

Merkintä $V' \sqsubseteq V$ tarkoittaa, että $V'$ on verkon $V$ aliverkko. Jos lisäksi $K' = \Phi^{-1}(S' \,\&\, S')^2$, on $V'$ solmujoukon $S'$ *virittämä* aliverkko.

**Määritelmä 3.1.7.** Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ suuntaamaton verkko. Kaarien järjestetty joukko $C = (k_1, k_2, ..., k_m)$ on verkon $V$ *ketju (walk, chain)*, jos

1) $k_i \neq k_j$ kaikilla $i \neq j$,

2) on olemassa solmujen järjestetty joukko $(s_0, s_1, ..., s_m)$, missä

$$\Phi(k_i) = \{s_{i-1}, s_i\}, \qquad i = 0, 1, 2, ..., m.$$

Jos kaarijoukko toteuttaa ehdon 2), on se äärellinen tai ääretön *kaarijono*. Ketjua solmusta $s_0$ solmuun $s_m$ merkitään $k : s_0 \to s_m$. Ketju on *suljettu (closed)*, jos $s_0 = s_m$, muutoin ketju on *avoin (open)*.

**Määritelmä 3.1.8.** Suuntaamattoman verkon $V = (S, K, \Phi)$ kaksi solmua $s_i, s_j \in S$ ovat *yhteydessä (connected)*, jos niiden välillä on ketju. Suuntaamaton verkko on *yhtenäinen (connected graph)*, jos jokainen solmupari $\{s_i, s_j\} \in S\&S$ on yhteydessä kaikilla $i \neq j$.

**Määritelmä 3.1.9.** Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ suuntaamaton verkko. Aliverkko $C = (S', K', \Phi') \sqsubseteq V$ on verkon $V$ *komponentti (component)*, jos

1) jokainen solmupari $\{s_i, s_j\} \in S'\&S'$ on yhteydessä kaikilla $i \neq j$, eikä

2) yksikään joukon $S'$ alkio ole yhteydessä joukkoon $S \setminus S'$.

### 3.1.2 Suuntaamattomat puut

**Määritelmä 3.1.10.** Suuntaamaton verkko $P$ on *puu (tree)*, jos verkko on yhtenäinen ja verkossa ei ole yhtäkään suljettua ketjua. Puun yhtenäinen aliverkko on *alipuu (subtree)*.

**Lause 3.1.11.** *Jos verkko $V$ on vähintään kaksisolmuinen puu, on siinä ainakin yksi solmu, jonka asteluku on 1.*

*Todistus.* Olkoon äärellinen suuntaamaton verkko $V = (S, K, \Phi)$ vähintään kaksisolmuinen puu. Koska solmuja on kaksi, on puussa myös kaaria. Jokaiseen solmuun liittyy ainakin yksi kaari. Lisäksi jokaisen kaaren päätesolmut ovat eri solmut. Puu $V$ voidaan rakentaa uudelleen vaihe vaiheelta niin, että väite pitää paikkansa kullekin muodostettavalle entistä laajemmalle alipuulle ja lopulta itse puulle.

[2] Tarkoittaa, että $K'$ sisältää kaikki aliverkon solmuihin $S'$ liittyvät kaaret.

Vaihe 1: Rakennetaan puu $P_1$ siten, että valitaan mikä tahansa verkon $V$ solmu $s$. Lisätään puuhun $P_1$ solmu $s$, siihen liittyneet kaaret ja niiden päätesolmut. Nyt $P_1$ on puu, jossa on yksi puun $V$ solmu $s$, siihen liittyvät kaaret ja niiden päätesolmut, joiden asteluku on väistämättä yksi.

Koska puussa $V$ on ainakin kaksi solmua, tulee lisätyksi ainakin yksi kaari, jonka toisen päätesolmun asteluku puussa $P_1$ on 1. Se ei nimittäin voi olla puun $P_1$ solmu, koska muutoin syntyisi suljettu ketju[3]. Jos $P_1 = V$, on asia selvä, muutoin puusta $P_1$ puuttuu ainakin yksi puun $V$ solmu tai kaari. Jos puuttuu solmu $s'$, siitä puuttuu yhtenäisyyden nojalla ketju solmusta $s'$ puuhun $P_1$. Joka tapauksessa siis puuttuu ainakin yksi kaari ja solmu.

Vaihe 2: Rakennetaan puu $P_2$ siten, että lisätään siihen puu $P_1$, puuhun $P_1$ liittyneet kaaret ja niiden päätesolmut. Nyt $P_2$ on puu, jossa alipuuhun $P_1$ on lisätty puun $V$ kaaret, joiden toinen päätesolmu on puussa $P_1$, ja näiden toiset päätesolmut, joiden asteluku on väistämättä yksi.

Lisättyjä kaaria on ainakin yksi, nimittäin edellä mainitussa ketjussa puuhun $P_1$ liittyvä kaari, jonka toisen päätesolmun asteluku on silloin 1 puussa $P_2$. Jos $P_2 = V$, on asia selvä, muutoin jatketaan kuten yllä.

Koska puu $V$ oli äärellinen, tulevat kaikki kaaret ja solmut yhtenäisyyden nojalla lopulta mukaan ja viimeisessä tilanteessakin jää ainakin yhden solmun asteeksi 1. □

**Lause 3.1.12.** *Jos suuntaamattomassa verkossa ei ole yhtäkään suljettua ketjua, on verkossa kahden solmun välillä korkeintaan yksi ketju.*

*Todistus.* Todistetaan lause epäsuoralla todistuksella. Olkoon verkko $V = (S, K, \Psi)$ äärellinen suuntaamaton verkko. Osoitetaan, että jos verkossa on kahden solmun välillä useampi kuin yksi ketju, on verkossa suljettu ketju.

Olkoon verkossa $V$ kaksi solmua $x$ ja $y$, joiden välillä on vähintään kaksi ketjua

$$
\begin{aligned}
K &= (k_1, k_2, ..., k_p), \text{ solmujoukkona } (x = s_0, s_1, s_2, ..., s_p = y), \\
L &= (l_1, l_2, ..., l_q), \text{ solmujoukkona } (x = t_0, t_1, t_2, ..., t_q = y).
\end{aligned}
$$

Koska $K$ on eri ketju kuin $L$, on olemassa ensimmäinen solmu $z = s_{i-1}$, jonka jälkeen ketjut erkanevat, siis $k_i$ eri kuin $l_i$. Olkoon edelleen $u = s_j$ solmu, jossa ketjut seuraavan kerran kohtaavat, siis viimeistään solmussa $s_p = t_q = y$. Nyt suljettu ketju saadaan aikaan kulkemalla ketjua $K : z \to u$ ja ketjua $L$ takaisin $u \to z$. Konstruktiosta johtuen mikään kaari ei esiinny siinä kahdesti. Seuraa haettu ristiriita ja väite on todistettu. □

[3] Tässä vaiheessa luuppi.

**Lause 3.1.13.** *Puussa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi ketju.*

*Todistus.* Todistetaan väite suoralla todistuksella. Puu on yhtenäinen ja yhtenäisessä verkossa kahden solmun välillä on ainakin yksi ketju. Koska puussa ei ole suljettua ketjua, on siinä Lauseen 3.1.12 nojalla kahden solmun välillä korkeintaan yksi ketju. Puussa on siten kahden solmun välillä täsmälleen yksi ketju. □

**Lause 3.1.14.** *Jos puussa on $n$ solmua, siinä on kaaria täsmälleen $n - 1$ kappaletta.*

*Todistus.* Todistetaan väite induktiolla. Triviaalisti lause on tosi, jos puussa on vain yksi solmu. Oletetaan, että väite pätee, jos puussa on $m \in \mathbb{N}$ solmua eli siinä on täsmälleen $m - 1$ kaarta.

Tarkastellaan puuta $T$, jossa on $m + 1$ solmua. Lauseen 3.1.11 mukaan puussa on vähintään yksi solmu $s$, jonka asteluku on yksi. Muodostetaan verkko $V^*$ poistamalla puusta $T$ solmu $s$ ja siihen liittynyt kaari. Nyt verkko $V^*$ on $m$-solmuinen puu. Induktio-oletuksen mukaan siinä on täsmälleen $m-1$ kaarta. Täten induktioperiaatteen nojalla, jos verkossa on $n$ solmua, on siinä kaaria täsmälleen $n - 1$ kappaletta. □

**Määritelmä 3.1.15.** Olkoon suuntaamaton verkko $V = (S, K, \Phi)$ äärellinen ja yhtenäinen. Jos aliverkko $P = (S, K', \Phi \mid K')$ on puu, on $P$ verkon $V$ *virittävä puu (spanning tree)*.

**Lause 3.1.16.** *Jos suuntaamaton verkko on yhtenäinen ja siinä on $n$ solmua ja $n - 1$ kaarta, niin verkko on puu.*

*Todistus.* On ilmeistä, että yhtenäinen verkko $V$ voidaan riisua puuksi poistamalla sen suljetuista ketjuista yksitellen kaaria niin, että jäljellä oleva verkko on edelleen yhtenäinen ja lopulta verkon $V$ virittävä puu. Kun verkosta poistetaan kaari, on uusi verkko joko puu tai siinä on vähintään yksi suljettu ketju. Toistetaan kaarien poistaminen kunnes verkossa $V$ ei ole yhtäkään suljettua ketjua.

Jos siis verkossa on suljettuja ketjuja, avataan ne poistamalla joku $m$ kappaletta kaaria niin, että saadaan virittävä puu. Tässä puussa olisikin $n$ solmua ja $n - 1 - m$ kaarta, mikä on vastoin Lauseen 3.1.14 tulosta. □

**Lause 3.1.17.** *Olkoon verkko $V$ puu.*

1) *Jos puuhun $V$ lisätään yksi kaari, muodostuu uuteen verkkoon täsmälleen yksi suljettu ketju.*

2) *Jos puusta $V$ poistetaan yksikin kaari, on uusi verkko epäyhtenäinen.*

*Todistus.* Lauseen 3.1.14 mukaan kaaria on puussa yksi vähemmän kuin solmuja.

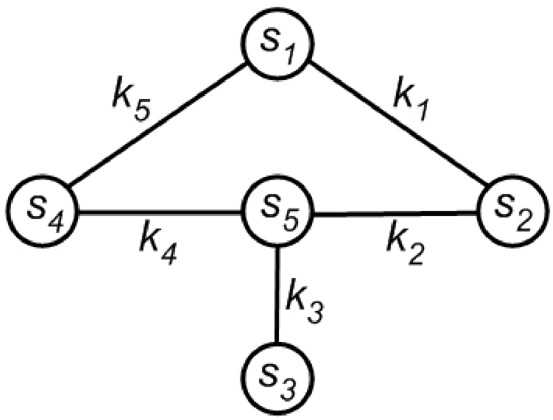
1) Kaaren lisääminen ei voi epäyhtenäistää verkkoa. Koska kaarien määrä kasvaa yhdellä ja solmujen määrä pysyy samana, ei verkko voi olla enää puu, ja siten siinä on oltava suljettu ketju. Jos verkkoon muodostuisi suljettuja ketjuja enemmän kuin yksi, siitä pitäisi poistaa enemmän kuin yksi kaari, jotta saataisiin virittävä puu. Mutta siinä puussa ei olisi kaaria vain yksi vähemmän kuin solmuja.

2) Jos kaaren poistaminen ei epäyhtenäistäisi verkkoa, sen pitäisi tuoda sinne suljettu ketju, koska saatu uusi verkko ei voisi olla enää puu. □

### 3.1.3 Suuntaamattoman verkon esitystapoja

Äärellinen suuntaamaton verkko voidaan esittää esimerkiksi kaaviokuvana, luettelona, yhteysmatriisina tai vastaavuusmatriisina. Esitetään seuraavaksi eräs verkko $V = (S, K, \Phi)$ näillä neljällä eri tavalla.

1) *Kaaviokuva (figure)* muodostetaan siten, että piirretään $|S|$ solmua esimerkiksi pisteinä tai palloina ja yhdistetään ne kuvausta $\Phi$ vastaavilla kaarilla $K$. Jos kaaviokuva on mahdollista piirtää tasoon siten, että kaaret eivät leikkaa toisiaan, on verkko *tasoverkko (planar graph)*, muutoin kyseessä on *avaruusverkko (nonplanar graph)*. Olkoon esimerkkiverkkona tasoverkko (Kuva 1).




Kuva 1: Suuntaamaton verkko kaaviokuvana.

2) *Luettelo (list)* muodostetaan siten, että luetellaan suuntaamattoman verkon solmut, kaaret ja vastaavuus. Kuvan 1 esimerkkiverkon luettelo on seuraava:

   solmut $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$,
   kaaret $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$,
   vastaavuus $\Phi(k_1) = \{s_1, s_2\}, \Phi(k_2) = \{s_2, s_5\}, \Phi(k_3) = \{s_3, s_5\}$,
   $\Phi(k_4) = \{s_4, s_5\}, \Phi(k_5) = \{s_1, s_4\}$.

3) *Yhteysmatriisi (adjacency matrix)* saadaan asettamalla

$$a_{ij} = |\Phi^{-1}\{s_i, s_j\}|.$$

   Luku $a_{ij}$ ilmoittaa solmujen $s_i$ ja $s_j$ välillä olevien kaarien lukumäärän. Kuvan 1 suuntaamaton verkko voidaan esittää yhteysmatriisina:

$$M = (a_{ij})_{5\times 5} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4) *Vastaavuusmatriisi (incidence matrix)* saadaan asettamalla $b_{ij} = 1$, jos kaari $k_j$ liittyy solmuun $s_i$, muutoin $b_{ij} = 0$. Kuvan 1 verkko voidaan esittää vastaavuusmatriisina:

$$M = (b_{ij})_{5\times 5} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

### 3.1.4 Hamiltonin ketjut

**Määritelmä 3.1.18.** Suuntaamattomassa verkossa $V = (S, K, \Phi)$ ketju

$$(k_1, k_2, k_3, ..., k_x)$$

on *Hamiltonin ketju (hamiltonian trail, walk, chain)*, jos se sisältää kaikki verkon $V$ solmut täsmälleen kerran. Jos verkossa $V$ on suljettu Hamiltonin ketju, on verkko *Hamiltonin verkko (Hamilton graph, hamiltonian graph)*.

**Seuraus 3.1.19.** *Hamiltonin ketjun määritelmästä saadaan seuraavat ehdot:*

*1) Jos verkossa on suljettu Hamiltonin ketju $C$, ja solmun $s$ asteluku on 2, kuuluvat molemmat solmuun $s$ liittyneet kaaret ketjuun $C$.*

*2) Jos verkossa on suljettu Hamiltonin ketju $C$, ja solmuun $s$ liittyneistä kaarista kaksi kuuluu ketjuun $C$, eivät muut solmuun $s$ liittyneet kaaret voi kuulua ketjuun $C$.*

*3) Jos verkossa muodostetaan suljettua Hamiltonin ketjua $C$, saa ketjuun $C$ syntyä suljettu ketju ainoastaan silloin, kun ketjuun $C$ liitetään viimeinen kaari.*

*4) Verkossa ei ole suljettua Hamiltonin ketjua, jos verkossa on solmu, jonka aseteluku on 1 tai 0, tai jos voidaan osoittaa, että jonkin solmun kaarista vain yksi voisi kuulua Hamiltonin ketjuun.*

**Lause 3.1.20.** *(Ore, 1960) Olkoon $V$ yksinkertainen ja yhtenäinen suuntaamaton $n$-solmuinen verkko, missä $n \geq 3$. Jos verkon $V$ jokaiselle ei-vierekkäiselle solmulle $x$ ja $y$, on voimassa $a(x) + a(y) \geq n$, on verkko $V$ Hamiltonin verkko.*

*Todistus.* Olkoon verkko $V$ lauseen ehdot täyttävä verkko. Jos $n = 3$, ainoastaan täydellinen verkko täyttää lauseen oletukset. Täydellinen verkko on Hamiltonin verkko, joten väite on tosi, kun $n = 3$.

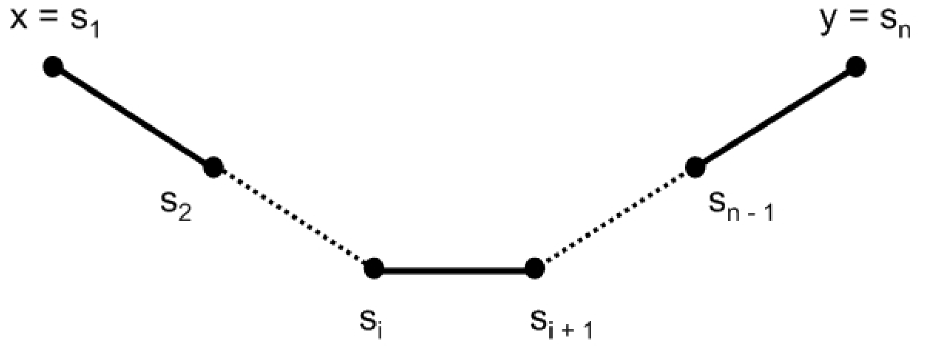
Todistetaan tapaukset $n \geq 4$ epäsuoralla todistuksella. Olkoon verkko $V$ sellainen ei-Hamiltonin verkko, joka täyttää lauseen ehdot. Olkoot solmut $x$ ja $y$ eräät ei-vierekkäiset solmut verkossa $V$. Ristiriidan aikaansaamiseksi riittää osoittaa, että näille solmuille on voimassa $a(x) + a(y) \leq n - 1$.

Jos verkkoon $V$ lisätään kaaria siten, että verkko säilyttää yksinkertaisuuden, muuttuu verkko jossain vaiheessa Hamiltonin verkoksi. Tämä tapahtuu viimeistään siinä vaiheessa, kun verkosta tulee täydellinen verkko. Muodostetaan yksinkertainen verkko $V^*$ siten, että lisätään kaaria yksi kerrallaan verkkoon $V$ niin kauan, että muodostuu Hamiltonin verkko, ja poistetaan tämän jälkeen viimeiseksi lisätty kaari $k$, jonka päätesolmut olkoot $x$ ja $y$. Tällöin verkosta $V^*$ löytyvät ei-vierekkäiset solmut $x$ ja $y$, joiden välillä on avoin Hamiltonin ketju $C$. Jos $a(x) + a(y) \leq n - 1$ pätee verkossa $V^*$, on kyseinen epäyhtälö voimassa myös verkossa $V$.

Koska verkko $V$ on yksinkertainen, voidaan ketjua $C$ merkitä yksikäsitteisesti kirjoittamalla ylös ketjussa esiintyvät solmut järjestyksessä. Olkoon siis ketju

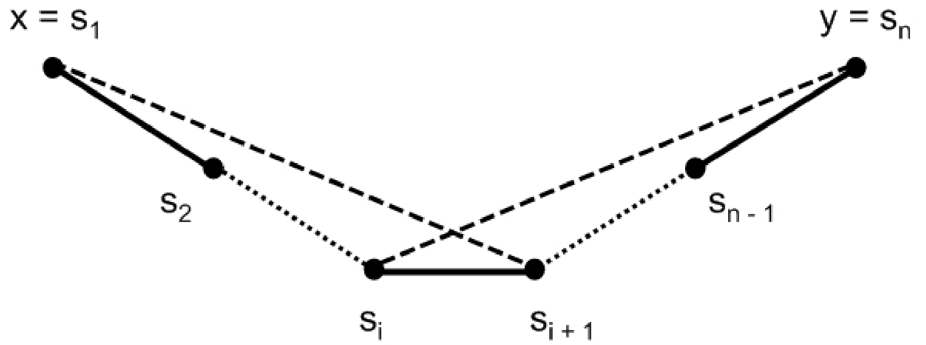
$$C \cong (s_1, s_2, ..., s_i, s_{i+1}, ..., s_{n-1}, s_n)$$

avoin Hamiltonin ketju verkossa $V^*$, missä ketjun päätesolmut ovat $x = s_1$ ja $y = s_n$ (Kuva 2).




Kuva 2: Avoin Hamiltonin ketju $k : x \to y$ verkossa $V^*$.

Olkoot $s_i$ ja $s_{i+1}$ mielivaltaiset, lukuun ottamatta solmuja $s_1$ tai $s_n$, vierekkäiset solmut, jotka ovat peräkkäin ketjussa $C$. Solmupareista $\{s_1, s_{i+1}\}$ ja $\{s_i, s_n\}$ vähintään toisen on oltava ei-vierekkäisiä, koska muussa tapauksessa ketju $(s_1, s_2, ..., s_i, s_n, s_{n-1}, ..., s_{i+1}, s_1)$ on suljettu Hamiltonin ketju verkossa $V^*$ (Kuva 3).




Kuva 3: Suljettu Hamiltonin ketju verkossa $V*$.

Tämä tarkoittaa, että verkon $V^*$ yhteysmatriisin kaikille soluille $a_{i,j}$ on voimassa $a_{1,i+1} + a_{i,n} \leq 1$, kun $i = 2, ..., n-2$. Näin ollen

$$
\begin{aligned}
a(x)+a(y) &= \sum_{i=2}^{n-1} a_{1,i} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n} \\
&= a_{1,2} + \sum_{i=3}^{n-1} a_{1,i} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{i,n} + a_{n-1,n} \\
&= 1 + \sum_{i=2}^{n-2} a_{1,i+1} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{i,n} + 1 \\
&= 2 + \sum_{i=2}^{n-2} (a_{1,i+1} + a_{i,n}) \\
&\leq 2 + n - 3 = n - 1.
\end{aligned}
$$

Tällöin myös verkosta $V$ löytyvät ei-vierekkäiset solmut $x$ ja $y$, joille pätee $a(x) + a(y) \leq n - 1$, mikä on haettu ristiriita. □ [2, ss. 269-270]

**Lemma 3.1.21.** *Mikä tahansa verkko $V = (S, K, \Phi)$ saadaan täydennettyä Hamiltonin verkoksi lisäämällä siihen solmuja ja kaaria siten, että kustakin lisätystä solmusta menee kaari jokaiseen verkon alkuperäiseen solmuun $s \in S$. Solmuja tarvitsee lisätä korkeintaan $n = |S|$ kappaletta.*

*Todistus.* On intuitiivisesti selvää, että mitä enemmän verkossa on kaaria, sitä todennäköisemmin sieltä löytyy suljettu Hamiltonin ketju. Siksi riittää tarkastella pelkästään verkkoja, joissa ei ole yhtään kaarta. Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ verkko siten, että $|S| = n$ ja $|K| = 0$. Verkon $V$ solmut voidaan asettaa ympyrämuodostelmaan, jolloin ne muodostavat jonon $(s_1, \ldots, s_n)$. Aletaan lisätä tähän muodostelmaa solmuja siten, että lisätään aina yksi solmu $s_i^*$ solmujen $s_i$ ja $s_{i+1}$ väliin. Solmu $s_n^*$ lisätään solmujen $s_n$ ja $s_1$ väliin. Kun solmusta $s_i^*$ lisätään kaaret kaikkiin verkon $V$ solmuihin, on myös solmujen $s_i^*$ ja $s_i$ sekä $s_i^*$ ja $s_{i+1}$ välillä kaaret. Kun solmuja on lisätty verkkoon $n$ kappaletta, on jokaisen verkon $V$ solmuparin $\{s_i, s_{i+1}\}$ sekä parin $\{s_n, s_1\}$ välissä solmu $s_i^*$, josta menee kaaret solmuihin $s_i$ ja $s_{i+1}$. Kaarijono

$$
C = (\Phi^{-1}\{s_1, s_1^*\}, \Phi^{-1}\{s_1^*, s_2\}, \Phi^{-1}\{s_2, s_2^*\}, \ldots, \Phi^{-1}\{s_n, s_n^*\}, \Phi^{-1}\{s_n^*, s_1\})
$$

on Hamiltonin suljettu ketju.

**Lause 3.1.22.** *(Dirac, 1952) Olkoon suuntaamaton verkko yksinkertainen ja $n$-solmuinen, missä $n \geq 3$. Jos jokaisen solmun asteluku on vähintään $n/2$, on verkko Hamiltonin verkko.*

*Todistus.* Olkoon $V = (S, K, \Phi)$ lauseen ehdot täyttävä verkko. Lemman 3.1.21 mukaan verkko $V$ saadaan täydennetyksi Hamiltonin verkoksi lisäämällä sinne $m$ kappaletta solmuja, missä $m \leq n = |S|$, sekä asettamalla kaaret lisättyjen ja alkuperäisten solmujen välille. Olkoon tämä täydennetty verkko $V' = (S', K', \Phi')$. Olkoon $m$ pienin määrä solmuja, jotka lisäämällä saadaan aikaiseksi Hamiltonin verkko. Osoitetaan, että $m = 0$ epäsuoralla todistuksella. Tehdään vastaoletus $m > 0$. Tällöin verkossa $V'$ on olemassa suljettu Hamiltonin ketju $C$. Nimetään ketjun $C$ päätesolmut $C = (s_1, s', s_2, \ldots, s_n, s_1)$, missä $s_i \in S$ ja $s' \in S' \setminus S$.

Verkon $V'$ solmut $s_1$ ja $s_2$ eivät saa olla vierekkäiset, sillä muutoin solmu $s'$ on lisätty turhaan. Jos solmu $s_i$ on vierekkäinen solmun $s_1$ kanssa, ei solmu $s_{i+1}$ voi olla vierekkäinen solmun $s_2$ kanssa, sillä muuten löytyisi solmun $s'$ tarpeettomaksi tekevä suljettu Hamiltonin ketju

$$C' = (s_1, s_i, s_{i-1}, \ldots, s_2, s_{i+1}, \ldots, s_n, s_1).$$

Verkosta $V'$ löytyy siis yhtä monta solmun $s_2$ ei-vierekkäistä solmua, kuin solmulla $s_1$ on vierekkäisiä solmuja, joita puolestaan on $\frac{n}{2} + m$ kappaletta. Toisaalta solmulla $s_2$ on lauseen oletusten mukaan $\frac{n}{2} + m$ vierekkäistä solmua. Solmun $s_2$ vierekkäiset ja ei-vierekkäiset solmut tekevät siis yhteensä $n + 2m$ solmua. Mutta $|S'| = n + m$, joten $m = 0$, mikä on ristiriita vastaoletuksen kanssa. $\square$ [18, ss. 136-137]

## 3.2 Suunnatut verkot

Suunnatut verkot muodostuvat solmuista ja niiden välisistä suunnatuista kaarista, nuolista. Tässä luvussa käsitellään suunnattujen verkkojen peruskäsitteitä ja esitellään muutamia suunnattujen verkkojen esitystapoja.

### 3.2.1 Suunnatun verkon määrittely

**Määritelmä 3.2.1.** Joukon $X$ *karteesinen tulo (cartesian product)* eli *tulojoukko (product set)* itsensä kanssa on kaikkien järjestettyjen lukuparien $(x, y)$ joukko

$$X \times X \quad = \quad \{(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

**Määritelmä 3.2.2.** Kolmikko $V = (S, N, \Psi)$ on *suunnattu verkko (directed graph, digraph)*, jos $S \neq \emptyset$ ja $N$ ovat joukkoja ja $\Psi : N \to S \times S$ on kuvaus. Joukon $S$ alkiot ovat verkon $V$ *solmuja (vertices, nodes)*, joukon $N$ alkiot ovat verkon $V$ *nuolia* tai *suunnattuja kaaria (arcs, directed edges, arrows)* ja kuvaus $\Psi$ on *vastaavuuskuvaus (incidence mapping)*.

Olkoon $\Psi(k) = (x, y)$ suunnatussa verkossa $V = (S, N, \Psi)$. Tällöin solmu $x$ on nuolen $k$ *alkusolmu (initial vertex)* ja solmu $y$ on nuolen $k$ *loppusolmu (terminal vertex)*. Solmut $x$ ja $y$ ovat myös nuolen $\Psi(k)$ *päätesolmut (end vertices)*.

Jos nuolen päätesolmuina on sama solmu, on kyseessä *luuppi (loop)*. Jos kahden solmun välillä on useita nuolia, on suunnatussa verkossa *rinnakkaisia nuolia (multiple edges, parallel edges, multi-edge)*. Suunnattu verkko on *yksinkertainen (simple)*, jos verkossa ei ole rinnakkaisia nuolia eikä luuppeja. Nuolet $\Psi(k_1) = (x, y)$ ja $\Psi(k_2) = (y, z)$ ovat *peräkkäiset (consecutive)*, koska nuolen $k_1$ loppusolmu on sama kuin nuolen $k_2$ alkusolmu.

**Määritelmä 3.2.3.** Suunnatussa verkossa $V = (S, N, \Psi)$ solmun $x$ *lähtöaste (outdegree)* on

$$a^+(x) = |\{k \in N \mid \Psi(k) = (x, y), x \in S\}|$$

ja *tuloaste (indegree)* on

$$a^-(x) = |\{k \in N \mid \Psi(k) = (y, x), x \in S\}|.$$

**Määritelmä 3.2.4.** Suunnattu verkko $V' = (S', N', \Psi')$ on suunnatun verkon $V = (S, N, \Psi)$ *aliverkko (subgraph)*, jos

1) $\emptyset \neq S' \subseteq S$,

2) $N' \subseteq N$,

3) $\Psi'(k) = \Psi(k)\ \forall k \in N'$,

4) jos $k \in N'$ ja $\Psi(k) = (x, y)$, niin $x, y \in S'$.

Merkintä $V' \sqsubseteq V$ tarkoittaa, että $V'$ on verkon $V$ aliverkko. Jos lisäksi $K' = \Psi^{-1}(S' \times S')$[4], on $V'$ solmujoukon $S'$ *virittämä* aliverkko.

**Määritelmä 3.2.5.** Suunnatussa verkossa $V = (S, N, \Psi)$ *polku (path)* $p$ solmusta $s_0$ solmuun $s_n$ muodostuu peräkkäisistä nuolista

$$p = k_1, k_2, k_3, ..., k_m.$$

Polulle solmusta $s_0$ solmuun $s_n$ käytetään merkintää $p : s_0 \to s_n$. Polku on suljettu, jos $s_0 = s_n$, muutoin polku on avoin.

[4] Tarkoittaa, että $K'$ sisältää kaikki aliverkon solmuihin $S'$ liittyvät nuolet.

**Määritelmä 3.2.6.** Suunnatussa verkossa $V = (S, N, \Psi)$ polku

$$(k_1, k_2, k_3, ..., k_m)$$

on *Eulerin polku (eulerian path)*, jos se sisältää kaikki verkon $V$ nuolet täsmälleen kerran. Jos suunnatussa verkossa $V$ on suljettu Eulerin polku, on kyseessä *Eulerin verkko (Euler graph, eulerian graph)*.

**Määritelmä 3.2.7.** Suunnatussa verkossa $V = (S, N, \Psi)$ polku

$$(k_1, k_2, k_3, ..., k_m)$$

on *Hamiltonin polku (hamiltonian path)*, jos se sisältää kaikki verkon $V$ solmut täsmälleen kerran. Jos suunnatussa verkossa $V$ on suljettu Hamiltonin polku, on kyseessä *Hamiltonin verkko (Hamilton digraph, hamiltonian digraph)*.

*Huomautus* 3.2.8. Suuntaamaton verkko määritellään ei-järjestetyn tulon avulla ja suunnattu verkko määritellään järjestetyn tulon avulla, jolloin suunnatussa verkossa kaarilla eli nuolilla on suunta. Muunnoksella $\Psi(k) = (x, y) \Rightarrow \Phi(k) = \{x, y\}$ suunnattu verkko $V = (S, K, \Psi)$ voidaan muuntaa suuntaamattomaksi verkoksi $V = (S, K_N, \Phi)$. Tätä verkkoa sanotaan *vastaavaksi suuntaamattomaksi verkoksi.*

**Määritelmä 3.2.9.** Suunnattu verkko $V = (S, K, \Psi)$ on *yhtenäinen (connected)*, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko $V = (S, K_N, \Phi)$ on yhtenäinen.

**Määritelmä 3.2.10.** Suunnattu verkko $V = (S, K, \Psi)$ on *puu (directed tree)*, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko $V = (S, K_N, \Phi)$ on puu. Suunnatun puun solmu $x$ on *juuri (root)*, jos kaikille $y \in S$ on olemassa polku $x \to y$. Suunnattu puu on *juurellinen puu (rooted tree)*, jos puussa on juuri. Juurellisen puun solmu $s$ on *lehti (leaf)*, jos $a^+(s) = 0$, ja *haara (internal vertex, intermediate vertex)*, jos $a^+(s) > 0$.

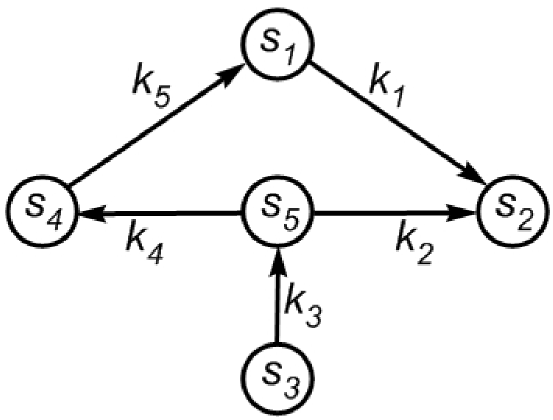
**Määritelmä 3.2.11.** Suunnattu verkko $V = (S, N, \Psi)$ on *turnaus (tournament)*, jos jokaisen $x \neq y$ solmuparin $x, y \in N$ välillä on täsmälleen yksi nuoli. Turnaus on *säännöllinen turnaus (regular tournament)*, jos $a^+(s_i) = a^+(s_j)$ kaikille $i, j \in \mathbb{N}$.

**Seuraus 3.2.12.** *Säännöllisessä turnauksessa on $a^-(s_i) = a^-(s_j)$ kaikille $i, j \in \mathbb{N}$.*

### 3.2.2 Suunnatun verkon esitystapoja

Äärellinen suunnattu verkko voidaan esittää esimerkiksi kaaviokuvana, luettelona tai yhteysmatriisina. Esitetään seuraavaksi eräs verkko $V = (S, N, \Psi)$ näillä kolmella eri tavalla.

1) *Kaaviokuva (figure)* muodostetaan siten, että piirretään $|S|$ solmua esimerkiksi pisteinä tai palloina ja yhdistetään ne kuvausta $\Psi$ vastaavilla nuolilla $N$. Jos kaaviokuva on mahdollista piirtää tasoon niin, että nuolet eivät leikkaa toisiaan, on verkko *tasoverkko (planar graph, plane graph)*, muutoin kyseessä on *avaruusverkko (nonplanar graph)*. Tämä esimerkkiverkko on tasoverkko (Kuva 4).




Kuva 4: Suunnattu verkko kaaviokuvana.

2) *Luettelo (list)* muodostetaan luettelemalla suunnatun verkon solmut, nuolet ja vastaavuudet. Kuvan 4 esimerkkiverkon luettelo on seuraava:

   solmut $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$,
   nuolet $N = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$,
   vastaavuus $\Psi(k_1) = (s_1, s_2), \Psi(k_2) = (s_5, s_2), \Psi(k_3) = (s_3, s_5)$, $\Psi(k_4) = (s_5, s_4), \Psi(k_5) = (s_4, s_1)$.

3) *Yhteysmatriisi* $M_V = (a_{ij})$ *(adjacency matrix)* saadaan asettamalla

$$a_{ij} = |\Psi^{-1}(s_i, s_j)|.$$

   Luku $a_{ij}$ on silloin nuolien $(s_i, s_j)$ lukumäärä. Kuvan 4 suunnattu verkko voidaan esittää yhteysmatriisina:

$$M = (a_{ij})_{5\times 5} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

## 3.3 Painotetut verkot

Verkkoteoreettisilla ongelmilla ja algoritmeilla on usein laskennallinen luonne, joka korostuu etenkin painotettujen verkkojen tapauksessa. Kun suuntaamattoman tai suunnatun verkon kaarilla tai solmuilla on jokin arvo eli *paino*, on kyseessä painotettu verkko. Eräs kombinatorisen optimoinnin perusongelmista on etsiä painotetusta verkosta lyhimpiä reittejä. Tässä luvussa tutustutaan perinteisiin ja yksinkertaisimpiin lyhimpien reittien algoritmeihin.

### 3.3.1 Painotetun verkon määrittely

**Määritelmä 3.3.1.** Viisikko $V = (S, K, \Phi, P_S, P_K)$ on

a) *painotettu* suuntaamaton verkko, jos $(S, K, \Phi)$ on suuntaamaton verkko, ja

b) suunnattu *painotettu* verkko, jos $(S, K, \Phi)$ on suunnattu verkko

sekä $P_S : S \to \mathbb{R}$ ja $P_K : K \to \mathbb{R}$ ovat kuvauksia eli *painofunktioita (weight function)*.

*Huomautus* 3.3.2. Painotetuille suuntaamattomille verkoille käytetään Luvun 3.1 mukaisia termejä ja suunnatuille painotetuille verkoille käytetään Luvun 3.2 mukaisia termejä.

Painotetut verkot muodostuvat useimmiten joko painotetuista solmuista tai kaarista, jolloin toinen painofunktioista jätetään huomioimatta. Tässä luvussa rajoitutaan yksinkertaisiin suuntaamattomiin painotettuihin verkkoihin, joissa vain kaarilla on painot ja painofunktio on $P$.

**Määritelmä 3.3.3.** Olkoon $V = (S, K, \Phi, P)$ yhtenäinen painotettu verkko. Verkon $V$ ketjun $K_m = \{k_1, k_2, ..., k_m\} \subseteq K$ *ketjun paino (weight of path)* on $\mathcal{P}(K_m) = P(k_1) + P(k_2) + ... + P(k_m)$. *Verkon kokonaispaino* $\mathcal{P}(V)$ *(total weight of graph)* on kaikkien verkon kaaripainojen summa. Virittävä puu verkossa $V$ on *minimaalinen virittävä puu (minimal spanning tree)*, jos sen kaaripainojen summa on kaikista virittävistä puista pienin.

Kauppamatkustajan ongelmassa etsitään lyhintä reittiä $n$ kaupungin halki palaten lähtökaupunkiin.

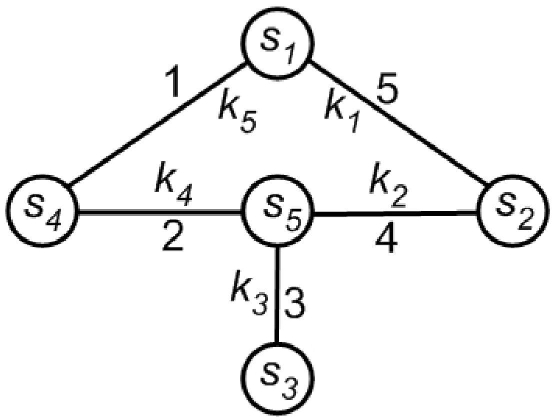
**Määritelmä 3.3.4.** *Kauppamatkustajan ongelmaksi (travelling salesman problem)* kutsutaan minimipainoisen suljetun Hamiltonin ketjun etsimistä painotetusta verkosta.

Vaikka kauppamatkustajan ongelman ratkaisemiseen ei tehokasta algoritmia ole olemassa [21, s. 151], voidaan ongelman mielekkyyttä tarkastella niin, että muunnetaan painotettu verkko suuntaamattomaksi verkoksi ja tutkitaan, onko verkko Hamiltonin verkko (Luku 3.1.4).

### 3.3.2 Painotetun verkon esitystapoja

Äärellinen painotettu verkko voidaan esittää esimerkiksi kaaviokuvana, luettelona tai painomatriisina. Esitetään seuraavaksi eräs painotettu verkko $V = (S, K, \Phi, P)$ näillä kolmella eri tavalla.

1) *Kaaviokuva (figure)* muodostetaan siten, että piirretään $S$ solmua, yhdistetään ne kuvausta $\Phi$ vastaavilla kaarilla $K$ ja merkitään kaariin painofunktiota $P$ vastaavat painot (Kuva 5).




Kuva 5: Painotettu verkko kaaviokuvana.

2) *Luettelo (list)* muodostetaan siten, että luetellaan painotetun verkon solmut, kaaret, vastaavuus ja kaarien painot. Kuvan 5 esimerkkiverkolle luettelo on seuraava:

solmut $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, kaaret $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$,

vastaavuus $\Phi(k_1) = \{s_1, s_2\}, \Phi(k_2) = \{s_2, s_5\}, \Phi(k_3) = \{s_3, s_5\}$, $\Phi(k_4) = \{s_4, s_5\}, \Phi(k_5) = \{s_1, s_4\}$,

kaarien painot $P(k_1) = 5, P(k_2) = 4, P(k_3) = 3, P(k_4) = 2$, $P(k_5) = 1$.

3) *Painomatriisi* $M_p = (p_{ij})$ *(adjacency matrix of weighted graph)* saadaan asettamalla

$$p_{ij} = P(\Phi^{-1}(\{s_i, s_j\})).$$

Luku $p_{ij}$ on solmujen $s_i$ ja $s_j$ välillä olevan kaaren paino. Jos solmujen $s_i$ ja $s_j$ välillä ei ole kaarta, merkitään $p_{ij} = \infty$. Luuppien painoksi asetetaan 0. Kuvan 5 painotetun verkon painomatriisi on:

$$M_p = (p_{ij})_{5\times 5} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & 1 & \infty \\ 5 & 0 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

### 3.3.3 Minimaalisen virittävän puun algoritmeja

Minimaalisen virittävän puun algoritmeilla voidaan etsiä painotetusta verkosta kaikki solmut sisältävä yhtenäinen aliverkko, jonka kokonaispaino on pienin mahdollinen. Tutustutaan seuraavaksi kahteen yksinkertaiseen klassiseen algoritmiin, jotka tuottavat minimaalisen virittävän puun.

### ***Kruskalin algoritmi*** *(Kruskal's algorithm)*

*Syöte (input)*: äärellinen, yhtenäinen ja yksinkertainen painotettu $n$-solmuinen verkko $V = (S, K, \Phi, P)$
*Tuote (output)*: minimaalinen virittävä puu $E_{\mathrm{Kr}} = (S, T, \Phi \mid T, P \mid T)$

$K0$. Aseta $i = 0, T_0 = \emptyset$, $\Phi_0 = \emptyset$, $P_0 = \emptyset$ ja
$E_0 = (S, T_0, \Phi \mid T_0, P \mid T_0)$.

$K1$. jos $i < n - 1$ siirry kohtaan $K2$,
muutoin aseta $T = T_i$, $E_{\mathrm{Kr}} = (S, T, \Phi \mid T, P \mid T)$ ja **lopeta**.

$K2$. valitse kaari $k \in K \setminus T_i$, jolle

1) verkossa $(S, T_i \cup \{k\}, \Phi \mid T_i \cup \{k\}, P \mid T_i \cup \{k\})$ ei ole suljettua ketjua ja,
2) $P(k)$ on mahdollisimman pieni.

Aseta $T_{i+1} = T_i \cup \{k\}$, $E_{i+1} = (S, T_{i+1}, \Phi \mid T_{i+1}, P \mid T_{i+1})$,
kasvata indeksiä $i$ yhdellä ja siirry kohtaan $K1$.

**Lause 3.3.5.** *Kruskalin algoritmi tuottaa minimaalisen virittävän puun.*

*Todistus.* Tämä todistus mukailee osittain [1, s. 18-5] todistusta. Olkoon $V = (S, K, \Phi, P)$ yhtenäinen äärellinen painotettu verkko. Verkon yhtenäisyydestä seuraa, että verkossa on vähintään yksi virittävä puu. Verkon äärellisyydestä seuraa, että virittäviä puita on äärellinen määrä. Koska virittävien puiden kokonaispainoja $\mathcal{P}(P_1), \mathcal{P}(P_2), ..., \mathcal{P}(P_m)$ on äärellisen monta ja jokin niistä on pienin, on minimaalinen virittävä puu olemassa.

Olkoot painotettu verkko $E_{\min} = (S, K_{\min}, \Phi_{\min}, P_{\min})$ verkon $V$ minimaalinen virittävä puu ja painotettu verkko $E_{\mathrm{Kr}} = (S, T, \Phi_T, P_T)$ Kruskalin algoritmin tuottama painotettu verkko. Osoitetaan aluksi, että verkko $E_{\mathrm{Kr}}$ on verkon $V$ virittävä puu. Koska verkkojen $V$ ja $E_{\mathrm{Kr}}$ solmujoukko on sama ja $T \subseteq K$, on $\Phi_T = \Phi \mid T$ ja $P_T = P \mid T$. Verkko $E_{\mathrm{Kr}}$ on aliverkon määritelmän nojalla verkon $V$ aliverkko. Koska verkko $E_{\mathrm{Kr}}$ sisältää kaikki verkon $V$ solmut, siinä on kaaria algoritmin pysähdyttyä $n - 1$ kappaletta ja verkossa ei ole yhtäkään suljettua ketjua, on verkko $E_{\mathrm{Kr}}$ Lauseen 3.1.16 nojalla verkon $V$ virittävä puu.

Osoitetaan seuraavaksi, että verkon $E_{\mathrm{Kr}}$ ja $E_{\min}$ painojen summat ovat samat. Tehdään tämä muuntamalla $E_{\min}$ asteittain samanpainoisten virittävien puiden kautta puuksi $E_{\mathrm{Kr}}$. Olkoon verkossa solmuja $n$ kappaletta ja olkoot verkon $E_{\mathrm{Kr}}$ kaaret algoritmin valintojen mukaisessa järjestyksessä $T' = (k_1, k_2, ..., k_{n-2}, k_{n-1})$, siis painot pienimmästä suurimpaan. Jos $T = K_{\min}$ on verkko $E_{\mathrm{Kr}}$ minimaalinen virittävä puu, ja asia on selvä.

Oletetaan, että $T$ ja $K_{\min}$ eivät ole sama kaarijoukko. Koska joukoissa on sama äärellinen määrä alkioita, joukossa $T$ on jokin kaari, joka ei kuulu joukkoon $K_{\min}$. Olkoon $k_{q_1}$ jonossa $T'$ ensimmäinen joukkoon $K_{\min}$ kuulumaton kaari, jolloin

$$\{k_1, k_2, ..., k_{q_1-1}\} \in K_{\min} \text{ ja } k_{q_1} \notin K_{\min}.$$

Lisätään kaari $k_{q_1}$ joukkoon $K_{\min}$, jolloin verkkoon $E_{\min}$ muodostuu Lauseen 3.1.17 nojalla suljettu ketju $C_1$. Tämä suljettu ketju ei voi koostua pelkästään joukon $T$ kaarista, koska Kruskalin algoritmi valitsee verkkoon $E_{\mathrm{Kr}}$ kaaria siten, että suljettuja ketjuja ei muodostu. Siis suljetussa ketjussa $C_1$ on jokin kaari $e_1 \in K_{\min}$, joka ei kuulu joukkoon $T$. Poistetaan tämä, jolloin ketju avautuu ja syntyy virittävä puu $E_1$ kaarijoukkona $K_1$. Koska $e_1$ ei voi olla mikään kaarista $\{k_1, k_2, ..., k_{q_1-1}\}$ ja koska algoritmi valitsee puuhun kaaria pienimmästä suurimpaan, on $P(k_{q_1)} \leq P(e_1)$. Näin ollen verkon $E_1$ kaarijoukolle $K_1$ on voimassa

$$\mathcal{P}(K_1) = \mathcal{P}(K_1) - P(e_1) + P(k_{q_1}) \leq \mathcal{P}(K_1).$$

Koska kaarijoukko $K_1$ muodostaa verkon $V$ minimaalisen virittävän puun, on $\mathcal{P}(K_1) = \mathcal{P}(K_{\min})$, joten myös verkko $E_1$ on minimaalinen virittävä puu. Jos $K_1 = T$, on lause todistettu. Jos ei, on joukossa $T$ jokin kaari, joka ei kuulu joukkoon $K_1$. Olkoon $k_{q_2}$ jonossa $T'$ seuraava joukkoon $K_1$ kuulumaton kaari, jolloin

$$\{k_1, k_2, ..., k_{q_2-1}\} \in K_1 \text{ ja } k_{q_2} \notin K_1, \text{ missä } q_2 \geq q_1 + 1.$$

Lisätään kaari $k_{q_2}$ joukkoon $K_1$, jolloin verkkoon $E_1$ muodostuu Lauseen 3.1.17 nojalla suljettu ketju $C_2$. Tämä suljettu ketju ei voi koostua pelkästään joukon $T$ kaarista, koska Kruskalin algoritmi valitsee verkkoon $E_{\mathrm{Kr}}$ kaaria siten, että suljettuja ketjuja ei muodostu. Siis suljetussa ketjussa $C_2$ on jokin kaari $e_2 \in K_1$, joka ei kuulu joukkoon $T$. Poistetaan tämä, jolloin ketju avautuu ja syntyy virittävä puu $E_2$ kaarijoukkona $K_2$. Koska $e_2$ ei voi olla mikään kaarista $\{k_1, k_2, ..., k_{q_2-1}\}$ ja koska algoritmi valitsee puuhun kaaria pienimmästä suurimpaan, on $P(k_{q_2}) \leq P(e_2)$. Näin ollen verkon $E_2$ kaarijoukolle $K_2$ on voimassa

$$\mathcal{P}(K_2) = \mathcal{P}(K_1) - P(e_2) + P(k_{q_2}) \leq \mathcal{P}(K_1).$$

Koska kaarijoukko $K_1$ muodostaa verkon $V$ minimaalisen virittävän puun, on $\mathcal{P}(K_2) = \mathcal{P}(K_1)$, joten myös verkko $E_2$ on minimaalinen virittävä puu. Menetelmää jatkamalla voidaan osoittaa, että aina uusi edellisen kanssa yhtä painava $E_j$ sisältää entistä enemmän jonon $T'$ alkioita ja äärellisen monen askeleen päästä $E_j$ sisältää kaikki verkon $E_{\mathrm{Kr}}$ kaaret. $\square$

## ***Primin algoritmi*** *(Prim's algorithm)*

*Syöte*: äärellinen, yhtenäinen ja yksinkertainen painotettu $n$-solmuinen verkko $V = (S, K, \Phi, P)$ sekä aloitussolmu $s \in S$.
*Tuote*: minimaalinen virittävä puu $E_{\mathrm{Pr}} = (S, T, \Phi \mid T, P \mid T)$.

$P0$. Aseta $i = 0, T_0 = \emptyset$, $S_0 = \{s\}$, $E_0 = (S_0, T_0, \Phi \mid T_0, P \mid T_0)$

$P1$. jos $i < n - 1$ siirry kohtaan $P2$,
muutoin aseta $S = S_i$, $T = T_i$, $E_{\mathrm{Pr}} = (S, T, \Phi \mid T, P \mid T)$ ja **lopeta**.

$P2$. valitse puuhun $E_i$ liittyvä kaari $k \cong \{x, y\} \in K \setminus T_i$, jolle

1) verkossa $(S_i, T_i \cup \{k\}, \Phi \mid T_i \cup \{k\}, P \mid T_i \cup \{k\})$ ei ole suljettua ketjua ja,
2) $P(k)$ on mahdollisimman pieni.

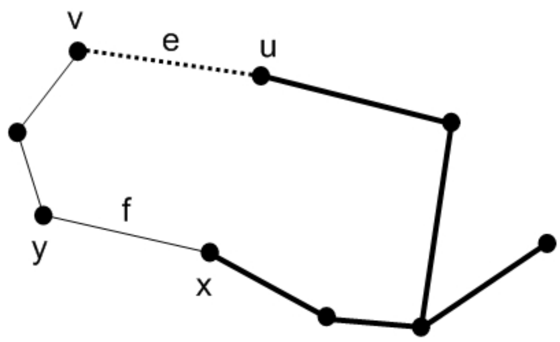
Aseta $T_{i+1} = T_i \cup \{k\}$, $S_{i+1} = S_i \cup \{x, y\}$, $E_{i+1} = (S_{i+1}, T_{i+1}, \Phi \mid T_{i+1}, P \mid T_{i+1})$, kasvata indeksiä $i$ yhdellä ja siirry kohtaan $P1$.

**Lause 3.3.6.** *Olkoon $E_k$ Primin algoritmin tuottama puu iteraatiokierroksen $k$ jälkeen yhtenäisessä painotetussa verkossa $V$, missä $0 \le k \le n-1$. Tällöin $E_k$ on erään minimaalisen virittävän puun $E$ alipuu.*

*Todistus.* Olkoon verkko $V$ äärellinen yhtenäinen painotettu verkko. Verkon yhtenäisyydestä seuraa, että verkossa on vähintään yksi virittävä puu. Verkon äärellisyydestä seuraa, että virittäviä puita on äärellinen määrä. Koska virittävien puiden kokonaispainoja $\mathcal{P}(P_1), \mathcal{P}(P_2), ..., \mathcal{P}(P_m)$ on äärellisen monta ja jokin niistä on pienin, on minimaalinen virittävä puu olemassa.

Todistetaan väite induktiolla. Triviaalisti lause on tosi puulle $E_0$. Oletetaan, että puu $E_k$ on erään minimaalisen virittävän puun $E$ alipuu ja tarkastellaan puuta $E_{k+1}$. Olkoon kaari $e \cong \{u, v\}$ liittynyt puuhun $E_k$ algoritmin mukaisesti iteraatiokierroksella $k+1$ siten, että $u \in E_k$ ja $v \notin E_k$. Jos kaari $e$ kuuluu minimaaliseen virittävään puuhun $E$, on puu $E_{k+1}$ puun $E$ alipuu ja asia on selvä.

Oletetaan, että kaari $e$ ei kuulu minimaaliseen virittävään puuhun $E$. Tällöin minimaalisessa virittävässä puussa $E$ on solmu $x$, josta on ketju $k : x \to v$, koska puu $E$ yhdistää kaikki verkon $V$ solmut. Lisätään kaari $e$ puuhun $E$, jolloin Lauseen 3.1.17 nojalla muodostuu suljettu ketju. Olkoon kaari $f \cong \{x, y\} \in E$ ensimmäinen suljetussa ketjussa siten, että $x \in E_k$ ja $y \notin E_k$. Tilannetta on havainnollistettu Kuvassa 6, jossa puuhun $E_k$ kuuluvat paksut kaaret sekä nimetyistä solmuista solmut $u$ ja $x$ ja katkoviivalla merkitty kaari $e$ tulee valituksi puuhun $E_{k+1}$ iteraatiokierroksella $k+1$.




Kuva 6: Primin algoritmi $n$:llä iteraatiokierroksella.

Induktio-oletuksen mukaan verkko $E_k$ on erään minimaalisen virittävän puun alipuu ja koska kaari $e$ tulee valituksi puuhun $E_{k+1}$ iteraatiokierroksella $k+1$, on voimassa $P(e) \leq P(f)$. Olkoon puu $E^*$ muodostettu verkosta $E$ siten, että lisätään verkkoon kaari $e$ ja poistetaan verkosta kaari $f$. Nyt verkko $E^*$ virittää verkon $V$ ja puu $E_{k+1}$ on verkon $E^*$ alipuu, koska kaari $f$ ei kuulu puuhun $E_k$. Lopulta voimme todeta, että

$$\mathcal{P}(E^*) = \mathcal{P}(E) + P(e) - P(f) \leq \mathcal{P}(E).$$

Koska verkko $E$ on eräs minimaalinen virittävä puu, on oltava $\mathcal{P}(E^*) = \mathcal{P}(E)$. Siis myös $E^*$ on minimaalinen virittävä puu verkossa $V$. $\square$ [2, ss. 177-178]

### 3.3.4 Lyhimmän ketjun algoritmi

Dijkstran algoritmi tuottaa virittävän puun, jossa ovat lyhimmät ketjut aloitussolmusta painotetun verkon kaikkiin muihin solmuihin. Dijkstran algoritmi soveltuu myös tilanteisiin, jossa etsitään lyhintä ketjua kahden solmun välille painotetussa verkossa.

**_Dijkstran algoritmi_** (Dijkstra's algorithm)

*Syöte*: äärellinen, yhtenäinen ja yksinkertainen painotettu $n$-solmuinen verkko $V = (S, K, \Phi, P)$ ja aloitussolmu $s$.
*Tuote*: virittävä puu $E_{\mathrm{Dj}} = (S, T, \Phi \mid T, P \mid T)$, jossa lyhimmät ketjut aloitussolmusta $s$ verkon kaikkiin muihin solmuihin.

*D*0. Aseta $i = 0, T_0 = \emptyset$, $S_0 = \{s\}$ ja $E_0 = (S_0, T_0, \Phi \mid T_0, P \mid T_0)$

*D*1. jos $i < n - 1$ siirry kohtaan $D2$,
muutoin $S = S_i$, $T = T_i$, $E_{\mathrm{Dj}} = (S, T, \Phi \mid T, P \mid T)$ ja **lopeta**.

*D*2. valitse puuhun $T_i$ liittyvä kaari $k \cong \{x, y\} \in K \setminus T_i$, jolle

1) verkossa $(S_i, T_i \cup \{k\}, \Phi \mid T_i \cup \{k\}, P \mid T_i \cup \{k\})$ ei ole suljettua ketjua ja,
2) ketju solmusta $s$ solmuun $y$ on lyhin, kun $x \in T_i$ ja $y \notin T_i$.

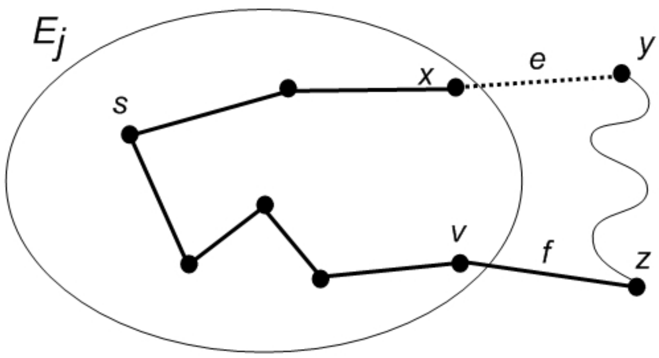
Aseta $T_{i+1} = T_i \cup \{k\}$, $S_{i+1} = S_i \cup \{x, y\}$, $E_{i+1} = (S_{i+1}, T_{i+1}, \Phi \mid T_{i+1}, P \mid T_{i+1})$, kasvata indeksiä $i$ yhdellä ja siirry kohtaan $D1$.

**Lause 3.3.7.** *Olkoon $E_j$ Dijkstran algoritmin tuottama puu $j$ iterointikierroksen jälkeen yhtenäisessä painotetussa verkossa $V$, missä $0 \leq j \leq n - 1$. Tällöin jokaiselle solmulle $x \in E_j$ on olemassa sellainen puun $E_j$ ketju solmusta $s$ solmuun $x$, jonka paino on pienin verkossa $V$.*

*Todistus.* Olkoon verkko $V$ äärellinen yhtenäinen painotettu verkko, jonka painot ovat positiivisia reaalilukuja. Koska verkko $V$ on äärellinen, yhtenäinen ja sen painot ovat positiivisia lukuja, saavat ketjun pituudet kahden solmun välillä diskreettejä arvoja. Verkon yhtenäisyydestä seuraa, että verkossa on vähintään yksi virittävä puu. Verkon äärellisyydestä seuraa, että virittäviä puita on äärellinen määrä. Siis verkossa on vähintään yksi virittävä puu, jossa ovat lyhimmät ketjut aloitussolmusta kaikkiin verkon $V$ solmuihin.

Todistetaan väite induktiolla. Olkoon Dijkstran algoritmin aloitussolmu $s$. Triviaalisti lause on tosi puulle $E_0$. Oletetaan, että puu $E_j$ täyttää lauseen ehdot ja tarkastellaan puuta $E_{j+1}$. Olkoon kaari $e \cong \{x, y\}$ lisätty puuhun $E_j$ algoritmin mukaisesti iteraatiokierroksella $j+1$ ja $x \in E_j$, $y \notin E_j$. Koska $y$ on uusi solmu, joka liittyy puuhun $E_{j+1}$, täytyy osoittaa, että ketju $k_{s,y} : s \to y$ on kaikista ketjuista lyhin verkossa $V$.

Olkoon $k^*_{s,y}$ mikä tahansa ketju solmusta $s$ solmuun $y$ verkossa $V$. Merkitään seuraavassa ketjun $C$ kaarien kokonaispainoa $\mathcal{P}(C)$. Osoitetaan, että $\mathcal{P}(k^*_{s,y}) \geq \mathcal{P}(k_{s,y})$. Koska $s \in E_j$ ja $y \notin E_j$, voidaan ketjusta $k^*_{s,y}$ valita ensimmäinen sellainen kaari $f \cong \{v, z\}$, että $v \in E_j$ ja $z \neq E_j$. Olkoon $k^*_{z,y}$ mikä tahansa ketju solmusta $z$ solmuun $y$. Tilannetta on havainnollistettu Kuvassa 7.




Kuva 7: Dijkstran algoritmi iteraatiokierroksella $j$.

Induktio-oletuksen mukaan $k_{s,x}$ on lyhin ketju $s \to x$ ja $k^*_{s,v}$ on lyhin ketju $s \to v$. Koska kaari $e$ tulee valituksi iteraatiokierroksella $j + 1$, täytyy ketjuille $k_{s,y} : s \to x \to y$ ja $k^*_{s,z} : s \to v \to z$ olla voimassa $\mathcal{P}(k_{s,y}) \leq \mathcal{P}(k^*_{s,z})$. Siis ketjuille $k^*_{s,y}$ ja $k_{s,y}$ on voimassa

$$\mathcal{P}(k^*_{s,y}) = \mathcal{P}(k^*_{s,z}) + \mathcal{P}(k^*_{z,y}) \geq \mathcal{P}(k_{s,y}) + \mathcal{P}(k^*_{z,y}) \geq \mathcal{P}(k_{s,y}),$$

joka on tosi, koska kaikilla painoilla on positiiviset arvot. Tästä johtuen Dijkstran algoritmi tuottaa jokaisella iteraatiokierroksella puun, jossa ovat lyhimmät ketjut aloitussolmusta $s$ puun muihin solmuihin verkossa $E_j$. Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikille Dijkstran puille $E_j$. Iteraatiokierroksen $j = n - 1$ jälkeen algoritmin tuottama puu virittää verkon $V$, jossa ovat lyhimmät ketjut solmusta $s$ kaikkiin muihin verkon $V$ solmuihin. $\square$ [2, ss. 180-181]

# 4 Ainedidaktinen viitekehys

Tässä luvussa käydään läpi Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin taustalla olevaa matematiikan didaktista teoriaa. Luvun pääasiallisena lähteenä on käytetty Haapasalon kirjan vanhempaa [3] ja uudempaa [4] painosta.

## 4.1 Ongelman määrittely

Mikä on ongelma? Tämä kysymys tuottaa varmasti erilaisia vastauksia riippuen siitä keneltä kysytään. Sana "ongelma" tuottaa yleensä negatiivisia mielikuvia. Mutta jos ongelmat tarkoittavat automaattisesti jotain pahaa, ei matematiikan opiskelussa harjoitetulla ongelmanratkaisulla voi olla kovin ruusuista tulevaisuutta.

Jokin tilanne tai tehtävä ei automaattisesti ole ongelma kaikille ihmisille. Esimerkiksi jonkun mielestä oma alkoholin käyttö ei välttämättä ole ongelma, mutta puoliso voi olla asiasta hyvinkin eri mieltä. Tai vielä tarkemmin sanottuna, alkoholisti ei välttämättä koe tarvetta lopettaa juomistaan, kun taas lähiomaiset haluaisivat saada juomisen loppumaan, mutta eivät näe välittömiä keinoja tämän toteuttamiseen. Jos taas alkoholisti haluaisi lopettaa juomisen, mutta ei keksi miten pitää viinanhimoaan kurissa, näkee hän tilanteen itsekin ongelmana. Jos taas juomisen lopettaminen onnistuu helposti, ei tilanteessa ole mitään ongelmaa.

Vastaavanlainen tilanne pätee myös matematiikassa ratkaistaville ongelmille. Jos jonkin tehtävän tai ongelmatilanteen ratkaiseminen ei kiinnosta jotakuta oppilasta, ei kyseinen tehtävä ole hänelle ongelma. Jos tehtävä taas on liian helppo tai ratkaistavissa rutiininomaisesti, ei voida myöskään puhua ongelmasta.

Haapasalo määrittelee ongelman seuraavalla tavalla [3, s. 17]: *Jotta tilanne olisi määrätyllä hetkellä tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä, juuri sillä hetkellä, tietoista, päämäärähakuista (ajattelu)toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja.*

## 4.2 Erilaisia ongelmatyyppejä

Ongelmia voidaan luokitella monin tavoin. Tässä työssä käytetään jaottelua kolmeen eri luokkaan: interpolaatio-ongelmat, analyysi-synteesi -ongelmat sekä dialektiset ongelmat. Luokitteluperusteina käytetään kolmea näkökulmaa: millaisia ominaisuuksia on ongelman lähtötilalla, millaisia ominaisuuksia on ongelman lopputilalla (halutulla ratkaisulla) sekä millaisia askeleita (operaatioita) tarvitaan ratkaisuun pääsemiseksi. [3, s. 37]

### 4.2.1 Interpolaatio-ongelmat

*Interpolaatio-ongelma* on nimensä mukaisesti kahden erillisen ”navan”, eli alku- ja lopputilan, yhdistämistä vaativa ongelma. Alku- ja lopputilat ovat tarkkaan tiedossa, ja varsinaisena tehtävänä on etsiä polku näiden kahden tilan välille. Ratkaisupolun löytämiseen johtavat operaatiot tulee käydä ilmi joko tehtävän asettelusta, tai niiden tulee olla ratkaisijalle ennestään tuttuja. [3, s. 38] Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalissa ei esiinny interpolaatio-ongelmia, joten niitä ei tarkastella tässä tämän enempää.

### 4.2.2 Analyysi-synteesi -ongelmat

Interpolaatio-ongelmia astetta vaativampia ovat *analyysi-synteesi -ongelmat*. Siinä missä ensin mainitussa ongelmatyypissä tiedetään sekä alku- että lopputilat, analyysi-synteesi -ongelmissa voi jompikumpi tiloista olla hämärän peitossa. Olennainen ero näiden kahden ongelmatyypin välillä on myös siinä, että analyysi-synteesi -ongelmissa ratkaisuun johtavat operaatiot eivät saa käydä ilmi tehtävän asettelusta, ja ne voivat olla ongelmanratkaisijalle entuudestaan tuntemattomia. [3, s. 39]

### 4.2.3 Dialektiset ongelmat

Kolmas ongelmatyyppi, *dialektiset ongelmat*, menee astetta aiemmin esiteltyjä ongelmatyyppejä pidemmälle vapaudessaan ja epämääräisyydessään. Dialektisten ongelmien tunnusmerkki on, että niissä ei ole annettu lopputilaa, ja alkutilakin voi olla epämääräinen. Ongelmanratkaisu voi alkaa alkutilan tarkemmalla määrittelemisellä ja lopputila voi puolestaan käydä ilmi ongelmanratkaisuprosessin aikana. Dialektisille ongelmille on myös tyypillistä lopputuloksen arvioinninvaraisuus; ratkaisu ei ole joko oikein tai väärin, vaan sen mielekkyys on kiinni ratkaisun perusteluista. Tätä seikkaa korostaa monesti dialektisten ongelmien kysymyksenasettelu, jossa käytetään usein fraaseja ”...mielestäsi...”, ”...oma näkökantasi...” jne. [3, s. 41]

## 4.3 Ongelmanratkaisusta

Tuskin kukaan kiistää, ettei ongelmanratkaisu ole merkittävä taito. Monet ovat varmasti myös sitä mieltä, että ongelmanratkaisua tulee opettaa koulussa. Se mitä hyvä ongelmanratkaisu on, ei kuitenkaan ole niin selvää, puhumattakaan siitä, miten ongelmanratkaisua voidaan opettaa tehokkaasti. Jos hyvä ongelmanratkaisu tarkoittaa ainoastaan sitä, että ongelmaan saadaan hyvä ratkaisu, on hyvin vaikea lähteä tutkimaan ja analysoimaan ongelmanratkaisun opettamista. Siksi onkin syytä keskittyä siihen, mitä tapahtuu ongelmanratkaisun aikana. Näitä lopulta ratkaisuun johtavia prosesseja kutsutaan *heuristisiksi prosesseiksi.*

### 4.3.1 Heuristiset prosessit

Ongelmien ratkaiseminen edellyttää yleensä *asiatietoa.* Asiatiedolla voidaan tarkoittaa esimerkiksi faktoja, otaksumia sekä jopa kaavamaisia tai algoritmin tyyppisiä menettelyjä[5], tietoja, joita voidaan tarvittaessa palauttaa mieleen. Erityisesti tämä käy ilmi matemaattisista ongelmista, joissa sovelletaan lähes poikkeuksetta aiemmin opittua tietoa. [3, s. 25]

Jos kuitenkin pelkkä asiatieto riittää tehtävän ratkaisemiseen, ei kyseessä ole ongelma lainkaan. Eräs ongelman tunnusmerkki on se, ettei siihen ole välittömästi näkyvissä ratkaisua (Luku 4.1). Ongelmanratkaisun on sisällettävä prosesseja, joissa valitaan ja käsitellään tilanteeseen sopivaa asiatietoa. Strategioita tällaisten prosessien suorittamiseksi sanotaan *menetelmällisiksi tiedoiksi.* [3, s. 25]

Ongelmanratkaisustrategiat sisältävät myös oman ajattelun arviointia ja kontrollia. Näistä voidaan käyttää nimitystä *metakognitiot* . Kontrollia on esimerkiksi se pieni ääni pään sisällä, joka sanoo: "nyt tämä muodostamani yhtälö ei näytä ratkeavan mitenkään järkevään muotoon. Palataanpa askel taaksepäin ja katsotaan, onko yhtälö muodostettu oikein. Jos on, ei yhtälön muodostaminen vaikuta sittenkään käyttökelpoiselta ratkaisulta, ja voin harkita ongelman ratkaisuun jotain muuta keinoa." Menetelmällisiä tietoja sekä metakognitioita voidaan nimittää yhteisellä nimellä *heuristiset prosessit.* [3, ss. 25-26]

Luvussa 4.1 esiintynyt ongelman määrittely voidaan heurististen prosessien avulla muotoilla yksinkertaisemmin [3, s. 26]: "*Ongelma on tietynlainen epätasapaino- tai ristiriitatilanne, joka synnyttää yksilössä heuristisia prosesseja tähdäten tilanteen tasapainottamiseen eli ratkaisun löytämiseen.*"

### 4.3.2 Pólyan ongelmanratkaisuprosessi

Unkarilainen matemaatikko George Pólya jakaa ongelmanratkaisuprosessin seuraaviin vaiheisiin [3, s. 178]:

1) ongelman ymmärtäminen,

2) ratkaisusuunnitelman laatiminen,

3) ratkaisusuunnitelman toteutus,

[5] Esimerkiksi rutinoitunut yhtälönratkaisu.

4) prosessin tulkinta ja feedback.

Ensimmäisessä vaiheessa tiedostetaan ongelmatilanne ja motivoidutaan ratkaisemaan ongelma. Tarvittavat henkiset toiminnat, tietojen valikoituminen ja käytännön toimenpiteen alkavat. Ongelman ymmärtäminen voi myös vaatia ongelmanasettelun uudelleen muotoilua. Myös mallin laatiminen on erittäin tehokas tapa ongelman ymmärtämiseksi. [3, s. 179]

Ratkaisusuunnitelman laatiminen voi alkaa ongelman täsmentämisellä sekä analysoimisella. Nämä vaiheet sisältävät mm. ongelman mielekkyyden tarkastelemista ja ongelman olennaisimpien osien tunnistamista. Varsinkin matematiikassa hyvin olennaista on myös annettujen tietojen ja ehtojen pohtiminen. Siis ovatko annetut tiedot ja ehdot riittävät ja ristiriidattomat. Jos annetut tiedot ja ehdot eivät ole riittävät, on niitä valittava lisää. Vastaavasti on tunnistettava, ovatko kaikki annetut tiedot ja ehdot ongelman ratkaisemisen kannalta olennaisia[6]. [3, s. 179]

Ratkaisusuunnitelman laatimisen tavoitteena on luonnollisesti ratkaisuidean löytäminen. Ratkaisuidea on tie, keino, suunnitelma, strategia tai muu vastaava menetelmä, joka johtaa todennäköisesti ratkaisun löytämiseen. Jos tätä ideaa ei meinaa löytyä, kannattaa varmistaa onko ymmärtänyt ja analysoinut ongelman oikein sekä miettiä, onko ongelma purettavissa pienemmiksi ongelmiksi tai vastaavasti osa laajempaa kokonaisuutta. Myös ongelman ehtojen muuttaminen on tehokas keino ongelman täsmentämiseksi. [3, s. 180]

Ratkaisuidean toteuttamisessa suoritetaan suunnittelussa ehdotetut toimenpiteet mahdollisimman huolellisesti. Tämän jälkeen tehdään ratkaisun määrittäminen, missä tarkastetaan, että toteutusvaiheessa on löytynyt ongelmalle ratkaisu. Lopuksi ratkaisu on vielä esitettävä. Pelkän ratkaisun lisäksi on yleensä myös hyvä esittää siihen johtaneet oleelliset askeleet ja päättelyt. Esittämisen muoto ja tarkkuus riippuvat yleensä tilanteesta, mutta innokas ongelmanratkaisija näkee tämän vaiheen aina tilaisuutena kehittää sujuvaa ja virheetöntä tiedon esittämistä. [3, s. 180]

Prosessin tulkinnassa varmistutaan saadun ratkaisun oikeellisuudesta varmistamalla, että se on sopusoinnussa ongelmanasettelun kanssa. Lisäksi voidaan esimerkiksi kokeilla ongelman ratkaisemista vaihtoehtoisilla menetelmillä ja katsoa päädytäänkö samaan lopputulokseen. Ongelmanratkaisua on syytä arvostaa kokonaisena prosessina, joten lopuksi kannattaa myös painaa mieleen ratkaisu ja siihen johtaneet menetelmät tulevaisuuden varalle. Ratkaisussa käytetyt ja mahdollisesti sitä varten kehitetyt työkalut voivat olla

[6] Koulussa yleisesti ratkaistavien tehtävien tekeminen ei kehitä näitä taitoja, sillä koulumatematiikan tehtävät sisältävät yleensä kaiken tarpeellisen tiedon eikä mitään ylimääräistä.

hyödyllisiä tulevaisuudessakin. Myös ratkaisun merkitystä voi arvioida, ja pohtia jopa ratkaisun yleistä julkistamistakin. [3, s. 181]

### 4.3.3 Ongelmanratkaisun opettamisesta

Mitä ongelmanratkaisun opettaminen tarkoittaa? Voiko ongelmanratkaisua opettaa? Jos voi, niin miten? Haapasalon mukaan heuristiikkojen oppiminen parantaa yksilön ongelmanratkaisukykyä ja heuristiikkoja puolestaan voi oppia [3, s. 126]. Tämän perusteella vastattavaksi jää ainoastaan viimeisenä esitetty kysymys, tosin uudelleen muotoiltuna: miten heuristiikkoja voi oppia?

Heuristiikkojen opettaminen tulisi aloittaa mahdollisimman yksinkertaisilla strategioilla, joiden omaksumiseen oppilailla on kehityspsykologiset ja kognitiiviset edellytykset. Alkuvaiheessa tällaisia strategioita voivat olla esimerkiksi johtopäätösten tekeminen sekä vaihtoehtojen muodostaminen. Opettaminen on voitava toteuttaa mahdollisimman selkeillä ja varmasti suoritettavissa olevilla ohjeilla, ja kun ensimmäisten strategioiden käyttö on opittu, opettajan tulee esittää ongelmia, joiden ratkaisemiseen ne sopivat. Positiiviset kokemukset ovat myös hyvin merkittävässä roolissa, sillä niiden kautta oppilas innostuu yrittämään yhä haasteellisempien ongelmien ratkaisemista. [3, s. 130]

Haapasalo esittää seuraavanlaisen jaon, joka luokittelee oppilaat heidän ongelmanratkaisukykynsä mukaan [3, s. 223]:

1. taso Oppilaalla ei ole mitään kuvaa siitä, miten ongelmatilanteessa tulisi käyttäytyä. Opettaja on hänelle ainoa malli ongelman ratkaisijasta.

2. taso Oppilas ymmärtää ongelmanratkaisun merkityksen, uskaltautuu käymään käsiksi tutun tuntuisiin ongelmiin, ideoi ryhmässä. Opettaja on tuki ja ”proteesi”.

3. taso Oppilaalla on hyvä käsitys ongelmanratkaisusta. Hän uskaltautuu jo kokeilemaan uudentyyppisiä strategioita. Opettaja on ongelmien ”toimittaja”.

4. taso Oppilas kykenee valitsemaan eri strategioista sopivimman, näkee variaatioita ja yleistyksiä sekä esittää niitä muille. Opettaja on ”edistäjä”.

Jos oppilas edustaa 1. tasoa, on syytä lähteä liikkeelle oppilaalle luonnollisista ja rakenteeltaan yksinkertaisista ongelmista. Tärkeintä on varmistaa, että oppilas saa onnistumisen elämyksiä ja kokemusta ongelmatilanteessa käyttäytymisestä sekä kokee ongelmanratkaisutilanteet mahdollisimman miellyttäviksi. Opettajan on osattava olla elävä malli siitä, miten ongelmanratkaisutilanteissa käyttäydytään. Oppilaalle ei opeteta uusia heuristiikkoja, vaan tarkoitus on saada esille hänessä mahdollisesti piilevät ongelmanratkaisutilanteen toimintamallit. Oppilasta olisi myös syytä tukea ongelman purkamisessa luvussa 4.3.2 esitetyn Pólyan ongelmanratkaisuprosessin mukaisiin osavaiheisiin. [3, s. 223]

Kun ongelmanratkaisu alkaa olla luonnollinen osa opetusta ja oppilaat saavat siitä riittävästi kokemusta, heille kehittyy halu kehittää ajatteluaan. Lisäksi oppilaat alkavat toimia ongelmanratkaisutilanteissa varmemmin ja heidän kykynsä kommunikoida ja käyttää korkeamman tason metakognitiivista ajattelua kasvaa. On siis edetty 2. tasolle. Tässä vaiheessa opettaja voi yrittää harjoitella oppilaiden kanssa helpompia strategioita, kuten ongelman osien erottamista, niiden lisäämistä tai vähentämistä sekä yksinkertaisten vaihtoehtojen ja johtopäätösten tekemistä. [3, s. 224]

Oppilaille tulee tarjota ongelmia, jotka pakottavat heidät työskentelemään ryhmissä ja jakamaan ideat muiden kanssa sekä käyttämään teknisiä apuvälineitä. Lisäksi tulee tarjota ongelmia, joiden kautta havaitaan matematiikan hyödyllisyys ja voima. Vaikka alkuun onkin tärkeä ratkaista niin sanottuja "oikean maailman" ongelmia, tulisi jossain vaiheessa ratkaista myös matematiikan tutkimisesta nousevia ongelmia, joissa joudutaan tekemään yleistyksiä ja käyttämään uusia käsitteitä. [3, s. 224]

Haapasalo mainitsee useita periaatteita, jotka ovat välttämättömiä, kun yritetään kehittää oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja [3, ss. 224-225]. Tässä niistä muutama:

- Ongelmanasettelun on oltava ymmärrettävä ja tapahduttava ilman outoja käsitteitä.
- On pyrittävä muotoilemaan ongelma yleensä avoimena tai dialektisessa muodossa, elleivät jotkin syyt vaadi menettelemään toisin.
- On yritettävä kytkeä ongelma oppilaan arkielämään ja kokemusmaailmaan.
- Ratkaisuprosessista tulisi aina tehdä yhteenveto ja mahdollinen yleistys selkeästi, ymmärrettävästi ja riittävän yksityiskohtaisesti.
- *Ei pidä ratkoa samantapaisia ongelmia samalla menetelmällä, vaan joko samoja ongelmia täysin eri menetelmällä tai täysin erilaisia ongelmia samalla yleisellä menetelmällä!*

## 4.4 Käsitteet

Haapasalo mainitsee *käsitteistä* seuraavaa [3, s.51]: "Voidaan – hieman väljässä mielessä tulkittuna – sanoa, että mikä tahansa (uusi) koulussa opittava asia voidaan tulkita käsitteeksi... Käsitteet ymmärretään sekä yksilön henkisenä rakenteena että yhteisesti hyväksyttyinä ilmausten merkityksinä. Ne voidaan määritellä joko väljästi ilmoittamalla käsiteluokkaan kuuluvia tai kuulumattomia jäseniä tai esittämällä määritteleviä ominaisuuksia tai ehtoja." Näitä määritteleviä ominaisuuksia tai ehtoja eli relevantteja tunnusmerkkejä Haapasalo nimittää käsitteen *attribuuteiksi* [3, s. 52].

Käsitteet ovat hyvin merkittävässä asemassa matematiikassa ja matematiikan opetuksessa. Tätä mieltä on myös Opetushallitus, jonka laatimasta perusopetuksen opetussuunnitelmasta [17] kymmenen sivua on varattu matematiikalle. Nämä sivut sisältävät vähän alle puolen sivun mittaisen kuvauksen matematiikan opetuksen tavoitteista sekä opetuksen toteutuksesta, jonka jälkeen esitellään suuntaviivat tietyille ikäkausille (vuosiluokat 1-2, 3-5 jne.). Nämä ikäluokkien opetuksen kuvaukset jakautuvat neljään osaan: aluksi on parin rivin mittainen selostus opetuksen ydintehtävistä kyseiselle ikäkaudelle, jonka jälkeen tulevat opetuksen tavoitteet, keskeiset sisällöt, sekä hyvät taidot kyseisen ikäkauden päättyessä. Osio keskeiset sisällöt keskittyy luettelemaan opetettavia käsitteitä sekä vie noin puolet kunkin ikäkauden opetuksen kuvailusta. Lähes puolet matematiikan opetussuunnitelmasta keskittyy siis pelkästään luettelemaan, mitä käsitteitä matematiikassa on opittava.

## 4.5 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

*Konseptuaalinen tieto* on nimensä mukaisesti käsitteellistä tietoa (tai tietoa käsitteistä). Perinteisempien määritelmien mukaan konseptuaalinen tieto sisältää matematiikan tapauksessa esimerkiksi käsitteiden nimet, symbolit sekä ominaisuudet. Modernimman määrittelyn mukaan konseptuaalinen tieto ei kuitenkaan ole pelkkiä yksittäisiä tiedonmurusia, vaan se pitää sisällään myös käsitteiden väliset yhteydet. Hyvin toisiinsa linkittyneet käsitteet muodostavat yhdessä semanttisen verkon. Haapasalo määrittelee nimenomaan tämän verkon konseptuaaliseksi tiedoksi, ja korostaa lisäksi määritelmässään yksilön kykyä tulkita ja rakentaa oman verkkonsa solmuja ja linkkejä. [3, ss. 55-56]

*Proseduraalinen tieto* on tietoa siitä, miten toimitaan. Tähän on perinteisesti liitetty formaalien käsitteiden symboliset esitysmuodot sekä toimintamenetelmät ja algoritmit ongelmien ratkaisemiseksi. Ero proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välillä on vaikeasti määriteltävissä, mutta eräänä kriteerinä voidaan pitää toimintojen automatisaatiota. Esimerkiksi murtolukujen erilaisten esitysmuotojen (murtoluku, desimaaliluku, prosenttiluku) muodostama semanttinen verkko on aluksi konseptuaalista tietoa. Riittävän harjoittelun jälkeen esitysmuodosta toiseen siirtyminen on kuitenkin rutinoitunut, jolloin esitystavan muuntaminen toiseksi on proseduraalista tietoa. [3, ss. 55-58]

### 4.5.1 Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon linkittäminen

Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon linkittäminen liittyy olennaisesti kysymykseen, pitääkö osata tehdä ymmärtääkseen asian vai päinvastoin [4, s. 59]. Esimerkiksi autolla ajaminen voi onnistua varsin hyvin, vaikkei ymmärtäisi käytännössä mitään auton tekniikasta. Toisaalta auton tekniikkaa on kenties helpompi oppia ymmärtämään, jos on jo kokemusta auton käsittelystä. Tässä tapauksessa siis proseduraalinen tietämys voi edeltää konseptuaalista tietämystä.

Päinvastainen esimerkki löytyy esimerkiksi matematiikan puolelta. Opiskelija voi oppia suorittamaan erilaisten funktioiden rutiininomaista derivointia helpostikin, mutta tämä tuskin lisää hänen ymmärrystään derivaatan käsitteestä ja tuskin edes helpottaa käsitteen omaksumista. Sen sijaan sopivalla käsitteenmuodostusprosessilla voidaan saada aikaiseksi hyvää konseptuaalista tietämystä derivaatan käsitteestä, minkä jälkeen voidaan helpommin aloittaa derivoimissääntöjen eli proseduurien konstruoiminen.

*Kehityksellisessä lähestymistavassa* konseptuaaliseen tietoon edetään proseduraalisen tiedon kautta. Tällöin konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon suhde on joko *geneettinen* (proseduraalinen tieto on välttämätön, mutta ei riittävä ehto konseptuaaliselle tiedolle) tai *samanaikaisen aktivoinnin* -periaatteen (proseduraalinen tieto on välttämätön ja riittävä ehto konseptuaaliselle tiedolle) mukainen. [4, ss. 59-60]

*Koulutuksellisessa lähestymistavassa* proseduraalinen tieto saavutetaan hankkimalla ensiksi laadukasta konseptuaalista tietoa. Tällöin konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon suhde on joko *dynaamisen interaktion* (konseptuaalinen tieto on välttämätön mutta ei riittävä ehto proseduraalisen tiedon muodostumiselle) tai samanaikaisen aktivoinnin mukainen. [4, ss. 59-60]

## 4.6 Käsitteenmuodostusprosessi

*Käsitteenmuodostusprosessi* voidaan jakaa viiteen eri osavaiheeseen: orientaatioon, määrittelyyn, tunnistamiseen, tuottamiseen ja lujittamiseen. Nämä vaiheet voivat monissa tilanteissa mennä osin päällekkäin, joten tätä jakoa tulee pitää ainoastaan mallina, joka helpottaa opettajan opetuksen suunnittelua sekä opetusseurantaa. [3, ss. 201-202]

### 4.6.1 Orientaatiovaihe

*Orientaatiovaiheessa* oppilaalle synnytetään *loogis-kognitiivinen ristiriita*, usein hyvän ongelmatehtävän avulla. Loogis-kognitiivinen ristiriita tarkoittaa tilannetta, jossa oppilas ei löydä sopivaa mentaalimallia tulkitsemaan ongelmaa. Tämä voi tarkoittaa jotain seuraavista vaihtoehdoista:

- ristiriita käytettävissä olevien strategioiden ja ongelman vaatimusten välillä,
- usein erilaisten kilpailevien skeemojen[7] valinnasta aiheutuva ristiriita,
- ristiriita ongelman ratkaisun ja sen epäkäytännöllisyyden tai hankaluuden välillä,
- ristiriita ratkaisun ja sen perustelun puuttumisen välillä.

Ratkaistessaan tätä ristiriitaa oppilas törmää väistämättä käsitteen olennaisiin tunnusmerkkeihin eli *attribuutteihin*. Tämän takia ongelman on oltava sellainen, että oppilas pystyy tulkitsemaan sitä mielikuviensa ja malliensa avulla. Myös ongelman esittäminen dialektisessa muodossa voi auttaa ristiriidan havaitsemista. [3, ss. 102-103, 203]

### 4.6.2 Määrittelyvaihe

*Määrittelyvaiheessa* käsitteen olennaiset tunnusmerkit kootaan ja lyödään lukkoon. Ihanteellisessa konstruktivistisessa opiskeluympäristössä tämä kokoaminen tapahtuu siten, että oppilaat karsivat keskenään juttelemalla ja väittelemällä löytämistään tunnusmerkeistä niin sanotusti löysät pois, ja jäljelle jää vain kaikkein tärkeimmät seikat. [3, s. 204]

### 4.6.3 Tunnistamisvaihe

*Tunnistamisvaihe* on hyvin merkittävä käsitteen omaksumisen kannalta. Tunnistamisvaiheessa oppilaiden annetaan harjoitella sekä käsitteen tunnusmerkkien tunnistamista erilaisissa esitysmuodoissa,[8] että tiedon muuntamista erilaisesta esitysmuodosta toiseen. Tehtävien on oltava aluksi hyvin helppoja, ja niiden pitää sisältää tiedon prosessoimista mahdollisimman vähän. Vähitellen voidaan siirtyä kohti haastavampia tunnistustehtäviä. [3, s. 205]

[7] Skeemalla tarkoitetaan, että ongelmaan osataan linkittää jokin ongelmanratkaisumetodi.

[8] Esitysmuoto on yleensä sanallinen, kuvallinen tai symbolinen

### 4.6.4 Tuottamisvaihe

Kun käsite on omaksuttu riittävän hyvin, voidaan siirtyä *tuottamisvaiheeseen.* Tässä vaiheessa harjoitellaan käsitteen tunnusmerkkien tuottamista samojen esitysmuotojen välillä kuin tunnistamisvaiheessakin; kuvallisesta esityksestä sanalliseen, sanallisesta esityksestä symboliseen ja niin edelleen. Tämänkään vaiheen tehtävät eivät saa vaatia liiallista tiedon prosessointia oppilaalta. [3, s. 206]

### 4.6.5 Lujittamisvaihe

*Lujittamisvaiheessa* oppilas syventää tietämystään opiskeltavasta käsitteestä. Tässä vaiheessa voidaan edellyttää jo tiedon prosessoimista. Lujittamisvaihe sisältää myös käsitteeseen liittyvien proseduurien johtamista. Käsitettä voidaan soveltaa niin rutiini- kuin ongelmatehtävissäkin. [3, s. 206]

## 4.7 Konstruktivismi

Vaikka *konstruktivismi* mielletäänkin monesti oppimisteoriaksi, on kyseessä paljon laajempi käsite kuin pelkästään oppimisteoria. Konstruktivismi on enemmänkin paradigma tai yleinen perspektiivi, mistä asioita tarkastellaan. [3, s. 95]

Konstruktivismi nivoutuu vahvasti yhteen tiedon subjektiivisuuden (mikään tieto ei ole kaikille samaa) kanssa. Haapasalo kirjoittaa, että konstruktivismista puhuttaessa on aina syytä erottaa toisistaan *tieto* ja *informaatio* [3, s. 96]. Esimerkiksi kellonaika on informaatiota, ja kysymykseen ”Paljonko kello on?” voidaan antaa vastaus suoraan, ja ihmiset tuskin tulkitsevat tätä vastausta eritavoin. Sen sijaan kysymykseen ”Mikä atomi on?” annetut vastaukset voivat saada hyvin erilaisia tulkintoja vastauksen kuulijasta riippuen. Vastaus ”positiivisen ja negatiivisen alkeisvarauksen omaavien sekä varauksen suhteen neutraalien hiukkasten muodostama kemiallisesti jakamaton aineen rakenneosa” saa varmasti erilaiset mielikuvat liikkeelle peruskoululaisessa, lukiolaisessa ja yliopisto-opiskelijassa. Paitsi että vastauksessa esiintyneet käsitteet kuten sähkövaraus ja hiukkanen voivat merkitä hyvin erilaisia mielikuvia, vaanii taustalla myös sanan atomi herättämät mielikuvat. Alakoululaisetkin ovat kuulleet puhuttavan atomipommista ja atomivoimalasta. Sana atomi voi hyvinkin alkaa hahmottumaan näiden mielikuvien perusteella. Sanasta atomi voi tulla mieleen jopa grilliherkku: atomipiirakka.

Haapasalo luettelee konstruktivismin sisältävän seuraavat peruspiirteet [4, s. 97]:

- *Tieto on yksilön kokemusmaailman uudelleen organisoitumista.*

- *Yksilön tai sosiaalisten tiedeyhteisöjenkään muodostama tieto ei voi olla ontologisesti objektiivista.*
- *Jo ulkoisen maailman havaitseminen on aina valikoivaa ja tulkitsevaa sen viitekehyksen mukaan, mikä havaitsijalla on.*
- *Tiedon olemukseen vaikuttavat aina se kokemusmaailma, käsitteistö ja näkökulma, joka kulloinkin tietoa synnyttää tai tarkastelee.*
- *Tieto ei koskaan ole sellaisenaan välitettävissä yksilöltä toiselle, vaan se on jokaiselle erikseen persoonallista ja toisten luoksepääsemätöntä.*

Jos ulkoisesta maailmasta saatavaa objektiivista tietoa pidetään mahdottomana, puhutaan *radikaalista konstruktivismista*. Tämän näkemyksen kannattajat pitävät usein kaikenlaisia opetussuunnitelmia ja tavoitteita sekä radikaalia konstruktivismia täysin yhteen sovittamattomina. [3, ss. 97-98]

Radikaalille konstruktivismille eräänlaisen vastakohdan muodostaa *heikko konstruktivismi*, jossa ulkopuolista maailmaa pidetään objektiivisesti havaittavissa olevana ja hyväksytään objektiivisen tiedon olemassaolo. Heikko konstruktivismi ei tarjoa kovin suuria mahdollisuuksia yksilön omille konstruktioille, mutta se tarjoaa pelkän tiedon esittämisen ja mekaanisen siirtämisen asemasta paremman mahdollisuuden muodostaa pysyviä tietorakenteita. [3, ss. 98-99]

Koska matematiikassa pyritään saavuttamaan tietoa, joka on suhteellisen objektiivista, on hyödyllistä yhdistellä radikaalia ja heikkoa konstruktivismia. Tämä tapahtuu *lokaalin konstruktivismin* välityksellä. Oppilas voi suorittaa hyvinkin radikaaleja konstruktioprosesseja muovaillessaan tietoa, mutta vasta lopullisesti saavutetun tiedon luonne osoittaa, onko koko prosessi radikaali vai heikko konstruktio [3, ss. 100-102]. Oppilas on esimerkiksi voinut nelikulmioita luokitellessaan keksiä koverille nelikulmioille nimityksen ”melkein kolmio”, joka on radikaali lokaali konstruktio. Hänen kaverinsa on kuitenkin voinut kritisoida nimitystä sen epämääräisyyden vuoksi, jolloin oppilaat ovat lopulta päätyneet nimittämään koveraa nelikulmiota pelkästään nelikulmioksi, mikä on siis globaalissa mielessä heikko konstruktio.

## 4.8 Matemaattinen ajattelu

*Matemaattinen ajattelu (mathematical thinking)* käsitteenä on vaikea määritellä, vaikka siihen törmää usein sekä didaktiikan kirjallisuudessa, että opetushallituksen asiakirjoissa. Esimerkiksi vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteissa [16, s. 118] sanotaan, että:

*"Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja".*

Opetussuunnitelman perusteissa ei kuitenkaan määritellä tarkemmin mitä matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan. Joutsenlahti määrittelee [9, s. 367] matemaattisen ajattelun seuraavalla tavalla:

*"Matemaattinen ajattelu on oppijalle merkityksellisten matemaattisten taitojen (konseptuaalisten tietojen, proseduraalisten tietojen ja niiden yhdistelmien) prosessointia. Tiedon prosessointi voi olla esimerkiksi intentionaalista ongelmanratkaisua*[9]*, opittavan aineksen ymmärtämistä tai omaehtoista tietojen tutkimista. Tietoisuus ajattelunprosesseissa ja niiden hallinnassa on toisaalta osa oppijan tietorakennetta. Ajatteluprosessia suuntaavat ja rajaavat oppilaan kyvyt, asenteet, uskomukset, senhetkiset tiedot ja taidot.".*

Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin tavoitteena on kehittää oppijan matemaattista ajattelua; oppimateriaalin avulla pyritään tarjoamaan oppijalle mahdollisuus rakentaa ja laajentaa omaa tietoverkkoaan ongelmanratkaisun keinoin, kyetä verbalisoimaan matematiikan käsitteitä, tarjota älyllisesti stimuloivia ongelmia, vahvistaa oppilaiden luottamusta omiin tietoihinsa ja taitoihinsa, korjata uskomuksia ja positiivistaa asenteita matematiikkaa kohtaan.

### 4.8.1 Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisu

Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaali kehittää oppijan matemaattista ajattelua ongelmanratkaisun avulla. Tarkastellaan seuraavaksi miten nämä kaksi käsitettä liittyy toisiinsa.

Ongelmanratkaisu on monien tutkijoiden mielestä koko matemaattisen ajattelun ydin (esimerkiksi Pólya 1948 [20] ja Mason, Burton ja Stacey 2010 [15]). Matemaattista ajattelua voidaan havainnoida kouluissa pääasiassa kahden prosessin avulla: ongelmanratkaisun ja käsitteen muodostumisen avulla [8, s. 68]. Matemaattista ajattelua voi parhaiten oppia ongelmatilanteilla, jotka vaativat fyysistä, emotionaalista ja älyllistä osallistumista. Tämän takia ongelmatilanteiden tulee olla älyllisesti haastavia tehtäviä, joita ei voida ratkaista nopeasti ja rutiininomaisesti. Myös ongelmatilanteen tiedostamisprosessi ja ongelmanratkaisuprosessi ovat aina matemaattista ajattelua. Matemaattisen ajattelun tasoa voidaan siis mitata asettamalla oppilaat eritasoisiin ongelmanratkaisutilanteisiin [10, s. 338].

[9] Intentionaalisella ongelmanratkaisulla tarkoitetaan, että oppija pyrkii aktiivisesti ja tarkoituksenmukaisesti etsimään strategioita ongelman ratkaisemiseksi.

### Matemaattinen osaaminen

*Matemaattinen osaaminen* (mathematical profiency) muodostuu eri tekijöistä, jotka liittyvät matemaattiseen ajatteluun, ymmärtämiseen ja ongelmanratkaisuun. Nämä tekijät ovat:

1) *Konseptuaalinen ymmärtäminen* (conceptual understanding)
   on matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja niiden suhteiden ymmärrystä.

2) *Proseduraalinen sujuvuus* (prosedural fluency)
   on taitoa toteuttaa matemaattisia menettelytapoja tehokkaasti, täsmällisesti ja tarkoituksenmukaisesti.

3) *Strateginen kompetenssi* (strategic competence)
   on taitoa muunnella, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.

4) *Soveltava päättely* (adaptive reasoning)
   on kykyä ajatella loogisesti, selittää, perustella ja reflektoida.

5) *Yritteliäisyys* (productive disposition)
   on ahkeruudella ja tehokkuudella mitattavaa toimintaa.

Matemaattisen osaamisen avulla voidaan ratkaista matemaattisten ongelmien lisäksi myös muunlaisia ongelmia. Koponen määrittelee *matemaattisen ongelman (mathematical problem)* yksinkertaisesti: ongelma on matemaattinen silloin, kun sen ratkaisemiseen käytetään jollakin tavoin matemaattisia keinoja [11, s. 159]. Matemaattinen osaaminen ei kuitenkaan kuulu pelkästään matematiikkaan ja matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen, vaan se on osa laajempaa kontekstia. Osa matemaattista osaamista on myös tunnistaa uusia tilanteita, joissa voidaan käyttää hyväksi erilaisia ajattelutapoja ja tekniikoita. Erilaiset ongelmanratkaisumenetelmät voidaan myös rinnastaa matemaattiseen ajatteluun.

### Näkökulmia todistusajattelun hyödyllisyydestä

Todistusajattelua kehittävät tehtävät näyttäytyvät koulumatematiikassa pääasiassa logiikan päättelysääntöjen totuusarvotaulukoinnissa, vaikka niiden hyödyllisyys on kiistanalaista [13, s. 102]. Totuusarvotaulukoinnin ongelma on se, että se muuttaa todistamisen epähavainnolliseksi ja monimutkaiseksi. Näin oppilaille ei muodostu riittävää käsitystä todistusajattelusta ja sen hyödyllisyydestä.

Sen sijaan, jos loogiset päätelmät liitetään käytännön ongelmatilanteisiin, monipuolistavat ne todistusajattelun kehittymistä. Käytännön ongelmatilanteisiin liittyvät todistustehtävät ovat kiinnostavia ja toimivat itsessään motivaattoreina. Tämä näkökulma liittää todistusajattelun kehittymisen myös ongelmanratkaisuprosesseihin.

Koulumatematiikan kannalta todistusajattelulla tarkoitetaan:

1) Logiikan päättelysääntöjen avulla tapahtuvaa systemaattista todistamista. Tätä edustaa esimerkiksi logiikan päättelysääntöjen totuusarvotaulukointi.

2) *Matemaattisen todistamisen* mallien avulla tapahtuvaa todistamista. Matemaattisella todistamisella tarkoitetaan vakiintuneita todistusmalleja, kuten esimerkiksi suora todistus, epäsuora todistus, induktio- ja olemassaolotodistus.

3) Ongelmanratkaisun avulla tapahtuvien kokeilujen ja arvailujen toteennäyttämistä. Nämä ongelmanratkaisut eivät yleensä sisällä matemaattisen todistamisen mukaista toimintaa, päättelyitä tai todistuksia.

Suurin osa koulumatematiikan todistamisesta tapahtuu logiikan päättelysääntöjen avulla. Todistaminen tapahtuu useimmiten mekaanisella ja rutiininomaisella tekniikalla, joka harjoittaa matemaattista todistamista, mutta ei kehitä oppilaan todistusajattelua.

Jos ongelmanratkaisu on jokaisessa ongelmatilanteessa erilainen, kehittää se oppilaan todistusajattelua, sillä ongelmia ei ole mahdollista ratkaista mekaanisella ja rutiininomaisella tekniikalla. Jos näin voitaisiin tehdä, ei kyseessä olisi ongelma.

Yleisessä mielessä ongelmanratkaisu alkaa lähtötietojen arvioinnilla, jonka päätelmänä on toiminta. Toimintaa edustaa hypoteesin tekeminen ja testaaminen, mistä seuraa hypoteesin hyväksyminen tai hylkääminen. Oppilaan todistusmallit voidaan jakaa erilaisten hypoteesien ohjaamiin päättelysykleihin. Näin jokaisen päätelmäkierroksen on mahdollista kehittää oppilaan todistusajattelua. Näin oppilaan todistusajattelussa esiintyvät rationaaliset päätelmät ja loogiset tulkinnat kehittävät kykyä ratkaista myös erilaisia matematiikasta irrallaan olevia ongelmia, joiden käyttökelpoisuus ja hyödyllisyys on hänelle selvä.

# 5 Lukiolaisille tuotetun oppimateriaalin analysointia

Tässä luvussa analysoidaan Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin kolmannen luvun ongelmia. Tästä eteenpäin esimerkiksi merkinnällä (katso ketjun pituus - VL Määritelmä 3.1.2 s. 36) viitataan Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin sivulla 36 olevaan määritelmään 3.1.2, joka koskee ketjun pituutta.

## 5.1 Oppimateriaalin lyhyt esittely

Perinteisten matematiikan oppikirjojen rakenne on erityisen hierarkkinen; oppiaines koostuu aluksi määriteltävistä käsitteistä, jonka jälkeen voidaan esittää kyseisten käsitteiden avulla lauseita, apulauseita, algoritmeja ja muita matematiikkaan olennaisesti kuuluvia osuuksia. Esimerkkien jälkeiset tehtävät vaikeutuvat lineaarisesti siten, että viimeisenä tulevat soveltavat tehtävät, joista parhaimmat saattavat edustaa ongelmia (katso mikä on ongelma – luku 4.1).

Edellä kuvattuihin perinteisiin matematiikan oppikirjoihin verrattuna Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaali on rakennettu puhtaasti ongelmalähtöiseksi, jossa ongelma, ratkaisu ja ratkaisuun johtavat menetelmät ovat oppimisen lähtökohta. Koska ongelmat ovat olennaisin osa oppimateriaalia, on jokaisen ongelman merkitystä korostettu kehystämällä se. Kehystetyn ongelman jälkeen oppimateriaalissa esitetään ongelman verkkoteoreettinen ratkaisu.

### 5.1.1 Moderni lähestymistapa matematiikan opetukseen

Verkkoteorian teokset on usein kirjoitettu matematiikan formaalilla kielellä, koska kyseistä matematiikan osa-aluetta opiskellaan pääasiassa korkeakouluissa ja yliopistoissa. Tästä johtuen tämän oppimateriaalin kirjoittajat ovat päätyneet korostamaan ongelmanratkaisun merkitystä välttämällä matemaattisia symboleita tekstissä mahdollisimman paljon, jotta oppijalla on mahdollisuus oppia verkkoteorian perusteita osaamatta matematiikan formaalia kieltä. Näin syntyi verkkoteorian oppimateriaali, joka on suunniteltu lukiolaisille.

Oppimateriaali muodostuu kuudesta luvusta: suuntaamattomat verkot, suunnatut verkot, painotetut verkot, kaksijakoiset verkot, verkkojen värittäminen sekä peli ja sovellukset. Jokainen luku sisältää kokoelman erilaisia ongelmia ja niiden ratkaisuja. Lisäksi jokaisen luvun lopussa on kertaus- ja tehtäväosiot, joiden tarkoituksena on palauttaa mieleen tärkeimpiä käsitteitä ja harjoittaa oppijaa.

### 5.1.2 Käsitteellinen matematisointi konkreettisesta abstraktiin

Verkkoteorian kehittyminen sai alkunsa reitin etsimisongelmasta 1700 -luvulla. Koska verkkoteorian alkuna voidaan pitää Königsbergin siltaongelman ratkaisemista [21, s. 2], alkaa myös oppimateriaali samaisella ongelmalla. Ongelman tarkoitus on johdattaa oppija verkon käsitteeseen ja näyttää, miten käytännön ongelmat muuntuvat verkko-ongelmiksi. Oppimateriaalin seuraavat ongelmat käsittelevät reitin etsimisongelmia verkoista, joiden kautta oppijan on mahdollista konstruoida Eulerin verkkojen ja solmujen astelukujen välinen yhteys. Tämän jälkeen oppija voi palata Königsbergin siltaongelmaan ja perustella, miksi ratkaisua ongelmaan ei ole olemassa.

Tällä tavoin oppimateriaalissa jokaisen luvun ongelmat useimmiten linkittyvät toisiinsa, jolla oppijaa ohjataan ymmärtämään uusi asia ja yhdistämään se aiempaan tietoon. Näin oppijalle muodostuu läpi oppimateriaalin vahva sidos ongelmien, heuristisien prosessien ja ratkaisujen välille.

Oppimateriaalin ongelmien tarkoitus on herättää lukijassaan ajatuksia, kuinka matematiikan käsitteitä voidaan määritellä selkokielellä täsmällisesti. Tästä johtuen sanallisten määritelmien käyttäminen on luontevaa myös oppimateriaalissa. Koska käsitteiden määritteleminen ilman formaalia matematiikan kieltä on vaikeaa, on oppimateriaalin joidenkin määritelmien kohdalla tingitty käsitteiden täsmällisyydestä ja määritelty käsitteitä painottaen selkokielisyyttä (katso ketjun määritelmä – VL Määritelmä 1.2.3 s. 2).

Ongelmalähtöinen matematiikan opiskelu ruokkii itse itseään. Onnistumisen elämykset luovat motivaatiota ja innostusta ratkoa yhä haastavampia ongelmia, jolloin ongelmien vaikeusaste kasvaa oppijan omasta halusta. Ongelmalähtöisyydellä tuetaan oppijan konseptuaalisen tiedon kasvamista, jolloin oppija alkaa ymmärtää käsitteiden ja periaatteiden keskinäisiä suhteita, ja taitoa soveltaa niitä erilaisten ongelmien ratkaisemiseen.

## 5.2 Painotetut verkot -luvun rakenne

Painotetut verkot -luku antaa mahdollisuuksia ja valmiuksia oppia yleisten algoritmien perusperiaatteiden lisäksi verkkoteoreettisista algoritmeista perinteisimmät ja samalla yksinkertaisimmat kuten Kruskalin, Primin ja Dijkstran algoritmit. Luvussa tutustutaan perinteisen kauppamatkustajan ongelman lisäksi kolmeen muuhun ongelmaan, jotka ovat kirjoittajien toimesta räätälöity edellä mainittujen algoritmien oppimiseen.

### 5.2.1 Ongelmanratkaisun opettaminen verkkoteorian keinoin

Kauppamatkustajan ongelmassa oppijan motivaatio ja huomio keskittyy ongelmanratkaisuun, joten oppija tulee useimmiten huomaamattaan määritelleeksi käsitteet *painotettu verkko*, *kaaren paino* ja *ketjun pituus*. Seuraava ongelma käsittelee Suomen tietoverkon päivittämistä uudella valokaapelitekniikalla, jonka myötä määritellään *virittävä puu* ja *minimaalinen virittävä puu*.

Tutkijan lumityöt -ongelmassa oppijaa ohjataan keskittymään ongelmanratkaisun proseduureihin, jonka myötä oppijan on mahdollista keksiä *Primin algoritmi*. Turun posti -ongelman myötä oppijaa ohjataan pohtimaan algoritmeja, joilla on mahdollista saada selville painotetusta verkosta lyhimmät ketjut, johon esimerkiksi *Dijkstran algoritmi* soveltuu.

Kauppamatkustajan ongelmaa lukuun ottamatta jokaisen ongelman jälkeen esitellään algoritmi, joka tuottaa ratkaisun kyseessä olevaan ongelmaan. Lisäksi jokaista algoritmia seuraa harjoitustehtävä algoritmin käytön hallitsemiseen.

## 5.3 Painotetut verkot -luvussa käytettyjen ongelmien analysointia

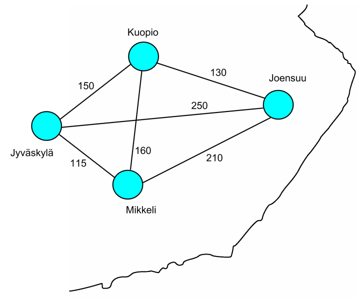
Tässä luvussa analysoidaan pääasiassa neljää eri oppimateriaalissa esiintyvää ongelmaa. Ongelmia käsitellään erillisissä alaluvuissa, jotka ovat nimetty kuvaamaan analysoitavia ongelmia.

### 5.3.1 Kauppamatkustajan ongelma

Kauppamatkustajan ongelma valikoitui Painotetut verkot -luvun ensimmäiseksi ongelmaksi, koska se on helposti ymmärrettävissä ja se luo luonnollisen siirtymän välimatkoista kaaren painoihin, toisin sanoin kartoista painotettuihin verkkoihin. Ongelma ei toimi oppijan käsitteenmuodostusprosessissa pelkästään orientaatiotehtävänä, vaan sen avulla pyritään ohjaamaan oppijaa määrittelemään itse painotettu verkko, kaaren paino ja ketjun pituus.

Kauppamatkustajan ongelma on helposti ratkaistavissa kokeilemalla, koska kyseisessä verkossa erilaisia reittivaihtoehtoja on vain kuusi. Näin ollen kyseinen kauppamatkustajan ongelma ei täytä ongelman tunnusmerkistöjä, vaan voidaan ajatella kyseessä olevan mekaaninen laskutehtävä. Tämän tarkoituksena on, että oppilaat ratkaisevat ongelman nopeasti ja huomaamattaan määrittelevät automaatiotasolla käsitteet kaaren paino sekä painotettu verkko ja lopputuloksessa myös käsitteen ketjun pituus.

**Kauppamatkustajan ongelma:**
*"Kauppamatkustajalla on ongelma. Hänen tulee kaupata pölynimureita neljässä eri kaupungissa (Kuopio, Mikkeli ja Jyväskylä) palaten työpäivän jälkeen kotikaupunkiinsa (Joensuu). Kartasta katsomalla hän selvittää paikkojen väliset etäisyydet, mutta mikä on lyhin reitti? (Kuva 8)"*




Kuva 8: Kauppamatkustaja lähtee Joensuusta, kiertää kaikki kaupungit ja palaa kotikaupunkiinsa. Mikä on lyhin reitti?

### Johdatus algoritmien perusteisiin

Opettajan on mahdollista käsitellä ongelmanratkaisu haluamallaan tavalla, koska oppilaat pitävät ongelmaa mekaanisena laskutehtävänä. Opettaja pystyy antamaan oppilaille juuri niin vähän tietoa ongelmasta tai ongelmanratkaisusta kuin haluaa tai esittämään johdattelevia kysymyksiä. Koska verkon koko on valittu ongelmaan niin, ettei reittivaihtoehtoja ole kovin monta, oppilas ei välttämättä tule ajatelleeksi, miten täydellisessä [10] painotetussa verkossa reittivaihtoehtojen [11] lukumäärä kasvaa.

Opettaja voi esittää esimerkiksi kysymyksen *"Toimisiko teidän keksimänne strategia etsiä lyhin reitti, jos kaupunkeja olisi enemmän?"* tai *"Luuletteko, että on olemassa jokin muu strategia etsiä lyhintä reittiä."* Välttämättä ei ole tarkoituksenmukaista edes herätellä oppilaiden ajatuksia ongelmanratkaisun hankaluudesta verkkojen koon kasvaessa. Oppilaat kokeva luultavasti vahvimman loogis-kognitiivisen ristiriidan, jos ongelman ratkaisu kerrotaan oppilaille vasta, kun kaikki ongelmat on ratkaistu Painotetut verkot -luvusta.

On huomattu, että Painotetut verkot -luvun ongelmista oppilaille helpoin on kauppamatkustajan ongelma, jota pidetään mekaanisena laskutehtävänä, kun taas muita luvun ongelmia pidetään joko analyysi-synteesi- tai dialektisina ongelmina. Jos oppilaat ovat opiskeltuaan kaikki Painotetut verkot -luvun ongelmat siinä käsityksessä, että kaikkiin ongelmiin on olemassa toimintaohje tai algoritmi, jolla ongelma voidaan ratkaista, voi opettaja sanoa, että *"todellisuudessa kauppamatkustajan ongelmaan ei vielä tähän päivään-*

[10] Yksinkertainen painotettu verkko on *täydellinen*, jos verkon jokaisen solmuparin välillä on kaari.

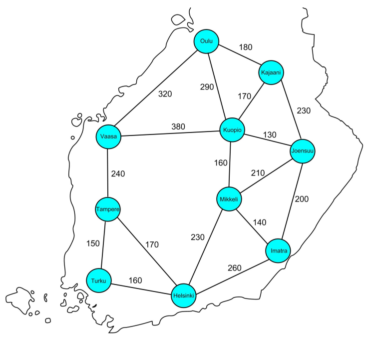
[11] Jos täydellisessä painotetussa verkossa on $n$ solmua, on reittivaihtoehtoja kauppamatkustajan ongelmaan $(n-1)!$

*kään mennessä ole keksitty algoritmia, jolla ongelma voidaan tehokkaasti*[12] *ratkaista."* Tämä aiheuttaa voimakkaan loogis-kognitiivisen ristiriidan, koska oppilaiden mielestä juuri kyseinen ongelma oli kaikista helpoin.

### 5.3.2 Suomen tietoverkko -ongelma

Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin sivulla 37 esitetyn ongelman avulla voidaan oppilaille opettaa ongelmanratkaisua, jonka sivutuotteina opitaan verkkoteorian käsitteistä virittävä puu ja minimaalinen virittävä puu. Oppilaiden on mahdollista oppia tai keksiä Kruskalin algoritmi ja ongelmasta innostuneet saattavat keksiä todistusperiaatteen Kruskalin algoritmille.

**Suomen tietoverkko -ongelma:**
*"Suomen tietoverkkoa uusitaan uudella valokaapelitekniikalla. Kuvassa 9 on esitetty kaupunkien välisiä välimatkoja. Koska valokaapeli on kallista, halutaan kaupunkien välille rakentaa mahdollisimman pieni, mutta kuitenkin yhtenäinen verkko. Mikä on minimimäärä valokaapelia, jolla tekniikan uusiminen voidaan toteuttaa?"*




Kuva 9: Mikä on pienin määrä valokaapelia, jolla kaikki kaupungit saadaan yhdistettyä toisiinsa?

#### Ongelman ratkominen Itä-Suomen alueella

Kyseinen ongelma esitettiin noin 40 eri lukiolaisryhmälle eri puolilla Itä-Suomea vuosien 2011-2012 aikana (Liite 3). Näille lukiolaisryhmille kyseinen ongelma oli samalla ensikosketus verkkoteoriaan. Ongelma toteutettiin laminoiduilla tehtäväkorteilla, johon tehtävää voitiin ratkoa tusseilla. Lukiolaisryhmille annettu ohjeistus oli seuraava:

*"Muodostakaa 3-5 hengen tiimit. Tiimien tehtävänä on yrittää ratkaista ongelma laminoitujen tehtäväkorttien avulla. Kun tiimi on saanut jonkin ratkaisun, laskekaa kuinka paljon valokaapelia yhteensä kyseiseen tietoverkkoon tarvitaan, jonka jälkeen tulosta voidaan verrata kilpailevan tiimin tarjoukseen. Halvin tarjous voittaa!"*

[12] Tällä hetkellä kauppamatkustajan ongelma ei ratkea polynomiaalisessa ajassa, jos solmujen lukumäärä on riittävän suuri [21, s. 151].

Seuraavaksi kuvaillaan, millaisia yleisiä piirteitä lukiolaisryhmien ongelmanratkaisusta nousi esille, kun tehtävä esitettiin edellä mainitussa muodossa ja millaisia kehitysideoita ongelmanratkaisumetodit synnyttivät. Opettajan rooli ohjeistuksen jälkeen oli seurata, ovatko kaikki tiimit ymmärtäneet tehtävän oikein, sillä ajoittain ongelma saattoi aiheuttaa myös virheellisiä tulkintoja. Yleisimmät ongelman asettelusta tai muusta syystä johtuvat oppilaiden virheelliset tulkinnat koskien tehtävänantoa olivat seuraavia:

1) *luultiin, että tehtävässä haetaan suljettua Hamiltonin ketjua*

2) *luultiin, että tietoverkko ei voi "haaroittua", toisin sanoen tehtävässä haetaan avointa Hamiltonin ketjua*

Kun kaikki tiimit olivat päässeet alkuun, ratkaisivat lukiolaisryhmät tehtävän lähes poikkeuksetta samalla tavalla. Aluksi esitettiin ratkaisuja, jotka olivat hyvin kaukana lopullisesta ratkaisusta, jonka jälkeen – tarjous tarjoukselta – tarjoukset saavuttivat halutun lopputulokseen. Toisin sanoen oppilasryhmät esittivät eri virittävien puiden kokonaispainoja, jotka saavuttivat minimaalisen virittävän puun kokonaispainoa vastaavaan arvoon.

Tehtävä voidaan ratkaista yritys ja erehdys -menetelmällä. Tässä menetelmässä lasketaan jonkin virittävän puun painojen summa, jonka jälkeen korvataan puun kaaria edullisemmilla kaarilla. Lopulta myös tämä menetelmä johtaa minimaaliseen virittävään puuhun. Tämä menetelmä oli usein se, jonka oppilaat löysivät helpoiten. Jos oppilasryhmät löytävät kyseisen menetelmän, voidaan sitä hyödyntää myöhemmin, kun Kruskalin algoritmin oikeellisuutta perustellaan (Luku 5.3.3).

Lopuksi oppilaita pyydettiin kokoamaan ajatuksia siitä, miten tehtävän ratkaisu syntyi. Yleisimpiä tulkintoja olivat:

1) *Tulee suosia niitä yhteyksiä, jotka ovat lyhimpiä, mutta ei kuitenkaan tule valita niin sanottuja turhia yhteyksiä.*

2) *Tulee poistaa niitä yhteyksiä, jotka ovat pisimpiä, mutta ei kuitenkaan tule poistaa niin sanotusti turhan paljon yhteyksiä.*

Lopuksi oppilaille esitettiin behavioristisena diaesityksenä, mitä tapahtuu, jos valitaan tietoverkon yhteyksiä heidän ehdottamallaan tavalla, siis suosimalla lyhimpiä yhteyksiä. Oppilaat luettelivat itse, minkä kaupunkien välinen yhteys on milläkin hetkellä lyhyin, jonka mukaan myös diaesitys eteni. Oppilasryhmät osasivat myös selittää, mitä "turha yhteys" tarkoittaa esimerkiksi kaupunkien Tampere-Helsinki välillä. Kyseisten kaupunkien välistä yhteyttä on turha uusia, koska kaupungit ovat yhteydessä toisiinsa Turun välityksellä.

Lukiolaisryhmille pidetyt tuokiot olivat pituudeltaan 15 minuuttia. Ajankäyttö jaettiin niin, että tehtävän ratkaisemiseen käytettiin 10 minuuttia ja viimeinen 5 minuuttia käytettiin ongelman koontiin diaesityksineen. Kruskalin algoritmin oppimista ei tuokioissa mitattu, vaan opetustuokion tarkoitus oli osoittaa miten matematiikka tarjoaa sopivien ongelmien ratkaisemiseen erinomaiset työvälineet.

### Ongelman tarkastelu ainedidaktisen viitekehyksen valossa

Millainen ongelma on kyseessä? Voiko kyseinen ongelma opettaa ongelmanratkaisua? Minkälaisia vaiheita oppilaan käsitteenmuodostusprosessissa syntyy? Entä miltä ongelma näyttää eri oppimisteorioiden valossa? Miten ongelmaa, tehtävänantoa ja ohjeistusta voisi parantaa? Voiko ongelmaa soveltaa myös muiden asioiden oppimiseen?

Kun kyseinen ongelma esitetään tässä muodossa, voidaan se luokitella dialektiseksi ongelmaksi. Ongelman asettelusta ei käy ilmi, mikä on haluttu vastaus eli ongelman lopputila tai mitkä menetelmät johtavat oikeaan ratkaisuun. Kyseisen ongelman ratkaisemisessa avustavana tekijänä on tiimien keskinäinen kilpailu, jolloin toisen ryhmän parempi tulos kirittää muita tiimejä pohtimaan erilaisia metodeja ongelman ratkaisemiseksi. Näin ongelman lopputilasta saadaan viitteitä, mutta varmuudella ei voida sanoa, onko löydetty tulos ongelman lopputila, vaikka useampi tiimi olisi saanut saman tuloksen. Sellaisessa tilanteessa, jossa kaikki tiimit ovat saaneet saman tuloksen eikä yksikään tiimi ole parantanut tulostaan useista yrityksistä huolimatta, tiimeille alkaa muodostua käsitys siitä, että vallitseva tulos on ongelman lopputila.

Oppilaiden usein esittämät kysymykset ”Mikä on oikea vastaus?” tai ”Onko tämä oikein?” puoltavat väittämää, jonka mukaan perinteisen koulumatematiikan tehtävät harjoittavat mekaanista laskentoa eivätkä ongelmanratkaisua. Edellä mainitut oppilaiden esittämät kysymykset vahvistavat koulumatematiikan tehtävien asemaa siinä, etteivät ne korosta myöskään matemaattisen todistamisen luonnetta.

Käsitteenmuodostusprosessin kannalta ongelma edustaa orientaatio- ja määrittelyvaiheen tehtävää, kun ongelma esitetään tässä muodossa oppilaille ensimmäistä kertaa. Verkkoteorian kannalta ongelmaan nivoutuu runsaasti uusia käsitteitä, jos tämä ongelma on ensimmäinen kontakti verkkoteoriaan, kuten oli näiden noin 40 lukiolaisryhmän kohdalla. Toisaalta Verkkoteoriaa lukiolaisille -kurssimonisteessa kyseinen ongelma sijoittuu sivulle 37 ja tuo mukanaan uusista käsitteistä vain virittävän puun, minimaalisen virittävän puun ja Kruskalin algoritmin.

Ongelman tavoitteina on:

- Synnyttää oppilaalle loogis-kognitiivinen ristiriita:
  1) ongelmanratkaisustrategioiden puuttuminen (selkeää strategiaa ongelman ratkaisuun ei ole käytettävissä),
  2) ristiriita ratkaistun ongelman ja proseduurien välillä (ongelma osataan ratkaista, mutta ei ymmärretä miten ratkaisuun lopulta päädyttiin),

- Toimia orientaationa käsitteille:
  1) tunnistaa ratkaisujen yhteisiä piirteitä (virittävät puut),
  2) ongelman todellinen ratkaisu (minimaalinen virittävä puu)

- Johdatella algoritmiseen ajatteluun:
  1) onko olemassa menetelmää, jolla kyseinen ongelman voi ratkaista helposti ja nopeasti (Kruskal, Prim, yritys ja erehdys -menetelmä),
  2) algoritmien perusperiaate (esitystavat ja ideat).

Ongelmanratkaisun oppimisen kannalta erityisen tärkeää on *minimalismin* -periaate *(minimal instruction)*, koska ongelman lopputilan saavuttaminen on toissijaista verrattuna tiimien kehittämiin strategioihin ratkaista ongelma. Minimalismilla pyritään saavuttamaan oppilaissa matemaattista ajattelutoimintaa, luovaa ongelmanratkaisua ja proseduurien oppimista.

### 5.3.3 Orientaatio-ongelmasta sosiaaliseen konstruktivismiin

Suomen tietoverkko -ongelmaa ratkoneiden oppilaiden keksimät ongelmanratkaisumetodit synnyttivät kaksi kehitysideaa: behavioristinen diaesitys voidaan korvata konstruktivistisella jatkotehtävällä ja Kruskalin algoritmin oikeellisuuden todistusideaa voidaan mallintaa yritys ja erehdys -menetelmällä. Kruskalin algoritmin opettamiseen tähtäävä diaesitys voidaan korvata jatkotehtävällä:

*Tiimien tehtävänä on kehittää sellainen toimintaohje, jonka avulla toinen tiimi pystyy ratkaisemaan Suomen tietoverkko -ongelmaa vastaavan ongelman, vaikka tietoverkko olisi erilainen.*

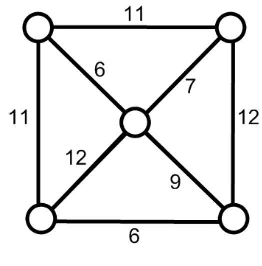
Kruskalin algoritmin oikeellisuus voidaan todistaa matemaattisesti (katso s. 22), jonka todistusidea on äärimmäisen kiehtova sen yksinkertaisuuden vuoksi. Todistuksen periaate voidaan havainnollistaa esimerkiksi laminoiduilla tehtäväkorteilla.

Tehtäväkorttiin on piirretty Suomen tietoverkko -ongelman todellinen ratkaisu eli minimaalinen virittävä puu. Mikäli verkosta väritetään minimaalisen virittävän puun lisäksi mikä tahansa kaari, muodostaa piirretty kaari väistämättä suljetun ketjun joidenkin kaarien kanssa. Kyseinen suljettu ketju voi muodostua ainoastaan kaarista, joiden suuruus on korkeintaan yhtä suuri kuin piirretty kaari. Tämä voidaan matemaattisesti perustella Kruskalin algoritmilla. Siinä jokaisessa vaiheessa valitaan painoltaan pienempi kaari, jolloin piirretyn kaaren paino on korkeintaan yhtä suuri kuin suljetussa ketjussa suurimman paino. Tämä todistusidea on mahdollista keksiä yritys ja erehdys -menetelmästä.

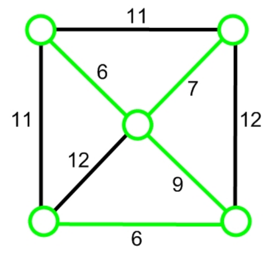
Kehitysideoiden viimeiseen vaiheeseen on tiimien tehtävänä kehittää erilaisia malleja ja konstruktioita siitä, miten toimintaohjeen oikeellisuus voidaan todistaa. Tehtävänanto voisi olla seuraava:

*Tiimien tehtävänä on todistaa, että toimintaohjeen perusteella päivitetty verkko on kokonaispituudeltaan kaikkein lyhin eli alkuehdot täyttäviä lyhyempiä päivitettyä verkkoja ei ole olemassa.*

Yritys ja erehdys -menetelmän soveltaminen Kruskalin algoritmin todistamiseen voidaan havainnollistaa Kuvan 10 esimerkkiverkolle. Kuvassa 11 on esitetty kyseisen verkon minimaalinen virittävä puu. Jos Kuvan 11 verkosta valitaan mikä tahansa mustista kaarista, muodostaa se suljetun ketjun vihreiden kaarien kanssa, joiden paino on pienempi tai yhtä suuri kuin valitun kaaren paino. Koska muodostuvissa suljetuissa ketjuissa kaarien painot ovat aidosti pienempiä kuin valittu kaari, on verkossa minimaalisia virittäviä puita täsmälleen yksi.



Kuva 10: Esimerkkiverkko



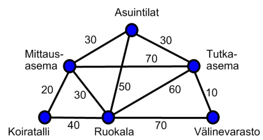
Kuva 11: Minimaalinen virittävä puu

On perusteltua liittää todistustehtäviä matemaattista osaamista kehittävään opetukseen, koska todistusperiaatteita opetetaan kouluissa melko vähän. Lukiossa todistusperiaatteita opetetaan vain yhdellä pitkän matematiikan kurssilla [16]. Ongelmanratkaisun avulla tapahtuvien kokeilujen ja arvailujen toteen näyttäminen kehittää mekaanisen matemaattisen todistamisen sijaan yksilöllistä todistusajattelua.

### 5.3.4 Tutkijan lumityöt -ongelma

Tutkijan lumityöt -ongelman tarkoitus on ohjata oppija pohtimaan ja keksimään itse Primin algoritmi. Kysymyksen asettelu ohjaa oppijaa kiinnittämään huomiota ennen kaikkea ongelmanratkaisun proseduureihin.

**Tutkijan lumityöt -ongelma:**
*"Napajäätiköllä olevalla tutkijalla on ongelma. Yöllä on satanut lunta niin paljon, että kaikki tutkimuskeskuksen tiet ovat kulkukelvottomia. Työpäivä ei pääse käyntiin, ennen kuin hänellä on pääsy jokaiseen tutkimuskeskuksen rakennukseen. Miten tutkijan kannattaa lapioida tiet puhtaaksi, että varsinaisiin töihin päästään mahdollisimman nopeasti? Kuvan 12 painotetussa verkossa painot ovat välimatkoja metreissä."*




Kuva 12: Mitkä tiet tutkijan kannattaa aurata, jotta lunta täytyisi lapioida mahdollisimman vähän?

Tutkijan lumityöt -ongelma voidaan luokitella analyysi-synteesiongelmaksi, koska tehtävänasettelusta ei käy ilmi, mitkä operaatiot johtavat ongelman lopputilaan. Ongelman alkutila on, että kaikki tiet ovat puhdistamatta, ja lopputila on se, että tutkija on tehnyt lumitöitä mahdollisimman vähän ja hänellä on puhdistettu tie jokaiseen tutkimuskeskuksen rakennukseen. Vaikka kyseistä ongelmaa ennen on määritelty tarvittavien käsitteiden lisäksi Kruskalin algoritmi, eivät nämä tiedot riitä selvittämään, missä järjestyksessä tiet tulee puhdistaa.

#### Ongelma Pólyan ongelmanratkaisuprosessin näkökulmasta

Tarkastellaan ongelmaa ja sen ratkaisua Pólyan ongelmanratkaisuprosessin näkökulmasta, joka voidaan jakaa neljään eri vaiheeseen; Ongelman ymmärtäminen, ratkaisusuunnitelman laatiminen, ratkaisusuunnitelman toteutus sekä prosessin tulkinta ja feedback. Tarkastellaan ongelmaa kahden eri oppijan näkökulmasta; *vasta-alkaja* on verkkoteoriaan perehtymätön oppija ja *harrastaja* tunnistaa, osaa ja hallitsee Verkkoteoriaa lukiolaisille -oppimateriaalin käsitteitä kyseessä olevaan ongelmaan saakka.

### 1) Ongelman ymmärtäminen

Ongelman ymmärtäminen muodostuu sekä *ongelman löytymisestä*, että *ongelmanasettelun ymmärtämisestä*. Ensimmäisessä vaiheessa tulee siis ymmärtää, mikä on tehtävässä varsinainen ongelma ja motivoitua ratkaisemaan se. Kyseinen ongelma on pyritty rakentamaan niin käytännönläheiseksi, että tehtävänasettelussa ei tarvita verkkoteorian käsitteistöä. Näin verkkoteoriaan perehtymättömällä on myös mahdollisuus ratkaista ongelma. Vaikeusasteeltaan ongelma tulisi olla ratkaisijalleen haastava, mutta ei mahdoton.

Vasta-alkajan näkökulmasta ongelma on ratkaistu, kun kaikkiin rakennuksiin on puhdistettu tie ja teiden puhdistamiseen on käytetty mahdollisimman vähän työtä. Ratkaisussa tulee kyetä selvittämään missä järjestyksessä tiet kannattaa puhdistaa, mutta lopputuloksen järkevyyttä voidaan vain arvioida. Harrastajan näkökulmasta haluttu lopputulos on minimaalinen virittävä puu, joka saadaan selville Kruskalin algoritmilla. Kruskalin algoritmi ei sovellu ongelmanratkaisuun vaan puhdistettavien teiden järjestys tulee selvittää muulla tavalla.

### 2) Ratkaisusuunnitelman laatiminen

Ratkaisusuunnitelman laatiminen muodostuu *ongelman täsmennyksestä*, *ongelman analysoinnista* ja *ratkaisuidean löytymisestä*. Ongelman täsmennyksessä tarkastellaan, mitkä tekijät mahdollisesti johtavat ongelmanratkaisuun. Ongelman analysointi muodostuu useista eri tekijöistä, joissa esimerkiksi voidaan pohtia, mitkä lähtötiedoista ovat olennaisia, onko lähtötietoa tarpeeksi tai tarpeettomasti, voidaanko tilannetta havainnollistaa tai onko ongelma ylipäätään mielekäs. Ratkaisuidean löytyminen hypoteettisessa muodossa muodostuu yleensä edellä mainittujen tietojen järjestelystä ja tietojen välisten linkkien löytämisestä.

Vasta-alkajan ratkaisuidea voisi olla seuraava. *Puhdistetaan tiet siten, että saavuttaessa risteykseen risteävistä teistä puhdistetaan seuraavaksi lyhin tie.* Harrastajan ratkaisuidea voisi olla seuraava. *Jokaisessa vaiheessa liitetään kaaripainoltaan mahdollisimman pieni kaari kasvavaan puuhun. Lopputulos voidaan tarkastaa muodostamalla Kruskalin algoritmilla minimaalinen virittävä puu ja vertaamalla saatua puuta Kruskalin puuhun.*

### 3) Ratkaisusuunnitelman toteutus

Ratkaisusuunnitelman toteutus jakautuu *ratkaisuidean toteuttamiseen*, *ratkaisun määrittämiseen* ja *ratkaisun esittämiseen*. Ratkaisuidean toteuttamisvaiheessa testataan omaa ongelmanratkaisuideaa suorittamalla määritetyt operaatiot. Kyseinen vaihe vaatii ongelmanratkaisijalta *konvergenttia*[13] ajattelua: ongelmanratkaisuidea suoritetaan alusta loppuun sillä tavalla kuin se alun perin suunniteltiin. Ratkaisun määrittäminen tarkoittaa arviointia, onko ongelmanratkaisun lopputulos ongelman todellinen ratkaisu. Ratkaisun esittämisvaiheessa ratkaisu muotoillaan sellaiseksi, että se vastaa haluttuun kysymykseen ja on esitetty käyttämällä lukijan kannalta sopivaa muotoilua ja viestintätapaa.

Vasta-alkajan ratkaisuidean toteutus tuottaa virittävän puun, joka ei välttämättä ole minimaalinen virittävä puu. Vasta-alkajan on hankala selvittää, mikä on ongelman todellinen ratkaisu. Harrastajan ratkaisuidean toteutus tuottaa minimaalisen virittävän puun, joka hänen on mahdollista myös tarkastaa edellä kuvatulla toisella menetelmällä.

### 4) Prosessin tulkinta ja feedback

Prosessin tulkinta ja feedback jaetaan *ratkaisun uudelleenkokeiluun ja -järjestelyyn* sekä *loppukatsaukseen.* Ratkaisun uudelleenkokeilu ja -järjestely tarkoittaa, että ratkaisun oikeellisuudesta pyritään varmistumaan tavalla tai toisella. Tässä vaiheessa ratkaisuidean operaatioita voidaan järjestää uudelleen tai muokata niin, että ne johtavat ongelman todelliseen ratkaisuun. Ongelman ratkaisua on tarkoitus puntaroida kaikin mahdollisin keinoin ja varmistua, että vallitseva tulos on ongelman todellinen ratkaisu.

Loppukatsaus on ongelmanratkaisuprosessin kannalta tärkeä riippumatta siitä, onko ongelma ratkaistu vai ratkaisematta. Loppukatsauksessa pyritään varmistumaan niistä operaatioista, jotka johtivat lopputulokseen. Tällä tavoin pyritään erottelemaan mitkä tekijät johtivat toivottuun tai ei-toivottuun lopputulokseen, jotta menetelmiä voidaan hyödyntää ratkottaessa vastaavanlaisia ongelmia.

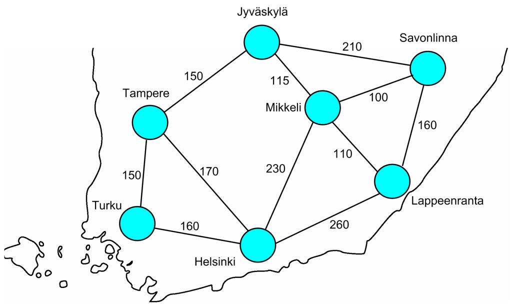
Vasta-alkajan feedback ja tulkinta ongelmanratkaisuprosesseista voisi olla, että ratkaisuideaa voidaan kehittää: tehdään uusi kehittyneempi strategia, ja asetetaan se uudelleenkokeiluun. Vasta-alkajan kehittyneempi strategia voisi olla seuraava; *hyödynnetään jo aurattuja tietä siten, että niitä pitkin voidaan palata takaisin ja valita siten kaikista käytettävissä olevista risteyksistä lyhin tie.* Harrastajan feedback ja prosessien tulkinta voisi olla seuraava: *ongelma on ratkaistu – minimaalinen virittävä puu saavutettu, ratkaisuidea onnistui, koska jokaisessa vaiheessa valitaan kaaripainoltaan mahdollisimman pieni kaari ja kasvava puu pysyy koko prosessin ajan yhtenäisenä.*

[13] Konvergentti ajattelu tarkoittaa prosessointia ja ajattelua, joka tähtää tiettyyn tulokseen.

### 5.3.5 Turun posti -ongelma

Turun posti -ongelma on orientaatio-ongelma Dijkstran algoritmille, jolla oppijaa ohjataan pohtimaan analogioita algoritmien ja ongelmanratkaisun välillä sekä konstruoimaan erilaisia malleja ja algoritmeja, joilla ongelma voidaan ratkaista. Jos ongelman halutaan herättää ajatuksia lyhimpien ketjujen algoritmista, on ongelma orientaatio-ongelma. Jos ongelman oletetaan opettavan Dijkstran algoritmi, vaatii ongelma joko ratkaisijaltaan paljon matemaattista osaamista tai opettajalta voimakasta ohjausta.

**Turun posti -ongelma:** *"Ulkomailta Suomeen saapuva posti kulkee Turun sataman kautta, josta posti toimitetaan eteenpäin. Mitkä olisivat lyhimmät reitit kuljettaa posti Turusta Kuvan 13 kaupunkeihin?"*




Kuva 13: Mitä reittejä pitkin posti kannattaa kuljettaa Turusta eteenpäin?

#### Mallien konstruointi ja analogiat

Tämän ongelman on havaittu aiheuttavan useimmissa oppijoissa tietyn tyyppisen intuitioon perustuvan ratkaisumallin soveltamista. Ratkaisussa pyritään intuitiivisesti perustelemaan, mitkä reittivaihtoehdoista eivät ainakaan ole lyhimpiä ja mitkä näyttäisivät olevan lyhimpiä. Tämän ratkaisumallin kompastuskivenä saattaa olla esimerkiksi se, ettei karttakuva ole mittakaavassaan. Toisaalta intuitioon perustuvat näkemykset voivat olla esimerkiksi seuraavia:

1) *edestakaisin ei ole järkevää kulkea,*

2) *mitä lähempänä kaupungit ovat lähtökaupunkia, sitä vähemmän on erilaisia reittivaihtoehtoja,*

3) *lyhimpiä reittejä saattaa olla useita.*

Ongelmanratkaisun kannalta näiden intuitionäkemysten avulla tehtävä saattaa olla ratkaistavissa, mutta ne eivät vielä välttämättä johda algoritmien keksimiseen. Seuraavan jatkotehtävän avulla ratkaisijaa voidaan ohjata ratkaisemaan ongelma algoritmisesti.

*"Muodostakaa toimintaohje, jonka avulla voidaan etsiä mistä tahansa painotetusta verkosta lyhimmät ketjut annetun solmun ja muiden solmujen välille."*

Ongelmanratkaisumalleja voidaan konstruoida etsimällä analogioita Suomen tietoverkko -ongelman ja tutkijan lumityöt -ongelman ratkaisuista ja algoritmeista. Niiden ratkaisujen myötä on oppijalle tullut tutuksi algoritmien esitystavoista algoritmi toimintaohjeena ja algoritmi kaaviokuvana. Turun posti -ongelman ratkaisussa voidaan löytää myös analogioita ongelmien ja algoritmien välille (Taulukko 1).

| Ongelma | Algoritmi | Idea |
|---|---|---|
| Suomen tietoverkko | Kruskal | lyhin kaari |
| Tutkijan lumityöt | Prim | valitse lyhin puuhun liittynyt kaari |
| Turun posti | Dijkstra | valitse puuhun liittyvä lyhin ketju |

Taulukko 1: Ongelmien analogiat

### 5.3.6 Algoritmit toimintaohjeena

Painotetut verkot -luvussa esitellään edellä kuvattujen ongelmien lisäksi Kruskalin, Primin ja Dijkstran algoritmit toimintaohjeina, joissa oppimateriaalin tyyliin symbolinen ilmaisu korvataan pääasiassa sanallisella ilmaisulla. Kaikki algoritmiset toimintaohjeet esitellään oranssin värisissä kehyksissä, jonka yläpuolella on algoritmin nimi ja lyhyt kuvaus algoritmista.

#### Symbolit korvataan väreillä

Algoritmin toimintaohjetta ja sen etenemistä on havainnollistettu kuvilla, joissa verkon osia on väritetty vihreällä, sinisellä ja punaisella. Värejä käytetään siten, että alkuperäisen mustan verkon kaaria ja solmuja merkitään sinisellä värillä, kun ne ovat "potentiaalisia ehdokkaita" algoritmin tuottamaan puuhun, jonka jälkeen ne värittyvät joko punaisella tai vihreällä. Verkon kaaria väritetään punaisella värillä, jos ne eivät kuulu algoritmin tuottamaan verkkoon. Voidaan myös ajatella, että punaiset kaaret poistetaan verkosta. Verkon ne osat, jotka kuuluvat algoritmin tuottamaan puuhun, väritetään vihreällä. Lopuksi verkon vihreät osat muodostavat aina algoritmin tuottaman aliverkon, näissä tapauksissa joko minimaalisen virittävän puun[14] tai Dijkstran virittävän puun.

[14] Minimaalisen virittävän puun tuottaa Kruskalin tai Primin algoritmi.

Jokaisen algoritmin jälkeen on kehystetty tehtävä, jossa oppija voi harjoitella algoritmin etenemistä. Kyseiset ongelmat voidaan luokitella korkeintaan interpolaatio-ongelmiksi, koska tehtävänannosta käy ilmi yksityiskohtainen toimintaohje ongelmanratkaisuun, ongelman alku- ja lopputila. Tästä johtuen näiden ongelmien kohdalla on varmempaa puhua pikemminkin tehtävistä kuin ongelmista. Näiden tehtävien tarkoitus on opettaa algoritmien perusperiaatteiden lisäksi kyseisten algoritmien proseduureja.

### Proseduurien opettaminen ja kyky algoritmiseen ajatteluun

Perinteisesti kyseessä olevat algoritmit esitetään formaalilla matematiikan kielellä, jotka sisältävät sekä joukko-opillisia että operationaalisia symboleita (katso esimerkiksi Primin algoritmi s. 24). Painotetut verkot -luvun tavoitteena on antaa valmiuksia oppijalle ymmärtää algoritmin idea, mallintaa ja tuottaa yleisesti algoritmeja joko *toimintaohjeen* muodossa (katso esimerkiksi Primin algoritmi VL s. 44) tai *kaaviokuvana* (katso esimerkiksi Primin algoritmi VL s. 54 Kuva 75).

Joensuun Normaalikoulun lukiossa järjestetyllä Verkot ja relaatiot -kurssilla lukiolaistiimit muodostivat tutkijan lumityöt -ongelman pohjalta omia toimintaohjeita, joiden avulla kyseinen tai jokin vastaava ongelma voidaan ratkaista. Oppituokio toteutettiin niin, että tiimit ratkaisivat aluksi Suomen tietoverkko -ongelman, jonka jälkeen heille esiteltiin kaaviokuva Kruskalin algoritmin toimintaideasta (katso VL s. 57 Kuva 74). Kun tiimit olivat ratkaisseet Tutkijan lumityöt -ongelman, heille annettiin jatkotehtävä:

*"Muodostakaa toimintaohje toiselle tiimille, jonka perusteella toinen tiimi pystyy ratkaisemaan tutkijan lumityöt -ongelman."*

Toimintaohjeen keksimisen jälkeen tiimit testasivat toisten tiimien tuotoksia ja pohtivat toimintaohjeen toimivuutta, yksityiskohtaisuutta ja selkeyttä. Tiimien $X$ ja $Y$ tuotokset on esitetty Liitteessä 2. Molempien tiimien tuotoksista löytyy analogioita Suomen tietoverkkoa koskevaan ongelmaan. Toimintaohjeen ulkoasu ja tyyli on lähes identtinen malliesimerkin kanssa. Verkkoteorian käsitteistön kannalta tiimien toimintaohjeet eroavat huomattavasti. Tiimin $X$ toimintaohjeessa käytetään runsaasti verkkoteorian käsitteitä ja vastaavasti tiimin $Y$ toimintaohjeessa verkkoteorian käsitteistö on korvattu erittäin vapaalla verbalisoinnilla. Molemmat tiimit totesivat kuitenkin arvioitavan tiimin toimintaohjeen olevan toimiva siinä mielessä, että toimintaohjeen avulla pystyy ongelman ratkaisemaan.

# 6 Tuotetut oppimateriaalit

Tuotetut oppimateriaalit realisoituivat kahdeksi kurssiksi: kontaktiopetuksena järjestetty *Verkot ja relaatiot* -kurssi Joensuun normaalikoulun lukiossa ja *Verkkoteoriaa lukiolaisille* -verkkokurssi ISOverstaassa. Oppimateriaalin luomisesta vastasi kaksi työntekijää Itä-Suomen yliopistossa.

Oppimateriaalien luominen aloitettiin kesällä 2011. Syksyksi 2011 kasassa oli oppimateriaalipaketti, joka sisältää ongelmalähtöisen kurssimonisteen ja erilaisia verkkotehtäviä. Kurssi järjestettiin kontaktiopetuksena syksyllä 2011 Joensuun normaalikoulun lukiossa. Lopuksi kaikki oppimateriaalit digitalisoitiin ja muunnettiin ne verkkokurssiksi ISOverstaaseen vuoden 2012 alussa.

## 6.1 Verkkoteoriaa lukiolaisille -verkkokurssi 2012

*Verkkoteoria lukiolaisille* on verkkokurssi ISOverstaan Moodle-järjestelmässä. Kurssi on tarjolla kaikille kouluille Suomessa ja ulkomailla.

- Kurssimoniste:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/Kurssimoniste/VerkkoteoriaaLukiolaisille.pdf`
- Kurssin kotisivut:
  `https://isoverstas.moodle.fi/course/view.php?id=3630`

## 6.2 Verkot ja relaatiot -kurssi 2011

*Verkot ja relaatiot* on matematiikan valinnainen kurssi, joka järjestettiin Joensuun normaalikoululla syksyllä 2011. Kurssin hyväksytysti suoritti noin kymmenen lukiolaista.

- Kurssimoniste:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/Kurssimoniste/Verkotjarelaatiot.pdf`
- Oppimateriaalit:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/verkot_ja_relaatiot_kurssimateriaali.html`
- Kurssin kotisivut:
  `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/MatematiikanMestariluokka/VerkotJaRelaatiot/index.html`

# Viitteet


[1] Chen, W. *Discrete mathematics.* University of London, 1982.

[2] Gross, J. Yellen, J. *Graph Theory and its applications.* Chapman & Hall/CRC, United States of America, 2006.

[3] Haapasalo, L. *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu.* MEDUSA-Software, Joensuu, 2000.

[4] Haapasalo, L. *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu.* MEDUSA-Software, Joensuu, 2012.

[5] Itä-Suomen yliopisto. 2011. *Matemaattisten aineiden mestariluokat Itä-Suomessa.* [WWW-dokumentti]. `http://wanda.uef.fi/matematiikka/kurssit/HuippuvalmennusMatemaattisissaAineissa/index.html`. (Luettu 27.2.2012).

[6] Itä-Suomen yliopisto. 2012. *AbiTour2012.* [WWW-dokumentti]. `http://www.uef.fi/fysmat/abitour-2012`. (Luettu 30.4.2012).

[7] Johnsonbaugh, R. *Discrete Mathematics - Fifth Edition.* Prentice-Hall Inc, New Jersey, 2001.

[8] Joutsenlahti, J. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä.* Tampereen yliopisto, 2005.

[9] Joutsenlahti, J. *Matemaattinen ajattelu lukiossa.* Teoksessa Räsänen, P. Kupari, P, Ahonen T, Malinen P. *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Yliopistopaino, Jyväskylä, 2004.

[10] Joutsenlahti, J. *Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa.* Teoksessa Räsänen, P. Kupari, P, Ahonen T, Malinen P. *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Yliopistopaino, Jyväskylä, 1997.

[11] Koponen, R. *Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille.* Atena, Jyväskylä, 1995.

[12] Kotilainen, J. *Suuntaamattomia verkkoja lukiossa - itsetuotetun oppimateriaalin analysointia.* Itä-Suomen yliopisto, Joensuu, 2012.

[13] Malinen, P. *Oppilaiden kehittyminen todistusajatteluun.* Teoksessa Räsänen, P. Kupari, P, Ahonen T, Malinen P. *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Yliopistopaino, Jyväskylä, 1997.

[14] Matousek, J. Nesetril, J. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford university, 2008.

[15] Mason, J. Burton, L. Stacey, K. *Thinking Mathematically - Second edition.* Pearson Education Limited, England, 2010.

[16] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003* [WWW-dokumentti]. `http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf` (Luettu 8.3.2012).

[17] Opetushallitus. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Vammalan kirjapaino Oy, Vammala, 2004.

[18] Pesonen, M. *Diskreetti matematiikka*. Joensuu, 2010.

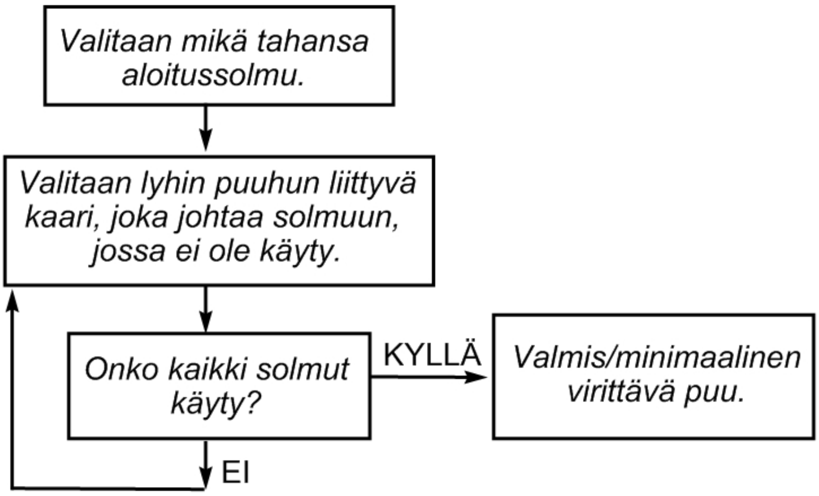
[19] Pesonen, M. Smolander, P. *Matematiikan johdantokurssi*. Joensuu, 2010.

[20] Pólya, G. *How To Solve It: a New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press, 1948.

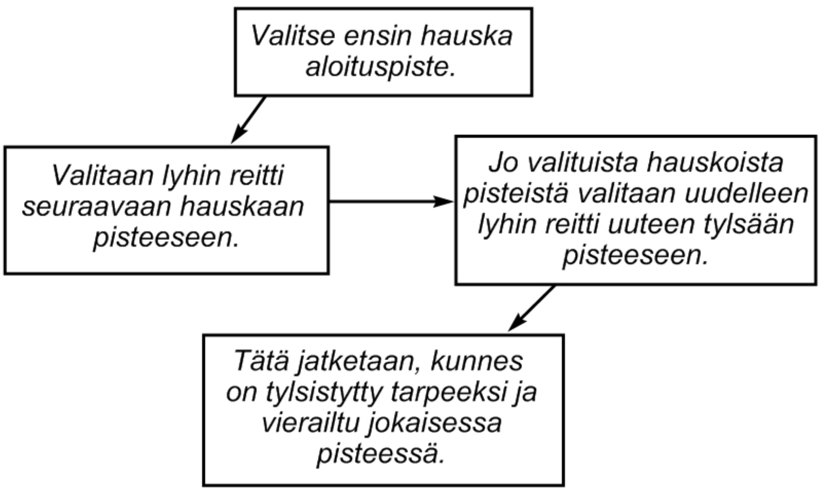
[21] Savolainen, V. *Verkkoteoria*. Docendo Finland Oy, Porvoo, 2001.

# Hakemisto

# LIITE 2: Toimintaohje tutkijan lumityö -ongelmaan lukiolaisten tyyliin




Kuva 14: Tiimin $X$ tuottama algoritmi.




Kuva 15: Tiimin $Y$ tuottama algoritmi.

# LIITE 3: Suomen tietoverkko -ongelma esillä AbiTour2011-2012 -kiertueella

Itä-Suomen yliopiston fysiikan ja matematiikan laitos järjesti AbiTour2011-2012 -kiertueen [6], jonka tarkoituksena oli esitellä fysiikan ja matematiikan opintoja näistä aineista kiinnostuneille abiturienteille. Kiertueen yhteydessä Suomen tietoverkko -ongelma esitettiin seuraavissa lukioissa:

- Tietäväisen koulu ja Tohmajärven lukio 21.11.2011
- Kiteen lukio 21.11.2011
- Joensuun normaalikoulun lukio 22.11.2011
- Tuusniemen lukio 24.11.2011
- Siilinjärven lukio 24.11.2011
- Iisalmen lyseo 24.11.2011
- Kuopion yhteiskoulun musiikkilukio 30.11.2011
- Kuopion lyseon lukio 30.11.2011
- Kallaveden lukio 30.11.2011
- Minna Canthin lukio 30.11.2011
- Joensuun lyseon lukio 7.12.2011
- Joroisten lukio 12.12.2011
- Varkauden lukio 12.12.2011
- Heinäveden lukio 12.12.2011
- Juuan lukio 13.12.2011
- Polvijärven yläaste ja lukio 13.12.2011
- Rautavaaran lukio 13.12.2011
- Joensuun yhteiskoulun lukio 15.12.2011
- Juankosken koulu ja lukio 16.12.2011
- Outokummun lukio 16.12.2011

- Nilsiän lukio 16.12.2011
- Mikkelin lukio 5.1.2012
- Kuopion klassillinen lukio 10.1.2012
- Suonenjoen lukio 10.1.2012
- Kajaanin lukio 13.1.2012
- Sotkamon lukio 13.1.2012
- Nurmeksen lukio 13.1.2012
- Kuhmon yhteislukio 13.1.2012
- Savonlinnan lyseon lukio 16.1.2012
- Juvan lukio 16.1.2012
- Punkaharjun lukio 16.1.2012
- Sulkavan lukio 16.1.2012
- Joutsenon lukio 18.1.2012
- Kimpisen lukio 18.1.2012
- Lauritsalan lukio 18.1.2012
- Lappeenrannan lyseon lukio 18.1.2012
- Vuoksenniskan yhteiskoulun lukio 19.1.2012
- Imatran yhteislukio 19.1.2012
- Parikkalan lukio 19.1.2012