

Tuntitehtävät

IN00ED23-3001 Tietotekniikan sovellusprojekti

Näitä tehtäviä voidaan laskea tunnilla. Ehkä osa voidaan laittaa palautettaviksi tehtäviksi.

Viikko 1 (vektorin esitystavat, pituus ja yksikkövektori)

1. Esitä muodossa (a, b, c) vektori

(a) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

Ratkaisu: $(2, 3, 4)$

(b) $5(2\hat{j} + 3\hat{i} + 4\hat{k})$

Ratkaisu: $(15, 10, 20)$

(c) $2\hat{j} + 4\hat{k}$

Ratkaisu: $(0, 2, 4)$

(d) $\hat{i} - \hat{j}$

Ratkaisu: $(1, -1)$ tai $(1, -1, 0)$

2. Esitä muodossa $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ vektori

(a) $(1, 2, 3)$

Ratkaisu: $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(b) $-2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ratkaisu: $-4\hat{j} - 6\hat{k}$

(c) $(-1, 0, 3)$

Ratkaisu: $-\hat{i} + 3\hat{k}$

3. Olkoon $\bar{u} = (2, 1)$ ja $\bar{v} = (1, -1)$. Laske

(a) $|\bar{u}|$

Ratkaisu: $\sqrt{5}$

(b) $|\bar{v}|$

Ratkaisu: $\sqrt{2}$

(c) $|\bar{u} + \bar{v}|$

Ratkaisu: 3

(d) $|\bar{u} - \bar{v}|$

Ratkaisu: $\sqrt{5}$

(e) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 - 2|\bar{u}|^2 - 2|\bar{v}|^2$

Ratkaisu: 0

4. Määritä vektorin $\bar{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ suuntainen yksikkövektori $\hat{u} = \frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u}$.

Ratkaisu: $\hat{u} = 0.6\hat{i} - 0.8\hat{j}$

5. Esitä vektori $\bar{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $\bar{u} = |\bar{u}|\hat{u}$.

Ratkaisu: $\bar{u} = 5(0.6\hat{i} - 0.8\hat{j})$

6. Esitä vektori $\bar{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ muodossa $\bar{u} = |\bar{u}|\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, missä θ on jokin sopiva kulma. Muoto $r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ on ns. napakoordinaattiesitys.

Ratkaisu: $\bar{u} \approx 5(\cos(-53^\circ), \sin(-53^\circ))$

Vihje. Tässä $|\bar{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(y/x)$.

7. Määritä vektorin $\bar{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ suuntainen yksikkövektori. **(Koetehtävä?)**

Ratkaisu: $\hat{u} = 0.33\hat{i} - 0.66\hat{j} + 0.66\hat{k}$

Extratehtäviä (ei käsitellä yhdessä)

8. **Extra.** Esitä vektori $\bar{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ muodossa $\bar{u} = |\bar{u}|\hat{u}$, missä u on yksikkövektori.

Ratkaisu:

$$\bar{u} \approx 6(0.33\hat{i} - 0.66\hat{j} + 0.66\hat{k})$$

9. **Extra.** Esitä vektori $\bar{u} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ muodossa $\bar{u} = |\bar{u}| \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, missä φ ja θ ovat jotkin sopivat kulmat. Tämä on ns. pallokoordinaattiesitys.

Vihje. Jos $(x, y, z) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, niin $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Asetetaan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nyt $\varphi = \arctan(z/r)$ ja

$$\theta = \arctan(y/x). \text{ Ratkaisu: } R = 6, r = \sqrt{20}, \varphi \approx 41, 8^\circ, \theta \approx 63, 4^\circ. \text{ Siis } \bar{u} \approx 6 \begin{pmatrix} \cos(42^\circ) \cos(63^\circ) \\ \cos(42^\circ) \sin(63^\circ) \\ \sin(42^\circ) \end{pmatrix}.$$

10. **Extra.** Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Määritä vektori $\bar{u} = \vec{AB} = B - A$. Määritä piste C , kun $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ Olkoon $D = (2, 1)$. Määritä piste E , kun $E - D = \vec{DE} = -\vec{AB} = -(B - A)$. Piirrä kuvaan kaikki mainitut pisteet ja vektorit.

11. **Extra.** Soutuveneen ($m_1 = 100\text{kg}$) nopeusvektori on $\bar{v}_1 = (2, 5)\text{m/s}$. Vesijetin ($m_2 = 500\text{kg}$) nopeusvektori on $\bar{v}_2 = (10, 0)\text{m/s}$. Alukset törmäävät pisteessä $(0, 0)$ tarttuen toisiinsa kiinni.

- (a) laske kummallekin aluksien liikemäärävektorit $\bar{p}_1 = m_1\bar{v}_1$ ja $\bar{p}_2 = m_2\bar{v}_2$ ennen törmäystä
- (b) laske yhteen tarttuneiden alusten liikemäärävektori $\bar{p}_3 = m_3\bar{v}_3$. Tässä $m_3 = m_1 + m_2$. (Fysiikasta tiedetään, että liikemäärä säilyy törmäyksissä, eli $\bar{p}_3 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$)
- (c) laske kyseisen liikemäärävektorin pituus $|\bar{p}_3|$
- (d) laske yhteen tarttuneiden alusten nopeusvektorin pituus $|\bar{v}_3|$
- (e) kuinka suuri osuus liike-energiasta säilyi törmäyksessä? Siis suhde $\frac{m_3|v_3|^2}{m_1|v_1|^2 + m_2|v_2|^2}$.

Viikko 2 (vektorien pistetulo ja vektorien välinen kulma)

Esimerkki. Vektorien $\bar{u} = (3, 4)$ ja $\bar{v} = (4, 4)$ pistetulo on $(3, 4) \cdot (4, 4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 12 + 16 = 28$.

(Siis vektorien pistetulossa lasketut “alkioittaiset tulot” lasketaan lopuksi yhteen.)

Vektorien $\bar{u} = (3, 4)$ ja $\bar{v} = (4, 4)$ välinen kulma on

$$\alpha = \arccos \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \arccos \frac{28}{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \arccos 0,98994 \dots = 0,1418 \dots \frac{180^\circ}{\pi} \approx 8,13^\circ.$$

12. Laske vektorien $(1, -2, -3)$ ja $(2, 4, -2)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Ratkaisu: ovat

13. Laske vektorien $(1, 2, -3)$ ja $(4, 1, 1)$ pistetulo. Ovatko vektorit toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Ratkaisu: eivät ole

14. Laske vektorien $(1, 2, 2)$ ja $(1, 2, -2)$ välinen kulma. **(Koetehtävä?)**

Ratkaisu: noin $83,6^\circ$

15. Laske vektorien $(1, 5, 0)$ ja $(3, 3, 0)$ välinen kulma. (**)

Ratkaisu: noin 33°

Viikko 3 (suorat)

16. Olkoon $A = (1, 1)$ ja $B = (3, 2)$. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on muotoa

$$Q(t) = A + t\bar{u} = A + t(B - A) = (1, 1) + t(2, 1). \quad (1)$$

Tässä $\bar{u} = (2, 1)$ on suoran suuntavektori. Esimerkiksi piste $Q(10) = (1, 1) + 10(2, 1) = (21, 11)$ on suoralla.

Määritä suoralla olevat pisteet $Q(2)$, $Q(3)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(-1)$. Piirrä kuva.

Ratkaisu: $Q(2) = (5, 3)$, $Q(3) = (7, 4)$, $Q(\frac{1}{2}) = (2, 1.5)$, $Q(-1) = (-1, 0)$

17. Suoran (1) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on muotoa

$$N(t) = A + t\bar{n} = (1, 1) + t(1, -2).$$

Tarkista pistetulon avulla, että suoran ja sen normaalisuoran suuntavektorit $\bar{u} = (2, 1)$ ja $\bar{n} = (1, -2)$ ovat kohtisuorassa. Piirrä edellisen tehtävän kuvaan normaalisuoran pisteet $N(1)$ ja $N(2)$.

18. Suoran (1) yhtälö on muotoa $(x, y) \cdot \bar{n} = A \cdot \bar{n}$ eli

$$(x, y) \cdot (1, -2) = (1, 1) \cdot (1, -2)$$

eli $x - 2y = -1$. Tarkista, että pisteet $(x, y) = (5, 3)$ ja $(x, y) = (7, 4)$ toteuttavat suoran yhtälön.

19. Olkoon $A = (1, 5)$ ja $B = (3, 3)$. Esitä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora muodossa $Q(t) = A + t\bar{u}$.

Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, -2)$

20. Etsi edellisen tehtävän suoralle jokin pisteen A kautta kulkeva normaalisuora.

Ratkaisu: $Q(t) = (1, 5) + t(2, 2)$

Viikko 3 (tasot)

21. Olkoon $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ ja $C = (0, 0, 3)$. Pisteiden A , B ja C kautta kulkeva taso on muotoa

$$Q(t, s) = A + t\bar{u} + s\bar{v} = A + t(B - A) + s(C - A) = (1, 0, 0) + t(-1, 2, 0) + s(-1, 0, 3). \quad (2)$$

Tässä $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat tason suuntavektorit. Esimerkiksi piste

$$Q(10, 10) = (1, 0, 0) + 10(-1, 2, 0) + 10(-1, 0, 3) = (-19, 20, 30)$$

on tasolla.

Määritä tasolla olevat pisteet $Q(2, 2)$, $Q(2, -1)$, ja $Q(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

22. Tason (2) pisteen A kautta kulkeva normaalisuora on

$$N(t) = A + t\bar{n} = (1, 0, 0) + t(6, 3, 2).$$

Tässä $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = (6, 3, 2)$ on eräs tason normaalivektori. Tarkista, että $\bar{n} \perp \bar{u}$ ja $\bar{n} \perp \bar{v}$. (***) **Vihje. Käytä pistetuloa.**

23. Tason (2) yhtälö on muotoa $(x, y, z) \cdot \bar{n} = A \cdot \bar{n}$ eli

$$(x, y, z) \cdot (6, 3, 2) = (1, 0, 0) \cdot (6, 3, 2)$$

eli $6x + 3y + 2z = 6$. Tarkista, yhtälöön sijoittamalla, että pisteet A , B ja C sekä piste $Q(2, 2)$ ovat tasolla.

Tehtäviin liittyviä kuvia

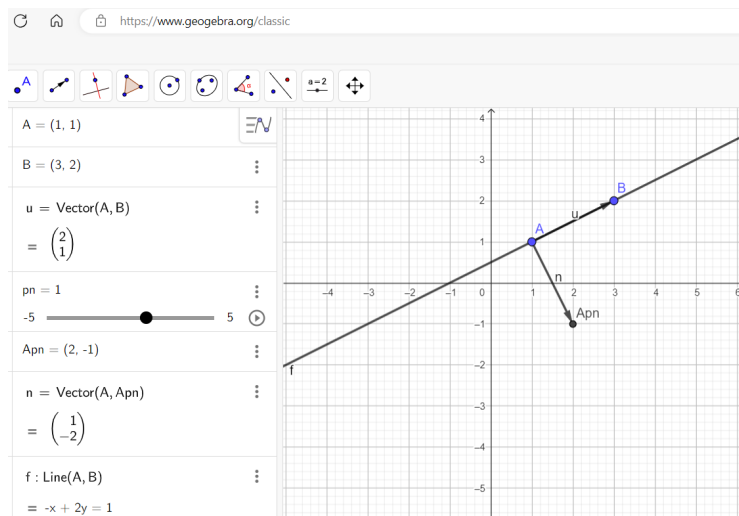


Figure 1: Suora (1)

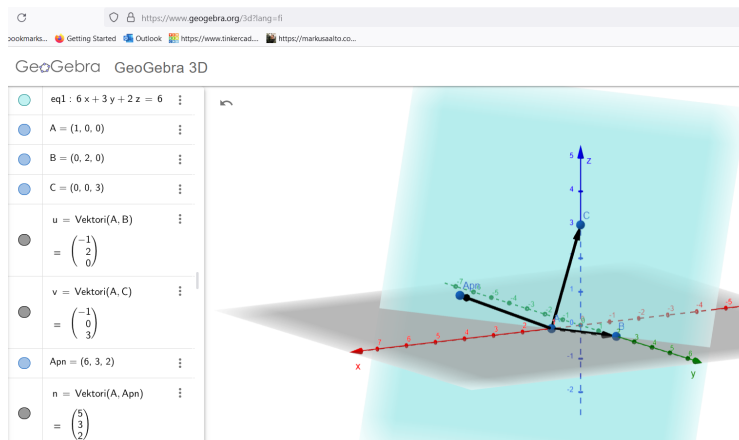


Figure 2: Taso (2)

Ristitulo

24. Vektorien ristitulo määritellään kaavalla

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Laske $(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 3)$.

Ratkaisu: $(6, 3, 2)$

25. Tarkista, että $(-1, 2, 0) \cdot (6, 3, 2) = 0$ ja $(-1, 0, 3) \cdot (6, 3, 2) = 0$.

26. Laske

(a) $(2, -1, 1) \times (-1, 2, 1)$

Ratkaisu: $(-3, -3, 3)$

(b) $(1, 2, 0) \times (2, 1, 1)$

Ratkaisu: $(2, -1, -3)$

27. Pisteet $A = (3, 1, 4)$, $B = (2, 3, 5)$ ja $C = (-1, 1, 0)$ muodostavat kolmion.

(a) Laske kolmion kahdelle sivulle suuntavektorit. Esimerkiksi $\bar{u} = B - A$ ja $\bar{v} = C - A$.

Ratkaisu: $B - A = (-1, 2, 1)$, $C - A = (-4, 0, -4)$, $C - B = (-3, -2, -5)$

(b) Laske kolmion pinta-ala.

Vihje. Pinta-alalle on useita kaavoja, esimerkiksi $\text{Ala} = \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}|$ ja $\text{Ala} = \frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}| \sin \alpha$, missä α on vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen kulma. Voit käyttää jompaa kumpaa näistä kaavoista.

Ratkaisu: $\text{Ala} = 4\sqrt{3}$

28. Eräällä suunnikkaalla on kärkipisteet $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 4, 3)$ ja $C = (4, 2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala.

Vihje. Voit laskea kolmion ABC pinta-alan ja kertoa sen kahdella.

Ratkaisu: $\text{Ala} = 10\sqrt{2}$

29. Kuinka suuri on suunnikkaan $ABCD$ pinta-ala, kun sen kolme kärkeä ovat pisteissä $A = (2, 1)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (2, -3)$?

Ratkaisu: $\text{Ala} = 8$

30. Laske tetraedrin tilavuus, kun sen kärjet ovat pisteissä $A = (2, 1, -1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, -2, 2)$ ja $D = (-1, 2, -1)$.

Vihje. Tilavuuden voi laskea kaavalla $V = \pm \frac{1}{6}(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$, missä vektorit $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat tetraedrin kolmen särmää.

Ratkaisu: $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = -24$, joten $V = 4$ (Koetehtävä?)

31. Laittamalla kolme edellisen tehtävän tetraedria (tai niiden peilikuvaa) vierekkäin saadaan prisma. (Prismalla on tahkoina kaksi kolmiota ja kolme suunnikasta.) Laske prismän tilavuus.

Ratkaisu: $V = 12$

32. Laittamalla kaksi edellisen tehtävän prismaa vierekkäin saadaan suuntaissärmiö. (Suuntaissärmiöllä on tahkoina kuusi suunnikasta.) Laske suuntaissärmiön tilavuus.

Ratkaisu: $V = 24$

33. Suuntaissärmiön särmät ovat $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{k}$, $\bar{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ja $\bar{c} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

(a) Määritä suuntaissärmiön tilavuus.

Ratkaisu: $\bar{w} = \bar{a} \times \bar{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $V = 4$

(b) Määritä suuntaissärmiön vaipan pinta-ala.

Ratkaisu: $\text{Ala} = ?$ Turhan vaikea käsin laskettavaksi.

34. Laske tasojen

$$\text{Taso 1: } Q(t) = (0, 0, 0) + t(2, -1, 1) + s(-1, 2, 1), \quad \bar{n}_1 = (-3, -3, 3);$$

$$\text{Taso 2: } Q(t) = (0, 0, 0) + t(1, 2, 0) + s(2, 1, 1), \quad \bar{n}_2 = (2, -1, -3),$$

välinen kulma α . Päte $\cos \alpha = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}$.

Ratkaisu: $\alpha = 128^\circ$ ja $180^\circ - \alpha = 52^\circ$

Kompleksiluvut

Kompleksiluvuilla voi laskea kuten reaalityluilla, mutta täytyy ottaa huomioon $i^2 = -1$.

35. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske

(a) $z + w$

Ratkaisu: 1-2i

(b) $z - w$

Ratkaisu: 2-6i

(c) zw **(Koetehtävä)**

Ratkaisu: 11 + 2i

Kompleksilukujen jakolaskussa lavennetaan nimittäjän $z = a + ib$ liittoluvulla eli konjugaatilla $z^* = a - ib$ seuraavasti

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2}.$$

Hyöty on siinä, että nimittäjästä saatiin pois imaginaariyksiköt i ja voidaan taas laskea kuten reaalityluilla. Nimittäjään tuli

$$zz^* = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2$$

eli luvun z modulin eli itseisarvon $|z|$ neliö.

36. Olkoon $z = 3 - 4i$ ja $w = 1 + 2i$. Laske $\frac{w}{z}$ yllä kuvatulla menetelmällä. Piirrä kuva.

37. Kompleksiluvulle $z = x + iy$ saadaan napakoordinaattiesitys $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|\angle\theta$, missä $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\theta = \arctan(y/x)$. Määritä napakoordinaattiesitys luvuille

(a) $z = 3 - 4i$

Ratkaisu: $z = 5\angle -53,130^\circ$

(b) $w = 1 + 2i$

Ratkaisu: $w = \sqrt{5}\angle 63,435^\circ$

(c) $zw = 11 + 2i$

Ratkaisu: $zw = 5\sqrt{5}\angle 10,305^\circ$

(d) $w/z = -0.2 + 0.4i$

Ratkaisu: $w/z = \frac{1}{\sqrt{5}}\angle 116,57^\circ$.

Tarkista, että kulmat vastaavat piirroksissa esiintyneitä arvoja.

Kompleksiluvuille saadaan napakoordinaattiesitys

$$z = |z|\angle\theta = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

38. Muunna summamuotoon $z = 6e^{i27^\circ}$. **(Koetehtävä)**

39. Muunna eksponenttimuotoon $z = 2 + 2i$.

Toisen asteen yhtälöitä ratkaistiin kaavalla

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

aiemmalla kurssilla. Saadaan kompleksiratkaisuja, kun kirjoitetaan esim.

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i.$$

40. Ratkaise $x^2 - 4x + 13 = 0$. **(Koetehtävä)**

Ratkaisu: $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$

41. Ratkaise $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Ratkaisu: $x_1 = 3 + i, x_2 = 3 - i$

42. Ratkaise $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$.

Ratkaisu: $x_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

Kaipaako lisää harjoitusta? Katso vanhat tehtävät Moodlesta.