

Harjoituskoe 23.11.2023

Tietotekniikan sovellusprojekti IN00ED23-3001, matematiikan osio, Vektorit ja kompleksilukujen perusteet (3op)

1. Laske vektorien $\bar{u} = (1, 12, -2)$ ja $\bar{v} = (3, 0, 1)$ pistetulo. Ratkaisu: 1
2. Määritä vektorin $\bar{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori. Ratkaisu: $\hat{u} = \frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$
3. Laske vektorien $(1, 2, 2)$ ja $(1, 2, -2)$ välinen kulma. Ratkaisu: noin $83,6^\circ$
4. Laske tetraedrin tilavuus, kun sen kärjet ovat pisteissä $A = (2, 1, -1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, -2, 2)$ ja $D = (-1, 2, -1)$. Ratkaisu: $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = -24$, joten $V = 4$
5. Määritä pisteen $P = (2, 2)$ etäisyys pisteiden $A = (1, -1)$ ja $B = (5, 2)$ kautta kulkevasta suorasta.
Vihje. Jos $\bar{n}$ on suoran jokin normaalivektori ja $\bar{v} = P - A$, niin etäisyys on luku $\bar{v} \cdot \hat{n}$.
Ratkaisu: suoran suuntavektori $\bar{u} = (4, 3)$, $\bar{n} = (-3, 4)$, $\hat{n} = (-0.6, 0.8)$, $\bar{v} = (1, 3)$,
etäisyys on $(1, 3) \cdot (-0.6, 0.8) = -0.6 + 2.4 = 1.8$.

6. Laske kompleksilukujen tulo

$$(3 + 4i)(1 + 5i)$$

Ratkaisu: $-17 + 19i$

7. Kirjoita kompleksiluku $z = 5e^{i\pi/3}$ summamuodossa $z = x + iy$. (Luvuille x ja y riittää likiarvo.)
Ratkaisu: $z \approx 2.50 + 4.33i$

8. Etsi toisen asteen yhtälön

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

kompleksiset ratkaisut.

Ratkaisu: $x = 1 + i$ tai $x = 1 - i$

Yhtälö on $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 2$. Ratkaisukaavalla saadaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 + i.$$

Kaavoja (jatkuu kääntöpuolella)

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

$$|(u_1, u_2, u_3)| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad \hat{u} = \frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u}$$

$$\cos \alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

$$V_S = |\bar{u} \times \bar{v}|, \quad V_P = \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}|, \quad V_T = \frac{1}{6}|\bar{u} \times \bar{v}|$$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = i\sqrt{a}, \quad i^2 = -1$$

$$z^* = (x + iy)^* = x - iy, \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan(y/x), \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{zw^*}{|w|^2}$$

$$\frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(b^c) = c \log_a(b)$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$\text{lb}(x) = \log_2(x), \quad \text{lg}(x) = \log_{10}(x), \quad \ln(x) = \log_e(x), \quad e \approx 2,72$$