8. ALUSSA 20 000

$8\% = 0{,}08$
$108\% = 1{,}08$

1. VUODEN LOPUSSA $20\,000 \cdot 1{,}08$

2. $20\,000 \cdot 1{,}08^2 + 6000 \cdot 1{,}08$

3. $20000 \cdot 1{,}08^{3} + 6000 \cdot 1{,}08^{2} + 6000 \cdot 1{,}08$

n $20000 \cdot 1{,}08^n + 6000\left(1{,}08 + 1{,}08^2 + \ldots + 1{,}08^{n-1}\right)$

GEOM. SUMMA

$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$

MUTTA
500€ JOKA
KUUKAUSI ?!

- TAULUKKOLASKENTA
$\Rightarrow$ 32 VUOTTA SAMA

$$= \frac{1-1{,}08^n}{1-1{,}08} - 1$$

$$= \frac{1{,}08^n - 1 - 1{,}08 + 1}{1{,}08 - 1}$$

$$= \left(20\,000 + \frac{6000}{1{,}08-1}\right) 1{,}08^n - \frac{6000}{1{,}08-1} \cdot 1{,}08$$

LASKIN

$$= 95\,000 \cdot 1{,}08^n - 81\,000$$

$$= 10\,000\,000$$

$$\ln(a^{b}) = b\ln(a)$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$= \ln(a) - \ln(b) \quad b^{-1}$$

$\Leftrightarrow \quad 95\,\cancel{000} \cdot 1{,}08^{n} = 1081\,\cancel{000} \quad // :95\,\cancel{000}$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}08^{n} = \frac{1081}{95} \quad // \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \quad \ln(1{,}08^{n}) = n \cdot \ln(1{,}08) = \ln\left(\frac{1081}{95}\right) = \ln(1081) - \ln(95)$

$\Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln(1081) - \ln(95)}{\ln(1{,}08)}$

LASKIN

$\approx 31{,}597$

VASTAUS: 32 VUODEN KULUTTUA

SIJOITUS a, KORKO $k\%$, MILLOIN TILILLÄ $2a$?

$$a \cdot \left(1 + \frac{k}{100}\right)^{n} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{k}{100}\right)^{n} = 2$$

$\frac{109}{2} = \cancel{54{,}5}\ 55$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{k}{100}\right)}$

$\ln(3) \approx 1{,}09$

$\ln(2) \approx 0{,}70$

$\ln(1+x) \approx x$

KUN $x \approx 0$

$$\approx \frac{0{,}70}{\frac{k}{100}}$$

$$n \approx \frac{70}{k}$$

KUN k PIENI

$1\% = 0{,}01$ $\qquad$ $\% = 0{,}01$

$\sqrt{\%} = 0{,}1$ $\qquad$ $\%^2 = 0{,}000001$

$\sin(\%) \approx \ldots$ $\qquad$ $\frac{1}{\%} = 100$

8.

SIJOITETAAN ~~SUMMA~~ 1000 €, KORKO 3%,
MILLOIN 2000 € ?

MILLÄ n $1000 \cdot 1{,}03^n = 2000$

$1{,}03^n = 2 \quad // \ln(\,)$

$\Leftrightarrow \ln(1{,}03^n) = \ln 2$

$\Leftrightarrow n \ln(1{,}03) = \ln 2$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1.03} \approx \dfrac{0{,}70}{0.03} = \dfrac{70}{3}$

$\ln 2 \approx 0{,}70$

$\ln(1+x) \approx x$

$\approx \dfrac{69}{3} = \underline{23}$

SIJOITETAAN a, KORKO k%, MILLOIN $2a$?

$$\boxed{n = \frac{70}{k}}$$

5. VÄITE: $P(n): n^2 \le 2^n$ KAIKILLA $n \ge 4$.

TOD. INDUKTIOLLA.

1° JOS $n = 4$, NIIN

$$n^2 = 4^2 = 16 \le 16 = 4^2 = (2^2)^2 = 2^{2\cdot 2} = 2^4.$$

SIIS $P(4)$ TOSI.

2° OLETETAAN, $P(k)$ TOSI JOLLAKIN $k \ge 4$.

OSOITETAAN $P(k+1)$.

$$(k+1)^2 \le 2^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot k^2 \le 2 \cdot 2^k \quad (\alpha)$$

NYT $$\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \underset{k \ge 4}{\le} \left(1+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \le 2.$$

SIIS $$(k+1)^2 = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot k^2 \le 2k^2 \overset{P(k)}{\le} 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

SIIS $P(k+1)$ TOSI.

1° & 2° & IND. PA. $\Rightarrow$ $P(n)$ TOSI KAIKILLA n:EN

6. VÄITE: $P(n)$: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

KAIKILLA $n\in\mathbb{N}$.

TOD. INDUKTIOLLA

1° $P(1)$: $1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$

TOSI.

2° Induktio-oletus: $P(k)$ TOSI JOLLAKIN $k\geq 1$.

onko $P(k+1)$ TOSI ?

$$1^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\Big[\underbrace{\frac{k(2k+1)}{6}+k+1}_{=A}\Big]\overset{(\alpha)}{=}\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$P(k+1)$ TOSI

$$6A=k(2k+1)+6k+6=2k^2+k+6k+6$$

$$=2k^2+7k+6\overset{(\beta)}{=}(k+2)(2(k+1)+1)$$

(α)

$\Big[(k+2)(2(k+1)+1)=(k+2)(2k+3)=2k^2+7k+6\Big]$ (β)

7. VÄITE:

$$P(n): 1^3 + \dots + n^3 = (\underbrace{1+2+\dots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}})^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Tod

1°

$$P(1) \quad 1^3 = \frac{1^2 (1+1)^2}{4} \text{ ok}$$

2° OL. $P(k)$, jollakin $k \geq 1$.

Nyt

$$P(k+1): 1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$$

$$\overset{P(k)}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2 \left[\underbrace{\frac{k^2}{4} + k + 1}_{=A} \right] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$P(k+1)$ tosi.

$$A = \frac{k^2 + 4k + 4}{4} = \frac{(k+2)^2}{4}$$

1° & 2° & IND. PA $\Rightarrow$ $P(n)$ TOSI KAIKILLA $n \in \mathbb{N}$.