Harjoitus 2, vaihtoehtoisratkaisuja

2. Tämä tehtävä osattiin laskuharjoituksissa hyvin. Kvanttorien vaihtosääntö ja de Morgan osattiin hyvin.

Tehtävän voisi ratkaista mekaanisena sievennystehtävänä. Kannustan allekainlaskuun ja merkkaamaan siististi jonnekin, mitä tietoja käytetään.

Voidaan päätellä

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x : P(x) \to Q(x)) \\
\xleftrightarrow{(1)}\ &\exists x : \neg(P(x) \to Q(x)) \\
\xleftrightarrow{(2)}\ &\exists x : \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \\
\xleftrightarrow{(3)}\ &\exists x : P(x) \vee Q(x)),
\end{aligned}$$

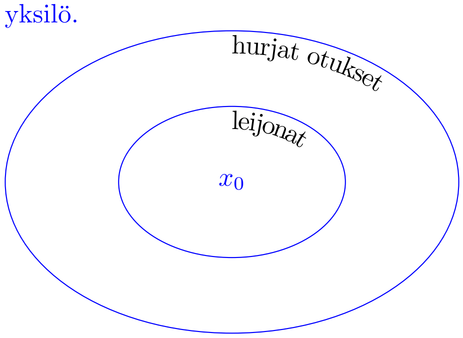
missä käytettiin tietoja
(1) kvanttorien vaihtosääntö
(2) totuustaulukko: $A \to B$ sama asia kuin $\neg A \vee B$
(3) de Morganin laki.

5. Kaikki leijonat ovat hurjia otuksia. On olemassa leijonia, jotka eivät juo kahvia. On siis olemassa hurjia otuksia, jotka eivät juo kahvia. Onko päättely looginen?

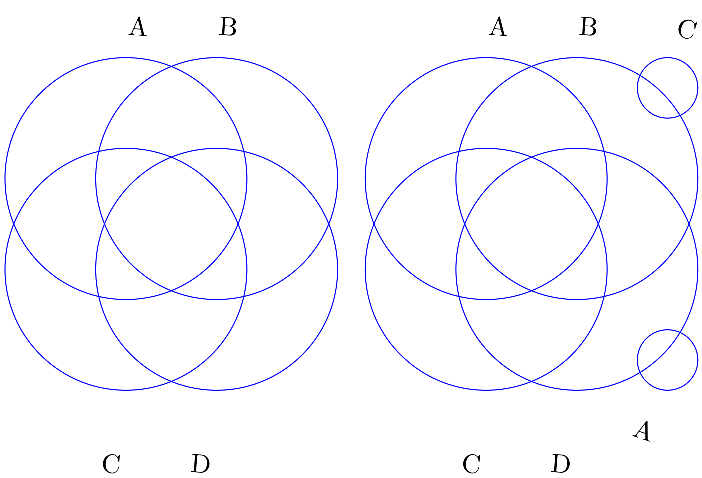
Löytyi joitakin hyviä vastauksia. Välillä sanottiin, että "on se looginen, kun ajattelee, mutta miten sen oikein voisi todistaa".

Tärkein huomio on, että joka tapauksessa ratkaisu selkeytyy, jos tiettyä leijonaa, joka ei juo kahvia, merkataan vaikkapa x_0.

Selkein perustelu tähän tehtävään on piirtää hurjien otusten joukon sisälle leijonien joukko ja laittaa sinne yksi kahvia juomaton yksilö.



Tässä yhteydessä on tärkeää sanoa, että seuraavassa kuvassa on puute, että ei ole esimerkiksi joukkoa $(A \cap D) \setminus (B \cup C)$ eli joukkoa "A ja B, mutta ei C tai D". Sen vuoksi kannattaa olla varovainen, jos perustelee asioita kuvilla.



Puutteen voi toki korjata, vaikkapa lisäämällä joukkoihin A ja C toiset irralliset osat, mutta nyt kuvasta tulee jo liian sekava.

6. Tuli todistaa, että

$$(\exists x \forall y : P(x,y)) \to (\forall y \exists x : P(x,y))$$

on tautologia. Melko vaikea päästä alkuun. Todistusta auttaa paljon se, jos vasemmalla puolella löytyvää sopivaa lukua x huomaa merkitä vaikkapa x_0.

No, sitten kun vaikkapa mallivastausten ratkaisu on kirjoitettu, jää vielä etäiseksi, että miksi implikaatio pätee.

Tästä voi tehdä sanallisen esimerkin. Merkitään $P(x,y)$: "henkilö y tykkää ruoasta x". Siis sulkulausekkeet ovat

A: "On olemassa ruoka, josta kaikki tykkäävät."
B: "Jokainen tietää jonkin ruoan, josta tykkää."

Jos A on tosi, niin on olemassa ruoka, josta kaikki tykkäävät. Todennäköisesti ruoka $x_0 =$ pitsa on tällainen. Ahaa! Nyt, jos keneltä tahansa henkilöltä kysytään ruokaa josta tykkää, niin henkilö voi vastata "$x_0 =$ pitsa". Siis nähdään, että B on tosi. Siis $A \to B$ on tautologia.