Vaihtoehtoratkaisuja

Malliratkaisuissa on kuhunkin tehtävään yksi mahdollinen ratkaisutapa. Tietysti tehtävän voi ratkaista useammalla mielenkiintoisella tavalla. Alle on koottu vaihtoehtoisia ratkaisuja.

Harjoitus 4

1. Jos x on reaaliluku siten, että

$$\frac{x^2-1}{x+2} > 0,$$

niin osoita, että joko $x > 1$ tai $-2 < x < -1$.

Ratkaisu. **Tapa II.** Huomataan, että

$$\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{x-(-2)}.$$

Siis arvolla $x = -2$ lauseke ei ole määritelty. Arvoilla $x = \pm 1$ lauseke saa arvon nolla ja haluttu epäyhtälö ei päde.

Siis arvot -2, -1, 1 eivät ole ratkaisuja.

Muutoin lausekkeen merkki riippuu termien $x-2$, $x-1$ ja $x+1$ merkistä. Tehdään merkkikaavio.

	-2	-1	1	
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-1}{x+2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Siis, kun $x > 1$, kaikki termeistä $x-2$, $x-1$ ja $x+1$ ovat positiivisia ja siis murtolauseke on positiivinen. Lisäksi, kun $-2 < x < -1$, niin termi $x-2$ on positiivinen ja $x-1$ ja $x+1$ ovat negatiivisia, jolloin murtolauseke on positiivinen. Muutoin murtolauseke ei ole positiivinen.

Merkkikaaviota muistuttaa kulkukaavio. Tarkastellaan tästä esimerkkiä.
Esimerkki. Milloin funktio $f(x) = x^3 - 6x$ on kasvava?

Ratkaisu. Funktio on kasvava jos ja vain jos sen derivaatta on ei-negatiivinen.

Funktion derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 6$. Siis $f'(x) = 0$, jos ja vain jos $3x^2 = 6$ eli $x = \pm\sqrt{2}$. Lisäksi esimerkiksi $f'(\pm 3) = 9 - 6 = 3 > 0$ ja $f'(0) = -6 < 0$. Tehdään kulkukaavio

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Siis, kun $x < -\sqrt{2}$ tai $x > \sqrt{2}$, niin $f'(x) > 0$ ja funktio f on kasvava.

Toisaalta, kun $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, niin $f'(x) < 0$ ja funktio f on vähenevä.

Siis f on kasvava joukossa $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$.

2. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät:

(a) $n - 5$ on pariton,
(b) $3n + 2$ on parillinen (c) $n^2 + 1$ on pariton.

Ratkaisu. **Tapa II.** Osoitetaan, että kukin ehto pätee, jos ja vain jos n on parillinen. Tarkastellaan kutakin ehtoa erikseen.

Ehto (a) pätee, jos ja vain jos $n - 5 = 2m + 1$ jollakin $m \in \mathbb{Z}$; eli $n = 2m + 6 = 2(m + 3)$, missä $m + 3 \in \mathbb{Z}$; eli n on parillinen.

Ehto (b) pätee, jos ja vain jos $3n + 2 = 2k$ jollakin $m \in \mathbb{Z}$. Tällöin $3n = 2(k - 1)$ on parillinen, mikä toteutuu jos ja vain jos n on parillinen.

Ehto (c) toteutuu, jos ja vain jos n^2 on parillinen. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että n on parillinen.

---

4. Olkoon n pariton kokonaisluku. Tällöin $n = 2k + 1$ jollakin kokonaisluvulla k. Nyt $n = 2k + 1$ pätee jos ja vain jos

$$k = \frac{n - 1}{2}.$$

Saatiin kaava luvulle k. Siis jos luku n on kiinnitetty, niin luku k määräytyy tätä kaavaa käyttämällä yksikäsitteisesti.

5. Onko olemassa reaalilukua x siten, että $x^4 < x < x^2$?

Ratkaisu. **Tapa II.** Ei ole olemassa. Oletetaan, että x on jokin reaaliluku, jolle pätee

$$x^4 < x < x^2. \tag{1}$$

Kaikille reaaliluvuille y pätee $y^2 \geq 0$. Siis $x^4 = (x^2)^2 \geq 0$. Saadaan

$$0 \leq x^4 < x < x^2. \tag{2}$$

Siis kaikki tämän epäyhtälön luvut ovat ei-negatiivisia ja korottamalla epäyhtälö neliöön saadaan

$$0 \leq x^8 < x^2 < x^4. \tag{3}$$

Nyt epäyhtälöistä (2) ja (1) saadaan sopivat osat poimimalla

$$x^2 < x^4 < x < x^2.$$

Saatiin $x^2 < x^2$, mikä ei voi pitää paikkaansa. Siis epäyhtälö (1) ei toteudu millään reaaliluvuilla.

Tapa III. Osoitetaan, että millään reaaliluvulla x ei päde $x^4 < x < x^2$.

Kaksoisepäyhtälö $x^4 < x < x^2$ tarkoittaa sitä, että samaan aikaan pätee $x^4 < x$ ja $x < x^2$. Osoitetaan siis, että näin ei ole, vaan pätee jokin seuraavista tilanteista

$$x^4 \geq x \quad \text{ja} \quad x \geq x^2 \tag{1}$$

tai

$$x^4 \geq x \quad \text{ja} \quad x < x^2 \tag{2}$$

tai

$$x^4 < x \quad \text{ja} \quad x \geq x^2. \tag{3}$$

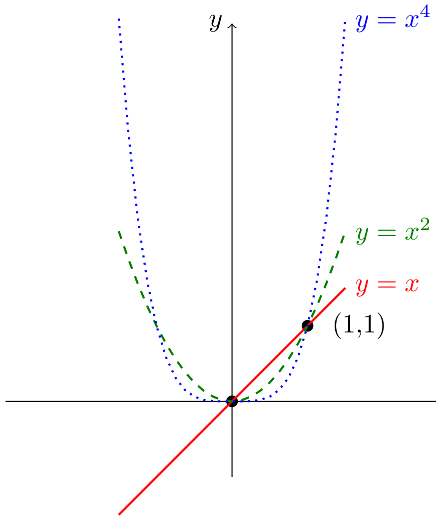
Tilanne (1) pätee, jos ja vain jos $x = 0$ tai $x = 1$.

Tilanne (2) pätee, jos ja vain jos $x < 0$ tai $x > 1$.

Tilanne (3) pätee, jos ja vain jos $0 < x < 1$.

Nähdään, että jos x on reaaliluku, niin jokin ehdoista $x = 0$, $x = 1$, $x < 0$, $x > 1$ tai $0 < x < 1$ on tosi; ja siten jokin ehdoista (1)-(3) on tosi.

Tapa IV. Piirretään käyrien $y = x$, $y = x^2$ ja $y = x^4$ kuvaajat.



Nähdään, että käyrä $y = x$ ei ole koskaan käyrien $y = x^4$ ja $y = x^2$ välissä. (Pisteissä $x = 0$ ja $x = 1$ pätee $x^4 = x = x^2$, mutta ei sielläkään aito epäyhtälö $x^4 < x < x^2$.) Siis epäyhtälö $x^4 < x < x^2$ ei toteudu millään reaaliluvulla x.

Tapa V. Oletetaan, että

$$x^4 < x < x^2.$$

Arvolla $x = 0$ tulisi $0 < 0 < 0$, joka ei ole totta.
Oletetaan, että $x \neq 0$ ja jaetaan tällä luvulla. Saadaan

$$x^3 < 1 < x \quad \text{eli} \quad x^3 - 1 < 0 < x - 1.$$

Geometrisen sarjan summakaavan perusteella

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1,$$

joten $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Siis saadaan yhtäpitävä epäyhtälö

$$(x-1)(x^2 + x + 1) < 0 < x - 1.$$

Arvolla $x = 1$ tulisi $0 < 0 < 0$, joka ei ole totta.
Oletetaan, että $x \neq 1$ ja jaetaan tällä luvulla. Saadaan

$$x^2 + x + 1 < 0 < 1.$$

Nähdään, että

$$x^2 + x + 1 = (x - 1/2)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Siis epäyhtälö ei voi päteä millään luvulla x.
6. Jos

$$7(5x + 2y) = 35x + 14y = 253,$$

niin

$$5x + 2y = \frac{253}{7} = 36,\overline{142857} = 36,142857\ 142857\ldots$$

Jos molemmat x ja y olisivat kokonaislukuja, niin $5x + 2y$ olisi myös kokonaisluku, mikä olisi ristiriita. Siis molemmat x ja y eivät ole kokonaislukuja.

Hupijuttu. Pätee
$$\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ldots$$
Siis
$$\frac{1}{7} \approx 0,14$$
ja
$$\frac{2}{7} \approx 2 \cdot 0,14 = 0,28$$
ja
$$\frac{3}{7} \approx 3 \cdot 0,14 = 0,42.$$
Osoittautuu, että
$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0,142857\ldots \\
\frac{2}{7} &= 0,2857\ 142857\ldots \\
\frac{3}{7} &= 0,42\ 142857\ldots \\
\frac{4}{7} &= 0,57\ 142857\ldots \\
\frac{5}{7} &= 0,71\ 142857\ldots \\
\frac{6}{7} &= 0,85\ 142857\ldots
\end{aligned}$$
Siis desimaalikehitelmät voi kirjoittaa melkein välittömästi, kun on selvittänyt luvun $1/7$ desimaalikehitelmän. Riittää siis selvittää tai muistaa "142857". Tätä tietoa "taikatemppuna" käyttämällä voi kenties hämmästyttää ihmisiä.

Nähdään vielä, että
$$\begin{aligned}
\frac{7}{7} &= 0,999\ldots \\
\frac{1}{7} &= 0,142\ldots
\end{aligned}$$

$$\frac{6}{7} = 0,857\ldots$$
Siis vähentämällä desimaaleista $9,9,9$ desimaalit $1,4,2$ saa desimaalit $8,5,7$.

Säännönmukaisuus perustuu seuraaviin asioihin. Koska $1/7$ on rationaaliluku, sen desimaalikehitelmä on jaksollinen. Jos $n \in \mathbb{Z}$, niin osamäärällä $n/7$ on 7 mahdollista jakojäännöstä, joista yksi on nolla. Siis nollasta poikkeavia jakojäännöksiä on $6 = 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3$ kappaletta.