Harjoitus 0, vaihtoehtoisratkaisuja

Onko olemassa kolmio, jonka sivuille a, b ja c pätee

(a) $a^3 + b^3 = c^3$

(b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$?

Ratkaisu.

Kolmiossa, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c pätee aina

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

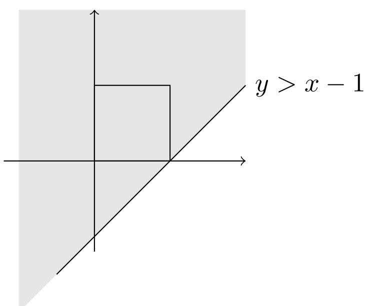
Jakamalla nämä epäyhtälöt luvulla c ja merkitsemällä $x = a/c$ ja $y = b/c$ saadaan

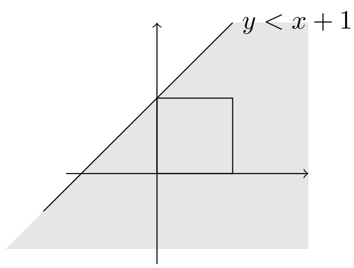
$$x < y + 1, \quad y < x + 1, \quad 1 < x + y.$$

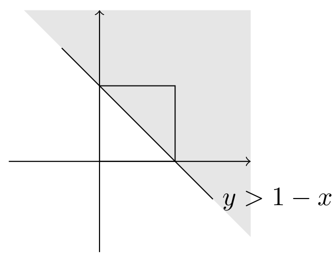
Muuttujan y suhteen ratkaistuna saadaan

$$y > x - 1, \quad y < x + 1, \quad y > 1 - x.$$

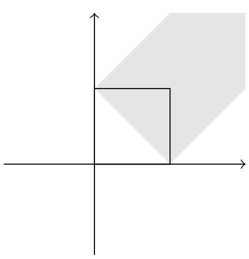
Kunkin epäyhtälön toteuttavat tason pisteet (x, y) voidaan piirtää kuvaan







Siis tason pisteet, jotka toteuttavat kaikki kolme epäyhtälöä, on eräs suikale



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - 1 < y < x + 1, \quad y > 1 - x\}$$

Oletetaan, että

$$a^3 + b^3 = c^3.$$

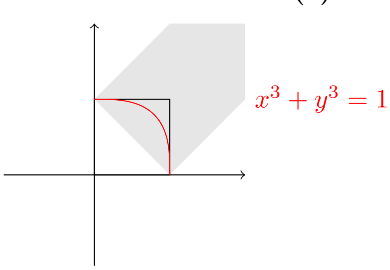
Jakamalla tämä puolittain luvulla c^2 saadaan

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1.$$

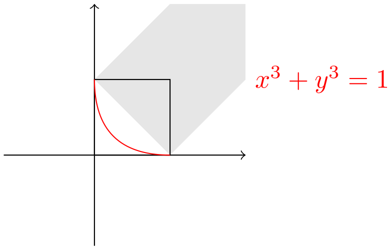
Voidaan merkitä $x = a/c$ ja $y = b/c$, jolloin saadaan

$$x^3 + y^3 = 1.$$

Varsinainen ratkaisu. (a) Nähdään, että jos $x, y > 0$, niin tämä käyrä sisältyy aiemmin saatuun suikaleeseen



Siis, jos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ja $a^3 + b^3 = c^3$, niin on olemassa kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c.
(b) Vastaavasti yhtälö $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ vastaa yhtälöä $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Tämä käyrä ei sisälly aiemmin saatuun suikaleeseen.



Siis, jos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ja $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$, niin ei ole olemassa kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c.