Vaihtoehtoratkaisuja

Malliratkaisuissa on kuhunkin tehtävään yksi mahdollinen ratkaisutapa. Tietysti tehtävän voi ratkaista useammalla mielenkiintoisella tavalla. Alle on koottu vaihtoehtoisia ratkaisuja.

Harjoitus 5

1. **Oletus:** a, b, c ovat kolmion sivujen pituudet. Lisäksi $a^2 + b^2 = c^2$.
Väite: kolmio on suorakulmainen.
Todistus. Tapa I. Kosinilauseen nojalla

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma),$$

missä γ on sivun c vastainen kulma. Koska $c^2 = a^2 + b^2$, niin

$$0 = -2ab\cos(\gamma) \quad \text{eli} \quad \cos(\gamma) = 0,$$

koska $a, b > 0$. Siis $\gamma = 90° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbb{Z}$. Koska $0 < \gamma < 180°$, niin täytyy olla $\gamma = 90°$.

Todistus. Tapa II. Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat a_1 ja b_1 ja hypotenuusan pituus on c_1. Oletetaan, että $a_1 = a$ ja $b_1 = b$.

Pythagoraan lauseen nojalla $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$. Siis oletuksen perusteella

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{eli} \quad c_1^2 = c^2.$$

Koska $c_1, c > 0$, niin $c_1 = c$.

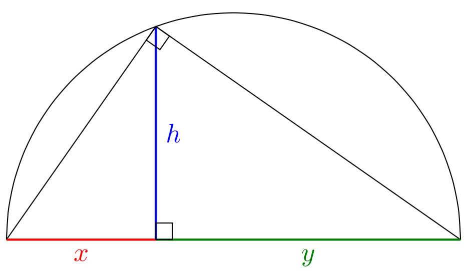
Yhtenevyyslauseen SSS perusteella oletuksen kolmio ja uusi kolmio ovat yhtenevät. Vastinkulmina sivun c vastainen kulma on yhtä suuri kuin sivun c_1 vastainen kulma, joka on $90°$.

3. **Oletus:** $x, y, z > 0$ ja $xy = z$.
Väite: $x \leq \sqrt{z}$ tai $y \leq \sqrt{z}$.
Todistus. Tapa I. Jos $x \leq y$, niin

$$x = \sqrt{xx} \leq \sqrt{xy} = \sqrt{z} = \sqrt{xy} \leq \sqrt{yy} = y.$$

Siis $x \leq \sqrt{z} \leq y$. Vastaavasti tilanteessa $y \leq x$ saadaan $y \leq \sqrt{z} \leq x$. Siis väite pätee.

Todistus. Tapa II. Oletetaan, että $x < y$ ja piirretään kuva, jossa puoliympyrän sisällä on kolmio. Thaleen lauseen (tai kehäkulmalauseen) perusteella kolmio on suorakulmainen.



Nähdään, että nyt $x < h < y$. Jos taas $x = y$, niin $x = y = h$ ja kaikki nämä janat ovat ympyrän säteitä. Jos taas $x > y$, niin $x > h > y$. Siis joka tapauksessa $x \leq h$ tai $y \leq h$.

Lisäksi huomataan, että kuvaan muodostuu kaksi yhdenmuotoista kolmiota ja sillä perusteella

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{y} \quad \text{eli} \quad h^2 = xy = z.$$

Siis $h = \sqrt{z}$. Siis väite pätee.

6. **Oletus:** $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 6, 9\}$ ja $C = \{4, 8\}$.

(a) $3 \in C\{4, 8\}$ on epätosi.

(b) **Tapa I.** $3 \in C \cup B$ tarkoittaa $3 \in C$ tai $3 \in B$. Koska $3 \in B$, niin väite on tosi.

Tapa II. Nähdään, että $C \cup B = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\} \ni 3$. Siis väite on tosi.

(d) Nähdään, että $\{2, 4\} \notin \{2, 4, 6, 8, 10\} = A$ eli väite on epätosi.

Vertailun vuoksi
$$\{2, 4\} \in \{1, 7, \{2, 4\}\} = D.$$
Tässä siis täytyy vain tarkastella joukkoa D ja katsoa, löytyykö sen sisältä matemaattinen otus $\{2, 4\}$.

Voidaan tehdä kärjistävä esimerkki
$$\{\{\{\{2, 4\}\}\}\} \in \{1, 3, \{\{\{\{2, 4\}\}\}\}, 13\}$$
(e) $\{2\} \subset A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ on tosi.

(f) $C \subset A$ tarkoittaa $\{4, 8\} \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$, mikä on tosi.

(g) $C \in \{\{4, 8\}\}$ tarkoittaa $\{4, 8\} \in \{\{4, 8\}\}$, mikä on tosi.
(h) $C \in \{A\}$ tarkoittaa $\{4, 8\} \in \{\{2, 4, 6, 8, 10\}\}$, mikä on epätosi.