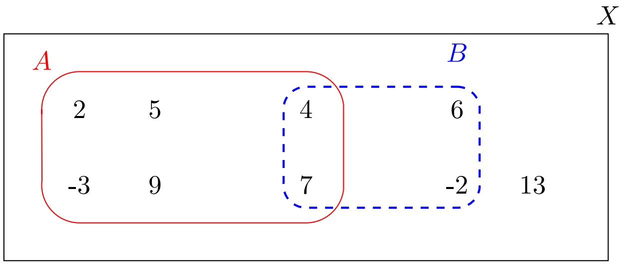
Vaihtoehtoratkaisuja

Malliratkaisuissa on kuhunkin tehtävään yksi mahdollinen ratkaisutapa. Tietysti tehtävän voi ratkaista useammalla mielenkiintoisella tavalla. Alle on koottu vaihtoehtoisia ratkaisuja.

Harjoitus 6

1. Aiheesta voidaan piirtää kuva. Valitaan perusjoukoksi $X = A \cup B \cup \{13\}$.



Joukkojen A ja B unioni eli yhdiste koostuu niistä pisteistä, jotka ovat ainakin toisessa joukoista eli

$$A \cup B = \{x \in X \,:\, x \in A \quad \text{tai} \quad x \in B\} = \{2, 5, -3, 9, 4, 7, 6, -2\}.$$

Joukkojen A ja B leikkaus (eng. intersection) koostuu niistä pisteistä, jotka ovat kummassakin joukossa eli

$$A \cap B = \{x \in X \,:\, x \in A \quad \text{ja} \quad x \in B\} = \{4, 7\}.$$

Merkintä $A \setminus B$ voidaan lukea vaikkapa "A erotus B" tai "A pois B" tai englanniksi "A minus B". (Siis $\cap$ on leikkaus. Siis $\setminus$ ei ole leikkaus, vaan $\setminus$ on erotus.) Tämä joukko koostuu niistä pisteistä, jotka ovat joukossa A, mutta eivät joukossa B eli

$$A \setminus B = \{x \in X \,:\, x \in A \quad \text{ja} \quad x \notin B\} = \{2, 5, -3, 9\}.$$

Joukko $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ koostuu yhdisteen pisteistä, joista on otettu pois leikkauksen pisteet. Eli tässä joukossa on ne pisteet, jotka ovat täsmälleen jommassa kummassa joukossa eli

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 5, -3, 9, 6, 2\}.$$

Joukolle $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ei ole vakiintunutta merkintätapaa. Jossakin kirjassa, jossa joukkoa tarvitaan usein, on ehkä määritelty jokin merkintätapa, jota on sitten kätevä käyttää, kun asioita voi ilmaista lyhyemmin.
Tehtävässä ei asiaa kysytty, mutta joukon A komplementti A^c koostuu joukon A ulkopuolisista pisteistä. Se, mitä ulkopuolella on, riippuu siitä, miten perusjoukko on rajattu. Nyt

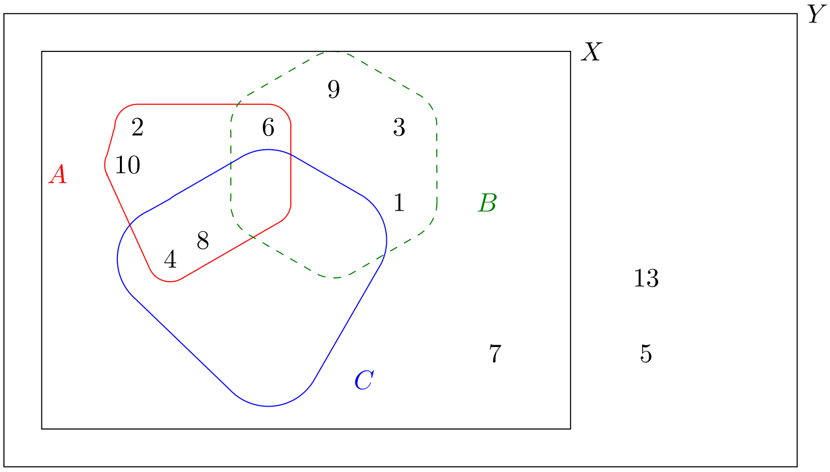
$$A^c = X \setminus A = \{6, -2, 13\}.$$

Huomataan, että perusjoukossa on yhdeksän alkiota, joukossa A kuusi alkiota ja joukossa A^c kolme alkiota. Kaikki on OK. Jos perusjoukko valittaisiinkin eri tavalla, esimerkiksi $X = \mathbb{Z}$, niin komplementti A^c sisältäisi äärettömän monta alkiota. Englanniksi komplementti on "complement".[1]

[1] Vitsi. Toisaalta kehu = positiivinen lausahdus = "a complement". Onko lausahdus "hapansilakka kuuluu herkullisten ruokien joukon komplementtiin" hapansilakoiden kehumista vai ei?

2. **Tapa I.** Katso malliratkaisut.

Tapa II. Voidaan piirtää kuva



Valitaan perusjoukoksi

$$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Myös jokin laajempi joukko kävisi perusjoukoksi, esimerkiksi

$$Y = \{1, 2, \ldots, 10, 13\}$$

tai perusjoukoksi voitaisiin valita vaikkapa $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{R}$.

Nyt $C \subset A$, joten $A \cup C = A = \{2, 4, 8, 6, 10\}$. Edelleen

$$(A \cup C) \setminus B = \{2, 4, 8, 6, 10\} \setminus \{1, 3, 6, 9\} = \{2, 4, 8, 10\}.$$

Toisaalta

$$B^c = X \setminus B = \{2, 4, 7, 8, 10\}.$$

Komplementti riippuu aina siitä, mikä perusjoukko on valittu. Siis perusjoukolla Y saataisiinkin

$$B^c = Y \setminus B = \{2, 4, 7, 8, 10, 5, 13\}.$$

Perusjoukolla $\mathbb{N}$ saataisiin

$$B^c = \mathbb{N} \setminus B = \{2, 4, 7, 8, 10, 11, \ldots\}.$$

3. **Oletus:** $A \subset B$
Väite: $B^c \subset A^c$
Todistus. Tapa I. Voidaan päätellä

$$\begin{aligned}
A \subset B \quad &\xrightarrow{(1)} \quad (x \in A) \to (x \in B) \\
&\xrightarrow{(2)} \quad \neg(x \in B) \to \neg(x \in A) \\
&\xrightarrow{(3)} \quad x \notin B \to x \notin A \\
&\xrightarrow{(4)} \quad x \in B^c \to x \in A^c \\
&\xrightarrow{(1)} \quad B^c \subset A^c
\end{aligned}$$

(1)	osajoukon määritelmä
(2)	logiikan tautologia $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
(3)	tehtiin väitelauseen negaatio
(4)	komplementin määritelmä

Tapa II. Oletetaan, että $A \subset B$. Siis $A \cup B = B$. Ottamalla puolittain komplementit saadaan $(A \cup B)^c = B^c$. Tehtävän 4 perusteella saadaan $B^c = A^c \cap B^c$. Tehtävän 5 perusteella $A^c \cap B^c \subset A^c$. Siis $B^c \subset A^c$.

4. **Väite:** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Todistus. Tapa I. Katso malliratkaisut.

Tapa II. Tehdään totuustaulukko.

A	B	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$
T	T	E	E	E	T	E
T	E	E	T	E	T	E
E	T	T	E	E	T	E
E	E	T	T	T	E	T

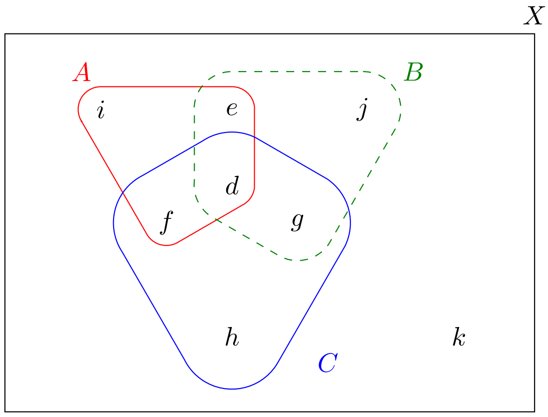
Tässä merkattiin "T", jos alkio x kuuluu kyseiseen joukkoon, ja "E", jos alkio ei kuulu kyseiseen joukkoon. Nähdään, että alkio kuuluu joukkoon $(A \cup B)^c$ jos ja vain jos alkio kuuluu joukkoon $A^c \cap B^c$. Siis joukot ovat samat.

5. Katso malliratkaisut.

6. **Väite:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Todistus. Tapa I. Väite seuraa logiikan tautologiasta $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, jonka voi todistaa totuustaulukolla. Totuustaulukkoon tulisi $2^3 = 8$ riviä.

Edelleen väite on analoginen reaalilukujen osittelulain $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ kanssa.

Tapa II. Voidaan piirtää kuva

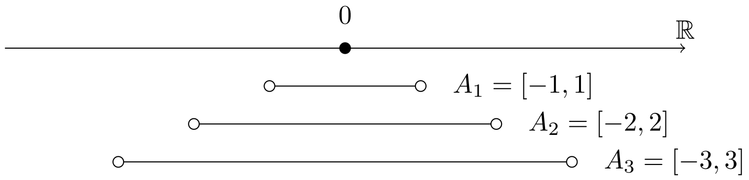


Siis
$$A \cup (B \cap C) = \{i, e, d, f\} \cup (\{e, d, g, j\} \cap \{f, d, g, h\}) = \{i, e, d, f\} \cup \{d, g\} = \{i, e, f, d, g\}.$$
Toisaalta
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{i, e, d, f\} \cup (\{e, d, g, j\}) \cap (\{i, e, d, f\} \cup \{f, d, g, h\}) = \{i, e, d, f, j, g\} \cap \{i, e, d, f, g, h\} = \{i, e, f, d, g\}.$$
Siis nähdään, että nämä joukot ovat samat.

Muut tilanteet saadaan erikoistapauksina. Esimerkiksi, jos $A \subset B$, niin poistetaan kuvasta ja mainituista joukoista pisteet i ja f. Automaattisesti
$$A \cup (B \cap C) = \{i, e, f, d, g\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
muuttuu muotoon
$$A \cup (B \cap C) = \{e, d, g\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
Siis aina[2]
$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

[2]Todistus on pätevä. Kuitenkin tällaisiin todistuksiin tulisi suhtautua varauksella. Entä, jos kuvassa olisikin joku puute tai kirjaimia ei olisikaan muistettu laittaa joka alueeseen? Silloin päättely ei toimisi.
Nyt alkio $x \in X$ on joko joukossa A tai ei, on joukossa B tai ei, ja on joukossa C tai ei. Siis alkiolle x on olemassa $2^3 = 8$ mahdollista aluetta, jossa alkio voi sijaita. Niinpä kuvan alkiot a, b, ..., k todella kattavat kaikki tilanteet.
Toisaalta kuvassa joukot A, B ja C ovat äärellisiä. Toimiiko päättely myös joukoille, joissa on äärettömän monta alkiota? (Toimii, täytyisikö tätä perustella jotenkin.)
Kuitenkin tällainenkin todistustapa on hyvä pitää mielessä. Esimerkiksi neliväriongelma pystyttiin todistamaan tietokoneella 1976 käymällä läpi 1834 erikoistapausta!

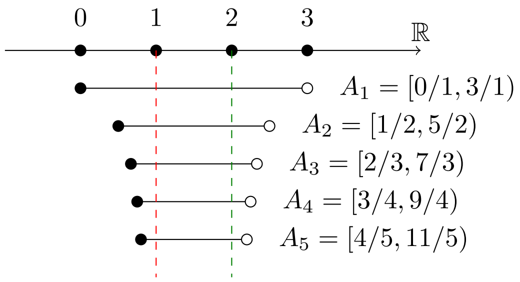
7. (a) Voidaan piirtää kuva



Joukot ovat sisäkkäisiä ja laajenevat rajatta kumpaankin suuntaan. Siis välien yhdisteenä saadaan koko reaalilukujen joukko ja leikkauksena pienin väli A_1. Siis

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}[-i, i] = (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty}[-i, i] = [-1, 1].$$

(b) Voidaan piirtää kuva



Joukot ovat sisäkkäisiä ja pienenevät lähestyen väliä $[1, 2]$. Siis välien yhdisteenä saadaan väleistä suurin $[0, 3)$ ja leikkauksena ne pisteet, jotka kuuluvat kaikkiin väleistä. Siis

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left[1 - \frac{1}{i}, 2 + \frac{1}{i}\right) = [0, 3) \quad \text{ja} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty}\left[1 - \frac{1}{i}, 2 + \frac{1}{i}\right) = [1, 2].$$

Pikaisella vilkaisulla voisi ajatella väärin, että

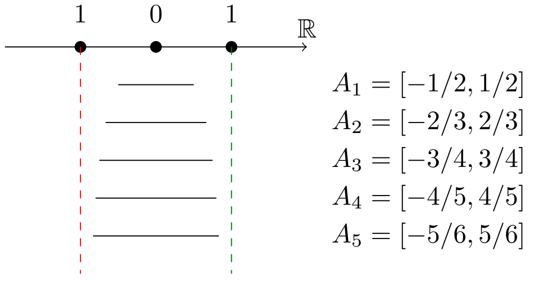
$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\Bigg[\underbrace{1 - \frac{1}{i}}_{\to 1}, \underbrace{2 + \frac{1}{i}}_{\to 2}\Bigg) = [1, 2),$$

missä raja-arvot pätevät, kun $i \to \infty$, mutta tämä ei ole totta! Luku 2 sisältyy kaikkiin väleihin, koska $2 + 1/i$ on aina aidosti suurempi luku kuin 2. Siis joukko on $[1, 2) \cup \{2\} = [1, 2]$.

Tehtävän 7.(b) leikkausta on hyvä vielä verrata seuraavaan esimerkkiin

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\Bigg[\underbrace{-\frac{i}{i+1}}_{\to 1}, \underbrace{\frac{i}{i+1}}_{\to 1}\Bigg] = (-1, 1).$$

Miksi tästä ei tullut tulokseksi $[-1, 1]$? Koska $i < i + 1$, niin pätevät aidot epäyhtälöt $-1 < -\frac{i}{i+1} < \frac{i}{i+1} < 1$. Siis esimerkiksi luku -1 ei kuulu mihinkään väleistä ja ei siis kuulu niiden yhdisteeseen. Aiheeseen liittyvä kuva on ohessa



8. Katso malliratkaisut.