

Loppukoe 10.11.2023

Matematiikan ja digitaalitekniikan perusteet tietotekniikassa IN00CS83-3010, matematiikan osio

1. Sievennä lauseke

$$\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{7}\right) \bigg/ \left(\frac{1}{14} + 1\right).$$

muotoon $\frac{p}{q}$, missä p ja q ovat kokonaislukuja.

Ratkaisu: Laventamalla murtoluvuksi saadaan

$$\left(\frac{7}{70} - \frac{10}{70}\right) \bigg/ \left(\frac{1}{14} + \frac{14}{14}\right),$$

joten murtoluku on

$$\frac{-3}{70} \bigg/ \frac{15}{14} = \frac{-3}{70} \cdot \frac{14}{15}.$$

Jakamalla luvut tekijöihin murtoluvuksi saadaan

$$\frac{-3 \cdot 1}{2 \cdot 6 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}.$$

Supistamalla murtoluvuksi saadaan $-\frac{1}{25}$.

2. Avaa sulut

$$(3x + 4)^2 - 6(4x - 2) + 5.$$

Ratkaisu: Saadaan

$$\begin{aligned}(3x + 4)^2 - 6(4x - 2) + 5 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 - 6 \cdot 4x + 6 \cdot 2 + 5 \\ &= 9x^2 + 24x + 16 - 24x + 12 + 5 \\ &= 9x^2 + 33.\end{aligned}$$

3. Ratkaise toisen asteen yhtälö

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Ratkaisu: Tämä on toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a = 1$, $b = -4$ ja $c = 3$. Sijoittamalla nämä lukuarvot ratkaisukaavaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

saadaan

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

Valitsemalla $+$ saadaan $x = 3$. Valitsemalla $-$ saadaan $x = 1$. Siis yhtälöllä on ratkaisut $x = 1$ ja $x = 3$.

4. Ratkaise yhtälöparista

$$\begin{cases} 5x + 6y &= 4 \\ 2x + y &= 2 \end{cases}$$

tuntemattomat x ja y .

Ratkaisu: Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$y = 2 - 2x.$$

Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$5x + 6(2 - 2x) = 4,$$

mistä järjestelemällä saadaan

$$-7x = -8,$$

joten $x = \frac{8}{7}$. Sijoittamalla tämä jälkimmäisestä yhtälöstä saatuun yhtälöön $y = 2 - 2x$ saadaan

$$y = 2 - 2 \cdot \frac{8}{7} = \frac{14}{7} - \frac{16}{7} = -\frac{2}{7}.$$

Siis $x = \frac{8}{7}$ ja $y = -\frac{2}{7}$.

5. Ratkaise x yhtälöstä

$$7^{2x} = 4^{x+5}.$$

Ratkaisu: Ottamalla puolittain $\ln()$ saadaan

$$\ln(7^{2x}) = \ln(4^{x+5}).$$

Logaritmin laskusäännöllä saadaan

$$(2x) \ln(7) = (x + 5) \ln(4)$$

Tämä sievenee muotoon

$$2x \ln(7) = x \ln(4) + 5 \ln(4).$$

Viemällä kaikki muuttujaa x sisältävät termit vasemmalle saadaan

$$2x \ln(7) - x \ln(4) = 5 \ln(4).$$

Ottamalla x yhteiseksi tekijäksi vasemmalla saadaan

$$x(2 \ln(7) - \ln(4)) = 5 \ln(4).$$

Saadaan

$$x = \frac{5 \ln(4)}{2 \ln(7) - \ln(4)}.$$

6. Ratkaise x yhtälöstä

$$2 \ln(2x) - \ln(x) = \ln(x + 1).$$

Ratkaisu: Viemällä luku 2 potenssiksi saadaan

$$\ln((2x)^2) - \ln(x) = \ln(x + 1)$$

eli

$$\ln(4x^2) - \ln(x) = \ln(x + 1).$$

Yhdistämällä vasemman puolen logaritmit saadaan

$$\ln \frac{4x^2}{x} = \ln(x + 1)$$

eli $\ln(4x) = \ln(x + 1)$. Argumenttien täytyy olla samat eli $4x = x + 1$. Siis $3x = 1$, joten $x = \frac{1}{3}$.

Kaavoja

$$\frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(b^c) = c \log_a(b)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$\text{lb}(x) = \log_2(x), \quad \text{lg}(x) = \log_{10}(x), \quad \ln(x) = \log_e(x), \quad e \approx 2,72$$