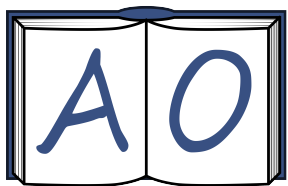


Vapaa matikka

MAA1



Avoimet oppimateriaalit ry



Teknologiateollisuuden
100-VUOTISSÄÄTIÖ



Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 4.0 -lisenssillä.

Avoimet oppimateriaalit ry

Yhdistys tuottaa ja julkaisee oppimateriaaleja ja kirjoja, jotka ovat kaikille ilmaisia ja vapaita käyttää, levittää ja muokata. Vapaa matikka -sarja on suunnattu lukion pitkän matematiikan kursseille ja täyttää valtakunnallisen opetussuunnitelman vaatimukset.

Jos olet kiinnostunut Vapaa matikka -sarjan kirjoittamisesta, voit tehdä pull requestin muutoksillesi GitHub-palvelussa tai osallistua yhdistyksen toimintaan.

Lisätietoja Vapaa matikka -kirjasarjasta työryhmältä,
vapaamatikka@avoimetoppimateriaalit.fi.

Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö on rahoittanut Vapaa matikka -kirjasarjan kirjoittamista 30 000 eurolla.

1. painos 2015

ISBN 978-952-7010-06-8 (painettu kirja, MAA1-2)

ISBN 978-952-7010-07-5 (sähköinen julkaisu, MAA1-2)

ISBN 978-952-7010-08-2 (sähköinen julkaisu, MAA1)

ISBN 978-952-7010-09-9 (sähköinen julkaisu, MAA2)

YKL 51

UDK 51

Painotalo C-4, Vaajakoski, 2015

LISENSSI

Tämän teoksen käyttöoikeutta koskee Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen (CC BY 4.0) -lisenssi. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) License.



Lisenssin suomenkielinen tiivistelmä

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>



Tarkat lisenssiehdot (englanniksi)

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>

Voit vapaasti:

Jakaa. Kopioda ja jatkolevittää materiaalia, missä tahansa välineessä ja muodossa, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Muuntaa. Remiksata, muuntaa ja jalostaa materiaalia, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Lisenssinantaja ei voi vetää näitä vapauksia pois niin kauan kun seuraat lisenssin ehtoja.

Seuraavilla ehdoilla:

Nimeä. Sinun on mainittava tekijät, näytettävä linkki lisenssiin sekä kerrottava, jos olet muuntanut materiaalia. Voit tehdä tämän millä tahansa kohtuullisella tavalla, mutta et niin, että lisenssin antaja näyttäisi tukevan sinua tai materiaalin käyttöäsi.

No additional restrictions. Et voi lisätä lakiehtoja tai teknisiä estoja, jotka estäisivät muita tekemästä mitään, minkä lisenssi sallii.

Huomautukset:

1. Sinun ei tarvitse seurata lisenssiehtoja niiden materiaalin osien kohdalla, jotka ovat public domainissa tai joiden käyttö on sallittua tilannekohtaisen tekijänoikeuspoikkeuksen tai -rajoituksen vuoksi.
2. Mitään takuita ei ole annettu. Lisenssi ei välttämättä anna sinulle kaikkia käyttö-tarkoituksesi edellyttämiä oikeuksia. Esimerkiksi julkisuus-, yksityisyys- tai moraalisäädökset voivat rajoittaa materiaalin käyttöäsi.

TEKIJÄT

Siiri Anttonen

Janne Cederberg

Joel Enwald

David Forsman

Vesa Hagström

Jani Hannula

Samuli Hanski

Otte Heinävaara

Lauri Hellsten

Kimmo Hellström

Olli Hirviniemi

Niko Ilomäki

Matias Jalkanen

Olli-Pekka Kahilakoski

Tero Keinänen

Sanni Ketoluoto

Ville-Pekka Kilpi

Jouni Kärkkäinen

Riku Laine

Vesa Linja-aho

Ossi Mauno

Joonas Mäkinen

Juhani Nuorteva

Ilari Oras

Pirita Paananen

Matti Pajunen

Lumi Pakkanen

Pekka Peura

Annika Piironen

Oskari Pirttimaa
Kaisa Pohjonen
Antti Rasila
Henri Ruoho
Johanna Rämö
Aleksi Sipola
Juha Sointu
Tommi Sottinen
Jarno Talponen
Topi Talvitie
Lilja Tamminen
Paula Thitz
Sampo Tiensuu
Ville Tilvis
Jaakko Viertiö
Emilia Välttilä

KIITOKSET

Heikki Hakkarainen
Eveliina Heinonen
Katriina Korteso
Hannu Kõngäs
Viljami Lahtinen
Senja Larsen
Joni Mäkinen
Jussi Partanen
Arto Piironen
Antti Ruonala
Anni Saarelainen
Mira Salmela
Tiina Salola
Kaj Sotala
Juhapekka Tolvanen
Daniel Valtakari

AVOIMET OPPIMATERIAALIT RY

Kotisivu

<http://avoimetoppimateriaalit.fi>

Facebook

<https://facebook.com/avoimetoppimateriaalit>

<https://facebook.com/oppikirjamaraton>

GitHub

<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry>

Sähköposti

yhdistys@avoimetoppimateriaalit.fi

IRCnet

[#avoimetoppimateriaalit](#)

Sisältö

Lähtötasotesti	11
MAA1 – Funktiot ja yhtälöt	13
1 Luvut ja laskutoimitukset	15
1.1 Luku ja relaatio	15
1.1.1 Luvun käsite	15
1.1.2 Relaatiot ja laskutoimitukset	17
1.2 Johdatus lukualueisiin ja aritmetiikkaan	20
1.2.1 Luonnolliset luvut	20
1.2.2 Kokonaisluvut	21
1.2.3 Rationaaliluvut	22
1.2.4 Reaaliluvut	23
1.2.5 Aritmetiikka	25
1.3 Jaollisuus ja tekijöihinjako	34
1.3.1 Jaollisuus ja luvun tekijät	34
1.3.2 Alkuluvut	35
1.4 Laskujärjestys ja lausekkeiden sieventäminen	39
1.4.1 Lauseke	39
1.4.2 Sieventäminen	41
1.4.3 Laskujärjestys	46
1.5 Murtoluvuilla laskeminen	50
1.5.1 Murtolukuesitys	50
1.5.2 Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku	52
1.5.3 Murtolukujen kertolasku	54
1.5.4 Murtolukujen jakolasku	55
1.5.5 Murtolausekkeiden sieventäminen	57
1.6 Potenssi	64
1.6.1 Potenssin määritelmä	64
1.6.2 Negatiivinen kantaluku	67
1.6.3 Potenssien laskusäännöt	69

1.6.4	Nolla ja negatiivinen luku eksponenttina	71
1.7	Luvun desimaaliesitys	83
1.7.1	Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi	83
1.7.2	Desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi	85
1.8	Pyöristäminen ja vastaustarkkuus	89
1.8.1	Merkitsevät numerot	89
1.8.2	Tarkka arvo	91
1.9	Suureet ja yksiköt	94
1.9.1	Suureet ja yksiköt	94
1.9.2	SI-järjestelmä	96
1.9.3	Kerrannaisyksiköt ja etuliitteet	100
1.9.4	Yksikkömuunnokset	104
1.9.5	Yksiköiden yhdistäminen laskuissa	110
1.10	Juuret	119
1.10.1	Neliöjuuri	119
1.10.2	Kuutiojuuri	120
1.10.3	Yleinen juuri	121
1.10.4	Juurten laskusäännöt	122
1.11	Murtopotenssi	129
1.12	Reaaliluvut lukusuoralla	135
2	Yhtälöt	139
2.1	Yhtälö	139
2.1.1	Peruskäsitteitä	139
2.1.2	Yhtälön muokkaaminen	141
2.1.3	Yhtälön ratkaiseminen	142
2.2	Ensimmäisen asteen yhtälö	148
2.3	Prosenttilaskenta	157
2.3.1	Vertailuprosentti ja perusarvo	160
2.3.2	Prosenttiosuuden laskeminen perusarvosta	161
2.3.3	Muutosprosentti	164
2.3.4	Prosenttiyksikkö	168
2.3.5	Luvun suhteellinen kasvattaminen tai pienentäminen	169
2.4	Potenssiyhtälöt	182
2.5	Suoraan ja kääntäen verrannollisuus	192

3	Funktiot	200
3.1	Funktio ja sen esitystavat	200
3.2	Potenssifunktio	215
3.2.1	Yleinen verrannollisuus	218
3.3	Eksponenttifunktio	223
3.3.1	Eksponentiaalinen malli	225
4	Kertausosio	232
	Testaa tietosi!	232
	Kertaustehtäviä	246
	Harjoituskokeita	253
	Ylioppilaskoetehtäviä	261
	Pääsy- ja valintakoetehtäviä	264
	Vastaukset ja hakemisto	268
	Vastaukset	268
	Hakemisto	337

KIRJAN KÄYTTÄMISESTÄ

Kirjan kirjoituksessa on nähty erityistä vaivaa siinä, että *mitään ei oleteta osattavan etukäteen*. Esitietovaatimuksia ei ole melkeinpä lainkaan:

- intuitio yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskusta sekä kyky käyttää laskinta näiden laskemiseen; kellonajat
- geometriaa: kolmio, suorakulmio; pituus, pinta-ala, tilavuus
- lukusanoja: kymmenen, sata, tuhat, miljoona – käytetään kirjan alussa, ja myöhemmin selitetään perusteellisemmin
- desimaali – sanaa käytetään kirjan alussa, mutta myöhemmin määritellään perusteellisemmin

Jos kirja ei anna tarpeeksi esimerkkejä jostakin asiasta, **ota yhteyttä**, ja asia korjataan välittömästi. **Oletusarvoisesti ymmärtämättömyyden syy ei ole sinun vaan oppimateriaalin**. Ota toki myös yhteyttä, jos sinulla on mielenkiintoisia tehtäväideoita!

Kirjan tehtävät on suurimmassa osaa luvuista jaettu kolmeen kategoriaan: Perusteet, kokonaisuuden hallitseminen ja lisätehtävät. Perustehtävät tarkistavat luvun määritelmien ja keskeisten tulosten ymmärtämisen sekä perustavanlaatuiset taidot – nämä täytyy osata kurssin läpäisemiseen. Hallitse kokonaisuus -osiossa tehtävät ovat soveltavampia, ja ne yhdistelevät monipuolisesti luvun eri menetelmiä ja myös aiemmissa luvuissa opittuja asioita. Jos kaipaate lisäharjoitusta, sekä perustehtäviä että sekalaisia sovelluksia löytyy lisää kolmannesta osiosta. Yhteiskunnallisia tilanteita soveltavien tehtävien tiedot ovat faktuaalisia, ellei toisin mainita. Lisää tehtäviä -osion tähdellä ★ merkityt tehtävät ovat selvästi opetussuunnitelman ulkopuolisia tehtäviä, erittäin soveltavia, oppiainerajat ylittäviä tehtäviä, pitkiä tai tekijöiden mielestä muuten koettu mielenkiintoisiksi tai haastaviksi. Näiden tehtävien osaaminen ei missään nimessä ole vaatimus kymppin kurssiarvosanaan.

Kirjan lopusta löytyy ylimääräinen teorialiite lukujärjestelmistä, kertaustehtäviä, harjoituskokeita, vanhoja yo- ja eri alojen valintakokeita, harjoitustehtävien vastaukset sekä asiasanahakemisto.

Lähtötasotesti

Oheinen lähtötasotesti auttaa selvittämään, mihin asioihin kurssilla kannattaa erityisesti perehtyä. Testin tehtävien tekemiseen pitäisi kulua aikaa yhteensä alle varttitunti. Kirjoita ratkaisut välivaiheineen ja palauta testi opettajalle ensimmäisellä tunnil-
la arviointia varten. Itsearviointia varten näiden tehtävien ratkaisut löytyvät kirjan
lopusta. Ei hätää, jos et osaa joitain näistä tehtävistä – jokaiseen tehtävätyyppiin
paneudutaan kyllä kurssin aikana, eikä varsinaisia ennakkovaatimuksia ole.

1. Sievennä.

a) $-2^4 - (-2)^3$

b) $4 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{2}$

d) $-2(4x^2 - x) - x$

e) $\frac{ab^2}{a^3b}$

2. Mitä on 20 kuutiodesimetriä

a) litroina

b) kuutiometreinä?

3. Ratkaise yhtälöt.

a) $2x + 5 = -\frac{1}{2}$

b) $x^2 = 9$

c) $3x^3 = -1$

4. Funktioiden f ja g arvot on määritelty seuraavasti: $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x - 8$, missä x on reaaliluku.

a) Laske $f(-3)$.

b) Määritä funktion g nollakohta.

5. Matka s ja aika t (eli kuljetun matkan kesto) ovat suoraan verrannollisia toisiinsa. Aika t ja nopeus v ovat kääntäen verrannollisia toisiinsa.

a) Jos matka kaksinkertaistuu, niin mitä käy ajalle?

b) Jos nopeus kaksinkertaistuu, niin mitä käy ajalle?

6. Kaupassa on 15 prosentin alennusmyynti.

a) Kuinka paljon 25,95 euron paita maksaa alennuksessa? Ilmoita vastaus pyöritettynä viiden sentin tarkkuuteen.

b) Tuotteen alennettu hinta on 21,25 euroa. Laske alkuperäinen hinta.

MAA1 – Funktiot ja yhtälöt

Matematiikka on kaikkien luonnontieteiden perusta. Se tarjoaa työkaluja asioiden täsmälliseen jäsentämiseen, päättelyyn ja mallintamiseen, joita ilman yhteiskunnan teknologinen ja tieteellinen kehittyminen ei olisi mahdollista. Alasta riippuen käsittelemme matematiikassa erilaisia **objekteja**: Geometriassa tarkastelemme kaksiulotteisia **tasokuvioita** ja kolmiulotteisia **avaruuskappaleita**. Algebra tutkii **lukualueita** ja niissä määriteltäviä **laskutoimituksia**. Todennäköisyyslaskenta tarkastelee satunnaisten **tapahtumien** esiintymistä ja suhdetta toisiinsa. Matemaattinen analyysi tutkii **funktioita** ja niiden ominaisuuksia, esimerkiksi **jatkuvuutta**, **derivoituvuutta** ja **integroituvuutta**. Matemaattista analyysiä käsittelevät pitkässä matematiikassa kurssit 7, 8, 10 ja 13 sekä osin kurssit 9 ja 12. Voidaankin sanoa, että analyysi on keskeisin aihealue lukion pitkässä matematiikassa.¹ Matematiikka opettaa loogista päättelytaitoa ja luovaa ongelmanratkaisukykyä, mistä on hyötyä niin opinnoissa kuin elämässä yleensäkin. Sitä hyödynnetään jollakin tavalla jokaisella tieteenalalla ja myös taiteissa.

Pitkän matematiikan ensimmäinen kurssi MAA1 Funktiot ja yhtälöt käsittelee lähinnä lukuja ja niiden operaatioita eli laskutoimituksia. Kirjassa esittelemme luvun käsitteen ja yleisimmin käytetyt lukualueet laskutoimituksineen, ja jatkamme niistä **yhtälöihin** ja funktioihin. Kurssilla luodaan tietopohja nimensä mukaisesti aiheisiin ja opitaan välttämättöimpiä työkaluja, joita tarvitaan kaikilla myöhemmillä kursseilla. Ensimmäisen kurssin tiedot riittävät myös jo monipuolisesti monien arkielämän tilanteiden – esimerkiksi korkolaskujen – tarkasteluun, ja suureiden sekä yksiköiden syvälinen käsittely antaa hyvän laskennallisen pohjan fysiikan ja kemian kursseille.

Tässä kirjassa käymme läpi opetussuunnitelman mukaiset keskeiset sisällöt, joita ovat

1. Tämä Suomessa käytetty lähestymistapa on käytössä monissa länsimaissa. Sen sijaan esimerkiksi Balkanilla geometrialle ja matemaattiselle todistamiselle annetaan edelleen paljon suurempi painoarvo.

- potenssifunktio
- potenssiyhtälön ratkaiseminen
- juuret ja murtopotenssi
- eksponenttifunktio.

Opetussuunnitelman mukaiset kurssin keskeiset tavoitteet ovat, että opiskelija

- vahvistaa yhtälön ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojaan
- syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään
- tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä
- syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita
- oppii ratkaisemaan potenssiyhtälöitä.

LUKU 1

Luvut ja laskutoimitukset

1.1 Luku ja relaatio



Opetus.tv: *Lukujoukot ja lukujen ominaisuuksia* (7.17, 5.08, 6.56 ja 7.47)

<http://opetus.tv/maa/maa1/lukujoukot-ja-lukujen-ominaisuuksia/>

1.1.1 LUVUN KÄSITE

Luku on käsite, jolla voidaan ilmaista esimerkiksi suuruutta, lukumäärää tai järjestystä. Erityisesti on huomattava, että luku ja **numero** eivät ole synonyymejä; numero on yksittäinen lukujärjestelmän merkki. Luvulla siis on aina suuruus mutta numerolla ei.

ESIMERKKI 1.1

- a) Luku 715 531 koostuu numeroista 7, 1, 5, 5, 3 ja 1.
- b) Luku 9 koostuu ainoastaan vastaavasta numeromerkistä 9.

Joskus numerosarjoja ei tulkita minkään asian suuruudeksi tai lukumääräksi, vaan ne ovat vain joitakin asioita koodaavia merkkijonoja. Esimerkiksi postinumero 00900 merkitsee postinkantajalle tiettyä aluetta, jolle postia jaetaan. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että esimerkiksi postinumero 46900 olisi jollakin tapaa suurempi kuin postinumero 00900.

Englannin kielen sana *number* voi viitata sekä numeroon että lukuun. Sana *digit* tarkoittaa pelkästään yhtä numeromerkkiä. Ruotsiksi luku on *tal*, lukumäärä *antal* ja numeroa tai lukumäärää tarkoittamatonta numeroyhdistelmää kuvaa suomen kielen tapaan sana *nummer*. Huomattavaa on myös, että suomen kielen verbi laskea

voi tarkoittaa sekä lukumäärän laskemista että abstraktimpien laskutoimitusten suorittamista – sen sijaan englannissa näille on omat verbinsä: lukumäärälle *count* ja vastaavasti *calculate* laskutoimituksille.

Tuhaterottimena käytetään suomenkielisessä tekstissä välilyöntiä, ei pilkkua tai pistettä. (Kieliopillisena poikkeuksena vuosiluvut kuten 2014 ja erilaiset koodit kirjoitetaan ilman tuhaerotinta.) Tuhaterotin erottaa kaikki kolmen numeron ryhmät luvussa mahdollista desimaaliosaa lukuun ottamatta. Jos lukuja kirjoitetaan sanoilla, tulee sanaväli samaan paikkaan kuin tuhaterotinkin. **Desimaalierotin** puolestaan on suomenkielisessä tekstissä pilkku – ei piste kuten yhdysvaltalaisissa laskimissa. Tekniikan alan teksteissä suositellaan kuitenkin nykyään myös amerikanenglannissa käytettäväksi tuhaterottimena ohutta väliä pilkun tai pisteen sijaan.

ESIMERKKI 1.2

- a) Luku 2 030,0005 lausutaan ja on kirjoitettuna ilman numeroita ”kaksituhatta kolmekymmentä ja viisi tuhannesosaa”.
- b) Luku kaksimiljoonaa kolmesataaseitsemänkymmentäkaksituhatta neljäsataayhdeksänkymmentäkaksi kirjoitettuna numeroilla on 2 372 492.
- c) Jos näet yhdysvaltalaisessa yhteydessä ilmaisun 1,000.50 dollaria, tämä tarkoittaa tuhatta dollaria ja 50 senttiä. Suomenkielisessä tekstissä sama kirjoitettaisiin 1 000,50 dollaria.

Matematiikan merkintätavat eivät usein ole mitään niin sanottua luonnollista kieltä kuten suomi tai tanska, vaan asiat pyritään merkitsemään tiivisti ja mahdollisimman yleisin merkinnöin niin, että samoja merkintöjä ymmärtäisi joku muukin kuin samaa äidinkieltä puhuva. Matematiikan kehitys on sitä myöten tuonut mukanaan suuren määrän erilaisia symboleita ja historian varrella muodostuneita käytäntöjä.

Matematiikassa lukuja merkitään tai pikemminkin symboloidaan usein kirjaimilla. Tästä on se etu, että kirjain voi tarkoittaa mitä lukua tahansa, joten kirjainten avulla pystytään ilmaisemaan kaikille luvuille päteviä yleisiä sääntöjä tarvitsematta välittää siitä, mikä luku johonkin paikkaan kuuluu. Matematiikassa pyritään yleistämään ilmaisut mahdollisimman kattaviksi, jotta poikkeuksia on mahdollisimman vähän.

ESIMERKKI 1.3

- a) Voidaan tiivistää $x = x$ ilmaisemaan, että jokainen luku on yhtä suuri itsensä kanssa, eikä meidän tarvitse erikseen luetella mahdollisia (kaikkiaan ääretöntä määrää) lukuja: $0 = 0, 1 = 1, 2 = 2, \dots$

b) Kaikille (ainakin lukiotasolla käsiteltäville) luvuille x ja y pätee $x + y = y + x$, eli yhteenlaskun järjestyksellä ei ole väliä. Tämä on paljon helpompaa kuin luetella (äärettömän monta tapausta), esimerkiksi $2 + 3 = 3 + 2$, $2 + 4 = 4 + 2$, $3 + 4 = 4 + 3$, $2 + 5 = 5 + 2$ ja niin edelleen.

Yleensä samalla kirjaimella tarkoitetaan samassa asiayhteydessä aina samaa lukua. Esimerkiksi edellisessä esimerkissä x tarkoittaa samaa lukua yhtälön kummallakin puolella. y tarkoittaa myös jotain lukua, joka on sama yhtälön kummallakin puolella. y voi tarkoittaa eri lukua kuin x , mutta ei välttämättä. On myös mahdollista, että x ja y voivat tarkoittaa samaa lukua – siis yllä mainittu sääntö kertoo myös, että esimerkiksi $2 + 2 = 2 + 2$.

Symboleja, joiden lukuarvo voi vaihdella, on tapana kutsua **muuttujiksi**, ja sellaisia, joiden lukuarvon ajatellaan pysyvän muuttumattomana, on tapana kutsua **vakioiksi**.

ESIMERKKI 1.4

■ Luku 4 on vakio, koska sen suuruus on aina sama asiayhteydestä riippumatta.

1.1.2 RELAATIOT JA LASKUTOIMITUKSET

Matematiikassa olemme kiinnostuneita tutkimuksen kohteen (yleensä lukujen) ominaisuuksista ja niiden suhteista toisiin asioihin. Riippuvuussuhteita kutsutaan matematiikassa **relaatioiksi**. Tulimme jo käyttäneeksi kahta erilaista relaatiota, joilla kummallakin on oma merkintänsä: yhteenlasku ja yhtäsuuruus. Yhteenlasku + yhdistää kaksi lukua yhdeksi uudeksi luvuksi, ja yhtäsuuruus = vertailee kahta lukua keskenään.

Harjoituksena muodollisemmasta (formaalimmasta) matematiikasta esitämme tärkeitä yhtäsuuruusrelaation ominaisuuksia. Yhtäsuuruus on kahden luvun välinen riippuvuus, jolla on seuraavat kolme tärkeää ominaisuutta:

Yhtäsuuruusrelaation ominaisuudet

1. **Refleksiivisyys:** Jokainen luku on yhtä suuri itsensä kanssa, eli $x = x$ kaikilla luvuilla x .
2. **Symmetrisyys:** Yhtäsuuruus toimii molempiin suuntiin, eli jos $x = y$, niin myös $y = x$ kaikilla x ja y .
3. **Transitiivisuus:** Jos $x = y$ ja $y = z$, niin $x = z$ kaikilla x , y ja z .

ESIMERKKI 1.5

- a) Ei ole väliä, kirjoitetaanko $x = 3$ vai $3 = x$, koska nämä tarkoittavat yhtäsuuruden symmetrisyyden perusteella täysin samaa asiaa.
- b) Jos $t = 3$ ja toisaalta $y = t$, niin silloin välttämättäkin transitiivisuuden perusteella $y = t$.

On hyvinkin mahdollista, että nämä ominaisuudet voivat tuntua lukijasta **triviaaleilta** eli niin yksinkertaisilta ja itsestään selviltä, ettei niitä tarvitse perustella tai edes mainita. Matematiikka on kuitenkin kumulatiivinen eli edellisen päälle rakentuva tieteenala, ja ominaisuudet kuten refleksiivisyys on tärkeää nimetä, jotta niihin voidaan myöhemmin viitata ja vedota. Matematiikassa pyritään myös tarkkuuteen, ja kaikki asiat – myös triviaalit – määritellään hyvin. Hyvin määritelty tarkoittaa yksinkertaista ja yksikäsitteistä.

Peruskoulussakin käytettyjä relaatioita ovat myös $<$ (pienempi kuin), $>$ (suurempi kuin), $\leq$ (pienempi tai yhtä suuri kuin) ja $\geq$ (suurempi tai yhtä suuri kuin), joilla vertaillaan kahden luvun välistä suuruutta.

ESIMERKKI 1.6

- a) Väite $4 < 5$ pitää paikkansa, mutta $5 < 4$ ei. Kyseinen relaatio ei siis ole symmetrinen toisin kuin yhtäsuuruus, koska vasemman- ja oikeanpuoleista lukua ei voida vaihtaa keskenään.
- b) Edustakoot a ja b ihmisiä, ja relaatiota “ a rakastaa b :tä” merkitään $a \heartsuit b$. Tällöin relaatio $\heartsuit$ ei ole symmetrinen (tunteet eivät aina ole molemminpuolisia), refleksiivinen (kaikki eivät rakasta itseään) eikä transitiivinen (rakastaminen ei välity kolmansille osapuolille).

Huomaa, että refleksiivisyyden, symmetrisyyden ja transitiivisuuden määritelmissä käytetty maininta ”– kaikilla x ” on hyvin olennainen. Relaation ominaisuuksien täytyy toimia aina ja kaikissa tilanteissa. Relaatio ja muuttujat täytyy määritellä selvästi, jottei epävarmuuksille jää sijaa!

Yhteenlasku on esimerkki relaatiosta, joka yhdistää kaksi lukua johonkin kolmanteen lukuun – tällaisia relaatioita kutsutaan **laskutoimituksiksi**. (Yhteenlaskun tapauksessa tätä kolmatta lukua kutsutaan yhteenlaskun summaksi.) Kyseessä on tärkeä ero: kyseinen relaatio ei siis vain liitä kahta lukua toisiinsa kuten $=$ tai $>$. Vielä yleisemmin puhutaan **operaatioista**, kun relaation kohteena eivät välttämättä ole luvut vaan jotkin abstraktimmat oliot.

Tehtäviä

Opi perusteet

7. Kirjoita luvut oikeaoppisesti.

- a) kolmekymmentäseitsemäntuhatta kuusisataakuusitoista ja kolme tuhannesosaa
- b) miinus kuusikymmentäseitsemänmiljoonaa kolmekymmentäkuusituhatta kahdeksan

8. Olkoon ihmisten joukossa relaatio ” a on b :n sisar”, jota merkitään $a \bowtie b$. Perustelee, onko relaatio $\bowtie$

- a) refleksiivinen
- b) symmetrinen
- c) transitiivinen.

9. Onko relaatio refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen?

- a) Kahden luvun välinen relaatio $\leq$
- b) Kahden luvun välinen relaatio $>$
- c) ” a on b :n lapsi”, missä a ja b edustavat ihmisiä
- d) ” a on b :n työkaveri”, missä a ja b edustavat ihmisiä, jotka töissä paikassa, missä on töissä muitakin

10. Olkoot l_1 ja l_2 tason suoria. Määritellään niiden välinen relaatio $l_1 \parallel l_2$, joka luetaan ”suora l_1 on yhdensuuntainen suoran l_2 kanssa”. Onko relaatio refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen?

1.2 Johdatus lukualueisiin ja aritmetiikkaan

1.2.1 LUONNOLLISET LUVUT

Luonnolliset luvut ovat lukuja, joita voidaan käyttää lukumäärän ja järjestyksen ilmaisemiseen. Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{N}$ ja niihin katsotaan kuuluvan luvut 0, 1, 2, 3, jne. Matematiikan kielellä tämä on usein tapana ilmaista seuraavanlaisella merkinnällä:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Luvun kuulumista johonkin joukkoon voidaan merkitä symbolilla $\in$, esimerkiksi $2 \in \mathbb{N}$. Jos luku ei kuulu johonkin joukkoon, merkitään vastaavasti $\notin$, esimerkiksi $-2 \notin \mathbb{N}$.

Tässä kirjasarjassa katsotaan, että nolla on myös luonnollinen luku. Matematiikan alasta riippuen käytännöt saattavat vaihdella. Jos halutaan ehdottomasti painottaa nollan kuuluvan käytettyyn luonnollisten lukujen joukkoon, voidaan joukosta käyttää merkintää $\mathbb{N}_0$.

Luonnollisille luvuille m ja n on määritelty yhteenlasku $m + n$, esimerkiksi $5 + 3 = 8$. Luonnollisten lukujen kertolasku määritellään peräkkäisinä yhteenlaskuina

$$5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3.$$

tai yleisesti kirjaimia käyttäen:

Kertolasku

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ kpl}} = \underbrace{n + n + \dots + n}_{m \text{ kpl}}.$$

Kolmea pistettä käytetään kaavoissa esittämään puuttuvaa, systemaattisesti jatkuvaa lausekkeen osaa. Kolmea pistettä ei tule käyttää ellei ole hyvin selvää, miten lyhennetty kohta jatkuu!

Nollalla kertomisen ajatellaan olevan ”tyhjä yhteenlasku” eli nolla:

Nollalla kertominen

$$0 \cdot m = 0$$

Luonnollisten lukujen m ja n erotus määritellään yhteenlaskun avulla: $m - n$ on luku k , jolle $k + n = m$. Tämä on kuitenkin köykäistä, ja vähennyslasku käsitellään elegantimmin kokonaislukujen joukossa.

1.2.2 KOKONAISLUVUT

Peruskoulun matematiikasta tutuista laskutoimituksista yhteenlasku ja kertolasku ovat ainoat, joilla voidaan laskea niin, että pysytään luonnollisten lukujen sisällä. Esimerkiksi vähennyslaskua $3 - 5$ ei voida laskea luonnollisten lukujen joukossa. Jotta vähennyslasku olisi kaikille luvuille mahdollinen, on keksitty niin sanottu **vastaluvun** käsite. Vastaluku määritellään seuraavasti:

Vastaluku

Jokaisella luvulla n on vastaluku $-n$, jolle pätee $n + (-n) = 0$.

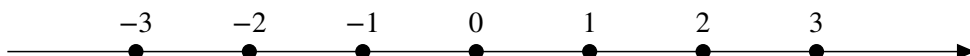
Esimerkiksi luvun 2 vastaluku on -2 . Yllä olevan määritelmän mukaan, kun luku lasketaan yhteen vastalukunsa kanssa, saadaan tulokseksi 0. Esimerkiksi $2 + (-2) = 0$. Vastaavasti luvun -2 vastaluku on sellainen luku, joka laskettuna yhteen luvun -2 kanssa antaa luvun 0. Tämä on tietysti 2, koska $-2 + 2 = 0$. Näin voidaan huomata, että $-(-2) = 2$. Yleisesti pätee **peilaus**:

$$-(-a) = a.$$

Luonnolliset luvut ja niiden vastaluvut muodostavat yhdessä **kokonaislukujen** joukon

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

jota voidaan havainnollistaa **lukusuoran** avulla:



Kun käytämme kokonaislukuja, voidaan kahden luvun erotus määritellä yhteenlaskun ja vastaluvun avulla yksinkertaisesti:

Vähennyslaskun määritelmä

$$m - n = m + (-n)$$

1.2.3 RATIONAALILUVUT

Peruskoulussa opituista laskutoimituksista yhteenlasku, vähennyslasku ja kertolasku ovat sellaisia, joilla voidaan laskea niin, että pysytään kokonaislukujen joukon sisällä. Jakolaskun kanssa sen sijaan saattaa joskus tulla ”ongelmia”. [ESIMERKKI 1.7](#)

Laskusta $8 : 4$ tulee tulokseksi kokonaisluku 2. Sen sijaan esimerkiksi laskutoimituksella $8 : 3$ ei ole tulosta kokonaislukujen joukossa.

Samalla tavalla kuin luonnolliset luvut laajennettiin vastaluvun avulla kokonaisluvuiksi, kokonaisluvut saadaan laajennettua **rationaaliluvuiksi** ottamalla käyttöön käänteisluvun käsite. (Tästä lisää omassa luvussaan.) Siten jakolasku onnistuu kaikilla rationaaliluvuilla – myös kokonaisluvuilla. Rationaaliluku määritellään lukuna, joka voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

ESIMERKKI 1.8

Esimerkiksi $\frac{2}{3}$ on rationaaliluku, samoin $0,25 = \frac{1}{4}$. Myös kaikki kokonaisluvut ovat rationaalilukuja, sillä ne voidaan esittää osamäärinä: esimerkiksi $5 = \frac{5}{1}$.

Rationaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{Q}$.

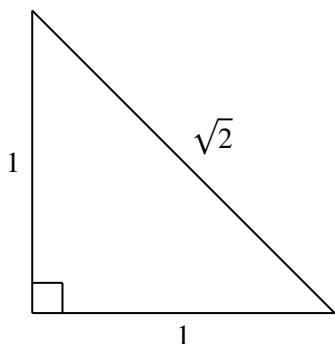
$\mathbb{Q}$ = rationaalilukujen joukko

Lisää rationaalilukujen ominaisuuksia käsitellään myöhemmissä luvuissa.

1.2.4 REAALILUVUT

Kaikki käyttämämme luvut eivät ole edes rationaalilukuja. Esimerkiksi peruskoulussa on käytetty lukua π , joka kuvaa ympyrän kehän pituuden suhdetta ympyrän halkaisijaan. Lukua π ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä, joten se ei ole rationaaliluku.

Toinen esimerkki luvusta, joka ei ole rationaaliluku on $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ tarkoittaa sellaista positiivista lukua, joka kerrottuna itsellään on 2. Se tulee vastaan esimerkiksi suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit (eli kaksi lyhyintä sivua) ovat pituudeltaan 1. (Neliöjuuren käsitteestä puhutaan tarkemmin tämän kirjan luvussa Juuret.)



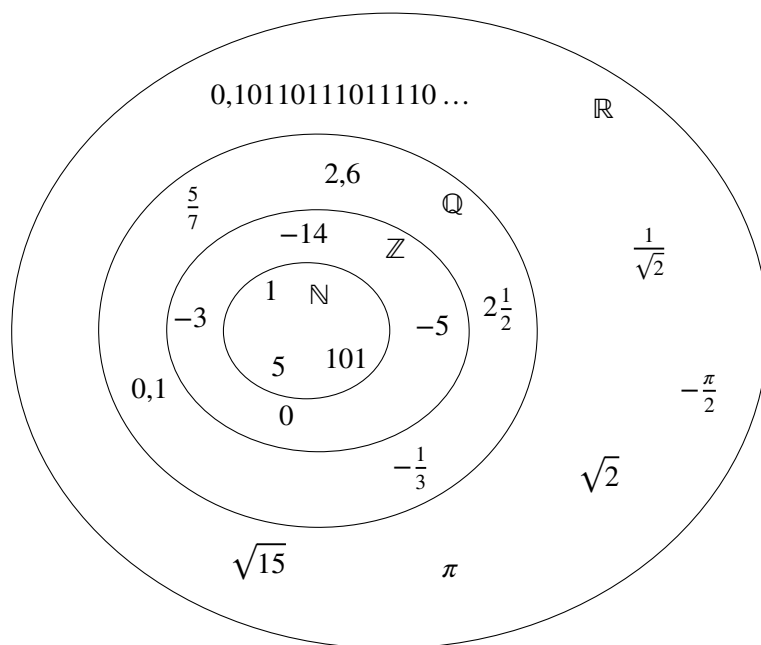
Lukuja kuten π ja $\sqrt{2}$, joita ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä, sanotaan **irrationaaliluvuiksi**. Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut muodostavat yhdessä **reaalilukujen** joukon $\mathbb{R}$. Reaalilukujen ominaisuuksista kerrotaan lisää luvussa Reaaliluvut.

Seuraavassa taulukossa on yhteenveto lukiokursseilla käytettävistä lukualueista:

Lukualueet

Joukko	Symboli	Mitä ne ovat
Luonnolliset luvut	$\mathbb{N}$	Luvut 0, 1, 2, 3, ...
Kokonaisluvut	$\mathbb{Z}$	Luvut ... -2, -1, 0, 1, 2 ...
Rationaaliluvut	$\mathbb{Q}$	Luvut, jotka voidaan esittää murtolukuna
Reaaliluvut	$\mathbb{R}$	Kaikki lukusuoran luvut

Joukot $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ ovat sisäkkäisiä. Kaikki luonnolliset luvut ovat myös kokonaislukuja, kaikki kokonaisluvut ovat myös rationaalilukuja ja kaikki rationaaliluvut ovat myös reaalilukuja.



Lukualueiden ominaisuudet tulevat tarkemmin esille tämän kirjan myöhemmissä luvuissa.

Lukualueita voidaan laajentaa lisää vielä reaaliluvuistakin – esimerkiksi **kompleksiluvuiksi**, jotka voidaan esittää tason pisteinä. Kompleksilukuja merkitään kirjaimella $\mathbb{C}$. Kompleksiluvut eivät kuulu lukion oppimäärään, mutta niitä tarvitaan muun muassa insinöörialoilla yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa. Esimerkiksi vaihtosähköpiirien analyysissä, signaalinkäsittelyssä ja säätötekniikassa käytetään runsaasti

kompleksilukuja. Kompleksiluvut ovat tärkeitä myös matematiikan tutkimuksessa itsessään. Tässä kirjassa niihin ei kuitenkaan perehdytä tarkemmin.

1.2.5 ARITMETIIKKA

Peruslaskutoimitusten yhteen-, vähennys-, kerto- sekä jakolaskun tutkimusta kutsutaan **aritmetiikaksi**. Huomaa, että joitakin laskutoimituksia voidaan merkitä useilla eri tavoilla:

Laskutoimitus	Merkintä
Yhteenlasku	+
Vähennyslasku	−
Kertolasku	$\times$ $*$ $\cdot$
Jakolasku	$:$ $/$ $-$ (jakoviivana)

Laskimista tuttua symbolia $\div$ (obelus) ei tulisi käyttää käsinkirjoitetussa lausekkeissa. Jakoviivan ylä- ja alapuolilla olevat pisteet kuvaavat murtolukuesityksen osoittajaa ja nimittäjää. [ESIMERKKI 1.9](#)

Laskimeen näppäily ” $4 \div 2$ ” vastaa jakoviivan avulla merkittyä murtolukuesitystä $\frac{4}{2}$.

Aritmeettiset operaatiot

- yhteenlaskettava + yhteenlaskettava = summa
- vähennettävä − vähentäjä = erotus
- tekijä · tekijä = tulo
- jaettava : jakaja = osamäärä

Yllä on lueteltu peruslaskutoimituksiin osallistuville luvuille annetut nimitykset. Huomaa, että yhteen- ja kertolaskussa laskutoimitukseen osallistuvia lukuja nimitetään samalla tavalla. Tämä kertoo yhteen- ja kertolaskun **vaihdannaisuudesta**. Näissä laskutoimituksissa lukujen järjestyksellä ei siis ole väliä.

Kuten tullaan näkemään, kerto- ja jakolasku määritellään yhteenlaskun avulla.

Yhteen- ja vähennyslasku

Vähennyslasku määriteltiin kokonaislukujen yhteydessä vastaluvun lisäämiseksi:

$$m - n = m + (-n)$$

Tämän perusteella voidaan myös päätellä, mitä tapahtuu, kun vähennettävä luku onkin negatiivinen. Esimerkiksi:

$$\begin{aligned} 8 - (-5) \\ = 8 + (-(-5)) \\ = 8 + 5 \end{aligned}$$

Muutetaan vähennyslasku vastaluvun lisäämiseksi
 $-(-5)$ tarkoittaa -5 :n vastalukua, joka on 5.

Tähän ideaan perustuvat seuraavat merkkisäännöt yhteen- ja vähennyslaskulle:

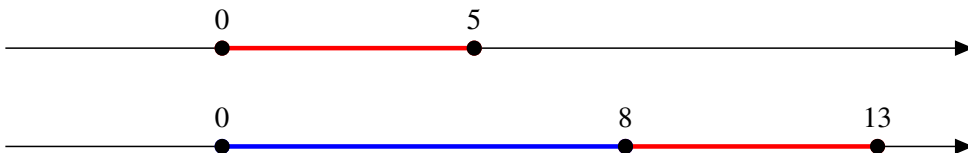
Merkkisäännöt I

- $a + (+b) = a + b$
- $a + (-b) = a - b$
- $a - (+b) = a - b$
- $a - (-b) = a + b$

Tämä asia ilmaistaan usein sanomalla, että kaksi peräkkäistä '-'-merkkiä kumoavat toisensa.

Negatiivisten ja positiivisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskut voidaan helposti tulkita lukusuoran avulla:

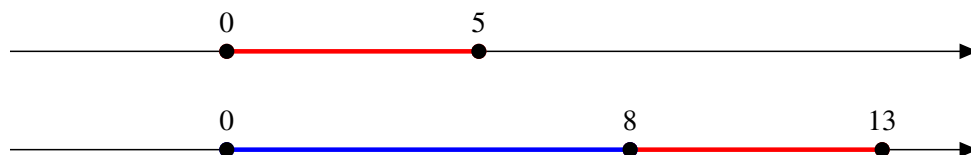
$5 + 8$ ”viiteen lisätään kahdeksan”



$$5 + 8 = 13$$

$5 + (+8)$ ”viiteen lisätään plus kahdeksan”

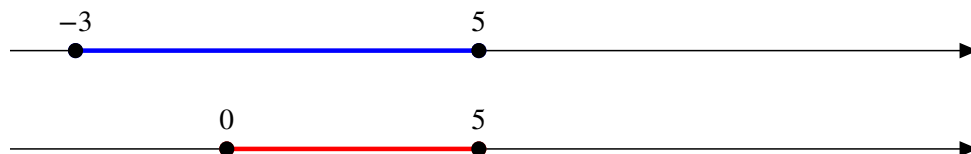
+8 tarkoittaa samaa kuin 8. '+'-merkkiä käytetään luvun edessä silloin, kun halutaan korostaa, että kyseessä on nimenomaan positiivinen luku.



$$5 + (+8) = 13$$

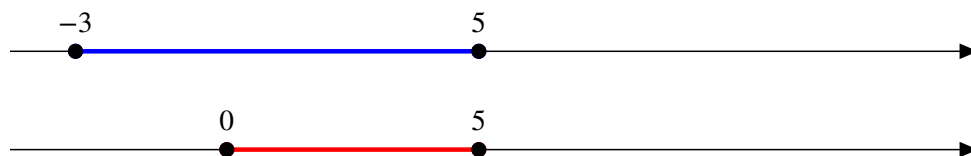
$5 - (+8)$ ”viidestä vähennetään +8”

Tämä tarkoittaa samaa kuin $5 - 8$. Lukusuoralla siis liikutaan 8 pykälää taaksepäin.



$$5 - (+8) = -3$$

Mitä tapahtuu, kun lisätään negatiivinen luku? Kun lukuun lisätään 1, se kasvaa yhdellä. Kun lukuun lisätään 0, se ei kasva lainkaan. Kun lukuun lisätään negatiivinen luku, esimerkiksi -1 , on luonnollista ajatella, että se pienenee. Tällä logiikalla negatiivisen luvun lisäämisen pitäisi siis pienentää alkuperäistä lukua. Juuri näin vähennyslasku määritellään: $5 + (-8)$ on yhtä suuri kuin $5 - 8$.

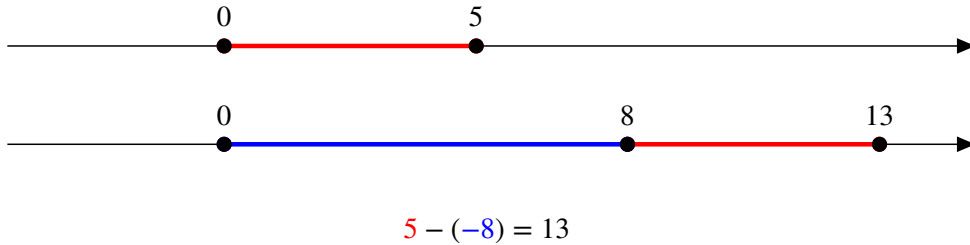


$$5 + (-8) = -3$$

$5 - (-8)$ ”viidestä vähennetään miinus kahdeksan”

Negatiivisen luvun lisääminen on vastakohta positiivisen luvun lisäämiselle. Tällöin on luonnollista, että negatiivisen luvun vähentäminen on vastakohta positiivisen luvun vähentämiselle. Koska positiivisen luvun vähentäminen pienentää lukua, pitäisi

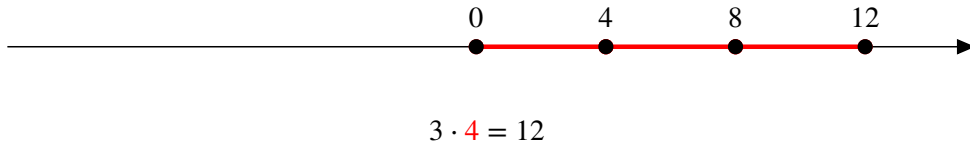
negatiivisen luvun vähentämisen kasvattaa lukua. Lasku $5 - (-8)$ tarkoittaa siis samaa kuin $5 + 8$.



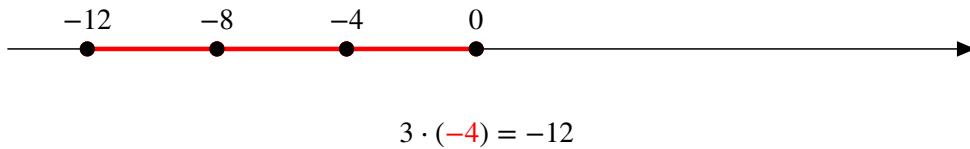
Kertolasku

Samaan logiikkaan perustuen on sovittu myös merkkisäännöt positiivisten ja negatiivisten lukujen kertolaskuissa. Kun negatiivinen ja positiivinen luku kerrotaan keskenään, saadaan negatiivinen luku, mutta kun kaksi negatiivista lukua kerrotaan keskenään, saadaan positiivinen luku.

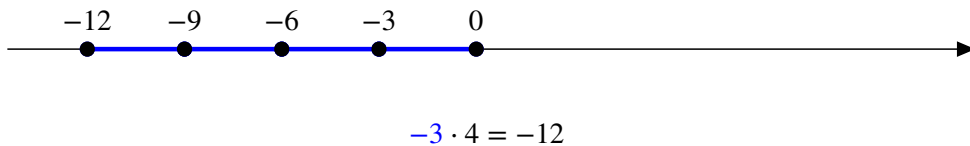
$3 \cdot 4$ ”kolme kappaletta nelosia”



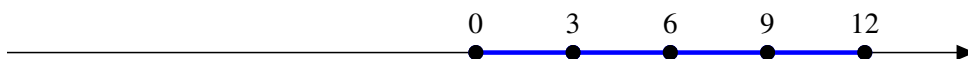
$3 \cdot (-4)$ ”kolme kappaletta miinus-nelosia”



$-3 \cdot 4$ ”miinus-kolme nelinkertaistetaan”



$-3 \cdot (-4)$ ”miinus-kolme miinus-nelinkertaistetaan”



$$-3 \cdot (-4) = 12$$

Jokainen miinusmerkki voidaan tarvittaessa myös tulkita kertolaskuna: $-a = (-1) \cdot a$.

Jakolasku

Kun ensin kerrotaan jollain ja sitten jaetaan samalla luvulla, päädytään takaisin siihen, mistä lähdettiin. Jakolaskujen merkkisäännöt on sovittu niin, että tämä ominaisuus säilyy. Ne ovat siis samat kuin kertolaskujen merkkisäännöt.

Esimerkiksi haluamme, että $(-12) : (-3) \cdot (-3) = -12$. Nyt voimme kysyä, mitä laskun $(-12) : (-3)$ tulokseksi pitäisi tulla, jotta jakolasku ja kertolasku säilyvät toisilleen käänteisinä, eli mikä luku kerrottuna luvulla -3 on -12 . Kertolaskun merkkisäännöistä nähdään helposti, että tämän luvun täytyy olla $+4$ eli 4 . Niinpä on sovittu, että $(-12) : (-3) = 12 : 3 = 4$.

Merkkisäännöt II

- $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
- $(-a) : b = a : (-b) = -\frac{a}{b}$
- $(-a) : (-b) = a : b = \frac{a}{b}$

Tehtäviä

11. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

- a) $-1 \notin \mathbb{Z}$
- b) $-1 \in \mathbb{N}$
- c) $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$
- d) $-\frac{2}{4} \in \mathbb{Q}$
- e) $-\frac{412}{97} \in \mathbb{R}$

12. Kirjoita laskut näkyviin: Lukusuoralla on saavuttu pisteeseen -2 . Mihin pisteeseen päädytään, kun liikutaan

- a) 3 askelta negatiiviseen suuntaan?
- b) 6 askelta positiiviseen ja sitten 2 negatiiviseen suuntaan?
- c) 2 askelta positiiviseen ja sitten 6 negatiiviseen suuntaan?

13. Kirjoita laskutoimitukseksi (laskuun ei tarvitse merkitä yksikköjä eli celsiusasteita).

- a) Lämpötila on aluksi 17°C , ja sitten se vähentyy viisi astetta.
- b) Lämpötila on aluksi 5°C , ja sitten se kasvaa kuusi astetta.
- c) Pakkasta on aluksi -10°C , ja sitten se lisääntyy kahdella pakkasasteella.
- d) Pakkasta on aluksi -20°C , ja sitten se hellittää kolme astetta.

14. Laske

- a) $-(-h)$
- b) $-(-(-h))$
- c) $-h - (-h)$
- d) $-(-h - (-h))$

15. Laske

- a) $3 + (-8)$
- b) $5 + (+7)$
- c) $-8 - (-5)$
- d) $+(+8) - (+5)$
- e) $-(-8) - (+8)$.

16. Laske

- a) $3 \cdot (-6)$
- b) $-7 \cdot (+7)$
- c) $-8 \cdot (-5)$
- d) $-(-8) \cdot (-8)$
- e) $-(-8) \cdot (-(+5))$
- f) $-(-8) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (-2)$.

17. Kirjoita ohjeen mukainen lauseke ja laske sen arvo, jos mahdollista

- a) lukujen 5 ja -15 osamäärä
- b) lukujen 2 ja 8 tulon vastaluku
- c) luvun -2 vastaluvun ja lukujen x ja y erotuksen osamäärä.

18. Koita oheisia pieniä laskuongelmia ratkaistaessa kiinnittämään huomiota omiin ajatuksiisi – miten päädyit tulokseen? Kirjoita ratkaisumalliasi vastaava laskutoimitus ylös.

- a) Kaverisi päättää historiankokeeseen ja suunnittelee opiskelevansa 15 sivua päivässä. Hän on nyt sivun 47 alussa. Monennelle sivulle hän pääsee kolmessa päivässä?
- b) Päädyt töihin tietokantaohjelmoijaksi, ja työnantajasi antaa sinulle nimellisen tavoitteen kirjoittaa 2 450 riviä ohjelmakoodia työviikossa (tässä tapauksessa viidessä arkipäivässä). Jos etenisit tasaiseen tahtiin, kuinka monta riviä koodia kirjoittaisit päivässä?
- c) Luet kirjaa sivun 100 alusta sivun 120 loppuun. Montako sivua luet?
- d) Äidinkielen kurssille luetaan Mika Waltarin *Sinuhe Egyptiläinen*. Lukemassasi painoksessa on 738 sivua. Olet juuri lukenut sivun 680. Kuinka monta sivua sinulla on vielä lukematta?
- e) Luet toista kirjaa sivun 27 alusta sivun 86 loppuun. Montako sivua luet?
- f) Nettisivulla pyörii tietovisa maailman valtioista. Kysymyksiä on yhteensä kaksikymmentä, ja jokaisesta oikeasta vastauksesta saa pisteen. Yhdennentoista kysymyksen kohdalla toteat pistemääräsi olevan kahdeksan. Mikä on suurin kokonaispistemäärä, jonka pystyt vielä saavuttamaan?
- g) Lasagnea pidetään uunissa erään ohjeen mukaan 25 minuuttia, ja lasagne pistettiin uuniin kello 19.15. Toteat kellon myöhemmin olevan 19.32. Kauanko lasagnen tulee olla vielä uunissa?

19. a) Olet Ruotsin-laivalla Turusta Tallinnaan, on jo yömyöhä, ja sinua väsyttää. Aamulla pitäisi nousta maihin (paikallista aikaa) kello 10, jotta ehdit ajoissa Tukholmassa sijaitsevaan scifikirjakauppaan ennen muita päivän toimia. Tarvitset puoli tuntia aamutoimiin ennen maihinnousua. Käytät puhelintasi herätyskellona, mutta et ole heikon verkkosignaalin vuoksi varma, näyttääkö laite Suomen vai Ruotsin aikaa. Et jaksa mennä tarkistamaan oikeaa aikaa muualta. Ruotsi sijaitsee aikavyöhykkeellä, jonka aika on tunnin jäljessä Suomen aikaa. Haluat tietenkin toissijaisesti maksimoida nukkumisaikasi, joten moneksi asetat herätyksen, jotta ehdit silti varmasti hoitaa aamutoimet? Ei haittaa, vaikka olisit ajoissa valmis poistumaan laivasta, mutta myöhästyminen olisi tuhoisaa.

b) Sama tilanne, mutta yöjuna Helsingistä Moskovaan, missä aika on kaksi tuntia Suomea edellä.

20. Näköä harjoittavassa nopeuspelissä saa pisteitä, kun napauttaa näytölle ilmestyvää kuviota mahdollisimman nopeasti. Mitä kauemmin kuvion löytämisessä kestää, sitä vähemmän pisteitä saa; kaikkein nopeiten kohdetta napauttamalla saa nelinkertaisen pistemäärän. Jos pelaajan pistemäärä on ensin 33 ja mahdollisimman nopean napsautuksen jälkeen 49, kuinka monta pistettä kohteiden napautuksesta saa ilman nopeuskertoimia?

21. Matematiikan ylioppilaskokeessa vastataan korkeintaan 10 tehtävään. Kuinka monta minuuttia aikaa kokeessa on käytettävissä tehtävää kohden, jos koeaikaa on

a) kuusi tuntia

b) pidennetty kahdeksan tuntia (esimerkiksi lukihäiriön vuoksi)?

22. Kirjoita erotukset summana.

a) $130 - (-5)$

b) $-4 - 7$

c) $2a - b$, kun a ja b ovat kokonaislukuja

23. Kirjoita summat erotuksena

a) $31 + 4$

b) $-15 + (-92)$

c) $-a + 2b$, kun a ja b ovat rationaalilukuja.

Lisää tehtäviä

24. Koulussa on 240 oppilasta, ja opettajia on sen verran, että luokkaryhmiä voidaan muodostaa korkeintaan neljätoista. Ryhmistä halutaan mahdollisimman samankokoisia. Kuinka suuria ryhmiä tulee, ja kuinka monta oppilasta ”jää yli”? ”Ylijäämäoppilaat” sijoitetaan kaikki johonkin valmiiseen ryhmään. Kuinka suuri ryhmästä tällöin tulee?

25. Tarkista laskemalla, onko laskutoimituksilla sama lukuarvo.

a) $(2 \cdot 11) \cdot 3$ ja $2 \cdot (11 \cdot 3)$

b) $(24 : 12) : 2$ ja $24 : (12 : 2)$

c) $(37 - 48) - 11$ ja $37 - (48 - 11)$

26. ★ Laske.

a) $\left(\frac{(5+3 \cdot 2) \cdot 6+2}{-(2-12:2)} + (-(-2) - 1) \right) : 2$

b) $-2 + 5 \cdot \left[3 + (2 - 3) \cdot 2 - \frac{3-102}{121:11} \right]$

c) $\{3 \cdot 88 : 4 : 2 + 13 : 3 \cdot [21 : (14 : 2)]\} : 9 + 1$

27. ★ Lisää sulkuja siten, että yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla olevilla lausekkeilla on sama arvo.

a) $5 - 1 \cdot 3 + 2 = 1 + 4 \cdot 4 - 2 - 4 - 8$

b) $2 \cdot -1 : 8 + 3 \cdot 4 = 2 + 1 \cdot 8 - 1.$

c) $7 - 9 + 25 \cdot 5 - 1 : 61 - 6 - 5 = 3 + 4 \cdot 7 \cdot 1 - 5 + 14 \cdot 6 + 8$

28. ★ Käytössäsi on neljä paria sukkia, kahdeksan paitaa ja kolmet housut. Kuinka monta erilaista asukokonaisuutta näistä voidaan muodostaa? (Ohje: Keksi nopeampi tapa yhdistelmien laskemiseen kuin kaikkien yhdistelmien kirjoittaminen ja lasku ”yksi, kaksi, kolme, ...”. Kaavion piirtäminen saattaa auttaa.)

1.3 Jaollisuus ja tekijöihinjako

1.3.1 JAOLLISUUS JA LUVUN TEKIJÄT

Jaollisuus

- **Määritelmä 1.** Kokonaisluku a on **jaollinen** kokonaisluvulla $b \neq 0$, jos on olemassa kokonaisluku c niin, että $a = b \cdot c$. Tällöin sanotaan myös, että b on a :n **tekijä**. Voidaan merkitä $b \mid a$, joka luetaan ” b jakaa a :n” tai ” b on a :n tekijä”.
- **Määritelmä 2.** Luku a on jaollinen luvulla $b \neq 0$, mikäli $\frac{a}{b}$ on kokonaisluku. Määritelmät ovat yhtäpitäviä.

Jaollisuudesta puhutaan vain käsiteltäessä kokonaislukuja (eli siis myös luonnollisia lukuja) – käsite ei yleisty mielekkäästi rationaali- tai reaaliluvuille.

ESIMERKKI 1.10

- a) Luku -12 on jaollinen luvulla 3 , sillä $-12 = 3 \cdot (-4)$.
- b) -12 ei ole jaollinen luvulla 5 , sillä ei ole kokonaislukua, joka kerrottuna viidellä olisi 12 .

ESIMERKKI 1.11

- a) Väite $4 \mid 12$ on tosi.
- b) Väite $4 \nmid 5$ on tosi.

Kaikki luvut ovat jaollisia itsellään ja luvulla 1 .

ESIMERKKI 1.12

- a) $7 = 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7$, joten 7 on jaollinen luvuilla 1 ja 7 , koska sekä 1 että 7 ovat kokonaislukuja.
- b) $-6 = -6 \cdot 1 = 1 \cdot (-6)$, joten -6 on jaollinen sekä itsellään että yhdellä.

Kokonaislukuja, jotka ovat jaollisia kahdella, sanotaan **parillisiksi luvuiksi**. Luvut, jotka eivät ole parillisia, ovat **parittomia lukuja**.

Jaollisuus on tärkeä käsite lukuteoriassa, ja joidenkin laskutoimitusten ymmärtämisessä, mutta jaollisuuden käsitettä käytetään myös monissa virallisissa määritelmissä nimellisesti matematiikan ulkopuolella. Esimerkiksi vuosi määritellään karkausvuodeksi, jos vuosiluku on jaollinen neljällä mutta ei sadalla, mutta kuitenkin neljälläsadalla jaolliset ovat myös karkausvuosia. Karkausvuonna helmikuu on vuorokauden tavallista pidempi.

1.3.2 ALKULUVUT

Alkuluku

Alkuluku on lukua yksi suurempi luonnollinen luku, joka ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin luvulla 1 ja itsellään.

ESIMERKKI 1.13

- a) Luvut 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ja 19 ovat alkulukuja. Tämä voidaan tarkistaa jakamalla kukin luku sitä pienemmillä alkuluvuilla ja toteamalla, että mikään jakolasku ei mene tasan.
- b) Luku 18 ei ole alkuluku, koska se on jaollinen esimerkiksi luvulla 9.
- c) Mikään negatiivinen luku ei voi olla alkuluku, koska jokainen negatiivinen luku $-a$ voidaan kirjoittaa tulona $-1 \cdot a$.

Jos luvun tekijä on alkuluku, sitä kutsutaan **alkutekijäksi**.

Aritmetiikan peruslause

Jokainen ykköstä suurempi kokonaisluku voidaan esittää (termien järjestystä lukuunottamatta) yksikäsitteisesti alkulukujen tulona. Jokainen yhtä suurempi kokonaisluku voidaan jakaa alkutekijöihin (termien järjestystä lukuunottamatta) yksikäsitteisellä tavalla.

Aritmetiikan peruslause todistetaan kurssilla Logiikka ja lukuteoria.

ESIMERKKI 1.14

Luku 84 voidaan kirjoittaa muodossa $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. Havaitaan, että 2, 3, ja 7 ovat kaikki alkulukuja. Aritmetiikan peruslauseen nojalla tiedetään, että tämä on ainoa tapa kirjoittaa 84 alkulukujen tulona – mahdollista kerrottavien termien järjestyksen vaihtoa lukuunottamatta.

Luvun alkutekijät voi löytää etsimällä luvulle ensin jonkin esityksen kahden luvun tulona. Näiden kahden luvun ei tarvitse olla alkulukuja. Sen jälkeen sama toistetaan näille kahdelle luvulle ja edelleen aina uusille luvuille, kunnes jäljellä on vain alkulukuja.

Tehtäviä

Opi perusteet

29. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia luvulla 4? Jos luku a on jaollinen luvulla 4, kerro, millä kokonaisluvulla b pätee $a = 4 \cdot b$.

- a) 1
- b) 12
- c) 13
- d) 2
- e) -20
- f) 0

30. Ovatko väitteet tosia vai epätosia?

- a) $2|4$
- b) $4|2$
- c) $4 \nmid 10$
- d) $10 \nmid 100$

31. Jaa alkutekijöihin

- a) 12
- b) 15
- c) 28
- d) 30
- e) 64
- f) 90
- g) 100.

32. Jaa luvut tekijöihin. Mitkä luvuista ovat alkulukuja?

- a) 111
- b) 75
- c) 97
- d) 360

33. Mitkä seuraavista vuosista ovat karkausvuosia: 100, 507, 800, 1000, 1960, 1996, 2000, 2014, 10000?

34. Pikaruokaketju myy kananuggetteja 4, 6, 9, ja 20 nuggetin pakkauksissa. Luettele ne alle 25 nuggettin tilaukset, joita et voi tilata yhdistelemällä edellä mainittuja annoskokoja. Entä jos et kehtaa ostaa 4 nuggettin lasten annoksia?

Hallitse kokonaisuus

35. Onko kokonaislukujen jaollisuusrelaatio | (esim. $8 \mid 64$)

- a) refleksiivinen
- b) symmetrinen
- c) ★ transitiivinen?

36. Kokonaislukuja, jotka ovat itsestään poikkeavien tekjööidensä summia, sanotaan **täydellisiksi luvuiksi**. Esimerkiksi 6 on täydellinen luku, sillä $6 = 1 + 2 + 3$. Tällä hetkellä ei tiedetä, onko täydellisiä lukuja äärettömän montaa – vuonna 2013 löydettiin tietokoneella 48. täydellinen luku, jossa on lähes 35 miljoonaa numeroa. Myöskään ei tiedetä, onko parittomia täydellisiä lukuja olemassa.

- a) Määritä seuraava kuutta suurempi täydellinen luku. (Se on alle 30.)
- b) Perustele, voivatko negatiiviset kokonaisluvut olla täydellisiä lukuja.

Lisää tehtäviä

37. ★ Kirjoita haluamallasi ohjelmointikielellä ohjelmakoodi, joka tarkistaa, onko annettu vuosi karkausvuosi.

1.4 Laskujärjestys ja lausekkeiden sieventäminen

Tässä luvussa tutustumme lisää laskutoimitusten terminologiaan ja siihen, miten työskentelyä voidaan usein helpottaa kirjoittamalla lasku eri tavoilla.

1.4.1 LAUSEKE

Mitä tahansa kirjoitettua lukua tai laskutoimitusta kutsutaan yhteisellä nimellä **lausekkeeksi**. Lausekkeen **arvoksi** kutsutaan sitä lukua, joka saadaan, kun lausekkeen laskutoimitukset lasketaan.

ESIMERKKI 1.15

- a) Lausekkeen 2 arvo on 2 .
- b) Lausekkeen $5 - 3$ arvo on 2 .
- c) Lausekkeen $x : 3 - 9$ arvo ei ole vakio, vaan sen arvo riippuu muuttujasta x .

Lausekkeiden sanotaan olevan yhtäsuuria, kun niiden arvot ovat yhtä suuria.

ESIMERKKI 1.16

Koska lausekkeen $2 + 4$ arvo on 6 ja myös lausekkeen $12 : 2$ arvo on 6 , voidaan merkitä $2 + 4 = 12 : 2$. (Tämä vastaa aiemmin määriteltyä yhtäsuuruusrelaation transitiivisuutta: Jos $2 + 4 = 6$ ja $12 : 2 = 6$, niin $2 + 4 = 12 : 2$ seuraa.)

On erittäin hyödyllistä huomata, että tietyn luvun voi itse asiassa ilmaista erilaisten lausekkeiden avulla äärettömän monella eri tavalla. Koska eri lausekkeiden välillä, joilla on sama arvo, on vain kosmeettista eroa, voidaan tilanteesta riippumatta mikä tahansa samanarvoinen lauseke **sijoittaa** toisen paikalle.

ESIMERKKI 1.17

Seuraavat merkinnät tarkoittavat kaikki samaa lukua:

$$\begin{aligned} &42 \\ &-(-42) \\ &6 \cdot 7 \\ &(50 - 29) \cdot 2 \end{aligned}$$

Niinpä luvun 42 paikalle voi aina, poikkeuksetta ja kaikissa tilanteissa kirjoittaa esimerkiksi merkinnän $(50 - 29) \cdot 2$, sillä se tarkoittaa samaa lukua kuin merkintä 42.

Usein lausekkeessa esiintyy myös kirjaimia. Niillä merkitään lukuja, joiden arvoa ei tiedetä tai joiden arvo voi vaihdella tilanteesta riippuen ja niitä kutsutaan muuttujiksi, tuntemattomiksi tai vakioiksi. Lausekkeella on myös tällöin lukuarvo, mutta tätä lukuarvoa ei välttämättä voi laskea, jos muuttujan, tuntemattoman tai vakion lukuarvoa ei tiedetä.

Kun lausekkeissa esiintyy tuntemattomia lukuja, sanotaan kahta lauseketta yhtä suureksi silloin, kun ne ovat yhtä suuria riippumatta siitä, mikä lukuarvo tuntemattomilla on.

ESIMERKKI 1.18

Lausekkeet $x + y + 2$ ja $y + 2 + x$ ovat yhtä suuria, koska riippumatta siitä, mitä x :n ja y :n lukuarvot ovat, kummastakin lausekkeesta saadaan sama tulos.

Kun lauseke muodostuu yhteenlaskusta, käytetään nimitystä **termi** tarkoittamaan kutakin yhtä yhteenlaskettavaa osaa lausekkeesta. Termissä voi olla yhdistelmä vakioista ja muuttujista tulona tai se voi myös olla vain yksittäinen luku. Muista, että kaikki vähennyslaskut voi kirjoittaa yhteenlaskuina, jolloin sanaa termi voidaan käyttää myös vähennettävistä ja vähentäjästä.

ESIMERKKI 1.19

- a) Lausekkeen $1 + 2$ termit ovat 1 ja 2.
- b) Lausekkeen $7 - 3$ termit ovat 7 ja -3 . Tämä näkyy selvästi, kun kirjoitetaan vähennyslasku yhteenlaskuna: $7 - 3 = 7 + (-3)$.
- c) Lausekkeen $-4axy - ax + 1$ termit ovat $-4axy$, $-ax$ ja 1.

1.4.2 SIEVENTÄMINEN

Matemaattisia ongelmia ratkaistaessa kannattaa usein etsiä vaihtoehtoisia tapoja jonkin laskutoimituksen, lausekkeen tai luvun ilmaisemiseksi. Tällöin usein korvataan esimerkiksi jokin laskutoimitus toisella laskutoimituksella, josta tulee sama tulos. Näin lauseke saadaan sellaiseen muotoon, jonka avulla ratkaisussa päästään eteenpäin. Kun merkitsemme monimutkaisen lausekkeen lyhyemmin, sitä kutsutaan **sieventämiseksi**. Sieventäminen on ikään kuin sotkuisen kaavan siistimistä selkeämmäksi. Tähän lukuun on koottu sääntöjä, joiden avulla lauseketta voi muuttaa niin, että sen arvo ei muutu.

Tässä luvussa on esitelty tärkeimpiä sääntöjä, joita voidaan käyttää lausekkeiden sieventämisessä. Näitä sääntöjä tulee myöhemmin paljon lisää. Monet myöhemmin vastaan tulevista säännöistä voidaan myös perustella tässä luvussa esitettyjen sääntöjen avulla.

Vaihdantalaki ja liitântälaki

Yhteenlaskujen järjestys

Yhteenlaskut voi laskea missä järjestyksessä tahansa

$$a + b = b + a \quad (\text{vaihdantalaki})$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \quad (\text{liitântälaki})$$

Esimerkiksi laskemalla voidaan tarkistaa, että $5 + 7 = 7 + 5$ ja että $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$.

Nämä säännöt voidaan yhdistää yleiseksi säännöksi, jonka mukaan yhteenlaskun sisällä laskujärjestystä voi vaihtaa miten tahansa.

Tämä sääntö voidaan yleistää koskemaan myös vähennyslaskua, kun muistetaan, että vähennyslasku tarkoittaa oikeastaan vastaluvun lisäämistä. $5 - 8$ tarkoittaa siis samaa kuin $5 + (-8)$, joka voidaan nyt kirjoittaa yhteenlaskun vaihdantalain perusteella muotoon $(-8) + 5$ eli $-8 + 5$ ilman, että laskun lopputulos muuttuu. Tästä seuraa seuraava sääntö:

Yhteen- ja vähennyslaskujen järjestys

Pelkästään yhteen- ja vähennyslaskua sisältävässä lausekkeessa laskujärjestystä voi vaihtaa vapaasti, kun ajattelee miinusmerkin kuuluvan sitä seuraavaan lukuun ja liikkuvan sen mukana.

ESIMERKKI 1.20

$$\blacksquare \quad 5 - 8 + 7 - 2 = 5 + (-8) + 7 + (-2) = (-2) + (-8) + 5 + 7 = -2 - 8 + 5 + 7$$

Vastaavat säännöt pätevät kerto- ja jakolaskulle samoista syistä.

Kertolaskujen järjestys

Kertolaskut voi laskea missä järjestyksessä tahansa

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{vaihdantalaki})$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c \quad (\text{liitäntälaki})$$

ESIMERKKI 1.21

$$\blacksquare \quad \text{a) } 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$$

$$\blacksquare \quad \text{b) } 2 \cdot (1 + 2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

Kerto- ja jakolaskujen järjestys

Pelkästään kerto- ja jakolaskua sisältävässä lausekkeessa laskujärjestystä voi vaihtaa vapaasti, kun ajattelee jakolaskun käänteisluvulla kertomisena.

ESIMERKKI 1.22

$$\blacksquare \quad 5 : 8 \cdot 7 : 2 = 5 \cdot \frac{1}{8} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 5 = 7 : 2 : 8 \cdot 5$$

Osittelulaki

Yhteen- ja kertolaskua sisältävälle lausekkeelle pätee seuraava sääntö:

Osittelulaki

$$a(b + c) = ab + ac$$

Luettaessa annettua kaavaa vasemmalta oikealle puhutaan **sulkujen avaamisesta**.

Oikealta vasemmalle päin luettaessa puhutaan **yhteisen tekijän ottamisesta**.

Osittelulakia voidaan käyttää muiden laskutoimituksiin liittyvien lakien rinnalla. Kun vähennyslasku ajatellaan vastaluvun lisäämisenä ja jakolasku ajatellaan käänteisluvulla kertomisena, voidaan osittelulaki laajentaa koskemaan myös jakolaskua. Seuraavassa on esimerkkejä tällaisista osittelulain sovelluksista:

ESIMERKKI 1.23

$$(b + c)a = a(b + c) = ab + ac = ba + ca$$

(Sovellettu vaihdantalakia)

$$a(b + c + d) = a((b + c) + d) = a(b + c) + ad = ab + ac + ad$$

(Sovellettu liitäntälakia)

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a \cdot (-c) = ab - ac$$

(Sovellettu kertolaskun merkkisääntöä)

$$(b + c) : a = (b + c) \cdot \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{a} + c \cdot \frac{1}{a} = b : a + c : a$$

(Sovellettu jakolaskun ilmaisemista käänteisluvun avulla.)

Tärkeää on huomata osittelulain toimivan myös, vaikka sulkeissa olisi vähennyslasku, eli osittelulaki voidaan yleistää muotoon $a(b \pm c) = ab \pm ac$, missä lausekkeiden molemmille puolille valitaan aina sama merkki – plus tai miinus.

Tämä voidaan johtaa vastaluvun ominaisuuksia käyttämällä:

$a(b - c) = a(b + (-c))$	vähennyslaskun määritelmä
$= ab + a \cdot (-c)$	osittelulaki
$= ab + (-c)a$	vaihdantalaki
$= ab + (-1)ca$	tulkitaan miinusmerkki -1 :llä kertomiseksi
$= ab + (-ca)$	
$= ab - ca$	vähennyslaskun määritelmä

Tilanteessa $a(-b - c)$ toimitaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 a(-b - c) &= a((-1)b + (-1)c) && \text{tulkitaan miinusmerkkien } -1 \text{ :llä kertomiseksi} \\
 &= a((-1)(b + c)) && \text{osittelulaki} \\
 &= (a(-1))(b + c) && \text{kertolaskun liitännäisyys} \\
 &= -a(b + c)
 \end{aligned}$$

Sievennyksen lisäksi osittelulaki on kätevä työkalu luvuilla laskemisessa ja päässä-laskussa, kuten seuraavat esimerkit osoittavat:

ESIMERKKI 1.24

a)

$$\begin{aligned}
 7\,777 \cdot 542 - 7\,777 \cdot 541 &= 7\,777 \cdot (542 - 541) \\
 &= 7\,777 \cdot 1 \\
 &= 7\,777
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 46 \cdot 9 &= 46 \cdot (10 - 1) \\
 &= 46 \cdot 10 - 46 \cdot 1 \\
 &= 460 - 46 \\
 &= 414
 \end{aligned}$$

Osittelulakia käytetään usein tuntemattomia lukuja sisältävien lausekkeiden muok-
kaamisessa.

ESIMERKKI 1.25

a) $2(x + 5) = 2x + 2 \cdot 5 = 2x + 10$

b) $-x(y + 1) = -xy - x$

c) $3(x + y)a = (3x + 3y)a = 3ax + 3ay$

Joissakin tilanteissa osittelulakia tarvitaan useamman kerran, jotta sulkeet saadaan poistettua.

Käänteistoimitukset

Luvun ja sen vastaluvun summa on nolla. Yhteen- ja vähennyslasku ovat toistensa käänteistoimituksia, joten saman luvun lisääminen ja vähentäminen peräkkäin kumoavat toisensa:

Käänteistoimitukset I

- $a - a = 0$
- $-a + a = 0$
- $a + b - b = a$
- $a - b + b = a$

Vastaavasti luvun ja sen käänteisluvun tulo on nolla. Kerto- ja jakolasku ovat toistensa käänteistoimituksia, joten peräkkäin kertominen ja jakaminen samalla luvulla kumoavat toisensa:

Käänteistoimitukset II

- $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- $\frac{1}{a} \cdot a = 1$
- $a \cdot b : b = a$
- $a : b \cdot b = a$

s Nämä säännöt ovat sieventämisen työkaluja. Voimme poistaa niiden avulla ylimääräisiä termejä ja tulontekijöitä lausekkeista.

ESIMERKKI 1.26

Sievennetään $2 + c - c$, missä c on mikä tahansa kokonaisluku.

Koska $-c$ on c :n vastaluku, niin niiden summa $c + (-c)$ on 0. Tällöin lausekkeen arvo on $2 + 0$. Huomaa, että vastaus on 2 riippumatta c :n arvosta.

1.4.3 LASKUJÄRJESTYS

Kun lauseke sisältää monta eri laskutoimitusta, on laskutoimitusten suoritusjärjestyksellä usein vaikutusta lausekkeen arvoon. Laskutoimitusten määritelmät tulee osata hyvin. Jos tavalliseen laskujärjestykseen halutaan tehdä muutoksia, käytetään sulkumerkkejä ilmaisemaan haluttua laskujärjestystä.

Jos lausekkeessa on useita eri laskutoimituksia, ne suoritetaan seuraavassa järjestyksessä:

Suoritusjärjestys

1. Suluissa olevat lausekkeet sisemmistä suluista ulompiin sulkuihin
2. Potenssilaskut (potenssia käsitellään tarkemmin myöhemmin tässä kirjassa)
3. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. Yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle

Tässä kannattaa huomata lisäksi, että vaikka laskujärjestyssääntöjen mukaan kerto- ja jako- sekä yhteen- ja vähennyslaskut lasketaan vasemmalta oikealle, on tiettyjä tilanteita, joissa järjestys ei vaikuta laskun lopputulokseen ja laskut voidaan laskea myös vaikka oikealta vasemmalle.

ESIMERKKI 1.27

Lasketaan lausekkeen $2 + (3 + 1) \cdot 5$ arvo.

Koska lausekkeessa on useita eri laskutoimituksia, joudumme tarkastelemaan laskujärjestystä vähän tarkemmin. Ensimmäiseksi laskemme lausekkeen $(3 + 1)$ arvon, koska se on sulkujen sisällä. Tulo $4 \cdot 5$ sen sijaan tarkoittaa määritelmänsä mukaan yhteenlaskua $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ (tai $5 + 5 + 5 + 5$). Tämän voi helposti yhdistää ensimmäiseen termiin 2, koska yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen.


$$\begin{aligned} &2 + (3 + 1) \cdot 5 \\ &= 2 + 4 \cdot 5 \\ &= 2 + 20 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Lasketaan ensin $(3 + 1)$
sen jälkeen tulo $4 \cdot 5$
lopuksi vielä summa

Tehtäviä

38. Kirjoita seuraavat laskutoimitukset uudestaan käyttäen annettua laskulakia. Tarkista laskemalla, että tulos säilyy samana.

- a) $3 \cdot (-6)$ (vaihdantalaki)
- b) $5 \cdot (7 + 6)$ (yhteenlaskun vaihdantalaki)
- c) $5 \cdot (7 + 6)$ (kertolaskun vaihdantalaki)
- d) $5 \cdot (7 + 6)$ (osittelulaki)
- e) $(-8 \cdot (-5)) \cdot 2$ (liitântälaki)

39. Laske seuraavat laskut ilman laskinta soveltamalla vaihdantalakia, liitântälakia ja osittelulakia. Selvitä jokaisessa vaiheessa, mitä laskulakia käytit.

- a) $350 \cdot 271 - 272 \cdot 350$
- b) $370 \cdot 1\,010$
- c) $594 + 368 + 3 - 368$

40. Laske.

- a) $2 + 3 \cdot (-1)$
- b) $(5 - (2 - 3)) \cdot 2$
- c) $1 + 9 : 3 : 3 - (3 - 5) : 2$.

41. Sievennä

- a) $2(a + b) - a$
- b) $3(2a + b) + (2a + b)$
- c) $-(-(-a) - b)$
- d) $-(-a - (-a - b) - b) \cdot (1 + 2b)$.

42. Sievennä

- a) $(b - 1)(c - 1)$
- b) $(b - a)(c - 2)$
- c) $(1 - 2x)(1 - 2y)$

43. Perustele laskutoimitusten määritelmien ja ominaisuuksien avulla, miksi

a) $3 \cdot 2 = 6$

b) $6 - 4 = 2$

c) $3x + x = 4x$

d) $xy + yx = 2xy$,

kun x ja y ovat kokonaislukuja?

Lisää tehtäviä

44. Osoita jaollisuuden määritelmään nojaten, että jos kokonaisluku on jaollinen kuudella, niin se on jaollinen sekä kahdella että kolmella.

1.5 Murtoluvuilla laskeminen



Opetus.tv: *Laskutoimituksia murtoluvuilla* (5.15, 4.53, 6.56, 9.16)

<http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/>

Tässä luvussa käsitellään murtolukujen laskutekniikkaa, ja seuraavassa luvussa harjoitellaan, miten käsitellyt laskutoimitukset liittyvät sovelluksiin.

1.5.1 MURTOLUKUESITYS

Rationaaliluvun esitystä kokonaislukujen osamääränä $\frac{a}{b}$ kutsutaan **murtoluvuksi**. Luku a on murtoluvun **osoittaja** ja luku b on **nimittäjä**. Nimittäjä on aina erisuuri kuin nolla ($b \neq 0$). Määritelmän mukaan kaikki rationaaliluvut voidaan esittää murtolukuina. Usein rationaaliluvut voidaan esittää myös desimaaliesityksen avulla.

Rationaalilukuja esitetään toisinaan myös **sekamurtolukuina** eli lyhyemminsekalukuina. Sekalukuesityksessä luku esitetään summana kokonaisosasta ja murto-osasta (yleensä luku nollan ja yhden väliltä), mutta yhteenlaskumerkki jätetään merkitsemättä. Esimerkiksi sekaluku $3\frac{1}{4}$ tarkoittaa lukua $3 + \frac{1}{4}$, jonka voi esittää murtolukuna $\frac{13}{4}$. Jos luku on negatiivinen, miinusmerkki merkitään koko sekaluvun eteen, siis $-6\frac{4}{5}$ tarkoittaa lukua $-(6 + \frac{4}{5})$. Merkintä saattaa aiheuttaa sekaannusta, sillä $3\frac{5}{6}$ saattaisi myös viitata tuloon $3 \cdot \frac{5}{6}$. Sekalukumerkintää käytetään vain tunnetuilla lukuarvoilla, siis $a\frac{b}{c}$ tarkoittaa aina tuloa $a \cdot \frac{b}{c}$.

ESIMERKKI 1.28

Rationaaliluvulla $\frac{5}{4}$ on kolme erilaista esitystapaa: murtolukuesitys, sekalukuesitys ja desimaaliesitys.

$$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

Murtolukujen laskutoimituksia varten sekaluvut kannattaa usein muuttaa murtolukuesitykseksi.

Jos kahdella murtoluvulla on sama nimittäjä, niitä sanotaan **samannimisiksi**.

ESIMERKKI 1.29

Luvut $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{5}$ ja $-\frac{25}{5}$ ovat keskenään samannimisiä. Luvut $\frac{2}{3}$ ja $\frac{5}{7}$ eivät ole samannimisiä.

Samannimisten murtolukujen vertailu on helppoa. Kun kaksi murtolukua esittää samankokoisia osia eli nimittäjät ovat samat, nähdään lukujen keskinäinen suuruus suoraan osoittajista. (Tarvittaessa huomioidaan myös mahdollinen negatiivisuus.)

Jos käsiteltävät murtoluvut eivät jo valmiiksi ole samannimisiä, ne voidaan aina vertailua tai muuta käsittelyä varten muuttaa samannimisiksi **laventamalla** tai **supistamalla**

Laventaminen ja supistaminen

Murtoluvun arvo pysyy samana, kun sekä osoittajassa että nimittäjässä oleva luku kerrotaan (**lavennetaan**) samalla luvulla. Vastaavasti, osoittaja ja nimittäjä voidaan jakaa (**supistaa**) samalla luvulla, jos jako menee tasan.

laventaminen

→

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$$

←

supistaminen

missä $b \neq 0$ ja $c \neq 0$.

Laventamisen mahdollistaa se, että jokainen nollasta poikkeavalle luvulle c pätee $\frac{c}{c} = 1$. Kun mielivaltaista lukua kerrotaan luvulla 1, luvun arvo ei muutu. Huomaa, että murtoluvun laventaminen ei tarkoita samaa kuin murtoluvun kertominen.

Koska murtolukuesitystä voidaan laventaa millä tahansa (nollasta eriävällä) kokonaisluvulla, jokaisella murtoluvulla on monta esitystapaa; esimerkiksi $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Konkreettisesti voidaan ajatella, että puolikas pizza ei vähene vaikka molemmat puolikkaat jaetaan edelleen kolmeen osaan.

Samannimiseksi laventaminen ja supistaminen

Mitä tahansa kahta murtolukua voidaan vertailla laventamalla (tai supistamalla) ne samannimisiksi siten, että yhteinen nimittäjä on positiivinen, ja sitten vertaamalla osoittajia.

1.5.2 MURTOLUKUJEN YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

Murtolukujen yhteenlasku, samat nimittäjät

Jos murtolukujen nimittäjät ovat samat, voidaan murtoluvut laskea yhteen laskemalla osoittajat yhteen.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

missä $c \neq 0$

Jos yhteenlaskettavilla murtoluvuilla on eri nimittäjät, murtoluvut lavennetaan ensin samannimisiksi ja sitten osoittajat lasketaan yhteen. Jos siis $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ovat murtolukuja (missä $b \neq 0$ ja $d \neq 0$), lasketaan

Murtolukujen yhteenlasku, eri nimittäjät

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Tässä $\frac{a}{b}$ lavennetaan luvulla d ja $\frac{c}{d}$ lavennetaan luvulla b . Nyt saadaan kaksi samannimistä murtolukua, joiden kummankin nimittäjäksi tulee yhteenlaskettavien nimittäjien tulo bd .

Yllä esitetty menettely, missä murtoluvut on lavennettu toistensa nimittäjillä toimii aina, mutta toisinaan pelkästään toisen murtoluvun laventaminen tai supistaminen riittää.

ESIMERKKI 1.30

Laske

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}.$$

Ratkaisu. Lavennetaan nimittäjät samannimisiksi ja lasketaan osoittajat yhteen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} &= \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{3+1+2}{6} \\ &= \frac{6}{6} = 1.\end{aligned}$$

Mahdollista olisi ollut myös ensin yhdistää jo valmiiksi samannimiset murtoluvut ja vasta sitten muokata samannimisiksi.

ESIMERKKI 1.31

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} + \frac{9}{6} = \frac{10}{6} = \frac{\cancel{2} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

Kaikki rationaaliluvut voidaan esittää murtolukumuodossa, mutta myös kokonaisluvut voidaan esittää murtolukuina asettamalla murtoluvun nimittäjäksi yksi. Tätä voidaan käyttää, kun lasketaan yhteen kokonaislukuja ja murtolukuja.

ESIMERKKI 1.32

Laske

$$2 + \frac{1}{3}.$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan lausekkeen kokonaisluku 2 murtolukuna, minkä jälkeen murtoluvut voidaan laventaa samannimisiksi ja laskea yhteen:

$$\begin{aligned}2 + \frac{1}{3} &= \frac{2}{1} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 1} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{6}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{6+1}{3} \\ &= \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Murtolukujen vähennyslasku toimii periaatteessa samalla tavalla kuin yhteenlaskukin

(vähennyslasku määriteltiin vastaluvun lisäämisenä). Ensin lavennetaan samannimiseksi, sitten suoritetaan vähennyslasku osoittajassa.

ESIMERKKI 1.33

Laske

$$2\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$$

ja anna vastaus sekamurtolukuna.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 2\frac{2}{3} - \frac{3}{7} &= 2 + \frac{2}{3} - \frac{3}{7} && \text{sekalukuesitys murtoluvuksi} \\ &= 2 + \frac{2}{3} - \frac{3}{7} \\ &= 2 + \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} - \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 7} \\ &= 2 + \frac{14}{21} - \frac{9}{21} \\ &= 2 + \frac{14 - 9}{21} \\ &= 2 + \frac{5}{21} \\ &= 2\frac{5}{21} \end{aligned}$$

Koska vastaus pyydettiin sekamurtolukuna, ei alkuperäisessä lausekkeessa olevaan kokonaisosaan tarvittu koskea. Huomaa, että esimerkissä esitettiin ”jokainen” välivaihe. Rutiinin ja ymmärryksen kehittyessä vaihteita voi jättää pois, ja käytännössä lukujen yhdistämisen voi tehdä laskimella, kunhan osaa näppäillä sen oikein ja esittää tuloksen oikeassa muodossa.

Vastaus.

$$2\frac{5}{21}$$

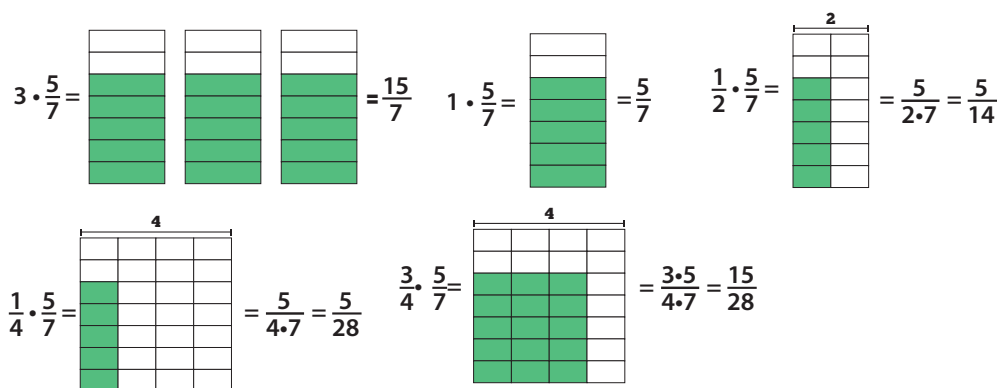
1.5.3 MURTOLUKUJEN KERTOLASKU

Murtolukujen kertolasku

Murtolukujen $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ ja $d \neq 0$) tulo lasketaan kertomalla lukujen osoittajat ja nimittäjät keskenään:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Laskusääntö voidaan perustella graafisesti:



ESIMERKKI 1.34

Laske

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$$

Ratkaisu. Murtolukujen kertolaskussa tekijöitä ei tarvitse laventaa samannimisiksi. Osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} = \frac{2 \cdot 9}{2 \cdot 10} = \frac{9}{10}$$

Vastaus. $\frac{9}{10}$

1.5.4 MURTOLUKUJEN JAKOLASKU

Käänteisluku

Luvun a **käänteisluku** on sellainen luku b , joka kerrottuna luvulla a on yksi, $ab = 1$.

Rationaaliluvun a käänteisluku on $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$), sillä

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Vastaavasti rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ käänteisluku on $\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$ ja $b \neq 0$), sillä

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

ESIMERKKI 1.35

Luvun 5 käänteisluku on $\frac{1}{5}$, koska

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

Vastaavasti luvun $-\frac{2}{3}$ käänteisluku on $-\frac{3}{2}$, koska

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1.$$

Käänteislukua tarvitaan muun muassa murtolukujen jakolaskuissa.

Murtolukujen jakolasku

Olkoon $b \neq 0$, $c \neq 0$ ja $d \neq 0$. Murtolukujen osamäärä $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ lasketaan kertomalla jaettava jakajan käänteisluvulla:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

ESIMERKKI 1.36

Jos jonkin luvun jakaminen päässä viidellä tuntuu vaikealta, voi käyttää esimerkiksi seuraavaa kikkaa: Koska 5 vastaa arvoltaa lauseketta $10 : 2$, voidaan viidellä jakamisen sijaan jakaa $\frac{10}{2}$:lla. Tämä voi helpottaa päässälaskua, koska yleensä kahdella ja kymmenellä suoritettut kerto- ja jakolaskut koetaan yksinkertaisina. Jaetaan mielivaltainen x viidellä näin:

$$x : 5 = x : \frac{10}{2} = x \cdot \frac{2}{10} = \frac{2x}{10}$$

Viidellä tulee siis jaettua, jos kertoo kahdella ja jakaa tämän jälkeen tulon

kymmenellä. Toki myös laskujärjestys $\frac{x}{10} \cdot 2$ on mahdollinen, eli että ensin jakaa kymmenellä ja sitten vasta kertoo kahdella. Näin esimerkiksi lasku $1\,340 : 5$ muuttuu muotoon $\frac{1\,340 \cdot 2}{10} = 134 \cdot 2 = 268$.

1.5.5 MURTOLAUSEKKEIDEN SIEVENTÄMINEN

Yhteiseksi tekijäksi ottaminen

Jos murtoluvun osoittajassa tai nimittäjässä on summa, jonka osilla on yhteinen tekijä, sen voi ottaa *yhteiseksi tekijäksi* sulkujen eteen. Jos osoittajassa ja nimittäjässä on sen jälkeen sama kerroin, sen voi jakaa pois molemmista eli *supistaa* pois.

$$\frac{ac + bc}{c} = \frac{\cancel{c}(a + b)}{\cancel{c}} = a + b \quad (1.1)$$

Joskus murtolauseke sieventyy, jos sen esittääkin kahden murtoluvun summana.

$$\frac{ca + b}{c} = \frac{ca}{c} + \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} \quad (1.2)$$

ESIMERKKI 1.37

Kun jakaa kolme erikokoista nallekarkkipussia (a , b ja c) tasan kolmen ihmisen kesken, on sama, laittaako kaikki ensin samaan kulhoon ja jakaa ne sitten $(\frac{a+b+c}{3})$ vai jakaako jokaisen pussin erikseen $(\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3})$.

Jos taas samat kolme henkilöä jakavat keskenään pussin tikkareita (6 kpl) ja yhden pussin nallekarkkeja (n kpl), niin saadaan seuraavanlainen lasku:

$\frac{6 \text{ tikkaria} + n \text{ nallekarkkia}}{3} = \frac{6 \text{ tikkaria}}{3} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2 \text{ tikkaria}}{\cancel{3}} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3} = 2 \text{ tikkaria} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3}$. Toisin sanoen, kukin saa kaksi tikkaria ja kuinka paljon ikinä onkaan kolmasosa kaikista nallekarkeista.

Tehtäviä

Opi perusteet

45. Supista.

- a) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 5 \cdot 6}$
- b) $\frac{3a \cdot a \cdot (4b) \cdot b}{(4a)b}$
- c) $\frac{3a+ab}{a}$

46. Supista niin pitkälle kuin mahdollista.

- a) $\frac{15}{20}$
- b) $\frac{27}{30}$
- c) $\frac{2}{32}$
- d) $\frac{65}{105}$
- e) $\frac{144}{243}$

47. Lavenna samannimisiksi

- a) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{4}{5}$
- b) $\frac{5a}{6}$ ja $\frac{7b}{9}$
- c) $\frac{2}{3a}$ ja $\frac{5b}{2}$.

48. Aseta luvut suuruusjärjestykseen.

- a) $\frac{-15}{11}, \frac{-19}{9}, \frac{11}{12}, \frac{3}{4}, -7$
- b) $\frac{15}{21}, \frac{7}{-3}, \frac{-3}{-4}, \frac{8}{9}, \frac{5}{-2}$

49. Laske

- a) $\frac{3}{11} + \frac{5}{11}$
- b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$
- c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$
- d) $\frac{11}{12} - \frac{5}{6} + \frac{3}{2}$.

50. Esitä sekamurtolukuna

- a) $\frac{15}{2}$
- b) $\frac{177}{16}$
- c) $\frac{2\,013}{15}$.

51. Muunna (mahdollisimman sieväksi) murtoluvuksi

a) $3\frac{2}{5}$

b) $4\frac{1}{34}$

c) $2\frac{6}{3\,145}$.

52. Laske

a) $1\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$

b) $\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$

c) $2 + \frac{5}{4} + 3\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2} + 1 - \frac{5}{6}$.

53. Laske

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}$

c) $2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 10$.

54. Laske $\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

55. Laske

a) $\frac{2}{3} : \frac{7}{11}$

b) $\frac{4}{3} : \left(\frac{-13}{4}\right)$

c) $\frac{7}{8} : 4$

d) $\frac{1}{\frac{3}{7} - \frac{9}{21}}$.

56. Laske luvun $\frac{3}{4}$

a) vastaluku

b) käänteisluku

c) vastaluvun vastaluku

d) vastaluvun käänteisluku

e) käänteisluvun vastaluku

f) käänteisluvun käänteisluku.

g) Mitkä tehtävän luvuista ovat samoja kuin alkuperäinen luku? Miksi?

h) Mitkä tehtävän luvuista ovat samoja keskenään? Miksi?

57. Laske lukujen $\frac{5}{4}$ ja $\frac{1}{8}$

- a) vastalukujen summa
- b) käänteislukujen summa
- c) summan vastaluku
- d) summan käänteisluku

Huomioi, mitkä luvuista ovat samoja.

58. Sievennä ja kiinnistä erityistä huomiota laskujärjestykseen, kun sijoitat lausekkeet laskimeen.

- a) $\frac{\frac{6}{4}}{2}$
- b) $\frac{\frac{6}{4}}{\frac{2}{2}}$
- c) $\frac{\frac{6}{4}}{\frac{2}{3}}$
- d) $\frac{3}{\frac{1}{3}-1}$

59. Laatikossa on palloja, joista kolmasosa on mustia, neljäsosa valkoisia ja viidesosa harmaita. Loput palloista ovat punaisia. Kuinka suuri osuus palloista on punaisia?

60. Eräässä pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin ryhmässä on 16 opiskelijaa. Heistä 8 on tyttöjä ja tytöistä neljänneksellä on siniset silmät. Kuinka suuri osa luokan oppilaista on sinisilmäisiä tyttöjä?

61. Mira, Pontus, Jarkko-Kaaleppi ja Milla leipoivat lanttuvompattipiirakkaa. Pontus kuitenkin söi piirakasta kolmanneksen ennen muita, ja loput piirakasta jaettiin muiden kesken tasan. Kuinka suuren osan muut saivat?

62. Huvipuiston sisäänpääsylippu maksaa 20 euroa, ja lapset pääsevät sisään puoleen hintaan.

- a) Kuinka paljon kolmen lapsen yksinhuoltajaperheelle maksaa päästä sisään?
- b) Kuinka paljon sisäänpääsy maksaa perheelle avajaispäivänä, kun silloin sisään pääsee neljänneksen halvemmalla?

63. Eräässä kaupassa on käynnissä loppuunmyynti, ja kaikki tuotteet myydään puoleen hintaan. Lisäksi kanta-asiakkaat saavat aina viidenneksen alennusta ostoksestaan. Paljonko kanta-asiakas maksaa nyt tuotteesta, joka normaalisti maksaisi 40 euroa?

64. Kokonaisuudesta kakusta syödään maanantaina iltapäivällä puolet, ja jäljelle jääneestä palasta syödään tiistaina iltapäivällä taas puolet. Jos kakun jakamista ja syömistä jatketaan samalla tavalla koko viikko, kuinka suuri osa alkuperäisestä kakusta on jäljellä seuraavana maanantaiaamuna?

65. Sievennä.

- a) $\frac{1-x}{3} + \frac{x-2}{6}$
- b) $\frac{5x-1}{3} - \frac{2x+5}{2}$
- c) $\frac{x}{6y} \cdot \frac{3y}{2}$

Hallitse kokonaisuus

66. Laske murtolukujen $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{2}{15}$

- a) summa
- b) erotus
- c) tulo
- d) osamäärä.

67. Laske

- a) $\frac{5}{8} \cdot (\frac{3}{5} + \frac{2}{5})$
- b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5}$.

68. Supista mahdollisimman pitkälle.

- a) $\frac{12a+2ab}{4a}$
- b) $\frac{a \cdot a \cdot (3b)}{3a}$

69. Laske.

- a) $\frac{\frac{1}{2} \div \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{3}}$
- b) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{12}}$

70. Millä luvun x arvolla lukujen

- a) x ja $\frac{3}{8}$ tulo on 0?
- b) x ja $\frac{3}{8}$ tulo on 1?
- c) x , $\frac{7}{91}$ ja $\frac{23}{2}$ tulo on 1?

71. Laske lausekkeen $\frac{x}{2-3x}$ arvo, kun x on

- a) 0
- b) 4
- c) $-\frac{1}{2}$
- d) $\frac{7}{10}$.

72. Selvitä, millä luvuilla on se ominaisuus, että luvun vastaluvun käänteisluku on yhtä suuri kuin luvun käänteisluvun vastaluku.

73. Laske lausekkeen $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ arvo, kun tiedetään, että $n = \frac{1}{9}$ ja $m = n + 1$.

Lisää tehtäviä

74. Laske ja sievennä vastaus.

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{7} + \frac{4}{7}$

c) $2 + \frac{2}{3}$

d) $3 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$

75. a) $\frac{6}{2} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$

c) $2\frac{1}{3} + \frac{4}{6}$

d) $4\frac{7}{2} - 6\frac{5}{4}$

76. a) $2 \cdot \frac{2}{5}$

b) $2 \cdot \frac{2}{3}$

c) $\frac{5}{4} \cdot 2 \cdot 3$

d) $\frac{\frac{3}{2}}{4}$

77. a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}$

b) $\frac{5}{4} \cdot (-\frac{2}{3})$

c) $\frac{2}{5}(2 - \frac{3}{4})$

d) $(\frac{5}{6} - \frac{1}{3})(\frac{7}{4} - \frac{3}{2})$

78. a) $\frac{\frac{3}{7} + \frac{5}{4}}{3}$

b) $\frac{\frac{10}{8}}{\frac{5}{2}}$

c) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{10}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$

d) $3\frac{\frac{4}{2} + \frac{10}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}$

79. a) $\frac{4}{9} : \frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{7} : \frac{5}{9}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$

80. Laske lausekkeen $\frac{x+y}{2x-y}$ arvo, kun

a) $x = \frac{1}{2}$ ja $y = \frac{1}{4}$

b) $x = \frac{1}{4}$ ja $y = -\frac{3}{8}$.

81. Kaisa, Jonas, Aada ja Tomi menevät elokuviin. Elokuvalippu 3D-näytökseen maksaa 12 euroa. Viiden lipun sarjalippu maksaa 38 euroa.

a) Kannattaako heidän ostaa sarjalippu ja maksaa sillä elokuva vai ostaa liput suoraan tiskiltä?

b) Jos sarjalipun hinta jaetaan tasan kaikille niin, että Kaisa pitää ylijäävän lipun, paljonko Kaisa joutuu maksamaan sarjalipusta?

82. Tarkastellaan lukuja $\frac{3+a}{a}$ ja $\frac{\frac{5}{3}+a}{a}$. Kumpi luvuista on suurempi, kun a on kokonaisluku ja suurempi tai yhtäsuuri kuin 1?

83. Määritä nollasta poikkeavien rationaalilukujen r ja s käänteislukujen summan käänteisluku. Minkä arvon saat, jos $r = \frac{2}{3}$ ja $s = 3$?

84. ★ Olkoon n positiivinen kokonaisluku.

a) Laske lukujen n ja $(n+1)$ käänteislukujen erotus.

b) Laske summa $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$.

85. ★ Määritä ne positiiviset reaali-luvut x , jotka ovat käänteislukuaan $\frac{1}{x}$ suurempia.

86. ★ Sievennä lausekkeet.

a) $a + b \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{b}{c}}{\frac{ab}{c}}$

b) $\frac{208ab+52b+26b(\frac{a}{26}-\frac{6a}{3a})-ab}{-42ab+52b+42ba}$

87. ★ Fibonaccin luvut 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... määritellään seuraavasti: Kaksi ensimmäistä Fibonaccin lukua ovat 0 ja 1, ja siitä seuraavat saadaan kahden edellisen summana: $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ ja niin edelleen. Tutki, miten Fibonaccin luvut liittyvät lukuihin $\frac{1}{1+1}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}$, ...

88. ★ Vanhalla matemaatikolla on kolme lasta. Eräänä päivänä hän antaa lapsilleen laatikollisen vuosien varrella ongelmanratkaisukilpailuista voitettuja palkintoja. Hän kertoo antavansa vanhimmalle lapselleen puolet saamistaan arvoesineistä, keskimmäiselle neljäsosan ja nuorimmalle kuudesosan. Laatikossa on kuitenkin vain 11 palkintoa. Miten palkinnot jaetaan ja kuinka monta arvoesineettä matemaatikko pitää itsellään?

1.6 Potenssi



Opetus.tv: *Potenssi ja sen laskusäännöt* (2.55, 7.09, 3.41, 4.34, 2.13, 5.10 ja 5.14)

<http://opetus.tv/maa/maa1/potenssi-ja-sen-laskusaannot/>

1.6.1 POTENSSIN MÄÄRITELMÄ

Jos a on rationaaliluku ja n on positiivinen kokonaisluku, potenssimerkintää a^n käytetään lyhennysmerkintänä tulolle

Potenssi

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Lukua a kutsutaan potenssin **kantaluvuksi** ja lukua n **eksponentiksi**.

ESIMERKKI 1.38

Merkinnällä 2^4 tarkoitetaan tuloa

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Joskus potenssimerkintä on lausekkeen laskettua arvoa sievempi ilmaisutapa. Raja on kuitenkin häilyvä.

ESIMERKKI 1.39

a) 10^{15} on selvästi sievempi ja helpommin käsiteltävä ilmaisu kuin $10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 = 1\,000\,000\,000\,000\,000$, mutta jos tehtävän lopullinen vastaus on 2^8 , lienee selvempää laskea tämä auki: $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 256$.

b) Tuntemattomien ja muuttujien tapauksessa on lähes yksiselitteisesti parempi vaihtoehto kirjoittaa ne aina potensseina, jos vain mahdollista:
 $yyyyy = y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^5$.

ESIMERKKI 1.40

Sievennä lausekkeet.

- a) 3^4
- b) $xxx \cdot x$
- c) $x(x + 1)$
- d) $x^3(2x - 1)$

Ratkaisu. a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$ (potenssin määritelmä)

b) $xxx \cdot x = x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$ (kertolaskun merkintä ja potenssin määritelmä)

c) $x(x + 1) = x \cdot x + x \cdot 1 = x^2 + x$ (osittelulaki ja potenssin määritelmä)

d) $x^3(2x - 1) = x^3 \cdot 2x - x^3 \cdot 1 = x \cdot x \cdot x \cdot 2x - x^3 = 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x - x^3 = 2x^4 - x^3$
(osittelulaki ja potenssin määritelmä)

Vastaus. a) 81

- b) x^4
- c) $x^2 + x$
- d) $2x^4 - x^3$

ESIMERKKI 1.41

Alkulukukehitelmät tiivistyvät kätevästi potenssimerkinnällä:

- a) $12 = 2^2 \cdot 3$
- b) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Luvun toista potenssia a^2 kutsutaan myös luvun a **neliöksi** ja kolmatta potenssia a^3 sen **kuutioksi**. Nimitysten taustalla on, että luvun $a > 0$ neliö on sellaisen neliön pinta-ala, jonka sivun pituus on a . Vastaavasti, jos kuution särmän pituus on a , on a^3 kyseisen kuution tilavuus. Luvun ensimmäinen potenssi on luku itse eli $a^1 = a$.

Laskimissa ja tietokoneohjelmissa potenssiinkorottamisen symbolina käytetään usein sirkumfleksimerkkiä $^$.

Laskujärjestys potensseja sisältävissä lausekkeissa seuraa potenssin määritelmästä – potenssi on toistuvaa kertolaskua. Potenssin arvo tulee laskea ennen yhdistämistä lausekkeen muihin kerto- ja jakolaskuihin, eikä pelkällä potenssin kantaluvulla voi suorittaa laskutoimituksia muiden lausekkeen osien kanssa.

ESIMERKKI 1.42

Väärin: $2 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5$. Oikein: $2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, jolloin tilanne on palautettu kertolaskuun, joka on vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden vuoksi helppo laskea: $2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$.

ESIMERKKI 1.43

Tarkkaile laskujärjestystä

a) $1 + 2 \cdot 5^2 = 1 + 2 \cdot (5 \cdot 5) = 1 + 2 \cdot 25 = 51$

b) $2 \cdot 4^3 = 2 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 2 \cdot 64 = 128$

c) $1 + 3^2 = 1 + 3 \cdot 3 = 10$

d) $(1 + 3)^2 = 4^2 = 16$.

Mikäli potensseja on monta sisäkkäin eli eksponenttina on uusi potenssilauseke, laskeminen aloitetaan uloimmasta, ”ylimmästä” potenssista. Laskujärjestyksen poikkeudet merkataan tuttuun tapaan sulkeilla.

ESIMERKKI 1.44

a) $2^{3^2} = 2^9 = 512$

b) $(2^3)^2 = 8^2 = 64$

Monesti tulee tarpeeseen sieventää yksittäisiä lukuja monimutkaisempien lausekkeiden potensseja. Tämä tapahtuu potenssin määritelmällä ja osittelulailla.

ESIMERKKI 1.45

Avataan sulut lausekkeesta $(x + 2)^2$:

$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$	potenssin määritelmä
$= (x + 2)x + (x + 2)2$	osittelulaki
$= x(x + 2) + 2(x + 2)$	vaihdantalaki
$= xx + x2 + 2x + 2 \cdot 2$	osittelulaki
$= x^2 + 2x + 2x + 4$	potenssin määritelmä ja vaihdantalaki
$= x^2 + 4x + 4$	osittelulaki ja summa

1.6.2 NEGATIIVINEN KANTALUKU

Jos kantaluku on negatiivinen, sen ympärille merkitään aina sulkeet.

ESIMERKKI 1.46

a) $(-2)^4 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

b) Merkinnäissä -2^4 potenssin kantaluku on 2. Koska $2^4 = 16$, $-2^4 = -16$.

Kerralla laskettuna: $-2^4 = -(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Negatiivisella kantaluvulla laskettaessa ei ole mitään erityistä. Käytetään vain potenssin määritelmää toistuvana kertolaskuna ja ollaan huolellisia lopullisen merkin kanssa.

ESIMERKKI 1.47

a) $(-5)^2 = -5 \cdot (-5) = 25$

b) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

c) $10 - 5^2 = 10 - 25 = -15$

d) $10 + (-5)^2 = 10 + 25 = 35$.

Huomaa seuraavat potenssien etumerkkeihin liittyvät ominaisuudet.

Potenssien etumerkit

- $x^a = 0$ kun $x = 0$ ja $a \neq 0$
- Kun eksponentti a on pariton kokonaisluku, niin tuloksen etumerkki on sama, kuin kantaluvun etumerkki.
- Jos eksponentti on taas parillinen, on tulos aina positiivinen. Siis, kun a on parillinen kokonaisluku, niin $x^a \geq 0$.
- $x^a \geq 0$ kun $x \geq 0$
- $x^a \leq 0$ kun $x \leq 0$

Parillinen potenssi on negatiivisellakin kantaluvulla positiivinen, koska tulossa on negatiivisia kertoimia parillinen määrä. Tällöin miinukset kumoavat toisensa, oli pa kantaluku mikä tahansa. Kun negatiivinen kantaluku korotetaan parittomaan potenssiin, tulee kertoimia pariton määrä, jolloin tulos on negatiivinen.

ESIMERKKI 1.48

a) $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$

b) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 16 \cdot (-2) = -32$

ESIMERKKI 1.49

Aiemmin todettiin, että lausekkeet $x - y$ ja $y - x$ ovat toistensa vastaluvut. Koska parilliseen potenssin korottamisessa saadaan sama lopputulos sekä luvulla että sen vastaluvulla, lausekkeiden $(x - y)^2$ ja $(y - x)^2$ tulisi olla yhtä suuret. Todetaan tämä peruslaskutoimitusten ominaisuuksilla:

$$\begin{aligned}
 (x - y)^2 &= (-y + x)^2 && \text{vastaluku \& vaihdannaisuus} \\
 &= ((-1) \cdot (y - x))^2 && \text{yhteinen tekijä} \\
 &= (-1)(y - x)(-1)(y - x) && \text{potenssin purku} \\
 &= (-1)(-1)(y - x)(y - x) && \text{vaihdannaisuus} \\
 &= (y - x)^2 && \text{kertolaskut ja potenssin määritelmä}
 \end{aligned}$$

Ei siis ole väliä, kummin päin toiseen korottamisen sisällä oleva vähennyslasku on.

1.6.3 POTENSSIEN LASKUSÄÄNNÖT

Potenssilausekkeita voi usein sieventää paljonkin, vaikka kantaluku olisi tuntematon.

ESIMERKKI 1.50

a) Samankantaisten potenssien kertolasku:

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ kpl}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ kpl}} = a^{3+4} = a^7$$

b) Samankantaisten potenssien jakolasku:

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{7-4} = a^3$$

c) Potenssin potenssi:

$$(a^2)^3 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{3 \text{ kpl}} = \underbrace{(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a)}_{2 \cdot 3 = 6 \text{ kpl}} = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

d) Tulon potenssi:

$$(ab^5)^3 = ab^5 \cdot ab^5 \cdot ab^5 = a \cdot a \cdot a \cdot b^5 \cdot b^5 \cdot b^5 = a^{1 \cdot 3} \cdot b^{5 \cdot 3} = a^3 b^{15}$$

e) Osamäärän potenssi:

$$\left(\frac{a^9}{b^7}\right)^3 = \frac{a^9}{b^7} \cdot \frac{a^9}{b^7} \cdot \frac{a^9}{b^7} = \frac{a^9 \cdot a^9 \cdot a^9}{b^7 \cdot b^7 \cdot b^7} = \frac{a^{9 \cdot 3}}{b^{7 \cdot 3}} = \frac{a^{27}}{b^{21}}$$

Edellä esitetyt ideat voi yleistää potenssien laskusäännöiksi:

Potenssien laskusääntöjä

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{Samakantaisten potenssien tulo}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{Samakantaisten potenssien osamäärä (} a \neq 0 \text{)}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \text{Potenssin potenssi}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{Tulon potenssi}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{Osamäärän potenssi (} b \neq 0 \text{)}$$

ESIMERKKI 1.51

Lasketaan potenssien laskusääntöjen avulla

$$\text{a) } a^3 \cdot a^2 = a^{2+3} = a^5$$

$$\text{b) } (a^3)^2 = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

$$\text{c) } \frac{7^9}{7^7} = 7^{9-7} = 7^2 = 49$$

$$\text{d) } (ab)^5 = a^5 b^5.$$

Potenssilausekkeiden sieventämisen taito on välttämätöntä erityisesti, kun käsitellään hyvin suuria lukuja – on mahdollista, että laskimen muisti ei riitä laskemaan joitakin suuria potenssien arvoja, mutta käsin sieventämällä lauseke saadaan sellaiseen muotoon, että välivaiheiden luvut pienenevät. Useimmat laskimet pystyvät tallentamaan ja käsittelemään vain lukuja, jotka ovat pienempiä kuin 10^{100} eli yksi **googol**. Joissain laskimissa raja saattaa mennä myös esimerkiksi luvun $10^{1\,000}$ kohdalla.

ESIMERKKI 1.52

Laskua $\frac{10^{5\,000}}{10^{4\,920}}$ ei yleensä voi laskea kannettavalla laskimella suoraan, koska osoittaja ja nimittäjä erikseen ovat liian suuria tallennettavaksi laskimen

muistiin. Sen sijaan sievennetään $\frac{10^{5\,000}}{10^{4\,920}} = 10^{5\,000-4\,920} = 10^{80}$, mikä on jo tavallisen funktiolaskimen käsiteltävissä.

1.6.4 NOLLA JA NEGATIIVINEN LUKU EKSPONENTTINA

EkspONENTTimerkintää voidaan laajentaa myös tapauksiin, joissa eksponentti on negatiivinen tai nolla, kunhan määritellään järkevästi, mitä sillä tarkoitetaan. Oletetaan seuraavissa päättelyissä, että $a \neq 0$. Silloin voimme jakaa luvulla a .

Potenssin a^0 voi määritellä vain yhdellä tavalla, jos halutaan potenssien laskusääntöjen pätevän sillekin. Lasketaan $\frac{a^3}{a^3}$ kahdella eri tavalla:

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1,$$

toisaalta

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0.$$

Siis $a^0 = 1$, kunhan $a \neq 0$. Laskua 0^0 ei ole määritelty, koska nollalla ei voi jakaa.

EkspONENTTina nolla

Kun $a \neq 0$,

$$a^0 = 1$$

ESIMERKKI 1.53

a) $7^0 = 1$

b) $(-556)^0 = 1$

Sievennetään sitten osamäärä $\frac{a^3}{a^5}$ kahdella eri tavalla. Supistamalla yhteiset tekijät saadaan lopputulos

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

Potenssien laskusääntöjä käyttämällä saataisiin

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}.$$

Samasta laskusta saatiin kaksi eri tulosta, joten on johdonmukaista määritellä

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

Sama ajatus yleistyy: koska potenssien laskusääntöjen halutaan pätevän yleisesti (myös negatiivisille eksponenteille), ne voidaan määritellä vain yhdellä tavalla:

Negatiivinen eksponentti

Kun $a \neq 0$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Erityisesti $a^{-1} = \frac{1}{a}$ kaikilla $a \neq 0$, eli miinus yksi eksponenttina tarkoittaa käänteislukua.

ESIMERKKI 1.54

- a) $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$
- b) $8^{-1} = \frac{1}{8^1} = \frac{1}{8}$
- c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
- d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{5}$ (vrt. edellinen kohta)
- e) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$
- g) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.
- h) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

ESIMERKKI 1.55

Jos taulukoidaan esimerkiksi luvun 2 potensseja, huomataan että yhtä pienempi potenssi tarkoittaa aina sitä, että luku on *puolet* edellisestä. Vähenevä ja lopulta negatiivinen eksponentti voidaan siis tulkita toistuvana *jakamisena* potenssin alkuperäisen naiivin määritelmän mukaan, joka intuitiivisesti tarkoitti toistuvaa kertolaskua. Alla olevassa taulukossa on muutamien lukujen potensseja:

Kantaluku	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1	a^2	a^3
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
4	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	64
$\frac{1}{3}$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
-2	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	4	-8

Alunperin intuitiivisen merkintätavan yleistäminen mahdollisimman laajakäyttöiseksi on matematiikassa hyvin yleistä ja vastaa pyrkimyksiä esittää asiat mahdollisimman yleisesti. Potenssimerkintää laajennetaan vieläkin yleisemmäksi luvussa Murtopotenssi ja myös myöhemmillä kursseilla ja jatko-opinnoissa.

Tehtäviä

Opi perusteet

89. Mikä seuraavissa potenssimerkinnöissä on kantaluku, eksponentti ja potenssin arvo?

- a) 5^3
- b) 2^5
- c) 9
- d) 1
- e) $(-4)^3$
- f) $(-1)^{10}$
- g) 6^{-2}

90. Esitä potenssin avulla.

- a) $a \cdot a \cdot a$
- b) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$
- c) $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a$

91. Sievennä lausekkeet.

- a) $a^2 \cdot a^3$
- b) $(a^2)^3$
- c) $\frac{a^7}{a^5}$
- d) a^0
- e) $a^3 \cdot a^2 \cdot a^5$
- f) $(a^2 a^3)^4$

92. Laske

- a) $2^3 \cdot 2^3$
- b) 4^3
- c) $(2^2)^3$
- d) 2^{2+2+2}

93. Laske

- a) 2^4
- b) $(-2)^4$
- c) -2^4

94. Laske

a) -7^2

b) $(-7)^2$

c) 7^{-2}

d) $(-7)^{-2}$.

95. Kirjoita murtolukuna

a) 3^{-1}

b) 5^{-2}

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

96. Sievennä

a) $b^3(ab^0)^2$

b) $(ab^3)^0$

c) $(aa^4)^3a^2$.

97. Laske.

a) $\frac{a^3}{a^2}$

b) $\frac{b^4}{b^2}$

c) $\frac{c^3}{c^1}$

d) $\frac{d^3}{d^0}$

e) $\frac{e^3}{e^4}$

f) $\frac{f^3}{f^5}$

g) $\frac{k^3}{k^{-5}}$

98. Esitä lausekkeet sievennettynä ilman sulkeita.

a) $x^2(x-1)$

b) $k^3(k^2-3k)$

c) $t^{100}\left(\frac{1}{t^{98}}-t^2-1\right)$

99. Sievennä.

a) $\frac{2x^3}{x}$

b) $\frac{3x^3y^2}{xy}$

c) $\frac{x^2yz}{xy^2}$

d) $\frac{6xy^3z^2}{2xz}$

Hallitse kokonaisuus

100. Sievennä

a) $(a^2)^{-2}$

b) $(ab^{-1})^3$

101. Sievennä

a) $\frac{10^{n+1}}{10 \cdot 10^n} \cdot 10^{-1}$

b) $\frac{125^3}{5^4}$

c) $\frac{2 \cdot 4^n}{4^2}$

d) $\frac{8^{2i}}{16^{-3}}$

102. Sievennä.

a) $\left(\frac{a^2b^{-2}}{a^2b}\right)^{-3}$

b) $\frac{5a^2}{-15a}$

c) $\left(-\left(\frac{10^3}{100b}\right)^2b^{-1}\right)^2$

103. Sievennä.

a) $a^2(-a^4)$

b) $(ab^2)^0$

c) $(3a)^3$

d) $(a^5b^3)^3$

104. Sievennä.

a) $\left(-\frac{ab^2}{a^2b}\right)^3$

b) $(-a^4b^4)^2$

c) $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)^2$

105. Esitä lausekkeet sievennettynä ilman sulkeita.

- a) $(y - 1)(y + 1)$
- b) $(2s^2 - 1)(1 - s)$
- c) $(z^2 + 2)(z^2 + 2)$

106. Sievennä.

- a) $\frac{2x^5 + 3x^3}{x^2}$
- b) $\frac{6x^2 + 8y}{2x^2}$
- c) $\frac{3x - 2x^2y^3}{xy}$
- d) $\frac{2x^2 + 3xy^2z - 4xz}{2xy^2z}$

107. Sievennä ryhmittelemällä.

- a) $2x^2 + 3x + 5x^2$
- b) $x^2 + 3x^3 + x^2 + x^3 + 2x^2$
- c) $ax^2 + bx + cx$
- d) $ax^3 + bx + cy^3 + dx + ey^3 + fx^3$

108. Millä kokonaisluvun n arvoilla

- a) 2^n
- b) $(-3)^n$
- c) $(-1)^{n-1}$
- d) $(-1)^{n-1}(-2)^n$

on positiivinen?

109. Laske

- a) $\left(\frac{4}{8}\right)^{1\,543} 2^{1\,546}$
- b) $\left(\frac{28}{15}\right)^{214} \left(\frac{45}{98}\right)^{109} \left(\frac{5}{8}\right)^{105}$.

110. Eukleides Aleksandrialainen oli kuuluisa, noin vuonna 300 eaa. elänyt kreikkalainen matemaatikko. Hän esitti *Alkeet*-kirjassaan kaavan täydellisten lukujen systemaattiselle laskemiselle (ks. luvun Jaollisuus tehtävät). Nykykielellä ilmaistuna se menisi seuraavasti:

$$\frac{p(p+1)}{2} \text{ on täydellinen luku, kun}$$

p on muotoa $2^n - 1$ oleva alkuluku.

Muotoa $2^n - 1$ olevia alkulukuja, missä todistettavasti välttämättäkin myös n on alkuluku, kutsutaan **Mersennen alkuluvuiksi**. Vasta 1700-luvulla sveitsiläinen Euler todisti, että kaikki parilliset täydelliset luvut voidaan esittää kyseisessä muodossa.

a) Laske kaavan avulla kolmas yhtä suurempi täydellinen luku.

b) Osoita, että Eukleideen kaava on yhtäpitävä kaavan $2^{n-1}(2^n - 1)$ kanssa, missä $2^n - 1$ on Mersennen alkuluku.

Lisää tehtäviä

111. Sievennä

a) $(1 \cdot a)^3$

b) $(a \cdot 2)^2$

c) $(-2abc)^3$

d) $(3a)^4$.

112. Sievennä.

a) $-a^3 \cdot (-a^2)$

b) $a \cdot (-a) \cdot (-b)$

c) $a^2 \cdot (-a^2)$

113. Sievennä.

a) $(a^3 b^2)^2$

b) $a(a^2 b^3)^4$

c) $(b^2 a^4)^5$

d) $b(2ab^2)^3$

114. Sievennä lausekkeet.

a) $\frac{a^2 b^2}{ab}$

b) $\frac{a^2 b}{a^2}$

c) $\frac{a^3}{a^3}$

d) $\frac{1}{a^0}$

e) $\frac{ab^3}{-b^4}$

115. Sievennä ja kirjoita potenssiksi, jonka eksponentti on positiivinen

a) a^{-3}

b) $\frac{a}{a^3}$

c) $a^{-2} \cdot a^5$

d) $\frac{b}{a^4} b^{-4}$

e) $\frac{a^3}{a^{-5}}$.

116. Sievennä.

a) a^0

b) $a^0 a^0$

c) aa^1

d) aa^0

e) $a^0 a^1$

117. Esitä ilman sulkuja ja sievennä.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^4$

d) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2$

e) $\left(\frac{a^2}{ab^2}\right)^2$.

118. Laske tai sievennä.

a) $a^2 a^5$

b) $\frac{a^5}{a^3}$

c) $(a^3)^2$

d) 12^0

119. a) $\frac{2^7}{2^9}$

b) $\frac{a^3}{a}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

d) $\left(\frac{a^{-2}}{ab^4}\right)^4$

120. Sievennä

a) $a^3 \cdot b^2 \cdot a^5$

b) $(-ab^3)^2$

c) $(a^5 a^4)^3$

d) 10^{2^3} .

121. Sievennä.

a) $(-a) \cdot (-a)$

b) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-b)^3$

c) $(-a^2) \cdot (-a)^2$

122. a) $a^2 \cdot a^3$

b) $a^3 a^2$

c) $a^2 a$

d) $aa^2 a$

e) $a^2 a^1 a^3$

123. Sievennä.

a) $a^1 aa^2$

b) $aaaa$

c) $a^3 ba^2$

d) $aba^0 ba^1$

124. Kerrotaan x :n toinen potenssi y :n neliöllä, vähennetään siitä x :n ja y :n toisen potenssin erotus kerrottuna kahdeksalla. Koko lauseke jaetaan piillä. Mitä saamme näin tekemällä aikaiseksi?

125. Tarinan mukaan muuan intialainen ruhtinas pyysi erästä matemaatikkoa kehittämään uuden strategisen lautapelin ja luvannut hänelle pelin keksimisestä suuren palkkion. Tällöin matemaatikko keksi shakin. Ruhtinas ihastui peliin ja kysyi keksijältä, mitä tämä halusi palkkioksi. Keksijä pyysi palkkioksi niin monta vehnän jyvää kuin saadaan koko shakkilaudalta, jos niitä asetetaan sen ensimmäiselle ruudulle yksi, toiselle ruudulle kaksi, kolmannelle neljä, neljännelle kahdeksan ja edelleen jokaiselle ruudulle kaksi kertaa niin monta kuin edelliselle ruudulle.

- a) Kuinka monta vehnän jyvää tulee viidennelle ruudulle?
- b) Kuinka monta vehnän jyvää viimeiselle ruudulle tulee?
- c) Kuinka monta vehnän jyvää tulee n :nnelle ruudulle?
- d) ★ Kuinka montaa vehnän jyvää keksijä pyysi yhteensä?

126. ★ Sievennä $(2ab + 4b^2 - 8b^3c) : (a + 2b - 4b^2c)$.

127. ★ Niin sanottu **tetraatio** on lyhennysmerkintä ”potenssitornille”, jossa esiintyy vain yhtä lukua. Se määritellään kaavalla

$${}_n a = \underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_{n \text{ kpl}}.$$

Laske

- a) ${}^4 2$
- b) ${}^3 5$.

128. ★ Sievennä lauseke

$$\left[\frac{(a^2 b^{-2} c)^{-3} : (c^2 \cdot (ab^{-2})^0 \cdot a^{-4})}{((c^{-1} \cdot a^3)^{-1} : a^2)^3 (ab^2 c^{-3})^3} \right]^2.$$

129. ★ Kompleksilukujen niin sanottu **imaginääriyksikkö** i määritellään seuraavalla (täysin kaikista reaaliluvuista poikkeavalla) ominaisuudella:

$$i^2 = -1$$

Sievennä määritelmän avulla seuraavat lausekkeet.

a) i^3

b) i^4

c) i^{4k+1} , missä k on kokonaisluku

d) $i^{1\,001}$

e) $\frac{1}{i}$ (Ohje: voit laventaa.)

f) $(1+i)(1-i)$

g) $(x+iy)(x-iy)$, missä x ja y ovat mielivaltaisia reaalilukuja

1.7 Luvun desimaaliesitys

Murtolukujen lisäksi desimaaliluvut ovat tuttu tapa merkitä lukuja, jotka eivät ole kokonaislukuja. 123,456 on esimerkki desimaaliluvusta. Pilkun jälkeen tulevat numerot tarkoittavat kymmenesosia, sadasosia ja niin edelleen.

- a) 123 on sen **kokonaisosa**.
- b) Kokonaisluku erotetaan loppuosasta **desimaalierottimella**, joka on suomen kielessä pilkku (,)
- c) Osaa 456 kutsutaan luvun **desimaaliosaksi**.

Desimaaliluku

Esimerkkinä annettu desimaaliluku tulkitaan seuraavasti:

$$123,456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

$$\underbrace{1}_{1 \cdot 10^2} \underbrace{2}_{2 \cdot 10^1} \underbrace{3}_{3 \cdot 10^0}, \underbrace{4}_{4 \cdot 10^{-1}} \underbrace{5}_{5 \cdot 10^{-2}} \underbrace{6}_{6 \cdot 10^{-3}}$$

Kymmenjärjestelmä saa nimensä siitä, että jokainen luvussa esiintyvä numeromerkki kertoo sen paikkaa vastaavien kymmenen potenssien määrän.

1.7.1 MURTOLUVUN MUUTTAMINEN DESIMAALILUVUKSI

Murtoluku on tapa merkitä jakolaskua. Jakolaskun tuloksen esittämiseksi desimaalilukuna käytetään peruskoulun alaluokilla opetettavaa jakokulmaa. Jakokulman ajatus on yksinkertaisesti kokeilla, kuinka monta jakajaa, sen kymmenesosaa, sadasosaa ja niin edelleen jaettavaan mahtuu. Jakokulmat voi laskea käsin, laskin tekee saman nopeammin.

100

Vestevæsti: leskier

CSIMED/KK/1.57

- a) $\frac{5}{4} = 1,250000 \dots = 1,25\overline{0}$ merkitään 1,25
b) 001,25 merkitään 1,25

Huomaa, että matemaatikolle luvut 1,25 ja 1,250 tarkoittavat täsmälleen samaa asiaa. Sovelluksissa, joissa luvut eivät ole tarkkoja vain mittaustuloksia tai arvioita, esityksillä voi olla nyanssiero, joka kertoo mittauksen tarkkuudesta. Vastaustarkkuudesta ja pyöristämisestä kerrotaan lisää myöhemmin.

Toistuva nollien jakso on vain yksi esimerkki rationaalilukujen desimaaliesityksen vääjäämättömästä jaksollisuudesta.

Rationaalilukujen desimaaliesitykset

Kaikkien rationaalilukujen desimaaliesitykset ovat jaksollisia.

Vähennyslaskuissa syntyvät jakojäännökset ovat nimittäin aina jakajaa pienempiä, ja siksi ne alkavat väistämättä toistaa itseään, ellei jako jossakin vaiheessa mene tasan. Koska eri vaihtoehtoja jakojäännöksiksi on yksi jakajaa vähemmän, jakson pituus on suurimmillaan yhden verran jakajaa pienempi. Esimerkiksi luvulla $\frac{1}{7} = 0,142857$ jakso on pisin mahdollinen, $7 - 1 = 6$ numeron mittainen.

ESIMERKKI 1.58

Esimerkkejä murtolukujen desimaaliesityksistä

- a) $\frac{1}{10} = 0,1$
b) $\frac{1}{100} = 0,01$
c) $\frac{1}{2} = 0,5$
d) $\frac{1}{4} = 0,25$
e) $\frac{3}{4} = 0,75$

1.7.2 DESIMAALILUVUN MUUTTAMINEN MURTOLUVUKSI

Päättävät desimaaliluvut voidaan muuttaa murtoluvuiksi muuttamalla kukin desimaali erikseen murtoluvuksi ja laskemalla syntyneet luvut yhteen.

ESIMERKKI 1.59

$$21,37 = 21 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \frac{2100}{100} + \frac{30}{100} + \frac{7}{100} = \frac{2100+30+7}{100} = \frac{2137}{100}.$$

Tämä on turhan työlästä, ja paljon helpommalla päästäänkin laventamalla luku ”niin monella kympillä, kuin desimaalipilkun jälkeen on numeroita” – täsmällisemmin sanottuna laventamalla luvulla 10^n , jossa n on pilkun jälkeen tulevien numeroiden määrä.

ESIMERKKI 1.60

Luvussa 52,41 kaksi desimaalia (pienimpinä sadasosat), joten lavennetaan siis sadalla. ($100 = 10^2$) $52,41 = 52,41 \cdot \frac{100}{100} = \frac{52,41 \cdot 100}{100} = \frac{5\,241}{100}$

ESIMERKKI 1.61

$$0,007 = 0,007 \cdot 1 = 0,007 \cdot \frac{10^3}{10^3} = \frac{0,007 \cdot 1\,000}{1\,000} = \frac{7}{1\,000}$$

(Muista, että erilaisia murtolukuesityksiä on kuitenkin olemassa samalle luvulle ääretön määrä. Saattaa olla, että menetelmällä saatu murtoluku on vielä supistettavissa.)

Minkä tahansa **jaksollisen desimaaliluvun** voi muuttaa murtoluvuksi seuraavalla tempulla: Muutetaan esimerkiksi 0,575757 ... murtoluvuksi. Jos merkitään

$$\begin{aligned} x &= 0,575757 \dots, & \text{saadaan sadalla kertomalla} \\ 100x &= 57,575757 \dots, & \text{joiden erotuksena} \\ 100x - x &= 57,57 \dots - 0,57 \dots, & \text{eli} \\ 99x &= 57, & \text{josta saadaan} \\ x &= \frac{57}{99} = \frac{19}{33}. \end{aligned}$$

Siis $0,575757 \dots = \frac{19}{33}$. Menetelmä toimii kaikille jaksollisille desimaaliluvuille: kerrotaan vain sopivalla luvun 10 potenssilla, jotta jakso katoaa vähennyslaskussa.

Nämä kannattaa muistaa

- $\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$
- $\frac{2}{3} = 0,6666 \dots$

Tehtäviä

130. Laske ja totea murtolukujen desimaaliesitysten paikkansapitävyys.

a) $\frac{1}{10} = 0,1$

b) $\frac{1}{100} = 0,01$

c) $\frac{1}{2} = 0,5$

d) $\frac{1}{4} = 0,25$

e) $\frac{3}{4} = 0,75$

131. Esitä murtolukuna

a) 0,5

b) 0,333 ...

c) 1,234

d) -0,2.

132. Esitä desimaalilukuna

a) $-\frac{3}{2}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{12}{20}$

d) $-1\frac{1}{6}$.

133. Muuta murtolukumuotoon (murtolukua ei tarvitse sieventää)

a) 43,532

b) 5,031

c) 0,23

d) 0,3002

e) 0,101.

134. Muuta murtolukumuotoon ja sievennä

a) 0,01

b) 0,0245

c) 0,004

d) 0,001004.

135. Muuta murtolukumuotoon

- a) $0,77777 \dots$
- b) $0,151515 \dots$
- c) $2,0\overline{5631}$
- d) $0,99999 \dots$

136. Muuta desimaaliluvuksi

- a) $\frac{151}{250}$
- b) $\frac{251}{625}$
- c) $\frac{386}{1\,250}$
- d) $\frac{493}{500}$.

137. Muuta murtoluvuksi

- a) $0,\overline{649}$
- b) $0,\overline{2154}$.

138. Muuta desimaaliluvuksi

- a) $\frac{42}{11}$
- b) $\frac{37}{13}$
- c) $\frac{38}{99}$
- d) $\frac{14}{15}$.

139. Perustele, miksi $0,9999 \dots = 1$.

1.8 Pyöristäminen ja vastaustarkkuus

Pyöristämisen ajatus on korvata luku sitä lähellä olevalla luvulla, jonka esitysmuoto on usein yksinkertaisempi. Pyöristäminen voidaan suorittaa eri tarkkuuksiin ja myös tilanteesta riippuen erilaisin käytännöin.

ESIMERKKI 1.62

Mikäli urheiluliikkeessä lumilaudan pituudeksi ilmoitetaan tarkan mittauksen jälkeen 167,9337 senttimetriä, on tämä asiakkaalle tarpeettoman tarkka tieto. Epätarkempi arvo 168 senttimetriä antaa kaiken oleellisen informaation ja on mukavampi lukea.

Jos sellainen on tiedossa, pyöristys tehdään aina lähimpään oikeaa tarkkuutta olevaan lukuun. Siis esimerkiksi kokonaisluvuksi pyöristettäessä $2,8 \approx 3$, koska 3 on lähin kokonaisluku. Lisäksi on usein sovitaan, että puolikkaat (kuten 2,5) pyöristetään ylöspäin. Se, pyöristetäänkö ylös vai alaspäin (eli suurempaan vai pienempään lukuun), riippuu siis haluttua tarkkuutta seuraavasta numerosta: pienet 0, 1, 2, 3, 4 pyöristetään alaspäin, suuret 5, 6, 7, 8, 9 ylöspäin.

Ellei muuta mainita, tehtävissä käytetään kaikkein yleisintä pyöristysmenetelmää, jossa viimeisen numeron perusteella pyöristetään lähimpään, ja numeroon 5 päättyvät pois päin nolasta.

ESIMERKKI 1.63

Pyöristetään luku 15,0768 sadasosien tarkkuuteen. Katkaistaan luku sadasosien jälkeen ja katsotaan seuraavaa desimaalia:

$$15,0768 = 15,07|68 \approx 15,08.$$

Pyöristettiin ylöspäin, koska seuraava desimaali oli 6.

1.8.1 MERKITSEVÄT NUMEROT

Matematiikan tehtävissä ovat ehdottoman tarkkoja, kun käsitellään lukuja itsessään, mutta kun puhutaan sovelluksista. mutta Luvun esitysmuodolla voidaan välittää tietoa sitä, kuinka tarkka arvo on kyseessä.

Mikä on tarkin mitta, 23 cm, 230 mm vai 0,00023 km? Kaikki kolme tarkoittavat täsmälleen samaa, joten niitä tulisi pitää yhtä tarkkoina. Luvun esityksessä esiintyvät kokoluokkaa ilmaisevat nollat eivät ole *merkitseviä numeroita*, vain 2 ja 3 ovat.

Merkitsevät numerot

Merkitseviä numeroita ovat kaikki luvussa esiintyvät numerot, paitsi nollat kokonaislukujen lopussa ja desimaalilukujen alussa.

Luku	Merkitseviä numeroita
123	3
12 000	2 (tai enemmän)
12,34	4
0,00123	3

Kokonaislukujen kohdalla on toisinaan epäselvyyttä merkitsevien numeroiden määrässä.

ESIMERKKI 1.64

- a) Kasvimaalla asuvaa 100 citykania on tuskin laskettu ihan tarkasti.
- b) 100 m juoksuradan todellinen pituus ei varmasti ole todellisuudessa esimerkiksi 113 m.

VASTAUSTEN PYÖRISTÄMINEN SOVELLUKSISSA

Pääsääntö on, että vastaukset pyöristetään aina epätarkimman lähtöarvon mukaan. Yhteen- ja vähennyslaskuissa epätarkkuutta mitataan yleensä desimaalien lukumäärällä.

ESIMERKKI 1.65

Jos 175 cm pituinen ihminen nousee seisomaan 2,15 cm korkuisen laudan päälle, olisi varsin optimistista ilmoittaa kokonaiskorkeudeksi 177,15 cm. Kyseisen ihmisen pituus kun todellisuudessa on mitä tahansa arvojen 174,5 cm ja 175,5 cm väliltä. Lasketaan siis $175 \text{ cm} + 2,15 \text{ cm} = 177,15 \text{ cm} \approx 177 \text{ cm}$. Epätarkempi lähtöarvo oli mitattu senttien tarkkuudella, joten pyöristettiin tasasentteihin.

Kerto- ja jakolaskussa tarkkuutta arvioidaan merkitsevien numeroiden mukaan.

Tarkkuus ei ole aina hyvästä lukujen esittämisessä.

ESIMERKKI 1.66

$\pi = 3,141592653589793238462643383279 \dots$, mutta käytännön laskuihin riittää usein 3,14 riittävän vastaustarkkuuden saavuttamiseksi.

Muista, että kolmen pisteen käyttö desimaaliesityksen lopussa on suotavaa vain, jos on yksikäsitteisen selvää, miten desimaalit tulevat jatkumaan. Piin tapauksessa niitä voi käyttää, koska luvun desimaalikehitelmä on hyvin tunnettu ja mielivaltaisen tarkasti laskettavissa.

1.8.2 TARKKA ARVO

Matematiikassa ei kuitenkaan ilman erityistä tarkoitusta käytetä likiarvoja vaan niin sanottuja tarkkoja arvoja. Käytännössä tämä tarkoittaa arvojen esittämistä mahdollisimman yksinkertaisessa ja sievennetyssä muodossa niin, että irrationaalilukuja kuten π ja $\sqrt{2}$ ei esitetä pyöristettyinä desimaaleina. Oletusarvoisesti tehtävien vastaus annetaan *aina* tarkkana arvona.

Käyttämällä tarkkoja arvoja ei menetetä tietoa. Jos pyöristyksiä tehdään, niin se tehdään vasta aivan lopussa. Välivaiheissa ei saa pyöristää!

ESIMERKKI 1.67

Sievennetään lauseke $\frac{6\pi^2}{3\pi^3}$. Supistamalla kolmella saadaan $\frac{2\pi^2}{\pi^3}$ ja supistamalla sen jälkeen π^2 :lla (tämä vastaa osamäärän potenssisääntöä) saadaan $\frac{2}{\pi}$. Tämä on vastaus, ja likimääräisen desimaalimuodon ilmoittaminen on ylimääräistä.

Tehtäviä

Opi perusteet

140. Pyöristä kymmenen tarkkuudella

- a) 8
- b) 23
- c) 65
- d) 9 001
- e) 1
- f) -6
- g) -12
- h) 99 994.

141. Montako merkitsevää numeroa on seuraavissa luvuissa

- a) 5
- b) 12,0
- c) 9 000
- d) 666
- e) 9 000,000
- f) 0,0
- g) -1
- h) $-0,00024?$

142. Pyöristä kahden merkitsevän numeron tarkkuudella

- a) 1,0003
- b) 3,69
- c) 152,8
- d) 7 062,4
- e) $-2,05$
- f) 0,00546810
- g) $-1\,337$
- h) 0,0000501.

Lisää tehtäviä

143. ★ Kirjoita haluamallasi ohjelmointikielellä koodi, joka määrittää annetusta luvusta, kuinka monta merkitsevää numeroa siinä on.

1.9 Suureet ja yksiköt

Tämä luku on kattava esitys yksiköiden käyttämisestä sovelluksissa. Tämä on suositeltavaa aineistoa myös fysiikan ja kemian opiskelijoille!

1.9.1 SUUREET JA YKSIKÖT

Monissa sovelluksissa (ja erityisesti fysiikassa) luvut eivät esitä vain matemaattista lukuarvoa, vaan niitä käytetään yhdessä jonkin **yksikön** kanssa. Tällöin luku ja yksikkö yhdessä esittävät tietoa **suureesta** eli jostakin mitattavasta ominaisuudesta. Saman suureen esittämiseen on usein mahdollista käyttää montaa eri yksikköä, mutta käytetty yksikkö määrää yksiselitteisesti suureen. Samaan ominaisuuteen saatetaan viitata joskus useilla eri nimillä.

ESIMERKKI 1.68

- a) Aika on suure, jota voidaan mitata käyttämällä yksikkönä esimerkiksi sekunteja tai vuosia. Sovelluksissa suureeseen saatetaan viitata joskus myös nimellä kesto tai jopa pituus ("Meneekö vielä pitkään?") tai nopeus ("Tämä pallo putoasi nopeammin maahan kuin tuo toinen").
- b) Pituus on suure, ja sen arvo voidaan mitata ja esittää käyttäen yksikkönä esimerkiksi metrejä ja tuumia. Myös matkaa ja etäisyyttä mitataan samoissa yksiköissä; näillä on sovellusriippuvainen, erityisesti geometriassa ja fysiikassa esille tuleva nyanssiero.
- c) Energia on suure, jota mitataan esimerkiksi yksiköissä joule tai kalori. Myös työtä mitataan fysiikassa jouleissa.
- d) Massa on suure, jota mitataan esimerkiksi grammoissa tai paunoissa. (Hiukkasfysiikassa massa ja energia kuitenkin usein rinnastetaan.)

Jotkin suureet ovat **skalaarisuureita** ja toiset **vektorisuureita**. Skalaarisuureet ovat sellaisia mitattavia ominaisuuksia, joiden kuvaamiseen riittää yksi luku. Vektorisuureet ovat ominaisuuksia, joilla on sekä suuruus että suunta, eikä yksi luku riitä kertomaan kaikkea. (Vektorilaskentaan tutustutaan tarkemmin MAA5-kurssilla sekä fysiikan mekaniikan kursseilla.)

ESIMERKKI 1.69

- a) Lämpötilan esittämiseen riittää yksi luku, eli lämpötila on skalaarisuure. Tilanteesta ja käytetystä yksiköstä riippuen kyseinen luku saattaa olla joko negatiivinen, nolla tai positiivinen.
- b) Nopeus on vektorisuure, koska nopeuteen liittyy sen suuruuden lisäksi myös suunta. Esimerkiksi puhuttaessa tuulen nopeudesta kerrotaan myös, mistä suunnasta tuuli puhaltaa. (Termiä nopeus käytetään joskus myös muidenkin ominaisuuksien muuttumisesta ajan suhteen kuin vain sijainnin.)

Tehtävissä yksiköistä käytetään standardilyhenteitä, eikä yksiköiden (metri, kilogramma, joule) nimiä tarvitse kirjoittaa kokonaan. Käytäntö on jättää kertolaskun sijasta luvun ja yksikön lyhenteen väliin lyhyt väli.¹ Tähän on muutama poikkeus: kulman suuruutta ilmaisevat asteet, minuutit ja sekunnit, joita merkitään symboleilla °, ' ja ", sekä jotkin pituusyksiköt kuten jalka ja tuuma, joita merkitään myös ' ja ", kirjoitetaan kiinni lukuun. Merkki ' on niin sanottu yläpuolinen indeksointipilkku (ei heittomerkki '), joka lausutaan käytännössä ”pilkku”.

Yksiköt kirjoitetaan konekirjoitetussa tekstissä pystyyn – ei *kursiivilla*. Jos yksikkö on nimetty henkilön mukaan, niin yksikkö kirjoitettuna lyhenteellään alkaa isolla kirjaimella mutta aukikirjoitettuna yksikkö kirjoitetaan pienellä.

ESIMERKKI 1.70

- a) Fyysikko Isaac Newtonin mukaan on nimetty voiman yksikkö newton, jota merkitään suurella N-kirjaimella.
- b) Heinrich Hertz antoi nimensä taajuuden yksikölle hertsi (engl. *hertz*), joka lyhennetään Hz. (Huomaa ”suomennettu” yksikkö, ja että myös englanninkielinen yksikön nimi kirjoitetaan pienaakkosin.)
- c) Lämpötiloja voidaan mitata celsiuasteina Anders Celsiuksen mukaan. Lyhenteessä C on suuraakkonen: °C. Käytetään myös ilmaisua ”astetta celsiusta”.

1. Tämä on ISO-standardin (International Organisation for Standardization) ja Kotimaisten kielten tutkimuskeskuksen (Kotus) suosituksen mukainen merkintätapa.

ESIMERKKI 1.71

Seuraava taulukko selventää oikeinkirjoitusta:

Oikein	Väärin
3 m	3m
$100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$100 \frac{km}{h}$
2 ‰	2‰
3°	3 °
3,16° 5' 13"	3,16 ° 5 ' 13 "
6 °C	6°C

Suure

Matemaattisesti suureita käsitellään aivan kuin luku ja yksikkö olisivat kerrotut keskenään:

luku · yksikkö

Suureen määritelmän luvun ja yksikön kertolaskutulkinnasta seuraa, että sovelluksissa ja sievennystehtävissä yksiköillä voidaan laskea kuin luvuilla — lopullisessa sievennetyssä muodossa vain merkitään luvun ja yksikön väliin lyhyt väli kertolaskun asemesta. Luvun ja yksikön välistä kertomerkkiä ei yleensä merkitä ”oikeisiin” laskuihin, mutta teemme sen joissakin esimerkeissä, jotta laskemistekniikka tulisi selväksi.

Suureita voi tarvittaessa vapaasti kertoa ja jakaa keskenään, jolloin luvut ja yksiköt ryhmitellään erilleen lopullista vastausta varten. Potenssia voi käyttää uuden muodostuvan yksikön sieventämiseen. Pituuden yksiköiden toisen ja kolmannen potenssin tapauksessa käytetään etuliitteitä neliö- ja kuutio-.

ESIMERKKI 1.72

a) 2 metriä kertaa 3 metriä =

$$2 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 2 \cdot \text{m} \cdot 3 \cdot \text{m} = 2 \cdot 3 \cdot \text{m} \cdot \text{m} = 6 \cdot \text{m}^2 = 6 \text{ m}^2 \text{ eli kuusi neliömetriä.}$$

1.9.2 SI-JÄRJESTELMÄ

SI-järjestelmä eli kansainvälinen yksikköjärjestelmä (ransk. *Système international d'unités*) on maailman käytetyin mittayksikköjärjestelmä. Siihen kuuluvat seuraavat **perussuureet** ja vastaavat perusyksiköt:

SI-järjestelmän perussuureet ja yksiköt

Suure	Suureen tunnus	Yksikkö	Yksikön tunnus
pituus	l	metri	m
massa	m	kilogramma	kg
aika	t	sekunti	s
sähkövirta	I	ampeeri	A
(termodynaaminen) lämpötila	T	kelvin	K
ainemäärä	n	mooli	mol
valovoima	I	kandela	cd

Toisin kuin yksiköt, suureiden kirjainlyhenteet kirjoitetaan konekirjoituksessa *kursiivilla*. Jokaisella perussuureen yksiköllä on oma tarkka määritelmänsä, jotka käsitellään tarkemmin fysiikassa ja kemiassa. Matematiikan kursseilla suureista tulee kuitenkin tuntea ainakin pituus, massa ja aika. (Huomaa, että arkikielessä käytetään usein sanaa paino, vaikka tarkoitetaan massaa.)

Suureen yksikkötarkastelussa käytetään joskus merkintää, missä suureen ympärille kirjoitetaan hakasulkeet ja tämä merkataan yhtäsuureksi yksikön kanssa.

ESIMERKKI 1.73

■ $[m] = \text{kg}$

Huomaa, että joillakin suureilla ja yksiköillä voi olla sama kirjainlyhenne!

Myös useilla suureilla voi olla keskenään sama symboli. Yleensä kontekstista selviää, mitä tällöin tarkoitetaan.

ESIMERKKI 1.74

■ Pienaakkonen t voi tilanteesta riippuen tarkoittaa joko aikaa tai lämpötilaa esitettyinä celsiusasteina. Kontekstista selviää, kummasta on kyse.

Perussuureiden lisäksi tehtävissä esiintyy usein joitakin näistä perussuureistayhdistämällä saatuja **johdannaissuureita** kuten nopeus, pinta-ala, tilavuus ja tiheys.

Tärkeitä johdannaissuureita

- Nopeus (tunnus v , engl. *velocity*) on johdannaissuure, joka saadaan kuljetun

matkan ja matkan kulkemiseen käytetyn ajan osamäärästä: $\text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$. Vastaava nopeuden yksikkö saadaan jakamalla matkan yksikkö ajan yksiköllä, käytettiin mitä yksiköitä hyvänsä – esimerkiksi $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ tai $[v] = \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- Pinta-ala (tunnus A , engl. *area*) saadaan kertomalla pituus toisella pituudella. Vastaavasti pinta-alan yksiköt saadaan pituuden yksiköistä. Jos esimerkiksi pituutta on mitattu metreissä, niin vastaava pinta-alan yksikkö on $[A] = \text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$ eli neliometri.
- Tilavuus (tunnus V , engl. *volume*) on edelleen johdettavissa kolmen pituuden tulona. Jos pituutta on mitattu metreissä, niin vastaava tilavuuden yksikkö on $[V] = \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^3$ eli kuutiometri.
- Tiheys (tunnus ρ , kreikkalainen pieni kirjain *rho*) on johdannaissuure, joka määritellään massan ja tilavuuden osamääränä: $\text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$. Vastaavasti tiheyden yksiköt saadaan jakolaskulla massan ja tilavuuden yksiköistä: jos kappaleen tilavuus on mitattu kuutiometreissä ja massa kilogrammoina, voidaan kappaleen tiheys esittää yksiköissä $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Tiheydestä kannattaa muistaa nyrkkisääntönä, että veden tiheys on noin yksi kilogramma per litra.

Suureiden tunnuksia käytetään yleensä muuttujan tai tuntemattoman symbolina kaavoissa.

ESIMERKKI 1.75

■ Tiheyden kaava on suureiden symbolein kirjoitettuna $\rho = \frac{m}{V}$.

Joillekin johdannaisyksiköille on annettu oma nimensä ja lyhenteensä, eikä yksikössä esiinny alkuperäisiä perusyksiköitä.

ESIMERKKI 1.76

-
- a) Tuhatta kilogrammaa kutsutaan tonniksi, jonka lyhenne on t.
 - b) Yksi litra vastaa yhtä kuutiedesimetriä, eli $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$ (ks. etuliitteet edellä).
 - c) Energian yksikkö joule ilmaistuna vain SI-järjestelmän perusyksiköitä käyttämällä: $J = \frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^2}$.

Kun johdannaisyksiköissä esiintyy jakolaskua, yksikön voi kirjoittaa useassa eri muodossa potenssisääntöjen avulla.

ESIMERKKI 1.77

Nopeuden yksikkö metriä sekunnissa voidaan kirjoittaa murtolausekkeena $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, samalla rivillä m/s tai negatiivisen eksponentin avulla m s^{-1} .

Sovelluksissa voi tulla vastaan myös sellaisia johdannaissuureita, joita ei ole lueteltu edellä, tai yhdistelmäsuureita, jotka eivät ole lainkaan johdettavissa perussuureista. Monet näistä ovat tuttuja arkisia kahden suureen suhteita tai jonkin suureen muutosnopeuden tarkasteluja.

ESIMERKKI 1.78

- a) Kilogrammahinta eli kilohinta on rahamäärän ja ostettavan tai myytävän hyödykkeen massan suhde. Yksiköksi saadaan tällöin esimerkiksi $\frac{\text{€}}{\text{kg}}$.
- b) Tilavuusvirta (tai pelkästään virtaus) on johdannaissuure, joka tarkastelee tilavuuden muutosta ajassa – esimerkiksi sitä, kuinka nopeasti vettä kuluu. Yksikkönä voisi tällöin olla esimerkiksi $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

SUURUUSLUOKAT

Suuruusluokkien ymmärtäminen (kuvaajien ja tilastojen tulkitsemisen ohella) on tärkeä osa *lukutaitoa* – näiden ymmärtäminen estää sinua tulemasta huijatuksi ja harhaanjohtetuksi.²

Kymmenpotenssimuoto eli eksponenttimuoto on merkintätapa, jossa luku ilmoitetaan kertoimen sekä jonkin kymmenen kokonaislukupotenssin tulona. Kymmenpotenssimuodosta on hyötyä, kun halutaan kirjoittaa suuria tai pieniä lukuja lyhyesti. Myös mittaustarkkuuden ilmoittamiseksi tarvitaan joskus kymmenpotenssimuotoa. On yleinen tapa (standardi) valita esitysmuoto niin, että potenssin kerroin on vähintään yksi mutta alle kymmenen. Kymmenpotenssimuotoa $a \cdot 10^n$, missä a on jotain ydehn ja kymmenen väliltä, kutsutaan joskus myös tieteelliseksi merkintätavaksi, engl. **scientific notation**. Sama luku voidaan kuitenkin esittää kymmenpotenssimuodossa äärettömän monella tavalla, jos luovutaan kertoimen suuruusehdosta.

Yleisellä ilmaisulla “**pilkun siirtäminen**” tarkoitetaan käytännössä luvun kymmenpotenssiesityksen muokkaamista. Pilkku siirtyy oikealle yhtä monta pykälää kuin kymmenen potenssi pienenee ja päinvastoin. Pilkuttoman luvun tapauksessa pilkku

2. Kirjallisuutta aiheesta tarjoaa muun muassa John Allen Paulosin teos Numerotaidottomuus. (Kirja on nimetty hassusti, ottaen huomioon, että siinä erityisesti puhutaan *luvuista*, ei numeroista – oletamme tämän huonoksi käännökseksi, koska englanninkielen sana *number* tarkoittaa lukua.

“kuvitellaan luvun perään”. Koska $10^0 = 1$, voidaan ilman kymmenpotenssia esitetyn luvun perään tarvittaessa lisätä tämä kerroin mielessä. 10 tarkoittaa luonnollisesti samaa asiaa kuin 10^1 .

Joitakin esitysmuotoja samoille luvuille

$1\,234\,000 \cdot 10^{-3}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$130\,000\,000\,000 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$123\,400 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$13\,000\,000\,000 \cdot 10^{-2}$	$0,1 \cdot 10^{-4}$
$12\,340 \cdot 10^{-1}$	$0,14 \cdot 10^{-1}$	$1\,300\,000\,000 \cdot 10^{-1}$	$0,001 \cdot 10^{-2}$
1 234	0,014	130,000 000	0,00001
$123,4 \cdot 10$	$0,0014 \cdot 10$	$130 \cdot 10^6$	$0,000001 \cdot 10$
$12,34 \cdot 10^2$	$0,00014 \cdot 10^2$	$1,3 \cdot 10^2$	$0,0000001 \cdot 10^2$
$1,234 \cdot 10^3$	$0,000014 \cdot 10^3$	$0,13 \cdot 10^9$	$0,00000001 \cdot 10^3$

ESIMERKKI 1.79

- a) Maan massa on noin 5 974 000 000 000 000 000 000 000 kg. Luvussa on ensimmäisen numeron (5) jälkeen vielä 24 numeroa, eli kymmenpotenssimuodoksi saadaan $5,974 \cdot 10^{24}$ kg.
- b) Vetymolekyylissä H_2 ytimien välinen etäisyys on noin 0,000000000074 m eli $7,4 \cdot 10^{11}$ m.
- c) Jos juoksuradan pituudeksi ilmoitetaan 1 000 m, ei lukija voi tietää, millä tarkkuudella mittaus on tehty. Mittaustarkkuus välittyy kymmenpotenssin avulla: jos etäisyys ilmoitetaan muodossa $1,00 \cdot 10^3$ m, on mitattu kymmenen metrin tarkkuudella, ja jos muodossa $1,0 \cdot 10^3$ m, on mitattu sadan metrin tarkkuudella jne.

Suurten lukujen nimet kannattaa opetella, ja myös huomata, että eri kielten välillä on joitakin poikkeuksia.

ESIMERKKI 1.80

■ Nykyisellä amerikanenglannilla miljardi on *billion*, ja biljoona on *trillion*.

1.9.3 KERRANNAISYKSIKÖT JA ETULIIITTEET

Monesti suureita kuvataan **kerrannaisyksiköiden** avulla. Tällöin yksikön suuruutta muokataan etuliitteellä, joka toimii suuruusluokkaa muuttavana kertoimena.

Tavallisimmat kerrannaisyksiköiden etuliitteet

Nimi	Kerroin	Tunnus	Arvo suomeksi
deka	10^1	da	kymmenen
hehto	10^2	h	sata
kilo	10^3	k	tuhat
mega	10^6	M	miljoona
giga	10^9	G	miljardi
tera	10^{12}	T	biljoona
peta	10^{15}	P	tuhat biljoonaa
Nimi	Kerroin	Tunnus	Arvo suomeksi
desi	10^{-1}	d	kymmenesosa
sentti	10^{-2}	c	sadasosa
milli	10^{-3}	m	tuhannesosa
mikro	10^{-6}	μ	miljoonasosa
nano	10^{-9}	n	miljardisosa
piko	10^{-12}	p	biljoonasosa
femto	10^{-15}	f	tuhatbiljoonasosa

Etuliitteitä käytetään siis muuttamaan yksikköä pienemmäksi tai suuremmaksi. Tarkoituksena on yleensä valita sovelluskohtaisesti sopivan kokoinen yksikkö niin, että käytetyn luvun ei tarvitse olla valtavan suuri tai pieni. Mitä suuremman yksikön valitsee, sitä pienemmäksi sen kanssa käytettävä luku tulee – ja toisinpäin.

ESIMERKKI 1.81

- Kilogramma tarkoittaa tuhatta grammaa. Kilogramma on ainut SI-järjestelmän perusyksikkö, jolla on etuliite. Pelkän gramman asemesta se on valittu ilmeisesti käytännöllisyyssyistä, sillä yksi gramma on moniin sovelluksiin turhan pieni yksikkö.
- Eläinsolun läpimitta voisi olla 0,000046 metriä. Luku on niin pieni, että on niin lyhyempää, käytännöllisempää ja usein helppotajuisempaakiin kirjoittaa 46 mikrometriä eli 46 μm .
- Hyvin pienistä massoista puhuttaessa voidaan puhua esimerkiksi nanogrammoista. Esimerkiksi $1 \text{ ng} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ g} = 0,000000009 \text{ g}$.

Huomautuksia tietotekniikasta

Datan tai informaation määrää mitataan **bitteinä** ja **tavuina** – yksi tavu on kahdeksan bittiä. Tietotekniikassa datan määrä on suureena **diskreetti** eli bittejä voi olla vain jokin luonnollisen luvun osoittama määrä. Bittejä ei siis voi jakaa mielivaltaisen pieniin palasiin toisin kuin esimerkiksi sekunteja ja metrejä. Yhteen kahdeksan bitin mittaiseen tavuun voidaan tallettaa kokonaisluku väliltä 0–255. Tavun sisällön merkitys voidaan tulkita usealla tavalla, esimerkiksi yhtenä kirjaimena jossain merkistössä. Suomen kielessä bitin lyhenne on b ja tavun t. Usein käytettävät englanninkieliset lyhenteet bitille (engl. *bit*) ja tavulle (engl. *byte*) ovat vastaavasti b ja B.

ESIMERKKI 1.82

- a) Pelkästään muotoilematonta tekstiä kirjoittaessa yksi tavallinen englanninkielinen kirjoitusmerkki (eli ei esimerkiksi π , ä tai $\emptyset$) vie tietokoneella tallennustilaa yhden tavun. Englanninkielensanoissa on keskimäärin 5,1 kirjainta. *Taru sormusten herrasta* -kirjatrilogian alkuperäistekstissä on yhteensä noin 473 tuhatta sanaa, joten merkkejä trilogiassa on yhteensä noin $473\,000 \cdot 5,1 = 2\,412\,300$. Puhtaana tekstinä kirja veisi siis tietokoneella tilaa vähintään noin kaksi ja puoli miljoonaa tavua. Arviota tekee epätarkemmaksi se, että erikoismerkit ja kuvat tarvitsevat kukin enemmän kuin tavun verran tallennustilaa.
- b) Internetpalveluntarjoajat mainostavat yhteysnopeuksiaan yleensä muodossa X/Y , missä X on luvattu teoreettinen maksiminopeus datan vastaanottamiselle (lataamiselle, engl. *download*) ja Y teoreettinen maksiminopeus datan lähettämiseksi (engl. *upload*). Yksikkönä mainosteksteissä on tavallisilla kuluttajanopeuksilla usein englanninkielinen Mbps eli megabittiä sekunnissa (*megabits per second*, oikeaoppisesti kirjoitettuna Mb/s). Koska ilmaisu on biteissä käytännössä enemmän käytettyjen tavujen sijaan, nopeus näyttää suurelta. Oma yhteysnopeus kannattaa testata jossain siihen tarkoitettussa verkkopalvelussa – palveluntarjoajalle eli operaattorille kannattaa valittaa, jos yhteysnopeus jää paljon luvatusa.

Tietokoneiden rakenteen kaksikantaisuuden (ks. liite lukujärjestelmistä) johdosta tavujen kerrannaisyksiköllä tarkoitetaan yleensä kymmenen potenssien sijaan usein lähimpiä kahden potensseja. SI-järjestelmä ei tue kaksikantaista käytäntöä, vaan sen mukaan kt on tasan 1 000 t ja niin edelleen. Tarvitsemme datan käsittelyyn uudet binääriset etuliitteet:

Etuliite	Nimi	Arvo	Lähin kymmenenpotenssi
ki	kibi	2^{10}	10^3
Mi	mebi	2^{20}	10^6
Gi	gibi	2^{30}	10^9
Ti	tebi	2^{40}	10^{12}
Pi	pebi	2^{50}	10^{15}

Kyseisten etuliitteiden käyttö on kuitenkin (edelleen) harvinaista. Kun vuosikymmeniä sitten datan tallennuskapasiteetti oli pieni, ei kilotavun ja kibitavun (suhteellinen) ero ollut suuri, mutta nykyään ero on suurempien datamäärien käsittelyssä hyvin merkityksellinen.

ESIMERKKI 1.83

Lasketaan SI-etuliitteiden ja binääristen eli kaksikantaisten etuliitteiden erotuksia tavujen tilanteessa.

- a) $1 \text{ kit} - 1 \text{ kt} = 1\,024 \text{ t} - 1\,000 \text{ t} = 24 \text{ t}$
- b) $1 \text{ Mit} - 1 \text{ Mt} = 2^{20} - 10^6 = 48\,576 \text{ t}$
- c) $1 \text{ Git} - 1 \text{ Gt} = 2^{30} - 10^9 = 73\,741\,824 \text{ t}$

Huomataan, että suuruusluokkien kasvaessa esitystapojen välinen virhe kasvaa merkittävästi.

Arkikielessä ja markkinoinnissa nykyään käytetään kuitenkin lähinnä SI-järjestelmän etuliitteitä, ja on ymmärrettävä kontekstista, että ”kilotavulla” tarkoitetaan $1\,024$:ää tavua (2^{10}), ”megatavulla” tarkoitetaan $1\,024$:ta ”kilotavua”, ja niin edelleen.

Valitettavasti monessa yhteydessä ei ole selvää, tarkoitetaanko kymmenen vai kahden potensseja. Jotkin käyttöjärjestelmät ja tietokoneohjelmat sanovat toista ja tarkoittavat toista. Kuluttajan hämmennykseksi usein esimerkiksi keskusmuistien koosta puhuttaessa käytetään binäärikerrannaisyksikköjä mutta kiintolevyjen koosta puhuttaessa kymmenen potensseja. Siirtonopeudet sen sijaan ovat yleensä *aivan oikein* ilmoitettu SI-etuliitteillä.

ESIMERKKI 1.84

Ostat kahden ”teran” kiintolevyn pöytäkoneeseesi. Tuotteessa itsessään lukee tällöin yleensä englanniksi 2 TB ja suomeksi puhumme teratavuista (merkitään 2 Tt). Ilmaisuuksien mukaan yllätyksen, sillä kun levyn asentaa koneeseen, voi käyttöjärjestelmä ilmoittaa vapaan tilan olevan huomattavasti kahta teratavua pienempi. Ero johtuu siitä, että levyllä on tilaa $2 \text{ Tt} = 2 \cdot 10^{12}$

tavua, mutta ohjelmat, käyttöjärjestelmä (ja myös koneen käyttäjä) voi olettaa koon olevan ilmoitettu kaksikantaisena niin, että kokonaistila olisikin $2 \text{ Tit} = 2 \cdot 2^{40}$ tavua. Jos käyttöjärjestelmä tämän lisäksi ilmoittaa levytilan SI-etuliitteiden avulla (vaikka tarkoittaiskin kaksikantaisia), voi levyn ostajalle tulla huijattu olo. Eroa näillä kahdella ilmaisulla on $2 \cdot 2^{40} \text{ t} - 2 \cdot 10^{12} \text{ t} = 99\,511\,627\,776 \text{ t} \approx 100 \text{ gigatavua} \approx 93 \text{ gigitavua}$ eli käytettävissä olevaa tilaa onkin noin viisi prosenttia vähemmän kuin mitä on mielestää ostanut! (Monta kiintolevyvalmistajaa on haastettu oikeuteen näistä epämääräisyyksistä.)

1.9.4 YKSIKKÖMUUNNOKSET

Kerrannaisyksiköiden tapauksessa tulee vain huomata, että etuliitteet ovat matemaattisesti vain kertoimia. Kaikki ilmaisut voidaan aina halutessa esittää luvun ja yksikön tulona ilman etuliitteitä.

ESIMERKKI 1.85

$$270 \text{ mm} = 270 \cdot \text{mm} = 270 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \frac{270}{1\,000} \text{ m} = 0,27 \text{ m}$$

ESIMERKKI 1.86

Erään solun tilavuus on $9,0 \cdot 10^{-12} \text{ l}$. Ilmoita tilavuus

- a) pikolitroina
- b) nanolitroina

Ratkaisu. a) $9,0 \cdot 10^{-12} \text{ l} = 9,0 \text{ pl}$.

b) Kymmenen eksponentiksi halutaan -9 . Koska 10^{-12} on pienempi kuin 10^{-9} , sitä tulee kasvattaa – samalla kerroin pienenee. Kymmenenpotenssi kerrotaan tuhannella, ja kerroin jaetaan samaten tuhannella, jotta itse lukuarvo ei muutu: $9,0 \cdot 10^{-12} = 9,0 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-9} = 0,009 \text{ nl}$.

ESIMERKKI 1.87

Kun ääntä (esimerkiksi musiikkia) pakataan MP3-muotoon, keskvieron ääneenlaadun saavuttamiseksi bittivirta (engl. *bitrate*) voi olla 128 kb/s . Tämä tarkoittaa oikeasti tasan $128\,000$ bitin siirtoa sekuntia kohden. Koska tavu on kahdeksan bittiä, vastaa tämä tavuissa tiedonsiirtonopeutta $\frac{128}{8} \text{ kb/s} = 16 \text{ kt/s}$.

Erittäin tärkeää kerrannaisyksiköiden potensseista!

Aiemmin esitetty taulukko etuliitteistä pätee vain ensimmäisen asteen yksiköihin! Desimetri on kymmenesosa metristä, mutta neliödesimetri *ei* ole kymmenesosa neliömetristä. (Vrt. neliödesimetri ja desineliömetri) Avain tämän ymmärtämiseen on tietää seuraava kirjoitustavan sopimus:

dm^2 tarkoittaa oikeasti $(\text{dm})^2$!

ESIMERKKI 1.88

Potenssisääntöjä käyttämällä huomataan:

$(\text{dm})^2 = \text{d}^2\text{m}^2 = (10^{-1})^2 \text{m}^2 = 10^{-2} \text{m}^2 = \frac{1}{100} \text{m}^2$. Eli yksi neliödesimetri onkin *sadaosa* neliömetristä!

ESIMERKKI 1.89

Kuinka mones osa kuutiodesimetri on kuutiometristä?

Ratkaisu. Puretaan auki käyttäen mainittua kirjoituskonventiota, potenssisääntöjä ja desi-etuliitteen määritelmää:

$$\begin{aligned} 1 \text{ dm}^3 &= 1 (\text{dm})^3 \\ &= 1 \text{ d}^3 \text{ m}^3 \\ &= 1 (10^{-1})^3 \text{ m}^3 \\ &= 10^{-1 \cdot 3} \text{ m}^3 \\ &= (10^{-1})^3 \text{ m}^3 \\ &= 10^{-3} \text{ m}^3 \\ &= \frac{1}{1\,000} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Nähdään, että yksi kuutiodesimetri on tuhannesosa kuutiometristä.

Joskus suureen johdannaisyksikössä on suhde, ja tämä halutaan ilmaista käänteisenä suhteena. Tällöin voidaan ottaa käänteisluku.

Matkan (pituuden), pinta-alan ja tilavuuden yksikkömuunnoksia käsitellään lisää geometrian MAA3-kurssilla.

Ajan yksiköt

Ajan yksiköissä on jäänteitä 60-järjestelmästä. Tavallisimpia yksiköjä ei jaetakaan kymmeneen pienempään osaan vaan kuuteenkymmeneen:

Tunti, minuutti ja sekunti

- Yksi tunti (lyhenne yleiskielessä t, SI-järjestelmässä h, engl. *hour*) on 60 minuuttia (lyhenne min): $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$
- Yksi minuutti on 60 sekuntia (lyhenne s): $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

ESIMERKKI 1.90

- a) Kuinka monta sekuntia on yhdessä tunnissa?
- b) Kuinka monta minuuttia on 1,25 h?
- c) Leffamaratonissa katsotaan *Taru sormusten herrasta* -elokuvatrilogian ”Special extended Blu-ray edition” -versio, jonka kokonaiskesto on 726 minuuttia. Kuinka monta tuntia tähän täytyy varata aikaa?

Ratkaisu. a) Yksiköiden määritelmien mukaan

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3\,600 \text{ s}.$$

b) $1,25 \text{ h} = 1,25 \cdot 60 \text{ min} = 75 \text{ min}$. 1,25 tuntia on siis 75 minuuttia. Huomaa, että voit laskuissasi esittää desimaaliluvun 1,25 sekamurtolukuna $1\frac{25}{100}$ eli $1\frac{1}{4}$, mikä saattaa helpottaa laskemista.

c) Minuutin ja tunnin suhdeluku on 60. Koska haluamme siirtyä pienemmästä yksiköstä (minuutit) suurempaan yksikköön (tunnit), suureen lukuarvon täytyy pienentyä – suoritamme siis jakolaskun: $\frac{726 \text{ min}}{60} = \frac{726}{60} \text{ h} = 12,1 \text{ h}$. Elokuvamaratonissa esitetään siis elokuvia reilut 12 tuntia putkeen. (Ylitse jää tunnin kymmenesosa eli $\frac{60 \text{ min}}{10} = 6 \text{ minuuttia}$.)

On huomattavaa, että laskutehtävissä käytetään joistakin ajan yksiköistä idealisoituja määritelmiä.

Vuorokausi, viikko, kuukausi ja vuosi

- Todellinen astronominen vuorokausi eli aika, joka Maalta kestää pyörähtää kerran oman akselinsa ympäri, on noin 23 tuntia, 56 minuuttia ja 4,1 sekuntia. Laskutehtävissä käytetään kuitenkin tavallisesti kalentereista tuttua yksinkertaistettua määritelmää, jonka mukaan vuorokausi olisi tasan 24 tuntia. Vuorokausiyksikön lyhenne yleiskielessä vrk ja SI-järjestelmässä d, engl. *day*.
- Vuoden pituus määritellään aikana, jona Maa kiertää kerran Auringon ympäri, ja tämä on noin 365,24 vuorokautta. Vuosi on siis oikeasti noin neljännesvuorokauden pidempi kuin tasan 365, jota arkisissa laskutehtävissä käytetään nimellisenä vuoden pituutena. Vuoden lyhenne on yleiskielessä v ja kansainvälisesti a – latinan sanasta *annus*.
- Kuukausi (suomen kielen lyhenne kk) määritellään ajaksi, jona Kuu kiertää Maan yhden kerran, ja tämä on noin 29,53 vuorokautta. Jotta kalenterivuoteen saataisiin täsmälleen 12 kuukautta ja 365 vuorokautta, kuukausien pituudet on määritelty erilaisiksi. 31-päiväisiä kuukausia ovat tammi-, maaliskuu-, touko-, heinä-, elo-, loka- sekä joulukuu, 30-päiväisiä ovat huhti-, kesä-, syys- sekä marraskuu, ja helmikuussa on tavallisesti 28 vuorokautta.
- Koska vuorokausi on oikeasti lyhyempi kuin nimellinen 24 tuntia, on otettu käyttöön karkausvuosi, jolla kompensoidaan vuorokausien ”väärää” kestoa gregoriaanisessa kalenterissa. Karkausvuosina helmikuussa on ylimääräinen päivä, eli helmikuu kestääkin 29 vuorokautta ja koko vuosi 366 vuorokautta. Jos päivien tarkka määrä on hyvin olennaista – esimerkiksi korkolaskuissa – karkausvuodet ja kuukausien vaihtelevat pituudet otetaan huomioon myös lukiomatematiikan tehtävissä.
- Viikon pituus on vaihdellut niin ajan kuin paikankin mukaan. Tämän hetkinen yleisin viikon pituus (seitsemän päivää) on sekin mielivaltainen yhteiskunnallinen päätös, eikä se perustu taivaankappaleiden liikkeisiin kuten vuorokauden, kuukauden ja vuoden tapaukset. Yhteen kalenterikuukauteen mahtuu hieman yli neljä kokonaista viikkoa ja vuoteen hieman yli 52 kokonaista viikkoa. Suomen kielessä viikko voidaan lyhentää vk.

- a) Kuinka monta tuntia maaliskuu kestää (nimellisten kestojen mukaan)?
- b) Naisten keski-ikä Suomessa vuoden 2008 tilastoista laskettuna oli 83,01 vuotta. Kuinka monta kokonaista viikkoa ”keskivertoinen” elää tämän perusteella?
- c) Kuinka monta vuorokautta pitkä on puolen kalenterivuoden ajanjakso 5.3.–5.9.? Oletamme, että vuosi ei ole karkausvuosi.
- d) Kuinka monta päivää kestää kymmenen vuoden ajanjakso, joka alkaa vuoden 2000 alusta?

Ratkaisu. a) Lasketaan suoraan auki yksiköiden määritelmien avulla:

1 kk = 31 d = 31 · 24 h = 744 h. (Huomaa, että maaliskuussa on 31 päivää.)

b) Koska kyseessä on keskimääräinen arvo, emme voi tarkastella erikseen karkausvuosia tai kuukausien vaihtelevia pituuksia. Oletetaan vuoden pituudeksi 365 päivää, jolloin päiviä on yhteensä

$83,01 \text{ a} = 83,01 \cdot 365 \text{ d} = 30\,298,65 \text{ d}$. Koska määritelmällisesti nykyviikossa on seitsemän päivää, viikkojen määräksi saadaan $\frac{30\,298,65 \text{ d}}{7} \approx 4\,328,38 \text{ vk}$.

Koska kysyttiin vain kokonaisia viikkoja, vastaus on 4 328 viikkoa.

c) Jaksolla on kaksi epätäyttä kuukautta ja viisi kokonaista kuukautta.

Kokonaiset kuukaudet ovat huhtikuu (30 päivää), toukokuu (31 päivää), kesäkuu (30 päivää), heinäkuu (31 päivää) ja elokuu (31 päivää) – yhteensä 153 päivää. Ei-kokonaiset kuukaudet ovat maaliskuu (31 päivää) ja syyskuu (30 päivää), joista maaliskuun osaan kuuluu $31 - 5 + 1 = 27$ päivää. (Plus yksi sen vuoksi, että myös aloituspäivä lasketaan.) Huomaa, että voi olla epäselvää, lasketaanko päivämäärähaarukan viimeinen päivämäärä laskuihin. Jos puolivuosisijakso päättyy 5.9., mutta viimeinen kokonainen päivä on 4.9., niin syyskuun puolelle mahtuu neljä vuorokautta. Tällöin vuorokausien kokonaismäärä on $153 + 27 + 4 = 184$.

d) Kyseiseen kymmenen vuoden ajanjaksoon lasketaan kokonaisuudessaan vuodet 2000–2009. Karkausvuosia ajanjaksolle mahtuu kolme: 2000, 2004 ja 2008, ja loput seitsemän vuotta ovat 365 päivän pituisia. Päiviä on siis yhteensä $7 \cdot 365 + 3 \cdot 366 = 3\,653$.

Sekunteja ei enää jaeta pienempiin osiin 60-järjestelmän mukaan vaan käytetään tavallisia kymmenjärjestelmän jakoja ja kerrannaisyksiköiden etuliitteitä.

ESIMERKKI 1.92

- a) Ajanottoon tarkoitettu sekuntikello saattaa näyttää tuloksen muodossa 34.56.78. Tämä tarkoittaa 34 minuuttia, 56 sekuntia ja 78 sadasosasekuntia.
- b) Kun eläinten hermosolut aktivoituvat tai sydämessä tapahtuu sähköistä toimintaa, yksittäisten tapahtumien kestoa mitataan yleensä millisekunneissa.

Aikaa sisältävistä johdannaisuureiden yksiköistä kannattaa hallita ainakin nopeuden yksiköt metriä sekunnissa ja kilometriä tunnissa.

ESIMERKKI 1.93

Pikajuoksija Usain Boltin huippunopeudeksi 100 metrin juoksukilpailussa mitattiin 12,2 m/s. Janin polkupyörän huippunopeus alamäessä oli 42,5 km/h. Kumman huippunopeus oli suurempi?

Ratkaisu. Muunnetaan yksiköt vastaamaan toisiaan, jolloin luvuista tulee keskenään vertailukelpoisia. Janin polkupyörän huippunopeus oli 42,5 km/h = $42,5 \cdot (1\,000\text{ m})/\text{h} = 42\,500\text{ m/h} = 42\,500\text{ m}/(3\,600\text{ s}) = \frac{42\,500}{3\,600}\text{ m/s} \approx 11,8\text{ m/s}$. Bolt oli siis pyöräilevää Jania nopeampi. Samaan tulokseen olisi päädytty, jos olisi muutettu Boltin juoksunopeus yksikköön km/h ja verrattu sitä Janin pyöräilyn nopeuteen.

SI:n ulkopuolisia yksiköitä

SI-järjestelmä ei ole ainoa käytetty mittayksikköjärjestelmä. Esimerkiksi niin kutsutussa brittiläisessä mittayksikköjärjestelmässä (*imperial*) pituutta voidaan mitata esimerkiksi tuumissa. Yksi tuuma (merkitään 1") vastaa 2,54 senttimetriä, ja yhteen jalkaan (1') menee täsmälleen 12 tuumaa. Massan perusyksikkönä brittiläisessä mittayksikköjärjestelmässä käytetään paunaa.

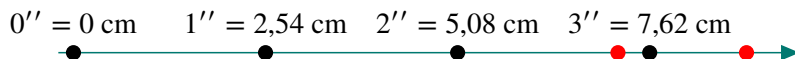
Suure	Yksikkö	Yksikön tunnus	SI-järjestelmässä
pituus	jalka	' (tai ft)	30,48 cm
pituus	tuumaa	" (tai in)	2,54 cm
massa	pauna	lb	453,59237 g
tilavuus	gallona (neste, USA)	gal	3,785441784 l

Tuumien tai paunojen avulla ilmaistut suureet voidaan muuntaa SI-järjestelmään yllä olevassa taulukossa näkyvien suhdelukujen avulla.

ESIMERKKI 1.94

Kuinka monta senttimetriä on 3,5 tuumaa? Entä kuinka monta tuumaa on 7,2 senttimetriä?

Ratkaisu. Yksi tuuma vastaa 2,54 senttimetriä, joten kaksi tuumaa vastaa 5,08 senttimetriä jne.



Tuumat saadaan siis senttimetreiksi kertomalla luvulla 2,54. Näin ollen $3,5'' = 3,5 \cdot 2,54 \text{ cm} \approx 8,9 \text{ cm}$. Senttimetrien muuntaminen tuumiksi onnistuu vastaavasti *jakamalla* luvulla 2,54. Näin ollen $7,2 \text{ cm} \approx 2,8''$, koska $7,2 : 2,54 \approx 2,8$.

1.9.5 YKSIKÖIDEN YHDISTÄMINEN LASKUISSA

Jos lausekkeessa on useita termejä, joissa on samoja yksiköitä, nämä voidaan yhdistää yksikön muuttumatta. Samat suureet voi sekä laskea yhteen että vähentää toisistaan osittelulain nojalla. Eri suureiden yhteen- ja vähennyslasku ei ole määritelty – mitä tarkoittaisikaan ”kolme metriä plus kaksi grammaa”?

ESIMERKKI 1.95

Täysin perusteltuna ja aukikirjoitettuna kahden mielivaltaisen massan, 1,2 grammaa ja 2,6 grammaa, summa olisi:

$$\begin{aligned} &1,2 \text{ g} + 2,6 \text{ g} \\ &= 1,2 \cdot \text{g} + 2,6 \cdot \text{g} && \text{merkattu yksiköt selvästi tuloina} \\ &= (1,2 + 2,6) \cdot \text{g} && \text{vaihdantalaki ja osittelulaki} \\ &= (1,2 + 2,6) \text{ g} && \text{merkitty yksikkö taas vain lyhyen välin avulla} \\ &= 3,8 \text{ g} && \text{laskettiin summa} \end{aligned}$$

Näiden useiden vaiheiden tarkoitus oli vain perustella, miten laskut suureilla toimivat. Yleensä näitä tarkkoja merkitsemiskäytäntöjä esille tuovia välivaiheita ei kirjoiteta, vaan käytännössä lyhyt lasku riittää: $1,2 \text{ g} + 2,6 \text{ g} = 3,8 \text{ g}$.

Koska yksiköitä voidaan kohdella laskuteknisesti kuin lukuja, niin niitä voi myös kertoa ja jakaa keskenään. Tutut potenssisäännöt sekä rationaalilukujen murtolu-

kuesityksen laskusäännöt pätevät. Kerrannaisyksiköiden etuliitteet voi aina muuttaa tarvittaessa kymmenpotenssimuotoon tai murtoluvuiksi.

ESIMERKKI 1.96

Laske.

$$\text{a) } 1,21 \frac{\text{mg}}{\text{ml}} \cdot 2,00 \text{ ml} = 1,21 \cdot 2,00 \cdot \frac{\text{mg}}{\text{ml}} \cdot \text{ml} = 2,42 \cdot \frac{\text{mg} \cdot \text{ml}}{\text{ml}} = 2,42 \text{ mg}$$

b) Suorakulmion muotoisen pöydän pituus (karkeasti mitattuna) on 5,9 m, ja pöydän leveydeksi saadaan tarkalla mittauksella 1,7861 m. Pöydän pinta-ala saadaan tällöin kertolaskulla $5,9 \text{ m} \cdot 1,7861 \text{ m} = 10,53799 \text{ m}^2$. Ei ole perusteltua olettaa pöydän pinta-alan olevan karkean mittauksen vuoksi todellakin noin tarkasti tiedossa; pyöristys tehdään epätarkimman lähtöarvon mukaisesti kahteen merkitsevään numeroon: $5,9 \text{ m} \cdot 1,7861 \text{ m} = 10,53799 \text{ m}^2 \approx 11 \text{ m}^2 =$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 234 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} 0,10 \text{ m}^3 &= 234 \cdot 0,10 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot \text{m}^3 = 23,4 \frac{\text{kg m}^3}{(\text{dm})^3} = 23,4 \frac{\text{kg m}^3}{(10^{-1} \text{ m})^3} = \\ &= 23,4 \frac{\text{kg m}^3}{(10^{-1})^3 \text{ m}^3} = 23,4 \frac{\text{kg m}^3}{10^{-3} \text{ m}^3} = 23,4 \frac{\text{kg}}{10^{-3}} = 23,4 \cdot 10^3 \text{ kg} = 23\,400 \text{ kg} \approx \\ &23\,000 \text{ kg} \end{aligned}$$

ESIMERKKI 1.97

Koska kaikilla eliöillä ei ole samanlaista aineenvaihduntaa, jotkin ravintoaineet, jotka toiselle ovat välttämättömiä, voivat olla toiselle hyvin myrkyllisiä.

Myrkyllisyys ei ole koskaan vain aineen tai yhdisteen ominaisuus, vaan myrkyllisyys on aina riippuvaista annoksesta. Siinä, missä ihminen sietää suklaata hyvin, on se verrattain pieninäkin annoksina haitallista esimerkiksi kissoille ja koirille. Suklaan olennaisin koirille haitallinen yhdiste on kofeiinille sukua oleva teobromiini (kaakaopavun sisältävän kasvisuvun *Theobroma*, kreikk. ”jumalten ruoka”, mukaan), jota saattaa yhdessä kilogrammassa tummaa suklaata olla enemmän kuin 14 grammaa. Teobromiinipitoisuutta voidaan siis merkitä $14 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$, missä yksikön osoittaja viittaa teobromiinin massaan ja nimittäjän yksikkö tumman suklaan massa. (Tarvittaessa tämä tietenkin sievenee dimensiottomaan muotoon

$$14 \frac{\text{g}}{\text{kg}} = 14 \frac{\text{g}}{1\,000 \text{ g}} = \frac{14}{1\,000} \frac{\text{g}}{\text{g}} = \frac{14}{1\,000} \cdot 1 = \frac{14}{1\,000} = 0,014.)$$

Eri aineiden myrkyllisyyttä eläimille kuvataan yleensä niin sanottulla LD_{50} -arvolla (engl. *lethal dose*) eli annoksella, jolla puolet (50 prosenttia) sille altistuneista kuolee. LD_{50} -arvot annetaan yleensä aineen massan ja eläimen massan suhteena; suurempi eläin kestää suuremman annoksen, koska myrkky jakautuu laajemmalle alueelle ja laimenee. Vertailuarvon yhteydessä kerrotaan myös, mistä eläinlajista oli kyse ja millä tavalla – nieltynä, hengitettynä, ...–

altistus tapahtui. Koirien ja syödyn teobromiinin tapauksessa $LD_{50} = 300 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$. Toinen tärkeä myrkyllisyyden indikaattori on TD_{Lo} (engl. *lowest toxic dose*) eli pienin koskaan dokumentoitu annos, joka on johtanut myrkytysoireisiin.

Koirille $TD_{Lo} = 16 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$.

Sinulla on kotona cavalierkingcharlesinspanielinarttu (6 kg), ja unohdat kauppaan lähtiessäsi sängylle suklaapatukan (45 grammaa tummaa suklaata). Kotiin palatessasi huomaat koirasi syöneen koko patukan. Onko koirasi akuutissa myrkytysvaarassa? Entä jos koirasi olisi suurikokoinen bernhardinkoira (jopa 120 kg)?

Ratkaisu. Lasketaan ensin, kuinka paljon syödyssä suklaassa oli teobromiinia. Suhteutetaan se sitten koiran massaan ja verrataan myrkyllisyyden vertailuarvoihin.

Tummassa suklaassa on teobromiinia $14 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$ ja suklaata syötiin 45 g. Huomaa, että edeltävän suureen yksikön *nimittäjä* kuvaa suklaan massaa. Kertolaskulla suklaan massa supistuu pois ja jäljelle jää teobromiinin massa:

$4 \frac{\text{g}}{\text{kg}} \cdot 45 \text{ g} = 14 \cdot 45 \frac{\text{g}}{10^3 \text{ g}} \text{ g} = 630 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 630 \text{ mg}$. Koirasi söi teobromiinia siis yhteensä 630 milligrammaa. Suhteutetaan tämä nyt koiran massaan; yksiköt täsmäävät jo valmiiksi myrkyllisyyden vertailuarvoihin:

$\frac{630 \text{ mg}}{6 \text{ kg}} = \frac{630}{6} \frac{\text{mg}}{\text{kg}} = 105 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$. Saatu $105 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$ ei yllä vielä LD_{50} :n tasolle, mutta ylittää TD_{Lo} -arvon. (Käytännössä kannattaa olla välittömästi yhteydessä eläinlääkäriin ja yrittää saada koira oksentamaan.)

Suuremman koiran tapauksessa teobromiinin ja koiran massan suhteeksi saadaan $\frac{630 \text{ mg}}{120 \text{ kg}} = \frac{630}{120} \frac{\text{mg}}{\text{kg}} = 5,25 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$, joka on selvästi alle molempien vertailuarvojen. (Kuitenkin kannattaa olla yhteydessä eläinlääkäriin.)

ESIMERKKI 1.98

Keskinopeus v_k voidaan laskea kaavasta $v_k = \frac{s}{t}$, missä s on kuljettu matka ja t matkaan käytetty aika. Tästä voidaan johtaa (ks. luku Yhtälöt) kaava, jolla voidaan laskea matkan kulkemiseen kulunut tai kuluva aika: $t = s/v_k$, missä s on matkan pituus ja v_k on nopeus. Lasketaan, kuinka kauan kestää 300 metrin matka nopeudella 7 m/s.

Sijoitetaan kaavaan yksikköineen $s = 300 \text{ m}$ ja $v_k = 7 \text{ m/s}$ ja käytetään

rationaalilukujen laskusääntöjä, jolloin saadaan:

$$t = \frac{100 \text{ m}}{7 \text{ m/s}} = \frac{100}{7} \cdot \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{100}{7} \cdot \frac{\text{m}}{1} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \frac{100}{7} \cdot \frac{\cancel{\text{m}}\text{s}}{\cancel{\text{m}}} = \frac{100}{7} \text{ s} \approx 14 \text{ s}$$

Joskus kahdesta suureesta pitää saada kolmas, vaikka käytössä ei ole tunnettua tai erikseen opetettua kaavaa, joka selittäisi näiden yhteyden. Tällöin oljenkortena on, että suoritetaan suureille kertolasku tai jakolasku sen mukaan, millä saadaan vastaukseen haluttu yksikkö. (Monimutkaisissa tilanteissa – joita arkisovellukset eivät yleisesti ottaen ole – tämä ei takaa lukuarvoltaan oikeaa vastausta, vaan ilmiön taustalla oleva fysiikka voi antaa hyvin kaavan, joka sisältää muutakin kuin yksinkertaista kerto- ja jakolaskua.³ Näin voi kuitenkin usein välttää kaavanpyörittelyn yksinkertaisissa tapauksissa kuten keskinopeuden laskemisessa.)

ESIMERKKI 1.99

- a) Pähkinöiden kilohinta voidaan esittää yksikössä €/kg. Jos halutaan selvittää, paljonko jokin määrä (kilogrammoissa) pähkinöitä maksaa, vastaukseen halutaan yksiköksi vain eurot. Millä laskutoimituksella päästään kilogrammoista nimittäjässä eroon? Jos pähkinöiden määrä kilogrammoina jaettaisiin kilohinnalla yksiköksi tulisi (rationaalilukujen laskusääntöjen perusteella) $\frac{\text{kg}}{\text{kg}} = \text{kg} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{€}} = \frac{\text{kg}^2}{\text{€}}$, mikä ei ole oikein. Jos jakolasku tehtäisiin toisinpäin eli $\frac{\text{€}}{\text{kg}}$, tulisi yksiköksi $\frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \frac{1}{\text{kg}}} = \frac{\text{€}}{\text{kg}^2}$, joka sekään ei ole oikein. Kertolaskulla sen sijaan onnistuu: $\text{kg} \cdot \frac{\text{€}}{\text{kg}} = \text{€}$. Kilohinta tulee siis kertoa kilogrammojen määrällä, jotta vastaukseksi saataisiin eurot.
- b) Lasketaan pähkinöiden kilohinnan (€/kg) ja käytettävissä olevan rahamäärän (€) avulla, kuinka paljon (kg) pähkinöitä saadaan ostettua. Huomataan, että vain jakolaskulla $\frac{\text{rahamäärä}}{\text{kilohinta}}$ saadaan haluttu yksikkö eli kilogrammat: $\frac{\text{€}}{\frac{\text{€}}{\text{kg}}} = \text{€} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{€}} = \text{kg}$. Saatava pähkinöiden massa selviää siis jakamalla käytettävissä olevan rahamäärän kilohinnalla.

Joskus tehtävissä saatetaan vaatia yksiköiden pyörittelyä, vaikka tilanteen fysiikallinen tausta olisi uusi ja suureet ennestään tuntemattomia.

3. <http://xkcd.com/687/>

Tehtäviä

Opi perusteet

144. Onko annettu suure skalaarisuure? Jos kyllä, mainitse esimerkkinä jokin yksikkö (koko nimi ja lyhenne), jota kyseisen ominaisuuden mittaamiseen käytetään.

- a) energia
- b) lämpötila
- c) kiihtyvyys
- d) massa
- e) tiheys

145. Esitä ilman etuliitettä tai kymmenpotenssimuotoa.

- a) 0,5 dl
- b) 233 mm
- c) 33 senttimetriä
- d) 16 kg
- e) 2 MJ
- f) 4 kubitavua
- g) 0,125 Mit

146. a) Elektroniikkayhtiö on ilmoittanut, että laitteen täyteen ladattu akku kestää käyttöä 450 minuuttia. Laitetta on käytetty lataamisen jälkeen 3 h 30 min. Kuinka monta tuntia akun voi olettaa vielä kestävän?

b) Elokuva kestää 142 minuuttia ja näytös alkaa klo 17.30. Jos elokuvan alussa on lisäksi (tasan) 15 minuuttia mainoksia, moneltako elokuva loppuu?

147. Muuta seuraavat pituudet SI-muotoon (1 tuuma = 2,54 cm, 1 jaardi = 0,914 m, 1 jalka = 0,305 m, 1 maili = 1,609 km).

- a) 5 tuumaa senttimetreiksi
- b) 0,3 tuumaa millimetreiksi
- c) 79 jaardia metreiksi
- d) 80 mailia kilometreiksi
- e) 5 jalkaa ja 7 tuumaa senttimetreiksi
- f) 330 jalkaa kilometreiksi

148. a) Laske pöydän pinta-ala neliösenttimetreinä mittaustarkkuus huomioiden, kun suorakaiteen muotoisen pöytälevyn sivujen pituuksiksi on mitattu 72,5 cm ja 81,5 cm.

b) Kuinka monta litraa maitoa mahtuu $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$ -laatikkoon?

149. Laske ja sievennä.

a) $3,0\text{ cm} \cdot 2,5\text{ cm} \cdot 6,0\text{ cm}$

b) $0,4\text{ km} : 8\text{ m/s}$

c) $2\text{ g} : 50\text{ mg/ml}$

d) $3,0\text{ ml} \cdot 25\text{ mg/ml}$

e) $150\text{ m} : 3\text{ m/s}$

f) $3,0\text{ g} : 2,0\text{ dm}^2$

150. Laske $4,0 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 2,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 3,0\text{ mm}^3$.

151. Ruokakaupassa perunoiden kilohinta on $0,81 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$ ja banaanien kilohinta $1,04 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$. Pikku-Kallella on kaupparahaa 5 euroa, ja hän ostaa kolme kiloa perunoita. Keskimääräisen banaanin massa on 120 grammaa. Rahamäärät esitetään sentin tarkkuudella ja massat kymmenen gramman tarkkuudella.

a) Kuinka paljon rahaa perunoihin kuluu?

b) Kuinka paljon rahaa jää perunoiden oston jälkeen jäljelle?

c) Kuinka monta kilogrammaa banaaneja hän voisi vielä ostaa perunoiden lisäksi?

d) Kuinka monta (kokonaista) banaania hän saisi korkeintaan ostettua?

e) Kuinka paljon banaanit maksaisivat?

f) Kuinka paljon rahaa jäisi jäljelle banaanienkin oston jälkeen?

152. Liuoksen pitoisuus (massakonsentraatio) voidaan laskea kaavalla $c = m/V$, missä c on pitoisuus, m on liuenneen aineen massa ja V on liuoksen tilavuus.

a) Jos kaavassa massan yksikkönä on milligrammat ja tilavuuden yksikkönä millilitrat, niin saadaan pitoisuuden yksiköksi?

b) Laske suolaliuoksen pitoisuus, kun 4,5 grammaa suolaa on liuotettu 500 millilitraan liuosta.

153. Auto ajaa maantiellä nopeudella 90 km/h.

a) Esitä nopeus metreinä sekuntia kohden.

b) Ihmisen reaktioaika (aika tilanteen huomaamisesta jarrutuksen alkuun) on tavallisesti noin yksi sekunti – väsyneenä ja humalassa paljon pidempi. Jos kuljettajan reaktioaika on etanolin vaikutuksen alaisena 2,2 sekuntia ja tielle hyppää hirvi, niin kuinka monta metriä auto on jo ehtinyt edetä ennen kuin jarrutus alkaa?

154. Maailman nopein kamera vuonna 2014 otti 4,4 biljoonaa kuvaa sekunnissa.

a) Esitä kymmenpotenssimuodossa sievennettyinä tarkkana arvona, kuinka monta sekuntia yhden kuvan ottaminen (keskimäärin) kestää.

b) Kuinka monta kokonaista nanosekuntia kestää ottaa kyseisellä kameralla miljoonaa kuvaa?

155. USB (engl. *Universal Serial Bus*) on yleinen teknologia erilaisten lisälaitteiden yhdistämiseksi tietokoneisiin. Vuonna 2008 esitelty USB:n versio 3.0 on yli kymmenen kertaa nopeampi kuin USB 2.0, ja USB 3.0:n suurin tiedonsiirtonopeus on jopa 5 Gb/s.

a) Kuinka nopea USB 3.0 on (nopeimmillaan) megatavuina sekunnissa?

b) Kuinka kauan kyseisellä nopeudella kestää siirtää 13 Git:n kokoinen Blu-ray-elokuva ulkoiselle kiintolevylle? Oletetaan, että mikään muu siirtovaihe ei toimi pullonkaulana.

156. (YO K00/3) Suorakulmaisen särmiön muotoinen hautakivi on 80 cm korkea, 2,10 m pitkä ja 32 cm leveä. Voidaanko kivi nostaa nosturilla, joka pystyy nostamaan enintään kahden tonnin painoisen kuorman? Hautakiven tiheys on $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. [Suorakulmaisen särmiön tilavuus on sen kolmen pituusdimension eli korkeuden, leveyden ja syvyyden tulo.]

Hallitse kokonaisuus

157. Pudotat pallon kädestäsi lattialle. Pallo pomppaa ensin metrin korkeudelle ja sen jälkeen jokaisen pompun korkeus on aina puolet edellisestä korkeudesta. Kuinka korkea on pallon 5. pomppu? Entä 13. pomppu?

158. Ympyrän mallisen pöytäliinan halkaisija on 1,2 m. Mikä on pöytäliinan pinta-ala? Ympyrän pinta-ala A voidaan laskea kaavalla $A = \pi r^2$, missä r on pöytäliinan säde eli puolet halkaisijasta.

159. Jemina on menossa bussilla lukioon. Kahden bussipysäkin, joiden välillä oikea rakennuksen sisäänkäynti sijaitsee, välinen etäisyys on 600 metriä. Sisäänkäynti sijaitsee tulosuunnasta mitattuna 200 metriä ennen jälkimmäistä pysäkkiä. Bussin keskinopeus pysäkkien välillä on 28 km/h ja Jemina itse viipottaa pysäkiltä kohteeseensa nopeudella 8 km/h. Kummalla pysäkillä kannattaa jäädä pois, jotta hän pääsee mahdollisimman nopeasti (=aikaisin) perille?

160. Astmalääke Bricanylia annetaan injektiona 30 kg painavalle lapselle. Bricanyl-injektionesteen vahvuus on 0,35 mg/ml ja annos 11 $\mu\text{g/kg}$. Kuinka monta mikrolitraa injektioestettä lapsi saa? Anna vastaus 1 μl :n tarkkuudella.

161. Erään antibioottimikstuuran vahvuus on 0,23 mg/ml. Lapselle annostus on 1. päivänä 42 mg (aloitusannos), ja 2.–7. päivänä 12 mg (ylläpitoannokset). Mikstuuran pakkauskoko on 90,0 ml. Kuinka monta pakkausta tarvitaan, ja montako millilitraa jää käyttämättä? Ilmoita tulos 0,1 ml:n tarkkuudella.

Lisää tehtäviä

162. Muuta sekunneiksi

- a) 1 h 42 min
- b) 3 h 32 min
- c) 1,25 h
- d) 4,5 h.

163. Muuta minuuteiksi

- a) 1 h 17 min
- b) 2 h 45 min
- c) 1,5 h
- d) 1,75 h

164. Muuta seuraavat ajat tunneiksi kolmen desimaalin tarkkuudella.

- a) 73 minuuttia
- b) 649 sekuntia
- c) 15 minuuttia ja 50 sekuntia
- d) 42 minuuttia ja 54 sekuntia

165. Muuta tunneiksi ja minuuteiksi

- a) 125 min
- b) 667 min
- c) 120 min
- d) 194 min.

166. Laske ja ilmoita tulos sopivissa yksiköissä niin, että luvun kokonaisosa on mahdollisimman pieni ja siinä on vähintään yksi numero.

- a) 0,3 km+200 m
- b) 0,04 m+10 mm
- c) 0,4 km+7 000 m+1 000 000 mm
- d) 0,2 cm+4 cm.

167. Nimeltä mainitsematon henkilö käveli kilometrin kahdessatoista minuutissa. Esitä tämä nopeus

- a) kilometreinä tunnissa
- b) metreinä sekunnissa.
- c) Kuinka monta sekuntia kyseisellä kävelynopeudella kestää kulkea kymmenen metrin matka?

168. Jasper-Korianteri ja Kotivalo vertailivat keppejään. Jasper-Korianteri mittasi oman keppinsä 5,9 tuumaa pitkäksi ja Kotivalo omansa 14,8 senttimetriä pitkäksi. Kummalla on pidempi keppi?

169. Liisa ohjelmoi tietokoneensa sammumaan 12 400 sekunnin kuluttua, kun kello on 1.45. Moneltako Liisan tietokone sammuu – minuutin tarkkuudella?

170. Laske oma pituutesi ja painosi tuumissa ja paunoissa.

171. (Muunnelma fyysikko Enrico Fermin esittämästä ongelmasta.) Chicagossa asuu osapuilleen 5 000 000 asukasta. Kussakin kotitaloudessa asuu keskimäärin kaksi asukasta. Karkeasti joka kahdennessakymmenennessä kotitaloudessa on säännöllisesti viritettävä piano. Säännöllisesti viritettävät pianot viritetään keskimäärin kerran vuodessa. Pianonvirittäjällä kestää noin kaksi tuntia virittää piano, kun matkustusajat huomioidaan. Kukin pianonvirittäjä työskentelee kahdeksan tuntia päivässä, viisi päivää viikossa ja 50 viikkoa vuodessa. Mikä arvio Chicagon pianonvirittäjien lukumäärälle saadaan näillä luvuarvoilla?

172. Newtonin painovoimalain mukaan kaksi kappaletta, joiden välinen etäisyys (metreinä) on R ja joiden massat (kilogrammoina) ovat m_1 ja m_2 , vetävät toisiaan puoleensa voimalla $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}$, missä γ on niin sanottu universaali painovoimavakio ja voima F ilmoitetaan newtoneina. Päätele painovoimavakion yksikkö, newtoneita sisältämättömässä muodossa, kun lisäksi tiedetään, että $F = ma$, missä massa m on kilogrammoina ja kiihtyvyys a on yksikössä $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Opetus.tv: *Neliöjuuri* (2.48, 6.30 ja 7.53)

<http://opetus.tv/maa/maa1/neliojuuri/>

1.10.1 NELIÖJUURI

Ajatellaan, että neliön pinta-ala on a . Halutaan tietää, mikä on kyseisen neliön sivun pituus. Vastausta tähän kysymykseen kutsutaan luvun $a \geq 0$ **neliöjuureksi** ja merkitään $\sqrt{a}$. Luvun a neliöjuuri on myös yhtälön $x^2 = a$ ratkaisu. Tällöin täytyy kuitenkin huomata, että myös luku $x = -\sqrt{a}$ toteuttaa kyseisen yhtälön. Neliöjuurella tarkoitetaan kyseisen yhtälön epänegatiivista ratkaisua. Tämä on luonnollista, koska neliön sivun pituus ei voi olla negatiivinen luku.

Neliöjuuri

Luvun a neliöjuuri on epänegatiivinen luku, jonka neliö on a . Tämä voidaan ilmaista myös $(\sqrt{a})^2 = a$.

Rajoitumme lukiokursseilla käsittelemään reaalityyppisiä lukuja, emmekä voi ottaa neliöjuurta negatiivisesta luvusta, koska jokaisen reaalityyppisen luvun neliö on positiivinen tai nolla. (Toisin sanoen ei ole esimerkiksi mitään sellaista reaalityyppistä lukua a , että $a^2 = -2$.) Huomionarvoista on tällöin, että parillisen juuren tuloksena ei voi myöskään olla negatiivinen luku.

ESIMERKKI 1.100

Laske

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt{144}$

c) $\sqrt{4\,471}$.

Ratkaisu. a) Laskimella tai päässä laskemalla saadaan, että $\sqrt{4} = 2$, koska $2 \geq 0$ ja $2^2 = 4$.

b) $\sqrt{144} = 12$. Tämä voidaan vielä tarkistaa laskemalla $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$.

c) $\sqrt{4471} \approx 66,9$. Vertailun vuoksi laskimella saadaan myös $67 \cdot 67 = 4\,489$.

Vastaus. a) 2

b) 12

c) 66,9

1.10.2 KUUTIOJUURI

Kuution tilavuus on a . Halutaan tietää, mikä on kyseisen kuution sivun pituus. Vastausta tähän kysymykseen kutsutaan luvun $a \geq 0$ **kuutiojuureksi** ja merkitään $\sqrt[3]{a}$. Luvun a kuutiojuuri on myös yhtälön $x^3 = a$ vastaus.

Kuutiojuuri

Luvun a kuutiojuuri on luku, jonka kuutio on a . Tämä voidaan ilmaista myös $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Jos $a < 0$, niin kysymys kuutiosta jonka tilavuus on a , ei ole mielekäs. Tästä huolimatta kuutiojuuri määritellään myös negatiivisille luvuille. Syy tähän on, että yhtälöllä $x^3 = a$ on tässäkin tapauksessa yksikäsitteinen ratkaisu. Positiivisen luvun kuutiojuuri on aina positiivinen ja negatiivisen luvun kuutiojuuri on aina negatiivinen luku. Kuutiojuuren voi siis ottaa mistä tahansa reaalityluvusta.

ESIMERKKI 1.101

Laske

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[3]{1\,397}$

c) $\sqrt[3]{2\,197}$.

Ratkaisu. a) Laskimella tai päässä laskemalla saadaan, että $\sqrt[3]{27} = 3$, koska $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

b) $\sqrt[3]{1\,397} \approx 11,18$

c) $\sqrt[3]{2\,197} = 13$

Tämä voidaan vielä tarkistaa laskemalla $13^3 = 13 \cdot 13 \cdot 13 = 2\,197$.

Vastaus. a) 3

b) 11,18

c) 13



Opetus.tv: *Yleinen juuri* (5.17, 3.23, 6.27, 3.39 ja 3.24)

<http://opetus.tv/maa/maa1/yleinen-juuri/>

1.10.3 YLEINEN JUURI

Yhtälön $x^n = a$ ratkaisujen avulla voidaan määritellä **n :s juuri** mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle n . Neliö- ja kuutiojuurten tapauksessa voidaan kuitenkin huomata, että kuutiojuuri on määritelty kaikille luvuille, mutta neliöjuuri vain epänegatiivisille luvuille. Tämä toistuu myös korkeammissa juurissa: parilliset ja parittomat juuret on määritelty eri joukoissa.

Juurimerkinnällä $\sqrt[n]{a}$ (luetaan n :s juuri luvusta a) tarkoitetaan lukua, joka toteuttaa ehdon $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Jotta juuri olisi yksikäsitteisesti määritelty, asetetaan lisäksi, että parillisessa tapauksessa n :s juuri tarkoittaa kyseisen yhtälön epänegatiivista ratkaisua.

Parillinen juuri

Kun n on parillinen luku, luvun $a \geq 0$ n :s juuri on luku $b \geq 0$, jonka n :s potenssi on a , eli $b^n = a$. Lukua b merkitään $\sqrt[n]{a}$, eli $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Edelleen, kun n on parillinen luku, n :ttä juurta ei ole määritelty negatiivisille luvuille.

Luvun toista juurta, eli neliöjuurta $\sqrt{a}$ merkitään yleensä yksinkertaisemmin $\sqrt{a}$.

Pariton juuri

Kun n on pariton luku, luvun $a \in \mathbb{R}$ n :s juuri on yksikäsitteinen luku $b \in \mathbb{R}$, jonka n :s potenssi on a , eli $b^n = a$. Lukua b merkitään $\sqrt[n]{a}$, eli $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Erityisesti n :s juuri on määritelty parittomilla n myös negatiivisille luvuille toisin kuin n :s juuri parillisilla n .

Korkeampien juurten laskeminen tapahtuu tavallisesti laskimella kuin myös juurenotto suhteellisen monimutkaisista luvuista ja lausekkeista.

ESIMERKKI 1.102

Laske

- a) $\sqrt[4]{256}$
- b) $\sqrt[5]{-243}$
- c) $\sqrt[4]{-8}$.

Ratkaisu. a) Laskimella saadaan $\sqrt[4]{256} = 4$, koska $4^4 = 256$.

b) Laskimella $\sqrt[5]{-243} = -3$, koska $(-3)^5 = -243$.

c) Luvun -8 neljäs juuri $\sqrt[4]{-8}$ ei ole määritelty, koska minkään luvun neljäs potenssi ei ole negatiivinen.

Vastaus. a) 4

b) -3

c) ei määritelty

1.10.4 JUURTEN LASKUSÄÄNNÖT

Juurille on olemassa laskusääntöjä, jotka voivat auttaa sieventämisessä ja ratkaisujen löytämisessä.

Laskusäännöt

1. Ehdolla, että $x \geq 0$, $y > 0$ ja m sekä n ovat positiivisia kokonaislukuja.

$$1.1. \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{xy}$$

$$1.2. \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[m]{\frac{x}{y}}$$

$$1.3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

Lisäksi parillisilla $m:n$ arvoilla $\sqrt[m]{x^m} = |x|$, missä merkintä $|x|$ tarkoittaa luvun x itseisarvoa. Itseisarvo ilmaisee lukusuoralla luvun etäisyyttä nolasta, joten se on aina epänegatiivinen.

ESIMERKKI 1.103

- a) $\sqrt[6]{4^6} = |4| = 4$
- b) $\sqrt[2]{(-5)^2} = |-5| = 5$
- c) $\sqrt[12]{0^{12}} = |0| = 0$

Itseisarvo määritellään tarkemmin luvussa 3.1.

Laskusäännöt perustuvat juuren määritelmään ja potenssin laskusääntöihin. Esi-merkiksi määritelmän mukaan $\sqrt[m]{xy}$ on sellainen luku, että $(\sqrt[m]{xy})^m = xy$. Luku $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}$ täyttää edellisen vaatimuksen, sillä $(\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y})^m = (\sqrt[m]{x})^m \cdot (\sqrt[m]{y})^m = xy$.

ESIMERKKI 1.104

Laske

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$

b) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

c) $\sqrt[x]{\sqrt{4^x}}$, missä $x \in \mathbb{N}$

d) $\sqrt[8]{515^8}$.

Ratkaisu. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 48} = \sqrt{144} = 12$

b) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $\sqrt[x]{\sqrt{4^x}} = \sqrt[x^2]{4^x} = \sqrt{\sqrt[x]{4^x}} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt[8]{515^8} = |515| = 515$

Vastaus. a) 12

b) 2

c) 2

d) 515

Sievennystapana on, että juuren sisälle jätetään mahdollisimman yksinkertainen (itseisarvoltaan pieni, vähän numeroita sisältävä) luku. Tällöin pyritään jakamaan juurrettava alkulukutekijöihin, joista yhden tai useamman potenssi vastaava otetun juuren kertalukua. Vaikeissa tapauksissa sopivan tulomuodon etsimiseen voi käyttää esimerkiksi laskinta. Huomaa, että oikeita lopullisia vastauksia on vain yksi oikea, eikä optimaalisinta tulomuotoa tarvitse keksiä heti ensimmäisenä.

ESIMERKKI 1.105

Sievennä juurilausekkeet.

a) $\sqrt{20}$

b) $\sqrt{\frac{9}{16}}$

c) $\sqrt[3]{120}$

d) $\sqrt{10}$

Ratkaisu. a) Koska 20 voidaan kirjoittaa tulona $4 \cdot 5$, on $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5}$.

Juurten tulosäännön nojalla tämä voidaan kirjoittaa kahden neliöjuuren tulona $\sqrt{4}\sqrt{5}$, joka sievenee muotoon $2\sqrt{5}$, koska luku neljä on neliöluku.

b) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{3}{4}$

c) Kirjoitetaan luku 120 tulona, jossa esiintyisi jokin kuutioluku, eli jonkin kokonaisluvun kolmas potenssi. Esimerkiksi $120 = 8 \cdot 15$ kelpaa, sillä $8 = 2^3$. Tällöin $\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{8 \cdot 15} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 15} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{15} = 2\sqrt[3]{15}$. (Luvun 15 kuutiojuurta ei enää saa sievennettyä.)

d) Luvun 10 alkulukukehitelmä on $10 = 2 \cdot 5$, ja siinä ei ole yhtäkään toista potenssia, josta voisi päästä neliöjuurella eroon. $\sqrt{10}$ on siis jo mahdollisimman sievässä muodossa.

Vastaus. a) $2\sqrt{5}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $2\sqrt[3]{15}$

d) $\sqrt{10}$ (valmiiksi sievin muoto)

Tehtäviä

Opi perusteet

Laske

173. a) $\sqrt{64}$

b) $\sqrt{-64}$

c) $\sqrt[3]{64}$

d) $\sqrt[3]{-64}$

e) $\sqrt{100}$

174. a) $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[4]{-81}$

c) $\sqrt[5]{32}$

d) $\sqrt[5]{-32}$

e) $\sqrt[3]{1\,000}$

175. a) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[4]{-625}$

d) $\sqrt[8]{256}$

176. Laske.

a) $\sqrt{2}\sqrt{8}$

b) $\sqrt{3}\sqrt{5}$

c) $\sqrt{3}\sqrt{27}$

d) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{25}$

177. Laske.

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8}}$

c) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt[3]{4}$

178. Laske $\sqrt{8\,100}$ päässä ajattelemalla juurettava luku sopivana tulona.

179. Pienen kuution sivu on puolet ison kuution sivusta. Kuinka pitkä pienen kuution sivu on, jos ison kuution tilavuus on 64 yksikköä? Kuution särmän pituus on a , jos ja vain jos kuution tilavuus on a^3 .

Hallitse kokonaisuus

180. Laske laskimella neliöjuurten arvot sadasosien tarkkuudella.

a) $\sqrt{320}$

b) $\sqrt{15}$

c) $\sqrt{71}$

Laske.

181. a) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{35}}$

b) $\frac{\sqrt{64}-\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

182. Laske.

a) $\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$

b) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

183. Selvitä ilman laskinta, kumpi luvuista $3\sqrt{2}$ ja $2\sqrt{3}$ on suurempi.

184. Kumpi juurista on suurempi? Arvaa ja laske.

a) $\sqrt[3]{8}$ vai $\sqrt{16}$

b) $\sqrt{8}$ vai $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{64}$ vai $\sqrt[5]{32}$

d) $\sqrt[2]{121}$ vai $\sqrt[5]{243}$

185. Mitä tapahtuu neliöjuuren arvolle, kun juurettavaa kerrotaan luvulla 100? Miten tulos yleistyy?

186. Oletetaan, että suorakaiteen leveyden suhde korkeuteen on 2 ja suorakaiteen pinta-ala on 10 (mielivaltaista pinta-alayksikköä). Mikä on suorakaiteen leveys ja korkeus?

187. Etsi luku $a > 0$, jolle $a^4 = 83\,521$.

188. Laske ilman laskinta.

a) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$

b) $\sqrt[10]{10\,000\,000\,000}$

c) $\sqrt[5]{10\,000\,000\,000}$

189. Onko annettu juuri määritelty kaikilla luvuilla a ? Millaisia arvoja juuri voi saada luvusta a riippuen?

- a) $\sqrt[4]{a^2}$
- b) $\sqrt[4]{-a^2}$
- c) $\sqrt[4]{(-a)^2}$
- d) $-\sqrt[4]{a^2}$

190. Onko annettu juuri määritelty kaikilla luvuilla a ? Millaisia arvoja lauseke voi saada luvusta a riippuen?

- a) $\sqrt[5]{a^2}$
- b) $\sqrt[5]{a^3}$
- c) $\sqrt[5]{-a^2}$
- d) $-\sqrt[5]{a^2}$

191. Etsi positiivinen rationaaliluku a , jolla

- a) $\sqrt{a}\sqrt{2} = 4$
- b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{3} = 9$.

192. Anna esimerkki sellaisista luvuista a ja b , että $\sqrt{a^b} \neq \sqrt{a^b}$.

193. Etsi jotkin erisuuret ykköstä suuremmat luonnolliset luvut a ja b , jolla

- a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ on jokin luonnollinen luku
- b) $\sqrt[b]{a} = 2$.

194. Yksinkertaisen heilurin jaksonaika T voidaan laskea kaavalla $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, missä l on heilurin (langan tai varren) pituus metreinä, ja g on putoamiskiihtyvyys $9,81 \text{ m s}^{-2}$. Näytä sieventämällä yksiköt ja neliöjuuri, että jaksonajan yksiköksi saadaan sekunnit.

Lisää tehtäviä

195. Sievennä $(3 + \sqrt{3}x)^4 : (\sqrt{3} + x)^3$.

196. Laske laskimella likiarvot viiden merkitsevän luvun tarkkuudella. Mikä yhteys luvuilla on?

- a) $\sqrt{1^2 + 1^2}$
- b) $\frac{\sqrt{3^2 + 3^2}}{3}$
- c) $\frac{\sqrt{9^2 + 9^2}}{9}$

197. Etsi jotkin erisuuret luonnolliset luvut a ja b , jolla $\frac{\sqrt{\sqrt[n]{a}}}{\sqrt[n]{a}} = 1$.

198. Osoita vastaesimerkin avulla, että seuraavat opiskelijat ovat erehtyneet:

a) Mikael: ”Jos n :s juuri korotetaan johonkin muuhun potenssiin kuin n , myös tuloksessa esiintyy välttämättä juuri. Esimerkiksi $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ ja $\sqrt[5]{3^6} = 3\sqrt[5]{3}$.”

b) Raisa: ”Neliöjuuria sisältävän summausekkeen voi aina korottaa toiseen, jolloin neliöjuurista pääsee eroon. Esimerkiksi ja $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 = 18$.”

1.11 Murtopotenssi



Opetus.tv: *Murtopotenssi* (4.04, 3.56, 3.42 ja 3.52)

<http://opetus.tv/maa/maa1/murtopotenssi/>

Seuraavaksi tutkitaan potenssin käsitteen laajentamista tilanteeseen, jossa eksponenttina on rationaaliluku – erityisesti murtoluku. Esimerkiksi voidaan pohtia, mitä tarkoittaa merkintä $2^{\frac{1}{3}}$. Potenssin laskusääntöjen perusteella

$$(2^m)^n = 2^{mn}, \text{ kun } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Siten on luonnollista ajatella, että **murtopotenssille** $2^{\frac{1}{3}}$ pätee

$$(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2.$$

Koska luvun 2 kuutiojuuri toteuttaa yhtälön $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$, täytyy siis asettaa $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Yleisemmin asetetaan $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, kun n on positiivinen kokonaisluku ja $a \geq 0$.

Kaavan on edelleen luontevaa ajatella yleistyvän niin, että esimerkiksi

$$(2^{\frac{1}{3}})^2 = 2^{\frac{2}{3}}.$$

Yleisemmin otetaan murtopotenssin $a^{\frac{m}{n}}$ määritelmäksi

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m,$$

kun m ja n ovat kokonaislukuja ja $n > 0$.

Murtopotenssimerkinnät

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \text{ kun } a \geq 0.$$

Erityisesti $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, \text{ kun } a > 0.$$

Kun murtolukueksponentit määritellään näin, kaikki aikaisemmat potenssien laskusäännöt ovat sellaisenaan voimassa myös niille. Esimerkiksi kaavat

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^q = a^q b^q$$

pätevät kaikille rationaaliluvuille p ja q .

Huomautus määrittelyjoukosta

Murtopotenssimerkintää käytettäessä vaaditaan, että $a > 0$ myös silloin, kun n (eli juuren kantaluku) on pariton. Syy tähän on seuraava: Esimerkiksi $\sqrt[3]{-1} = -1$, koska $(-1)^3 = -1$, mutta lauseketta $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ei ole tällöin määritelty. Murtopotenssimerkinnän määrittelystä voi tällöin seurata yllättäviä ongelmia:

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1} = 1.$$

Luvun $\frac{1}{3}$ lavennus muotoon $\frac{2}{6}$ on ongelman ydin, mutta murtolukujen lavennussäännöistä luopuminen olisi myös hankalaa. Siksi sovitaan, ettei murtopotenssimerkintää käytetä, jos kantaluku on negatiivinen.

Nolla kantalukuna taas aiheuttaa ongelmia, jos eksponentti on negatiivinen. Esimerkiksi

$$0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{0},$$

jota ei ole määritelty.

ESIMERKKI 1.106

Muuta lausekkeet murtopotenssimuotoon.

a) $\sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt[4]{a^7}, a > 0$

Ratkaisu. a) $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b) $(\sqrt[4]{a})^7 = (a^{\frac{1}{4}})^7 = a^{\frac{7}{4}}$

ESIMERKKI 1.107

Sievennä lausekkeet.

a) $8^{\frac{2}{3}}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Ratkaisu. a) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

Sieventämiskäytäntö (joka pitää samalla huolta määrittelyjoukosta) on, että jos alkuperäinen lauseke on annettu juurimuodossa, niin myös lopetetaan juurimuotoon, ja toisinpäin: jos alkuperäinen lauseke on murtopotenssi, niin lopputulosta ei kirjoiteta juurena.

Tehtäviä

Opi perusteet

Muuta lausekkeet murtopotenssimuotoon.

199. a) $\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt[6]{a}$

c) $\sqrt[n]{a}$

200. a) $(\sqrt[3]{z})^6$

b) $(\sqrt[6]{y^3})$

c) $(\sqrt[5]{b})^2$

d) $(\sqrt[16]{ö^4})$

Sievennä.

201. a) $x^{\frac{1}{5}}$

b) $x^{\frac{4}{3}}$

c) $x^{\frac{8}{4}}$

d) $x^{\frac{25}{100}}$

202. a) $9^{\frac{1}{2}}$

b) $8^{\frac{1}{3}}$

c) $4^{\frac{3}{2}}$

d) $81^{\frac{3}{4}}$

Hallitse kokonaisuus

203. (YO S00/1) Sievennä seuraavat lausekkeet.

a) $(x^{(n-1)})^{(n-1)} \cdot (x^n)^{2-n}$

b) $\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$

204. Sievennä

a) $x^{-\frac{1}{3}}$

b) $x^{\frac{5}{-2}}$

c) $x^{3\frac{1}{2}}$

d) $x^{2\frac{4}{7}}$

205. Laske

a) $4^{\frac{3}{4}}$

b) $2^{\frac{5}{1}}$

c) $16^{\frac{2}{3}}$

d) $5^{\frac{5}{3}}$.

206. Muuta murtopotenssimuotoon.

a) $\sqrt{\sqrt{k}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{k}}$

c) $\sqrt{m\sqrt{m}}$

d) $\sqrt[5]{m\sqrt[7]{m}}$

207. Laske $x^{\frac{4}{3}}$, kun tiedetään, että

a) $x = 27$

b) $x^{\frac{3}{4}} = 27$

c) $x^{-\frac{3}{4}} = 27$

d) $x^{-\frac{4}{3}} = 27$

208. Sievennä lausekkeet.

a) $4 \cdot \sqrt{\frac{2x^2}{(2^x)^2}}$

b) $\left(\frac{2^{\frac{x}{y}}}{2^{\frac{y}{x}}}\right)^{xy}$

c) $\sqrt[3]{x^{\frac{1}{x}} \cdot x^{\frac{2}{x}}}$

Lisää tehtäviä

209. Sievennä.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}}$

b) $\sqrt[5]{q^2\sqrt{q}}$

c) $\left(\sqrt{P^4\sqrt{P}}\right)^3$

210. Sievennä

a) $\sqrt{\sqrt[3]{27}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[16]{\sqrt{2}^{16^2}}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{42^{22}}}}}}^3$.

211. ★ Oletetaan, että $a \leq 0$. Sievennä

a) $\frac{\sqrt[3]{a^2 - \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a}}$

b) $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2} \sqrt[3]{a^6}}{4a}}$

c) $\sqrt[7]{\frac{a - \sqrt{a^2}}{a^0}}$

d) $\sqrt{\sqrt{a^3} \left(\frac{a^7}{\sqrt[5]{a^3}} \right)^0 \sqrt{\frac{a^5}{a^2}}}$.

212. ★ Tutki laskimella, miten laskutoimitukset

$$x^{-x}, \quad x^{-x^x}, \quad x^{-x^{x^x}}, \quad \dots$$

käyttäytyvät, kun eksponenttien määrää kasvatetaan mielivaltaisen suureksi.

a) Tutki, mitä tapahtuu tapauksissa $x = 1,3$, $x = 1,7$ ja $x = 0,05$.

b) Millä luvun x positiivisilla arvoilla potenssitornien arvot vakiintuvat tiettyyn lukuun?

213. ★ Potenssitornissa $x^{x^{x^{x^{\dots}}}}$ on äärettömän monta päällekkäistä eksponenttia. Yh-

tälöllä $x^{x^{x^{x^{\dots}}}} = 2$ on yksi ratkaisu. Etsi se.

1.12 Reaaliluvut lukusuoralla

Juurten ja murtopotenssien kohdalla on huomattava, että ainoastaan joidenkin juurten ja murtopotenssien arvot ovat rationaalilukuja. Itse asiassa juurilla on seuraava mielenkiintoinen ominaisuus, jota ei tällä kurssilla todisteta:

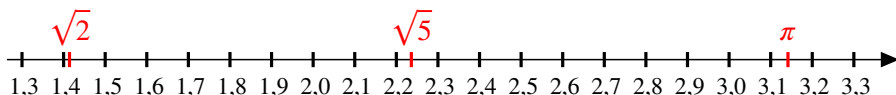
Ehto juurien irrationaalisuudelle

Jos $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{Z}$, niin $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{Q}$.

Toisin sanottuna, jos kokonaisluvusta otettu kokonaislukujuuri ei ole kokonaisluku, niin se on aina irrationaaliluku.

Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että koska mikään kokonaisluku toiseen potenssiin korotettuna ei ole 2, niin $\sqrt{2}$ on väistämättä irrationaaliluku. Irrationaalilukuja tulee siis matematiikassa vastaan varsin usein.

Irrationaalilukujen hahmottamista helpottaa se, että ne voidaan sijoittaa lukusuoralle rationaalilukujen tapaan.



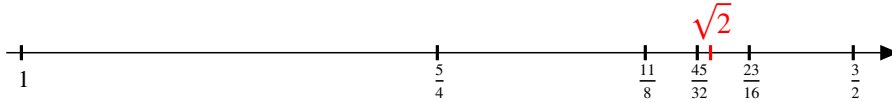
Reaalilukujen joukko muodostuu rationaalilukujen ja irrationaalilukujen joukoista. Havainnollisesti voidaan sanoa, että reaalilukujen joukko sisältää kaikki lukusuoran luvut.

Rationaaliluvut eivät täytä koko reaalilukusuoraa, mutta niitä on niin tiheässä, että jokaisen kahden eri reaaliluvun välissä on rationaalilukuja. Jokaiselle irrationaaliluvulle voidaan löytää mielivaltaisen lähellä olevia rationaalilukuarvioita. Tätä kutsutaan irrationaalilukujen approksimoinniksi rationaaliluvuilla. Esimerkiksi lukua π voidaan halutusta tarkkuudesta riippuen approksimoida rationaaliluvuilla

3; 3,1; 3,14; 3,142; 3,1416; 3,14159; 3,141593; ...

tai lukua $\sqrt{2}$ rationaaliluvuilla

$$1; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{5}{4}; \quad \frac{11}{8}; \quad \frac{23}{16}; \quad \frac{45}{32}; \quad \dots$$



Reaalilukuja koskevat laskusäännöt

Kaikki rationaalilukuja koskevat laskusäännöt pätevät myös reaaliluvuille.

Väite on uskottava, sillä reaalilukuja voi aina approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Väitteen tarkempi perusteleminen ei tämän kurssin työkaluilla vielä onnistu.

Siinä missä rationaalilukujen desimaaliesitykset ovat päätyviä tai jaksollisia, ovat irrationaalilukujen desimaaliesitykset päättymättömiä ja jaksottomia. Monissa tapauksissa on hyvin vaikeaa osoittaa luku irrationaaliseksi. Tällöin vaaditaan keinoja, jotka eivät kuulu tämän kurssin laajuuteen.

Luvun

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095048801688724209 \dots$$

desimaaliesityksessä on kyllä toistuvia kohtia, esimerkiksi numeropari 88 esiintyy kahdesti. Siinä ei kuitenkaan ole jaksoa, jonka luvut toistuisivat yhä uudestaan samassa järjestyksessä, kuten luvussa $3,80612312312312 \dots$ (Muista, että kolmen pisteen merkintää käytettäessä tulee olla yleisesti selvillä, miten desimaalikehitelmä jatkuu.)

Tehtäviä

214. Sijoita lukusuoralle luvut

$$-3, 1, 4, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \text{ ja } \sqrt{\pi}.$$

215. Piirrä samankokoiset kuvat lukusuoran väleistä, joiden päätepisteet ovat

- a) 0 ja 1
- b) 0 ja 0,1
- c) 0 ja 0,01.

Miten b-kohdan väli sijoittuu a-kohdan välille? Entä c-kohdan väli b-kohdan välille? Mikä olisi samaa logiikkaa käyttäen seuraava väli ja miten se sijoittuisi c-kohdan välille? Havainnollista piirtämällä.

216. Mihin joukoista $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ seuraavat luvut kuuluvat?

- a) -5
- b) $\frac{8}{2}$
- c) π
- d) $0,888 \dots$
- e) $2,995$
- f) $\sqrt{2}$

217. Ovatko seuraavat luvut rationaalilukuja vai irrationaalilukuja? Kunkin desimaalit noudattavat yksinkertaista sääntöä.

- a) 0,123456789101112131415 ...
- b) 2,415115115115115115115 ...
- c) 1,010010001000010000010 ...

218. a) Luku 144 on luonnollinen luku ja siten reaaliluku. Onko sen vastaluku luonnollinen luku?

b) Luku 144 on kokonaisluku ja siten reaaliluku. Onko sen käänteisluku kokonaisluku?

c) Luku 144 on rationaaliluku ja siten reaaliluku. Onko sen käänteisluku rationaaliluku?

219. Mikä on pienin lukua -3 suurempi luku

- a) kokonaislukujen
- b) luonnollisten lukujen
- c) reaalilukujen joukossa?

220. Kuinka monta

- a) luonnollista lukua
- b) kokonaislukua
- c) reaalilukua

on reaalilukujen $-\pi$ ja π välillä?

221. ★ Osoita, että

- a) jokaisen kahden rationaaliluvun välissä on rationaaliluku
- b) jokaisen kahden rationaaliluvun välillä on irrationaaliluku
- c) jokaisen kahden irrationaaliluvun välissä on rationaaliluku
- d) jokaisen kahden irrationaaliluvun välissä on irrationaaliluku.
- e) Perustele edellisten kohtien avulla, että minkä tahansa kahden luvun välissä on äärettömän monta rationaali- ja irrationaalilukua.

LUKU 2

Yhtälöt

2.1 Yhtälö

2.1.1 PERUSKÄSITTEITÄ

Yhtälö on väite kahden lausekkeen yhtäsuuruudesta.

ESIMERKKI 2.108

- a) $x + 3 = \frac{5}{7} + 2$ on yhtälö, joka väittää lausekkeiden $x + 3$ ja $\frac{5}{7} + 2$ olevan lukuarvoltaan yhtä suuret.
- b) $2 = \frac{4}{2}$ on yhtälö, joka väittää, että luku 2 voidaan esittää myös muodossa $\frac{4}{2}$.

Yhtälön päteminen

Jos yhtälön kummankin puolen lausekkeen arvo on sama, sanotaan, että **yhtälö pätee** tai että yhtälö on tosi.

ESIMERKKI 2.109

- a) Yhtälö $5 = 3$ ei päde.
- b) Yhtälö $t = t$ on tosi kaikilla muuttujan t lukuarvoilla, sillä jokainen luku on varmasti yhtä suuri itsensä kanssa.
- c) Yhtälö $x = x + 1$ on epätosi kaikilla x :n arvoilla, koska mikään luku ei voi olla yhtä suuri kuin sitä yhtä suurempi luku.
- d) Yhtälö $x + 2 = 0$ pätee vain siinä tapauksessa, että $x = -2$.

Yhtälöiden luokittelu

Aina tosi yhtälö Esimerkiksi yhtälöt $8 = 8$ ja $x = x$. Tilanteesta kytetään myös termiä **identtisesti tosi**.

Joskus tosi yhtälö Esimerkiksi yhtälö $x + 4 = 7$ on tosi, kun $x = 3$, ja epätosi muulloin.

Ei koskaan tosi yhtälö Esimerkiksi yhtälö $0 = 1$

Matematiikan sovelluksissa näistä tärkeimpiä ovat joskus (eli ehdollisesti) todet yhtälöt.

Yhtälöihin liittyviä käsitteitä

Tuntematon Luku, jonka arvoa ei tiedetä. Tuntemattomia merkitään vaihtelevilla symboleilla. Jos tuntemattomia on vain yksi, sitä merkitään yleensä kirjaimella x (alunperin kreikkalainen χ , *khi*).

Yhtälön ratkaisu(t) Muuttujan arvo(t), jolla yhtälö pätee. Kutsutaan myös yhtälön juuriksi. (Nimityksellä ei ole mitään tekemistä juurenottolaskutoimituksen kanssa.)

Yhtälön ratkaiseminen Kaikkien yhtälön ratkaisujen selvittäminen.

Huomioi, että yhtälössä voi olla useitakin eri tuntemattomia. Kaikki kirjaimet eivät myöskään ole välttämättä tuntemattomia, vaan niillä voidaan tarkoittaa myös vakioita eli muuttumattomia lukuarvoja. Esimerkiksi fysiikassa käytetään usein eri kirjaimia merkitsemään eri luonnonvakioita.

ESIMERKKI 2.110

Tarkastellaan legendaarista fysiikan yhtälöä $E = mc^2$. Tässä yhtälössä on vakio c eli valonnopeus, joka on luonnonvakio eikä siis (nykytiedon mukaan) muutu. Lisäksi yhtälössä on muuttujat E eli energia ja m eli massa. Riippuu käsiteltävästä tilanteesta, ovatko energia ja massa vakioita vai muuttujia, ja ratkaistavana tuntemattomana voi eri tilanteessa toimia mikä tahansa: E , m tai c .

2.1.2 YHTÄLÖN MUOKKAAMINEN

Yhtälön muokkaaminen

Koska yhtälön puolet ovat yhtä suuret, eli tarkoittavat täsmälleen samaa asiaa, niin jonkin yhtälön molemmille puolille tehdyn laskutoimituksen jälkeen ne ovat edelleen yhtä suuret.

ESIMERKKI 2.111

- Yhtälö $3x - 12 = \frac{6}{2x-2}$ on yhtäpitävä yhtälön $0 = 0$ kanssa, sillä se saadaan tähän muotoon tekemällä yhtäpitävyyden molemmille puolille aina samat laskutoimitukset. Yhtälön yksinkertaisemmasta esityksestä $0 = 0$ nähdään, että muuttujan x arvo ei vaikuta yhtälön ratkaisuihin. Toisin sanoen puolet ovat aina samat, olipa muuttuja x mikä tahansa luku. Yhtälö on siis aina tosi.
- Yhtälö $3x - 11 = \frac{6}{2x-2}$ on yhtäpitävä yhtälön $0 = 1$ kanssa. Jälkimmäisestä muodosta nähdään, ettei yhtälö voi olla tosi millään muuttujan x arvolla, sillä yhtälön muodossa $0 = 1$ ei esiinny muuttujaa x . Täten x ei vaikuta yhtälön ratkaisuihin. Yhtälö on siis aina epätosi.
- Yhtälö $3x - 11 = 6(x - 2)$ on yhtäpitävä yhtälön $x = \frac{1}{3}$ kanssa. Yhtälö on siis joskus tosi: täsmälleen silloin kun $x = \frac{1}{3}$. Tämä voidaan tarkistaa sijoittamalla yhtälöön x :n paikalle arvo $\frac{1}{3}$, jolloin yhtälön vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret.

Yhtälöitä käyttämällä voidaan mallintaa monia käytännön tilanteita.

ESIMERKKI 2.112

Yksinkertainen esimerkki yhtälön käyttämisestä on matkaan kuluvan ajan ratkaiseminen matkan pituuden ja nopeuden avulla, mitä teimme jo yksikköluvussa perustuen siihen, että saamme tulokseksi sopivan yksikön. Kuljettu matka on nopeus kerrottuna kuljetulla ajalla. Jos matka on 15 kilometriä ja nopeus 5 km/h, voimme merkitä $5 \cdot t = 15$, jossa t on matkaan kuluvaa aikaa kuvaava **muuttuja**.

Toisaalta yhtälöjä voidaan käyttää myös abstraktimpien pulmien ratkaisuun.

ESIMERKKI 2.113

- a) Halutaan tietää, onko olemassa lukua, jonka kolmas potenssi jaettuna kolmella on yhtä suuri kuin sen toinen potenssi jaettuna kahdella. Tällöin merkitään $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$. x :n valitseminen tuntemattoman luvun symboliksi oli mielivaltaista.
- b) Minkä kahden peräkkäisen kokonaisluvun tulo on 70? Ongelmaa lähdetään ratkaisemaan kirjoittamalla tilanteen ehto yhtälönä. Merkitään kahdesta kokonaisluvusta pienempää n :llä. Tällöin seuraava kokonaisluku on $n + 1$. Yhtälöksi saadaan $n(n + 1) = 70$.

ESIMERKKI 2.114

Tarkastellaan yhtälöä $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Yhtälössä on yksi muuttuja x ja neljä termiä: x^3 , $-2x^2$, $-x$ ja $+2$. Yhtälön *eräs* ratkaisu on $x = 1$, sillä $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$. Myös $x = 2$ on kyseisen yhtälön ratkaisu, sillä $2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$. Tuntemattomalle x voidaan siis joissain tapauksissa löytää useita arvoja, jotka toteuttavat yhtälön.

2.1.3 YHTÄLÖN RATKAISEMINEN

Tyypillinen tapa ratkaista yhtälöitä on kirjoittaa ne ilmaistuna toisella tavalla. Käytännössä tämä tarkoittaa niiden muokkaamista siten, ettei alkuperäisen yhtälön paikkansapitävyys muutu. Tällä tavalla saadaan eri yhtälö, jolla on kuitenkin samat ratkaisut. Yleensä tavoitteena on saada yhtälö muotoon, jossa yhtäsuuruusrelaation toisella puolella on vain haluttu tuntematon ja toisella puolella kaikki muu.

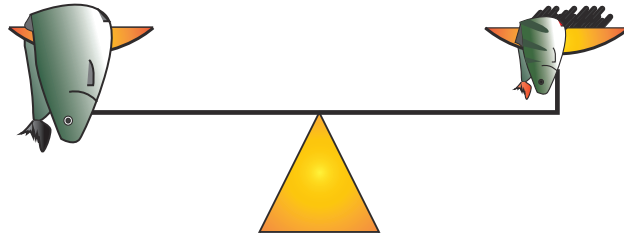
ESIMERKKI 2.115

Ratkaistaan aiemman esimerkin matkan kesto. Yhtälö on siis $5t = 15$, jossa t on aika, nopeus on 5 km/h ja matkan pituus 15 km. Jakamalla laskusääntöjen mukaan yhtälön molemmat puolet viidellä, saadaan yhtälö muotoon $t = 3$, joka on samalla kyseisen yhtälön ratkaisu.

Yhtälön ratkaisemista voidaan ajatella havainnollisemmin kuvittelemalla orsivaaka, joka on tasapainossa. Vasemmalla ja oikealla puolella on eripainoisia esineitä, mutta ne painavat yhteensä yhtä paljon. Jos molemmille puolille lisätään nyt saman verran painoa, vaaka on yhä tasapainossa. Samalla tavalla yhtälön molemmille puolille on sallittua lisätä sama luku.

ESIMERKKI 2.116

Kuvassa oleva vaaka on tasapainossa. Toisessa vaakakupissa on kahden kilon siika ja toisessa puolen kilon ahven sekä tuntematon määrä lakritsia. Kuinka paljon vaakakupissa on lakritsia?



Ratkaisu. Merkitään lakritsin määrää tuntemattomalla x . Tilannetta kuvaa yhtälö $2 = 0,5 + x$, joka muodostetaan vaa'an toiminnan ymmäryksen avulla: tasapainossa molemmissa vaakakupeissa tulee olla massaltaan yhtä paljon ainetta, eli massat (määrät) voidaan merkitä yhtä suuriksi.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{array}{ll} 2 = 0,5 + x & \parallel -0,5 \\ 2 - 0,5 = 0,5 + x - 0,5 & \parallel \text{sievennetään} \\ 1,5 = x & \parallel \text{yhtälön voi halutessaan kääntää} \\ x = 1,5 & \end{array}$$

Vastaus. Lakritsia on 1,5 kg.

Huomioi aina, asettaako yhtälön alkuperäinen muotoilu joitakin rajoituksia tuntemattoman mahdollisille arvoille.

ESIMERKKI 2.117

Ratkaistaan tuntematon a yhtälöstä $\frac{1}{a} = \frac{1}{a-1}$. Huomioidaan, että yhtälössä jaetaan a :lla – a ei voi olla nolla. Koska yhtälössä jaetaan myös $a - 1$:llä, a ei

voi saada myöskään arvoa yksi.

$$\begin{array}{ll}\frac{1}{a} = \frac{2}{a-1} & \parallel \text{kerrotaan } a\text{:lla} \\ \frac{1}{a} \cdot a = \frac{2}{a-1} \cdot a & \parallel \text{sievennetään} \\ 1 = \frac{2a}{a-1} & \parallel \text{kerrotaan } a-1\text{:llä} \\ 1 \cdot (a-1) = \frac{2a}{a-1} \cdot (a-1) & \parallel \text{sievennetään} \\ a-1 = 2a & \parallel -2a \\ a-1-2a = 2a-2a & \parallel \text{sievennetään} \\ -a-1 = 0 & \parallel +1 \\ -a-1+1 = 0+1 & \parallel +1 \\ -a = 1 & \parallel \text{sievennetään} \\ -a = 1 & \parallel \cdot (-1) \\ -a \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) & \parallel \text{sievennetään} \\ a = -1 & \parallel \text{sievennetään}\end{array}$$

Yhtälöllä on siis ratkaisu $a = -1$. Tämä ei ole ristiriidassa alkuperäisten rajoitusten kanssa, joten se hyväksytään sellaisenaan.

Yhtälönratkaisun sievennysvaiheita voi hypätä yli sitä mukaa, kun varmuus kehittyy.

Mitään varsinaista ei virhettä yhtälönratkaisussa ei ole tehty niin kauan kuin sama operaatio tehdään aina yhtälön molemmille puolille, mutta vaatii rutiinia, jotta oppii, mitä laskutoimituksia kannattaa tehdä ja missä järjestyksessä. Seuraavassa joitakin yleisiä toimenpiteitä yhtälöiden ratkaisuun, joita voi soveltaa päästäkseen eteenpäin. Kyseessä ei ole mikään aina toimiva ratkaisuohe, vaan yleisiä vinkkejä.

Yleisiä yhtälönratkaisuperiaatteita

- 1) Kerro tuntematonta sisältävät lausekkeet pois nimittäjistä.
- 2) Yhdistä useat murtolausekkeet yhdeksi laventamalla ne samannimisiksi.
- 3) Siirrä tuntemattomia sisältävät yhtälön osat samalle puolelle ja ota tuntematon

yhteiseksi tekijäksi.

- 4) Kumoa juuret ja murtopotenssit korottamalla yhtälö puolittain sopivaan potenssiin.
- 5) Sulkuja ei välttämättä aina kannata kertoa auki.
- 6) Yhtälö on ratkaistu vasta, kun jäljellä on enää vain yksi kappale tuntematonta suuretta, ja se sijaitsee yksin omalla puolellaan yhtälöä.

Usein on myös perusteltua yksinkertaisesti kokeilla tai arvata jokin yhtälön ratkaisu.

Tehtäviä

222. Ovatko seuraavat yhtälöt tosia, epätosia vai ehdollisesti tosia?

- a) $1 = 1$
- b) $\pi = 3,14$
- c) $\sqrt[3]{27} = 3$
- d) $t = t$
- e) $t = t - 1$
- f) $x = \frac{x}{2}$

223. Ovatko seuraavat yhtälöt tosia, epätosia vai ehdollisesti tosia?

- a) $x = -x$
- b) $3 = \frac{6}{2}$
- c) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
- d) $1^{9001} = 1$
- e) $(-1)^{42} = -1$
- f) $2y + 1 = 5$

224. Mainitse jokin

- a) aina tosi yhtälö
- b) joskus tosi yhtälö (ja milloin se on tosi)
- c) aina epätosi yhtälö.

225. Onko -2 yhtälön $3x - 4 = 7 - 2x$ ratkaisu?

226. Tarkista, voivatko seuraavat tuntemattoman y arvot olla yhtälön $-y^3 + y = 0$ juuria.

- a) $y = 0$
- b) $y = 2$
- c) $y = -1$
- d) $y = 1$
- e) $y = \sqrt[3]{2}$

227. Onko $x = \frac{1}{3}$ seuraavien yhtälöiden (eräs) ratkaisu?

a) $\frac{1}{3} - x = 0$

b) $x^2 = \frac{1}{9}$

c) $\frac{x}{x+1} = \frac{9}{2}$

d) $(-x)^3 = \frac{1}{27}$

e) $-x^3 = -\frac{1}{27}$

f) $125^x = 5$

228. Päteekö yhtälö, kun $a = 7$?

a) $a^5 - 13a^2 = a - 3 + 16\,166$

b) $\sqrt{a} = \frac{529}{200}$

c) $\sqrt[7]{ax} = 0$

229. a) Onko $x = 4$ yhtälön $x^3 = 64$ ratkaisu?

b) Onko $x = 2$ yhtälön $x^5 = 30$ ratkaisu?

c) Onko $x = -1$ yhtälön $x^4 - 3x + 2 = 0$ ratkaisu?

230. Kirjoita tilanne yhtälönä.

a) Kun lukuun kolme lisätään luku yksi, summaksi tulee luku neljä.

b) Massa m kaksinkertaistuu, minkä jälkeen uusi massa on 42 kilogrammaa.

c) Tuntemattoman x arvo on rationaalilukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ summa.

d) Ympyrän kehän pituus p on $\pi:n$ ja ympyrän halkaisijan d tulo.

e) Luvun a ja sen käänteisluvun tulo on 1.

f) Kun lukuun k lisätään sen vastaluku, summaksi saadaan nolla.

g) Kun lukuun k lisätään sen vastaluku, summaksi saadaan yksi.

231. ★ Ratkaise yhtälö $x^2 = 16$. (Katso tähtitehtävät murtopotenssiluvusta.)

2.2 Ensimmäisen asteen yhtälö



Opetus.tv: *Ensimmäisen asteen polynomi yhtälöt* (8.18, 6.54, 3.21, 4.07 ja 5.15)

<http://opetus.tv/maa/maa1/ensimmaisen-asteen-polynomi yhtalot/>

Siirrymme nyt tarkastelemaan tärkeää yhtälöiden erikoistapausta, ensimmäisen asteen yhtälöitä.

Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälöksi kutsutaan yhtälöä, joka on esitettävissä muodossa $ax + b = 0$, missä $a \neq 0$.

Yhtälötyypin nimi tulee siitä, että korkein potenssi, johon tuntematon x yhtälössä korotetaan, on 1. ($x^1 = x$)

ESIMERKKI 2.118

Seuraavat yhtälöt ovat kaikki ensimmäisen asteen yhtälöitä:

a) $2x = 4$

b) $5x + 3 = 0$

c) $x + 2 = 3x - 4$

Kaikki muotoa $ax + b = cx + d$ olevat yhtälöt, joissa $a \neq c$, ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä. Tämä voidaan todistaa seuraavasti:

$$ax + b = cx + d \quad | \text{ Vähennetään molemmilta puolilta } cx + d.$$

$$ax + b - (cx + d) = 0 \quad | \text{ Avataan sulut ja järjestellään termejä uudelleen.}$$

$$ax - cx + b - d = 0 \quad | \text{ Otetaan yhteinen tekijä.}$$

$$(a - c)x + (b - d) = 0$$

Tämä on määritelmän mukainen ensimmäisen asteen yhtälö, koska $a \neq c$, eli $a - c \neq 0$.

Ensimmäisen asteen yhtälöt ratkaistaan kuten edellisessä kappaleessa esitettiin, eli tekemällä yhtälön molemmille puolille samoja toimenpiteitä, kunnes x saadaan selvitettyä.

ESIMERKKI 2.119

Yhtälön $7x + 4 = 4x + 7$ ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\begin{array}{ll} 7x + 4 = 4x + 7 & | \text{ Vähennetään molemmilta puolilta } 4x. \\ 3x + 4 = 7 & | \text{ Vähennetään molemmilta puolilta } 4. \\ 3x = 3 & | \text{ Jaetaan molemmat puolet luvulla } 3. \\ x = 1 & \end{array}$$

Vastaus. $x = 1$

Ratkaisujen lukumäärä

Ensimmäisen asteen yhtälöllä on aina täsmälleen yksi ratkaisu.

ESIMERKKI 2.120

Yleinen lähestymistapa muotoa $ax + b = cx + d$ olevien yhtälöiden ratkaisuun:

a) Vähennetään molemmilta puolilta cx ja otetaan x yhteiseksi tekijäksi.

Saadaan yhtälö $(a - c)x + b = d$.

b) Vähennetään molemmilta puolilta b . Saadaan yhtälö $(a - c)x = d - b$.

c) Jaetaan molemmat puolet lausekkeella $(a - c)$. Saadaan yhtälö ratkaistuun muotoon $x = \frac{d-b}{a-c}$.

Vaikka yhtälössä olisi nimittäjiä, saattaa kyseessä silti olla ensimmäisen asteen yhtälö. Kerro aina yhtälön molemmat puolet nimittäjillä, jolloin niistä päästää eroon, ja yhtälö sievenee lopulta usein yksinkertaisemmaksi.

ESIMERKKI 2.121

- a) Yhtälössä $2/x = 4$ ainoana nimittäjänä on x . Kun sillä kerrotaan yhtälön molemmat puolet, x supistuu pois vasemmalta ja saadaan muoto $2 = 4x$, josta on helppo todeta, että kyseessä on ensimmäisen asteen yhtälö.
- b) Yhtälössä $\frac{0,9}{x+1} = 3$ ainoana nimittäjä on lauseke $x + 1$. Kun sillä kerrotaan yhtälön molemmat puolet, $x + 1$ supistuu pois ja saadaan muoto $0,9 = 3(x + 1)$ eli $0,9 = 3x + 3$, joka selvästi on ensimmäisen asteen yhtälö.
- c) Yhtälössä $(2x + 1)/(x^2 + 3) = 0$ ainoana nimittäjänä lauseke $x^2 + 3$. Kun yhtälö kerrotaan puolittain sillä, $x^2 + 3$ supistuu pois vasemmalta puolelta, ja oikealle puolelle jää edelleen nolla (koska mikä tahansa luku kertaa nolla on nolla). Saadaan yhtälö muotoon $2x + 1 = 0$, mikä on selvästi ensimmäisen asteen yhtälö.

ESIMERKKI 2.122

Myös kaikki seuraavat ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä. (Huomaa kuitenkin, että nimittäjä ei voi olla nolla.)

a) $\frac{2}{x} = 5$

b) $v = \frac{s}{t}$

c) tiheys = $\frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$

Ensimmäisen asteen yhtälöllä voidaan mallintaa monia yksinkertaisia käytännön tilanteita, ja kyseiset yhtälöt tulevat vastaan ihan vain matemaattisina työkaluina, joiden hallitseminen on välttämätön taito.

ESIMERKKI 2.123

Huvipuiston aluemaksu on neljä euroa, ja laitelippu maksaa myös viisi euroa. Ranneke, jolla pääsee rajatta laitteisiin ja joka sisältää aluemaksun, maksaa 34 euroa. Kuinka monessa laitteessa olisi käytävä, jotta ranneke olisi edullisempi ostos kuin yksittäiset laiteliput ja aluemaksu erikseen? Oletetaan, että jokaiseen laitteeseen tarvitaan vain yksi laitelippu.

Ratkaisu. Kyseessä on kaksi toisistaan poikkeavaa maksusuunnitelmaa. Selvitämme yhtälön avulla, millä laitekäyntien lukumäärällä (merkitään tätä esimerkiksi kirjaimella n) molemmat tavat ovat yhtä kalliita. Mallinnamme sopivalla lausekkeella molempia: Jos käytetään vain yksittäisiä laitelippuja, jolloin täytyy maksaa myös aluemaksu, kokonaishinnaksi tulee $4 + 5n$, missä n on ostettujen laitelippujen määrä. Jos ostaa rannekeen, kävijän maksama rahamäärä ei riipu laitekäyntien määrästä, vaan se on aina mainittu 34 euroa.

Merkitään nämä maksusuunnitelmat yhtäsuuriksi, jolloin saadaan ensimmäisen asteen yhtälö $4 + 5n = 34$.

Ratkaistaan tästä n :

$$\begin{aligned}4 + 5n &= 34 && | - 4 \\4 + 5n - 4 &= 34 - 4 \\5n &= 30 && | : 5 \\ \frac{5n}{5} &= \frac{30}{5} \\n &= 6\end{aligned}$$

Jos siis käydään kuudessa laitteessa (eli ostetaan kuusi laitelippua), on samantekevää, ostetaanko ranneke vai yksittäisiä lippuja (ja maksetaan aluemaksu). Jos käytäisiin laitteissa enemmän kuin kuusi kertaa, rannekkeen hinta ei kasva, mutta lippujen yhteishinta kasvaa. Kävijän tulisi siis käydä laitteissa vähintään seitseän kertaa, jotta ranneke olisi edullisempi.

Vastaus. Vähintään seitsemän kertaa

ESIMERKKI 2.124

Juna Helsingistä Jyväskylään kulkee 342 kilometrin matkan kolmessa tunnissa ja 23 minuutissa tasaista vauhtia. 10 minuuttia junan lähdön jälkeen auto lähtee Helsingistä Jyväskylään kulkien tasaista 100 kilometrin tuntivauhtia. Jyväskylään on Helsingistä maanteitse 272 kilometriä. Kuinka kauan auton lähdöstä on kulunut, kun juna ja auto ovat kulkeneet yhtä suuren osan omista matkoistaan?

Ratkaisu. Lasketaan aluksi junan nopeus

$$3 \text{ h } 23 \text{ min} = 12\,180 \text{ s}$$

$$\frac{342\,000 \text{ m}}{12\,180 \text{ s}} \approx 28,0788 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Muunnetaan lisäksi auton nopeus yksikköön $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (muuntokerroin 3,6).

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 27,7778 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10 minuuttia on 600 sekuntia.

Voidaan nyt muotoilla yhtälö käyttäen yksiköitä metri ja sekunti.

Tuntemattomaksi valitaan t , joka kuvaa aikaa sekunteina auton lähdöstä.

$$\frac{28,0788(t + 600)}{342\,000} = \frac{27,7778t}{272\,000}$$

Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{27,7778t}{272\,000} = \frac{28,0788(t + 600)}{342\,000} \quad | \cdot 272\,000 \quad | \cdot 342\,000$$

$$342\,000 \cdot 27,7778t = 272\,000 \cdot 28,0788(t + 600)$$

$$9\,500\,007,6t = 7\,637\,433,6(t + 600)$$

$$9\,500\,007,6t = 7\,637\,433,6t + 4\,582\,460\,160 \quad | -7\,637\,433,6t$$

$$1\,862\,574t = 4\,582\,460\,160 \quad | : 1\,862\,574$$

$$t \approx 2\,460,28 \approx 2\,460$$

Muutetaan yksiköksi minuutit:

$$2\,460\text{ s} = 41\text{ min.}$$

Vastaus. 41 minuuttia

ESIMERKKI 2.125

Matti ja Teppo ovat veljeksiä. Teppo on 525 päivää vanhempi kuin Matti.

Muodostetaan ensimmäisen asteen yhtälö, josta voidaan ratkaista Mattin ikä sijoittamalla x :n paikalle Tepon ikä. Lasketaan saadulla yhtälöllä Mattin ikä sinä päivänä, kun Teppo täyttää 50 vuotta. Oletetaan nyt, että vuodessa on 365 päivää.

Merkitään Tepon ikää päivissä x :llä ja Mattin ikää päivissä y :llä. Tiedetään, että koska Teppo on 525 päivää vanhempi kuin Matti, niin $x = y + 525$. Koska tehtävässä pyydettiin yhtälöä, josta voidaan ratkaista Mattin ikä, muokataan saatua ensimmäisen asteen yhtälöä hieman:

$$x = y + 525 \quad | \text{ Vähennetään puolittain 525.}$$

$$x - 525 = y \quad | \text{ Tiedetään, että jos } a = b, \text{ niin } b = a.$$

$$y = x - 525$$

Nyt on saatu ensimmäisen asteen yhtälö, josta saadaan ratkaistua Matin ikä, kunhan vain tiedetään Tepon ikä. Koska x ja y ovat veljesten iät päivinä, muunnetaan hieman yksiköitä. 50 vuotta päivissä on $50 \cdot 365 = 18\,250$. Nyt saadaan

$$y = x - 525 \quad | \text{ Sijoitetaan } x:n \text{ paikalle Tepon ikä } 18\,250 \text{ päivää.}$$

$$y = 18\,250 - 525$$

$$y = 17\,725 \quad | \text{ Muokataan vastausta informatiivisempaan muotoon.}$$

$$y = 17\,520 + 205$$

$$y = 48 \cdot 365 + 205$$

Siis kysytty Matin ikä on 48 vuotta ja 205 päivää.

Tehtäviä

Opi perusteet

232. Mitä yhtälölle $ax + b = 0$ tapahtuu, jos kerroin a saa arvon nolla? Onko yhtälöllä ratkaisuja?

233. Ratkaise yhtälöistä tuntematon x .

a) $x + 4 = 5$

b) $1 - x = -3$

c) $7x = 35$

d) $-2x = 4$

e) $10 - 2x = x$

f) $9x + 4 = 6 - x$

g) $\frac{2x}{5} = 4$

h) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{5}{6} - x$

234. Ratkaise yhtälöt ja tarkista sijoittamalla.

a) $-2x + 5 = 2(5 + x)$

b) $4(x - 1) - 3x = 15 - 4x$

c) $6 - (2x + 3) = 3 - 2x$

d) $x - 100\,000 = -0,25x$

e) $10^6x - 3 \cdot 10^9 = 0$

f) $5(1 - x) = -5x + 3$

235. Määritä luvulle a sellainen arvo, että

a) yhtälön $5x - 8 - 3ax = 4 - x$ ratkaisu on -1

b) yhtälön $5x + a = \frac{6x}{3} + \frac{7}{2}$ ratkaisu on 2 .

236. Huvipuistossa yksittäinen laitelippu maksaa 7 euroa, ja sillä pääsee yhteen laitteeseen. Rannekkeella pääsee käymään päivän aikana niin monessa laitteessa kuin haluaa, ja se maksaa 37 euroa. Ratkaise yhtälön avulla, kuinka monessa laitteessa on käytävä, jotta rannekkeen ostaminen kannattaisi.

237. Kylpyhuoneessa on kolme hanaa. Hana A täyttää kylpyammeen 60 minuutissa, hana B 30 minuutissa ja hana C 15 minuutissa. Kuinka kauan kylpyammeen täyttymisessä kestää, jos kaikki hanat ovat yhtäaikaan auki?

Hallitse kokonaisuus

238. Kännykkäliittymän kuukausittainen perusmaksu on 2,90 euroa. Lisäksi jokainen puheminuutti ja tekstiviesti maksaa 6,9 senttiä. Liaran kännykkälasku kuukauden ajalta oli 27,05 euroa.

a) Kuinka monta puheminuuttia tai tekstiviestiä Liara käytti kuukauden aikana yhteensä?

b) Liara lähetti kaksi tekstiviestiä jokaista viittä puheminuuttia kohden. Kuinka monta tekstiviestiä hän lähetti?

239. Määritä ne neljä peräkkäistä paritonta kokonaislukua, joiden summa on 72.

240. Kahden raitiovaunupysäkin välimatka on 340 metriä, ja raitiovaunu kulkee näiden väliä keskinopeudella 18 km/h. Frejan työpaikka sijaitsee pysäkkien välillä, ja hänen kävelynopeutensa kiireessä on 9 km/h. Kuinka monen metrin päässä työpaikan ovi voi korkeintaan sijaita jälkimmäisestä pysäkestä, jotta on nopeampaa jäädä pois jälkimmäisellä pysäkillä ja kävellä tulosuuntaan työpaikalle kuin jäädä pois aiemmalla pysäkillä?

Lisää tehtäviä

241. Ratkaise yhtälöt ja tarkista sijoittamalla.

a) $\frac{8x}{3} = 12$

b) $3 - \frac{x}{4} = x$

c) $-\frac{7x}{8} = x + 2$

d) $x + 7 = 1 - \frac{x-1}{2}$

e) $\frac{2x-1}{3} - 1 = \frac{4x}{9}$

f) $\frac{x+5}{3} = x + 3 - \frac{2x+1}{4}$

242. Ratkaise x .

a) $4x + 3 = -3x + 4$

b) $100x = 101x - 2$

c) $\frac{5}{6}x + \frac{4}{5} = x - 1$

d) $2 \cdot (x + 4) - x = x + 4$

e) $5 \cdot (x - 8) + \frac{3}{2} \cdot (x - 7) = 3x$

243. Ratkaise

a) $\frac{3x+6}{9-4x} = -5$

b) $\frac{9x^2-6}{16-3x} = -3x$.

244. Fysiikassa ja geometriassa kaavoissa esiintyy muitakin muuttujia kuin x . Esi-merkiksi kuljettu matka on nopeus kertaa aika eli $s = vt$. (s = spatium latinaksi ja englanniksi v = velocity ja t = time) Ratkaise kysytty tuntematon yhtälöstä.

a) $F = ma$, $m = ?$ (Voima on massa kerrottuna kiihtyvyydellä.)

b) $p = \frac{F}{A}$, $F = ?$ (Paine on voima jaettuna pinta-alalla.)

c) $A = \pi r^2$, $r = ?$ (Ympyrän pinta-ala on pii kerrottuna säteen neliöllä.)

d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $h = ?$ (Kartion tilavuus on piin kolmasosa kerrottuna säteen neliöllä ja kartion korkeudella.)

245. Taksimatkan perusmaksu on arkisin 5,90 euroa. Taksimatkan hinta oli 28,00 euroa. Mikä oli taksimatkan pituus, kun

a) Petteri matkusti yksin, jolloin taksa oli 1,52 euroa kilometriltä?

b) Arttu otti taksin kuuden ystävänsä kanssa, jolloin taksa oli 2,13 euroa kilometriltä?

246. Sadevesikeräin näyttää vesipatsaan korkeuden millimetreinä. Eräänä aamuna keräimessä oli 5 mm vettä. Seuraavana aamuna samaan aikaan keräimessä oli 23 mm vettä. Muodosta yhtälö ja selvitä, kuinka paljon vettä oli keskimäärin sata-nut kuluneen vuorokauden aikana tunnissa.

247. London and Manchester are 200 miles apart. Jem travels from London to Manchester at an average speed of 70 mph. Robbie travels in the opposite direction, from Manchester to London, at an average speed of 30 mph. Knowing that they leave at the same time, in how much time will their paths cross each other?

2.3 Prosenttilaskenta



Opetus.tv: *Prosentit* (5.38 ja 4.06)

<http://opetus.tv/mab/mab1/prosentit/>

Sana **prosentti** tulee latinan kielen ilmaisusta **pro centum**, joka tarkoittaa kirjaimellisesti ”sataa kohden” tai ”sadasta”. Prosentit ovat siis sadasosia, ja kyseessä on rationaalilukujen sovellus – prosentteja käytetään ilmaisemaan suhteellista osuutta. Prosentit voidaan mieltää yksiköinä, jolloin käytetään prosentin symbolina %-merkkiä. Prosentin sukulaiskäsite on **promille**, joka tulee vastaavasta latinan ilmaisusta **pro mille**. Promillen symboli on ‰.

Prosentti ja promille

$$1\text{prosentti} = 1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$1\text{promille} = 1\text{‰} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$$

Erityisesti kannattaa huomata, että $100\% = 1$. Jos prosenttiluku on annettu muodossa $p\%$, se voidaan aina kirjoittaa murtolukuna $\frac{p}{100}$.

ESIMERKKI 2.126

- a) $0,03 = \frac{3}{100} = 3\% = 30\text{‰}$
- b) $0,00478 = \frac{0,478}{100} = 0,478\% = 4,78\text{‰}$
- c) $0,76 = \frac{76}{100} = 76\% = 760\text{‰}$
- d) $1,23 = \frac{123}{100} = 123\% = 1\,230\text{‰}$
- e) $2,10 = \frac{210}{100} = 210\% = 2\,100\text{‰}$

Prosenttilaskennan käytännön kysymyksenasettelut ja tehtävät voidaan jakaa karkeasti neljään ryhmään. Tehtävänantojen peruskysymykset liittyvät toisiinsa seuraavalla sivulla olevan kaavion mukaisesti, missä a , b ja p sekä x , y ja q ovat (mielivaltaisia) lukuja. Vaadimme lisäksi reaalitylukujen ominaisuuksiin vedoten, että b ja x eli luvut,

joihin verrataan ovat nolasta poikkeavia. Kaavion toisessa osassa on esitetty samat kysymykset formalisoituina yhtälöiksi.

Prosenttilaskennan tehtävätyypit

”Kuinka monta prosenttia (p) luku a on b :stä?”	$\Leftrightarrow$	”Kuinka paljon (a) on p % luvusta b ?”
$\downarrow$		$\downarrow$
”Kuinka monta prosenttia (p) luku a on suurempi/pienempi kuin b ?”	$\Leftrightarrow$	”Mitä (a) saadaan, kun b kasvaa/vähenee p prosenttia?”
$\frac{a}{b} = p \%$	$\Leftrightarrow$	$p \% \cdot b = a$
$\downarrow$		$\downarrow$
$\frac{ x - y }{y} = q \%$	$\Leftrightarrow$	$(1 \pm q \%) y = x$

Ongelmat, joiden välillä on nuoli molempiin suuntiin, ovat matemaattisesti yhtäläisiä eli ekvivalentteja; ne voidaan esittää ja käsitellä molemmiin tavoin, vaikka ratkotaan-kin edelleen samaa ongelmaa. Huomaa, että yhtälöt ovat samat mutta esitetty eri muodossa.

Taulukon ylärivin kaksi tapausta ovat yksinkertaisimmat tehtävänannot, ja ne käsitel-
lään ensin. Alarivin kysymyksenasetteluiden formalisointi (lausekkeiksi ja yhtälöksi kirjoittaminen) vaatii ylärivin kysymysten tekniikkaa. (Kaavion jäsentely tukee myös kuitenkin sitä, että ensin voitaisiin opetella vasemmalla puolella olevat ja sen jälkeen erillisesti oikealla puolella olevat tehtävätyypit – tai toisinpäin.)

Tehtävien ratkaisu saattaa vaatia edellä mainittujen tilanteiden yhdistelemistä ja tun-
temattoman ratkaisemista yhtälöstä. Erilaisten suhteiden prosentuaalisille ilmaisuille on vakiintunut omat nimensä, jotka kannattaa opetella.

2.3.1 VERTAILUPROSENTTI JA PERUSARVO

Vertailuprosentti ja perusarvo

Vertailuprosentilla tarkoitetaan sitä, kuinka paljon jokin on jostakin, mihin verrataan. Lukua, johon verrataan tai jota muutetaan, kutsutaan **perusarvoksi**.

Vertailuprosentilla vastataan siis kysymykseen ”kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b ?”, ja vertailuprosentti saadaan laskutoimituksesta $\frac{a}{b}$, joka tulkitaan lopullista vastausta varten prosentteina eli sadaosina. Koska jakolasku ei ole vaihdannainen, on tärkeää varmistaa, että tehtävässä suhde muodostetaan oikein päin. Suhdetta muodostettaessa se, mihin verrataan, toimii jakajana.

ESIMERKKI 2.127

Kuinka monta prosenttia

- a) luku 20 on luvusta 80?
- b) luku 80 on luvusta 20?

Ratkaisu. a) Perusarvo on tässä tapauksessa 80 – siihen verrataan. Lasketaan osamäärä $\frac{20}{80}$ ja esitetään vastaus prosentteina:

$$\frac{20}{80} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$$

b) Nyt perusarvo on 20, ja siihen verrataan. Lasketaan osamäärä $\frac{80}{20}$ ja esitetään vastaus prosentteina:

$$\frac{80}{20} = \frac{8}{2} = 4 = 400 \%$$

ESIMERKKI 2.128

Tarmo leikkaa pizzan neljään osaan ja syö näistä kolme.

- a) Kuinka monta prosenttia pizzasta Tarmo syö?
- b) Kuinka monta prosenttia pizzasta jää jäljelle?

Ratkaisu. a) Tarmo syö 3 palaa neljästä eli $\frac{3}{4} = 0,75$. Tämä voidaan muuttaa prosenttiluvuksi ilmaisemalla luku sadasosina. $0,75 \cdot 100 = 75$. Siis $0,75 = 75 \%$, ja Tarmo söi 75 % pizzasta.

b) Koko pizzasta otetaan pois Tarmon syömä osa jolloin jäljelle jää $100\% - 75\% = 25\%$. Samaan vastaukseen olisi päädytty, jos olisi muunnettu jäljellä olevien pitsapalojen määrän suhdetta koko pitsaan esittävä rationaaliluku $\frac{1}{4}$ prosenteiksi.

Vastaus. a) 75 %

b) 25 %

ESIMERKKI 2.129

Alex ansaitsee kuukaudessa 3 200 euroa ja Antero 2 300 euroa.

a) Kuinka monta prosenttia Anteron tulot ovat Alexin tuloista?

b) Kuinka monta prosenttia Alexin tulot ovat Anteron tuloista?

Ratkaisu. a) Lasketaan vertailuprosentti. Perusarvo on tehtävänannon mukaisesti Alexin palkka eli 3 200 euroa.

$$\frac{2\,300}{3\,200} = 0,71875 \approx 0,72 = 72\%$$

b) Lasketaan vertailuprosentti, mutta nyt perusarvona toimiikin Anteron palkka:

$$\frac{3\,200}{2\,300} \approx 1,39 = 139\%$$

Vastaus. a) Anteron tulot ovat 72 % Alexin tuloista.

b) Alexin tulot ovat 139 % Anteron tuloista.

2.3.2 PROSENTTIOSUUDEN LASKEMINEN PERUSARVOSTA

Tapaus ”kuinka paljon on $p\%$ luvusta a ” lasketaan kertolaskuna aivan niin kuin aiemmin on tehty kaikilla luvuilla muutenkin.

ESIMERKKI 2.130

a) Jos luku a halutaan kaksinkertaistaa, kerrotaan se kahdella: $2a$.

b) Jos käsitellään luvusta x vain kolmasosaa, kerrotaan se $\frac{1}{3}$:lla: $\frac{1}{3}x$.

c) Jos halutaan tietää, mitä on kymmenen prosenttia luvusta 120, kerrotaan se 10 %:lla: $10\% \cdot 120 = 0,10 \cdot 120 = 12$.

d) 2 ‰ luvusta h on $2\text{‰}h = 0,002h$.

Kerrointa käsiteltävän perusarvon edessä sanotaan (prosenttilaskennassa) **prosentti-kertoimeksi**. Laskutoimitusta voidaan ajatella niin, että perusarvoa muokataan tai että siitä käsitellään vain haluttua osaa.

ESIMERKKI 2.131

Arvioidaan, että yhdeksän sadasta suomalaista kärsii kaamosmasennuksesta (riippumatta asuinpaikasta). Vuoden 2014 huhtikuussa laskettu Oulun asukasluku oli 194 289. Kuinka moni oululainen näiden tietojen perusteella sairastaa kaamosmasennusta?

Ratkaisu. Sairastavien osuus väestöstä on 9 %, ja oululaisia on 194 289 ihmistä. 9 % lukumäärästä 194 289 lasketaan $9\% \cdot 194\,289$ eli $0,09 \cdot 194\,289$, missä 0,09 on prosenttikerroin ja 194 289 perusarvo. Laskutoimituksen tuloksena saadaan $0,09 \cdot 194\,289 = 17\,486,01$, mikä täytyy pyöristetään kokonaisluvuksi, koska asukkaita ei voi jakaa osiin. Kun otetaanmyös huomioon, että sairastavien osuus on annettu yhden merkitsevän numeron tarkkuudella, tulee pyöristyksen jälkeen tulokseksi noin 20 000.

Vastaus. Noin 20 000 oululaista sairastaa kaamosmasennusta.

Joskus useita kertolaskuja täytyy ketjuttaa.

Usein perusarvoa ei tunneta, vaan se joudutaan ratkaisemaan yhtälöstä.

ESIMERKKI 2.132

Lennonjohtajakoulutukseen Suomessa syksyllä 2014 pääsi vain kahdeksan henkilöä. Lehtiotsikoiden mukaan sisäänpääsyprosentti oli 0,67 %. Kuinka monta hakijaa koulutukseen pyrki kaiken kaikkiaan? Huomio vastaustarkkuus.

Ratkaisu. Sisäänpääsyprosentti tarkoittaa koulutukseen päässeiden määrän suhdetta kaikkien hakijoiden määrään. Merkataan kaikkien hakijoiden määrää

y:llä. Saadaan yhtälö $\frac{8}{y} = 0,67 \%$.

$$\frac{8}{y} = 0,67 \% \quad | \cdot y \text{ ja } (y \neq 0)$$

$$8 = 0,67 \% \cdot y$$

$$8 = 0,0067y \quad | : 0,0067$$

$$\frac{8}{0,0067} = y$$

$$y = \frac{8}{0,0067}$$

$$y \approx 1\,194 \approx 1\,200$$

Koska lähtötiedoilla ei tarkaksi vastaukseksi saatu luonnollista lukua (joka voisi olla hakijoiden lukumäärä), on mainostettu sisäänpääsyprosentti luultavasti pyöristetty. Koska se annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, annetaan myös vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

ESIMERKKI 2.133

Arvonlisävero on on valtiolle perittävä vero, jota maksetaan tuotteista ja palveluista. Arvonlisäverokanta määräytyy tuotteen tyypin mukaan, ja itse veron suuruus (euroina) lasketaan osuutena tuotteen verottomasta hinnasta. Vuonna 2012 yleinen arvonlisävero oli 23 % tuotteen verottomasta hinnasta.

- a) Kuinka suuri arvonlisävero (euroina) maksetaan tuotteesta, jonka veroton hinta on 8,45 euroa?
- b) Kuinka suuri on tällöin verollinen eli lopullinen kuluttajahinta?
- c) Kuinka monta prosenttia arvonlisä on tuotteen verollisesta hinnasta?

Ratkaisu. a) Merkitään arvonlisäveron määrää (euroina) x :llä. Tällöin tehtävänannon ja arvonlisäveron määritelmän perusteella pätee yhtälö $\frac{x}{8,45 \text{ €}} = 23 \%$. Muuttamalla prosenttiluku desimaalimuotoon (laskimen käytön helpottamiseksi) ja kertomalla yhtälön molemmat puolet nimittäjällä saadaan ratkaisuksi $x = 0,23 \cdot 8,45 \text{ €} = 1,9435 \text{ €} \approx 1,90 \text{ €}$.

b) Koska veroton hinta on 8,45 euroa, ja tämän lisäksi maksetaan arvonlisäveroa 1,90 euroa, saadaan lopulliseksi myyntihinnaksi $8,45 \text{ €} + 1,90 \text{ €} = 10,35 \text{ €}$.

c) Verrataan arvonlisäveroa lopulliseen hintaan: $\frac{1,90 \text{ €}}{10,35 \text{ €}} \approx 0,184 = 18,4 \%$. (Huomaa, että kyseinen 23 %:n arvonlisävero *ei* siis tarkoita, että 23 % tuotteen myyntihinnasta on veroa!)

Vastaus. a) 1,90 €

b) 10,35 €

c) 18,4 €

ESIMERKKI 2.134

Psykoosilääke olantsapiinin yleinen haittavaikutus on painonnousu: yhdellä kolmasosalla käyttäjistä paino (massa) nousee kuuden ensimmäisen viikon aikana noin seitsemän prosenttia, yhteensä keskimäärin 5,5 kilogrammaa. Mikä on tällaisen kolmannekseen kuuluvan ”keskimääräisen henkilön” massa painonnousun jälkeen?

Ratkaisu. Voimme merkata alkuperäistä painoa (massaa) kilogrammoissa x :llä. Tehtävänannon perusteella 5,5 kilogramman absoluuttinen kasvu vastaa 7 %:n suhteellista kasvua. Tästä saadaan yhtälö $5,5 \text{ kg} = 0,07x$, jonka ratkaisuna saadaan jakolaskulla $x = \frac{5,5 \text{ kg}}{0,07} \approx 78,57 \text{ kg}$. Lopullinen vastaus saadaan, kun tähän alkuperäiseen massaun lisätään tuo mainittu 5,5 kilogrammaa: $\frac{5,5 \text{ kg}}{0,07} + 5,5 \text{ kg} \approx 84,1$. (Huomaa, että tehtävänannon tietoa ”yhdellä kolmasosalla” ei tarvittu ratkaisuun.)

Vastaus. ”Keskimääräisen henkilön” massa painonnousun jälkeen on 84,1 kilogrammaa.

2.3.3 MUUTOSPROSENTTI

Muutosprosentti

Prosentteja käytetään usein ilmaisemaan suureiden muutoksia, esimerkiksi luku a kasvaa luvuksi b . **Muutosprosenttia** laskettaessa muutoksen suuruutta verrataan alkuperäiseen lukuun. Perusarvona on siis alkuperäinen arvo, johon nähden muutos on tapahtunut. Muutosta merkitään yleensä symbolilla Δ (kreikan kielen suuri *delta*).

Absoluuttinen muutos luvusta a lukuun b on $b - a$, eli lopputilanteesta vähennetään alkutilanne. **Suhteellinen muutos** saadaan suhteuttamalla absoluuttinen muutos alkuperäiseen lukuun a eli laskemalla

$$\Delta_{\text{suhteellinen}} = \frac{\Delta_{\text{absoluuttinen}}}{a} = \frac{b - a}{a}$$

Muutosprosentti saadaan suhteellisesta muutoksesta muuttamalla se prosenttiluvuksi

$$\Delta_{\text{prosentti}} = \Delta_{\text{suhteellinen}} = \frac{b - a}{a}$$

tulkittuna prosenteissa.

ESIMERKKI 2.135

Vesan paino on tammikuussa 68 kg ja kesäkuussa 64 kg.

- a) Mikä on Vesan painon *absoluuttinen muutos*?
- b) Mikä on Vesan painon *muutosprosentti* (eli suhteellinen muutos)?

Ratkaisu. a) Halutaan tietää Vesan painon *absoluuttinen muutos* eli muutos kiloina tammikuusta kesäkuuhun.

$$\Delta_{\text{absoluuttinen}} = b - a = 64 \text{ kg} - 68 \text{ kg} = -4 \text{ kg}$$

Vesan paino on muuttunut -4 kiloa, eli Vesa on laihtunut 4 kiloa.

- b) Halutaan tietää Vesan painon muutos *prosentteina* tammikuusta kesäkuuhun.

$$\Delta_{\text{prosentti}} = \frac{\Delta_{\text{absoluuttinen}}}{a} = \frac{-4}{68} \approx -0,06 = -6 \%$$

Vesan paino on muuttunut kuudella prosentilla negatiiviseen suuntaan, eli Vesa on laihtunut kuusi prosenttia.

Vastaus. a) Vesa on laihtunut 4 kiloa.

- b) Vesa on laihtunut 6 %.

Erotusprosentti

Muutosprosentille läheinen käsite on **erotusprosentti**. Erotusprosentti ilmaisee kuinka monta prosenttia jokin on suurempi tai pienempi kuin joku toinen. Suhteellinen erotus saadaan laskemalla lukujen absoluuttinen erotus $|b - a|$ ja vertaamalla sitä perusarvoon, joka on vertailussa aina kuin-sanan jälkeinen arvo. (Tehtävänasettelussa saattaa kuitenkin esiintyä erilaisia tapoja esittää asia, joten on oleellista ymmärtää, mihin verrataan, eikä vain metsästää kuin-sanaa.)

Jos luku a on p % pienempi tai suurempi luku b , pätee

$$p = \frac{|b - a|}{b}.$$

ESIMERKKI 2.136

Miniluumutomaatit maksavat normaalisti 4,80 euroa kilolta. Nyt ne ovat kuitenkin alennuksessa ja maksavat 2,50 euroa kilolta.

- a) Kuinka monta prosenttia enemmän miniluumutomaatit maksavat normaalisti verrattuna alennushintaan?
- b) Kuinka monta prosenttia vähemmän miniluumutomaatit maksavat alennuksessa kuin normaalisti?

Ratkaisu. a) Verrataan absoluuttista erotusta alennettuihin miniluumutomaatteihin:

$$\begin{aligned}\frac{|b - a|}{b} &= \frac{|2,50 - 4,80|}{2,50} = \frac{|-2,30|}{2,50} \\ &= \frac{2,30}{2,50} = 0,92 = 92,0 \text{ \%}.\end{aligned}$$

b) Verrataan absoluuttista erotusta normaalihintaisiin miniluumutomaatteihin:

$$\begin{aligned}\frac{|b - a|}{a} &= \frac{|2,50 - 4,80|}{4,80} = \frac{|-2,30|}{4,80} \\ &= \frac{2,30}{4,80} \approx 0,479 = 47,9 \text{ \%}.\end{aligned}$$

Vastaus. a) Miniluumutomaatit maksavat normaalisti 92,0 % enemmän kuin alennuksessa.

b) Miniluumutomaatit maksavat alennuksessa 47,9 % vähemmän kuin normaalisti. Tämän voi myös ilmaista sanomalla, että miniluumutomaatit ovat 47,9 prosentin alennuksessa.

Huomataan, että se, mihin verrataan, on merkittävää ja vaikuttaa tulokseen.

Siinä missä arkisia lämpötiloja ollaan totuttu mittamaan celsiusasteissa, fysiikassa yleisemmässä käytössä ovat absoluuttista lämpötilaa mittaavat kelvinit. Yksi aste celsiusta ja yksi kelvin ovat yhtä suuret, mutta asteikolla on vain eri nollapiste: 0 K on niin sanottu absoluuttinen nollapiste, jossa hiukkasten lämpöliike lakkaa. Kelvinit ja celsiusasteet voidaan muuttaa toisikseen kaavalla $T = t + 273,15$ (°C tai K), missä T on lämpötila kelvineinä ja t lämpötila asteina celsiusta.

- Kuinka monta celsiusastetta on 500 K?
- Koska kelvinit ja celsiusasteet ovat yhtä suuria ja eri yksiköillä ilmoitetut lämpötila-arvot eroavat toisistaan vain vakiolla 273,15 (kelviniä tai astetta celsiusta), ei erittäin suurten lukujen tapauksessa mennä hirveästi metsään, vaikka käytettäisiin väärää yksikköä. Auringon pintalämpötila on noin 5 800 K. Jos arvo oletettaisiin tarkaksi ja esitettäisiin sama asteina celsiusta, kuinka monen prosentin virhe syntyisi?
- Kuinka suuri lämpötilan tulee (kelvineinä) olla, että celsiusasteilmaisu tuottaa pienemmän kuin yhden promillen virheen?

Ratkaisu. a) Kaavan perusteella celsiusasteet saadaan, kun kelvineissä ilmoitetusta lämpötilasta vähennetään 273,15 astetta

($t = T - 273,15$ sopivilla yksiköillä). Siis

$$500 \text{ K} = (500 - 273,15) ^\circ\text{C} = 226,85 ^\circ\text{C}.$$

b) Virheprosentti tulee suhteellisesta erotuksesta, jossa verrataan lämpötilaa celsiusasteina ja kelvineinä oikeaan kelvinlämpötilaan. Lasketaan ensin, mitä 5 800 kelviniä on celsiusasteina:

$t = T - 273,15 \text{ K} = 5\,800 \text{ K} - 273,15 \text{ K} = 5\,526,85 \text{ K}$. Suhteellisessa virheessä vertaamme lämpötilojen erotusta oikeaan arvoon:

$$\frac{5\,800 - 5\,526,85}{5\,800} \approx 4,7 \%$$

c) Erotusprosentin kaavan avulla saamme yhtälön $\frac{T-t}{T} = 1 \text{ ‰}$, joka sievenee lämpötila-asteikkojen muunnoskaavan avulla muotoon $\frac{273,15 \text{ K}}{T} = 0,001$. Kun otetaan huomioon, että nyt T ei voi olla nolla, niin kyseessä on ensimmäisen asteen yhtälö. Kertomalla T :llä ja jakamalla 0,001:llä saadaan

$$T = \frac{273,15 \text{ K}}{0,001} = 273\,150 \text{ K}.$$

Todista, että jos kahdelle luvulle x ja y pätee sekä ehto ” y on p prosenttia x :ää pienempi” että ” x on p prosenttia y :tä suurempi”, lukujen täytyy olla samat.

Ratkaisu. Alustavasti voidaan olettaa luvuista, että $x \geq y$. (Varmasti joko $x = y$ tai $x > y$ pitää paikkansa.)

Tehtävässä esitetyt väitteet esitettynä yhtälöinä ovat $\frac{x-y}{x} = \frac{p}{100}$ (” x :ää pienempi” = ”— pienempi kuin x ”) ja $\frac{x-y}{y} = \frac{p}{100}$ (” y :tä suurempi” = ”— suurempi kuin y ”). Koska ehdoissa sekä x että y toimivat jakajana, nähdään jo pelkän tehtäna-settelun asettavan vaatimuksen, että x ja y poikkeavat nolasta.

Koska molempien ehtojen erotusprosentin arvo ovat sama ($\frac{p}{100}$), niiden täytyy olla keskenään samat:

$$\frac{x-y}{x} = \frac{x-y}{y}$$

Molemmilla puolilla on tekijänä sama lauseke $x - y$. Tällä voidaan jakaa, jos ja vain jos x ja y ovat erisuuret (muuten jaettaisiin nolalla):

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{x} &= \frac{x-y}{y} && ||(\text{selkeyden vuoksi tekijä erilleen osoittajasta}) \\ (x-y)\frac{1}{x} &= (x-y)\frac{1}{y} && || : (x-y) \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{y} && ||\text{”kerrotaan ristiin”} \\ y &= x \end{aligned}$$

Erisuuruusolettamasta siis kuitenkin siis seuraa vääjäämättä, että $x = y$. Tämä on ristiriita! Ehdot eivät siis voi pitää samaan aikaan paikkaansa kuin vain yhtäsuurilla (nolasta poikkeavilla) luvuilla.

2.3.4 PROSENTTIYKSIKKÖ

Prosenttiyksikkö

Prosenttiyksikköä käytetään mittaamaan prosenttilukujen absoluuttista muutosta. Esimerkiksi 3 % on yhden prosenttiyksikön suurempi kuin 2 %, mutta 50 % suurempi

kuin 2 %. Jos prosenttiluku muuttuu, muutos voidaan ilmaista joko prosentteina (suhteellinen muutos) tai prosenttiyksikköinä (absoluuttinen muutos).

Prosentin ja prosenttiyksikön merkitysero on keskeinen esimerkiksi talousuutisten tulkinnassa.

ESIMERKKI 2.139

Tuotteen markkinaosuus on vuoden tammikuussa 10 % ja kesäkuussa 15 %.

- a) Kuinka monta prosenttia tuotteen markkinaosuus on noussut tammikuusta kesäkuuhun?
- b) Kuinka monta prosenttiyksikköä tuotteen markkinaosuus on noussut tammikuusta kesäkuuhun?

Ratkaisu. a) Tuotteen markkinaosuuden muutos prosentteina:

$$\frac{15 - 10}{10} = \frac{5}{10} = 0,5 = 50 \%.$$

- b) Tuotteen markkinaosuuden muutos prosenttiyksikköinä $15 \% - 10 \% = 5 \%$

Vastaus. a) 50 prosenttia

b) 5 prosenttiyksikköä

2.3.5 LUVUN SUHTEELLINEN KASVATTAMINEN TAI PIENENTÄMINEN

Kun jokin perusarvo a kasvaa p %, täytyy laskea ensin, kuinka paljon on p % kyseisestä perusarvosta a ja sitten lisätä saatu luku alkuperäiseen a :han. Kyseisen prosessin lauseke sievenee erittäin käyttökelpoiseen tulomuotoon:

$$a + p \% \cdot a = a + \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{p}{100}\right)a$$

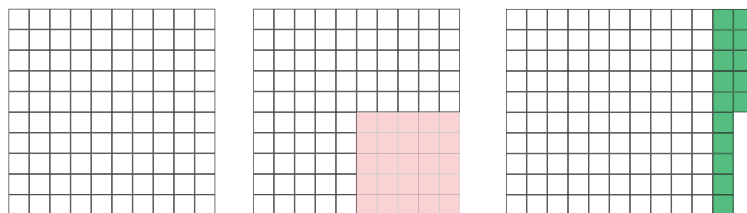
Jonkin suureen tai luvun vähentyessä tietyllä prosenttiosuudella toimitaan samoin, mutta suoritetaan vähennyslasku:

$$a \mapsto \left(1 - \frac{p}{100}\right)a$$

On tärkeä taito osata lukea prosenttikertoimesta heti, mitä perusarvolle on tehty!

ESIMERKKI 2.140

Jos sata euroa maksavan tuotteen hintaa on alennettu 25 prosenttia, niin alennettu hinta on 75 euroa. Jos sen sijaan alkuperäinen hinta nousee 15 prosenttia, niin tuotteen uusi hinta on 115 euroa. Perusarvo on molemmissa tapauksissa sata euroa.



ESIMERKKI 2.141

Eräs kauppa myy tuotteitansa viiden prosentin alennuksella. Kuinka suuri on alennettu hinta, kun tuotteen tavallinen hinta on

- a) 100 euroa
- b) 14,50 euroa

Ratkaisu. a) Tämä tarkoittaa, että jokaisesta hinnasta vähennetään $\frac{5}{100}$ kertaa tuotteen hinta. 5 %:n alennuksen osuus 100 eurosta saadaan kertomalla 100 euroa 5 %:lla eli viidellä sadasosalla:

$$\frac{5}{100} \cdot 100 \text{ euroa} = 5 \text{ euroa}$$

Alennettu hinta saadaan vähentämällä alkuperäisestä hinnasta alennus eli $100 \text{ euroa} - 5 \text{ euroa} = 95 \text{ euroa}$.

b) Jos tuotteen alkuperäinen hinta on 14,50 euroa, on alennuksen määrä

$$\frac{5}{100} \cdot 14,50 \text{ euroa} = 0,725 \text{ euroa}.$$

Alennettu hinta on tällöin $(14,50 - 0,725) \text{ euroa} \approx 13,78 \text{ euroa}$.

Samaan tulokseen pääsee vielä kätevämmän, kun ajattelee alennuksen määrän sijaan sitä, kuinka suuri osa hinnasta jää jäljelle. Jos alennus on 5 %, jää hinnasta jäljelle $100\% - 5\% = 95\%$. Jos alkuperäinen hinta on 14,50 euroa, on alennettu hinta

$$\frac{95}{100} \cdot 14,50 \text{ euroa} \approx 13,78 \text{ euroa}.$$

ESIMERKKI 2.142

Tuotteen hintaa korotettiin 15 %, jolloin hinnaksi muodostui 175 euroa. Kuinka suuri oli alkuperäinen korottamaton hinta?

Ratkaisu. Olkoon alkuperäinen hinta x euroa. Koska hintaa on korotettu 15 %, on uusi hinta 115 % alkuperäisestä eli alkuperäinen hinta x on kerrottu 1,15:llä:

$$\begin{aligned} 1,15x &= 175 & | \text{ Jaetaan } 1,15\text{:llä.} \\ x &= \frac{175}{1,15} \approx 152,17 \end{aligned}$$

Vastaus. Tuotteen alkuperäinen hinta oli 152,17 euroa.

ESIMERKKI 2.143

Elintarvikkeiden arvonlisävero alennettiin aikoinaan 17 %:sta 12 %:iin eli arvonlisäverokanta pieneni viidellä prosenttiyksiköllä. Muutoksen jälkeen muutamat nimeltä mainitsemattomat elintarvikeketjut mainostivat, että myyntihintoja oli laskettu keskimäärin 4,3 %. Oliko arvonlisäveron alennus siirtynyt kokonaan hintoihin vai nostivatko kaupat katteitaan?

Ratkaisu. Merkitään mielivaltaista tuotteen verotonta hintaa a :lla. Koska arvonlisävero lisätään aina verottomaan hintaan, oli tuotteen verollinen hinta ennen 1,17 a ja muutoksen jälkeen 1,12 a . Lasketaan, kuinka monta prosenttia verolliset hinnat laskivat, mikä tarkoittaa samaa kuin ”kuinka prosenttia uusi hinta on vanhaa pienempi”:

$$\frac{1,17a - 1,12a}{1,17a} = \frac{0,05a}{1,17a} = \frac{0,05}{1,17} \approx 4,3 \%$$

Myyntihintojen 4,3 prosentin lasku selittyy siis käytännössä kokonaisuudessaan arvonlisäveron laskulla. Tässä tapauksessa kukaan ei vetänyt välistä, vaan hinnat laskivat juuri kuin olisi odotettukin, jos vain veron osuus vähenee eikä verottomiin hintoihin kosketa.

Niin kuin prosenttiosuuksien laskemisessakin, useita prosentuaalisia muutoksia voidaan ketjuttaa. On myös tärkeää huomata, että jos luvulle tehdään useita suhteellisia muutoksia, niiden järjestyksellä ei kertolaskun vaihdannaisuuden nojalla ole mitään väliä.

ESIMERKKI 2.144

Elokuvateatteri nosti lippujensa hintoja 20 %. Taloustutkimuksiin tutustumisen jälkeen teatteri totesi halvemman hinnan tuovan enemmän asiakkaita, jolloin tulot kokonaisuudessaan kasvaisivat, joten lippujen hintoja laskettiin 25 %.

- a) Kuinka monta prosenttia lippujen hinnat lopulta muuttuivat alkuperäiseen nähden?
- b) Entä jos olisi ensin laskettu hintoja 25 % ja sitten korotettu samat 20 %?
- c) Jos lippujen hinta muutoksien jälkeen oli 7,00 euroa, niin mikä oli niiden alkuperäinen hinta?

Ratkaisu. Merkataan tuntematonta lippujen hintaa esimerkiksi x :llä.

- a) Hinnankorotuksen jälkeen lippujen hinta oli $1,20x$. Lippujen hinnan alentamisen jälkeen hinta on $0,75 \cdot 1,20x$, eli $0,90x$. Hinnat olivat siis laskeneet yhteensä kymmenen prosenttia.
- b) Koska peräkkäiset suhteelliset muutokset lopulta formalisoituvat kertolaskuna ($0,75 \cdot 1,20$), ja kertolasku on vaihdannainen, myös $1,20 \cdot 0,75$ olisi tuottanut saman lopputuloksen. Hinnan muutosten järjestyksellä ei siis ole väliä.
- c) Edellisten kohtien perusteella saadaan yhtälö $0,90x = 7,00$ €, joka ratkeaa jakolaskulla, ja uudeksi hinnaksi saadaan $x = \frac{7,00 \text{ €}}{0,90} \approx 7,78$ €.

ESIMERKKI 2.145

Ohut pilvipeite estää 10 % auringon UV-säteilyä. Tiedetään myös, että varjossa oleskelu puolittaa saadun UV-annoksen. Kuinka monta prosenttia varjossa oleskelu pilvisellä säällä vähentää UV-annosta (verrattuna pilvettömään auringonottoon)?

Ratkaisu. UV-säteilyn täydelle voimakkuudelle/määrälle/annokselle (säteilyn tyyppiä tai suuretta ylipäätään ei ole täsmennetty) ei tiedetä mitään lukuarvoa, joten merkitään sitä esimerkiksi a :lla. Koska pilvipeite estää 10 % säteilystä, se päästää lävitseen 90 %. Pilvipeitteen läpäistyään säteilystä on siis jäljellä $90 \% \cdot a = 0,90a$. (Tämän voi laskea myös ”suoraan” $a - 0,10a = (1 - 0,10)a = 0,90a$ ilman sanallista päättelyä läpikäymisen ja estämisen yhteydestä.) Tämä lisäksi puolittuu (eli 50 % pois) varjossa, eli lopulliseksi säteilymääräksi saadaan $0,50 \cdot 0,90a$. Prosenttikertoimet voidaan yhdistää laskemalla kertolasku $0,50 \cdot 0,90 = 0,45a$. Säteilystä on enää jäljellä siis vain 45 %, joten pilvisuus ja varjoisuus on vähentänyt säteilyä 55 %. (Tämän

voisi näyttää laskuna ottamalla jäljellä oleva osuus $0,45a$ pois alkuperäisestä a :sta: $a - 0,45a = (1 - 0,45)a = 0,55a$.)

Vastaus. 55 prosenttia

ESIMERKKI 2.146

Osoitetaan, että jos mielivaltainen nollasta poikkeava luku y kasvaa ensin p prosenttia ($p > 0$) ja sen jälkeen pienee samat p prosenttia, emme päädy takaisin alkuperäiseen lukuun y . p prosentin kasvu antaa prosenttikertoimen $(1 + \frac{p}{100})$, ja p :llä pienentäminen antaa prosenttikertoimen $(1 - \frac{p}{100})$. Kun edellä mainitut yhdistetään, saadaan muutosten jälkeiseksi luvuksi $(1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100})y$. Koska tekijä y on alkuperäinen perusarvo, riittää osoittaa, että prosenttikerroin ei voi saada arvoa 1. Jos se voisi saada arvon 1, niin olisi mahdollista päätyä takaisin perusarvoon. Sievennetään prosenttikertoimen lauseketta:

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100}) && \parallel \text{ sovelletaan osittelulakia (puretaan oikeanpuoleiset sulkeet)} \\ & = (1 - \frac{p}{100}) \cdot 1 + (1 - \frac{p}{100}) \cdot \frac{p}{100} && \parallel \text{ yhdellä kertominen} \\ & = 1 - \frac{p}{100} + (1 - \frac{p}{100}) \cdot \frac{p}{100} && \parallel \text{ sovelletaan osittelulakia (avataan oikeanpuoleiset sulkeet)} \\ & = 1 - \frac{p}{100} + 1 \cdot \frac{p}{100} - \frac{p}{100} \cdot \frac{p}{100} && \parallel \text{ yhdellä kertominen ja oikeanpuoleinen kertolasku} \\ & = 1 - \frac{p}{100} + \frac{p}{100} - \frac{p^2}{10\,000} && \parallel \text{ erimerkkiset termit kumoutuvat} \\ & = 1 - \frac{p^2}{10\,000} \end{aligned}$$

Murtolauseke $\frac{p^2}{10\,000}$ saa arvon nolla, jos ja vain jos sen osoittaja p^2 saa arvon nolla. Koska lähtöoletus oli, että prosentuaalinen muutos on nollasta poikkeava, ei p^2 voi olla nolla. Niin myöskään erotuksesta $1 - \frac{p^2}{10\,000}$ ei voi tulla tasan yhtä, eikä prosenttikerron näin voi saada tasan arvoa 1. Siis p prosentilla kasvattaminen ja sen jälkeen pienentäminen ei voi tuottaa uudelleen alkuperäistä arvoa (kunhan alkuperäinen arvo tai prosentuaalinen muutos eivät ole nollia).

Jos jokin käsiteltävä kaava koostuu muuttujien tulosta, voidaan siihen suoraan sijoittaa yksittäisten muuttujien suhteelliset muutokset prosenttikertoimien avulla. Erilliset prosenttikertoimet voidaan kaikki siirtää alkuperäisen lausekkeen eteen, yhdistää ja tulkita siitä kokonaisvaikutus.

ESIMERKKI 2.147

Jos kuution särmän pituus on a , niin kuution tilavuus on a^3 . Jos jokaista särmää pidennetään viisi prosenttia, niin miten kuution tilavuus muuttuu?

Ratkaisu. $V = a^3$ on alkuperäinen tilavuus. Korvataan nyt (jokainen) a kasvaneella versiolla $1,05a$, jolloin saadaan lauseke $(1,05a)^3$. Tästä saadaan tulon potenssina $1,05^3 a^3 \approx 1,158a^3$. Vertaamalla alkuperäiseen tilavuuteen a^3 todetaan, että tilavuus on kasvanut noin 15,8 prosenttia.

Jos tehtävässä käsitellään useita suureita, ole tarkkana, että muutos kohdistetaan oikeaan suureeseen. Esimerkiksi työnteosta tai matkustamisesta puhuttaessa saatetaan arkisesti sanoa ”nopeammin”, vaikka tarkoitetaan oikeasti *lyhyempää kestoa*. Nopeampi suoritus toki johtaa lyhyempään keston, mutta suhteelliset muutokset eivät ole lukuarvoltaan samat.

ESIMERKKI 2.148

Junakantaa uusitaan, ja uudet junat ovat 15 prosenttia nopeampia kuin vanhat. Kuinka monta prosenttia matkojen kestot lyhenevät? Pyöritellen kaavaa $v = \frac{s}{t}$, missä v on (keski)nopeus, s on matkan pituus ja t on matkaan kuluva aika, saadaan matkan kestoksi ratkaistua $t = \frac{s}{v}$. Korvataan nyt entinen nopeus v uudella nopeudella $1,15v$, jolloin uudeksi matkan kestoksi saadaan $\frac{s}{1,15v} = \frac{1}{1,15} \frac{s}{v} = \frac{1}{1,15} t$. Prosenttikertoimen $\frac{1}{1,15}$ likiarvo on 0,87, eli uusi matkan kesto on noin $0,87t$. Kertoimesta nähdään, että matkan kesto lyheni 13 prosentilla, eikä siis 15 prosentilla niin kuin nopeus!

Tehtäviä

Opi perusteet

248. Täydennä taulukot.

a)

desimaaliluku	murtoluku	%	‰
0,1		10	
	$-\frac{4}{5}$		
		99,9	
			0,42
		125	
-7,5			

b)

perusarvo	$\pm p$ %	lauseke
a	+10 %	$1,10a$
b	-24 %	
5 000 €	-1 %	
		$0,42x$
3 m		$26 \cdot 3$ m
		$0,003 \cdot (-7,5)$

249. Kuinka monta prosenttia

- a) 15 on luvusta 75
- b) 120 on luvusta 80
- c) 400 on luvusta 3,5
- d) luku 50 on lukua 170 pienempi
- e) luku 170 on lukua 50 suurempi
- f) 400 on lukua 3,5 suurempi?

250. Laske

- a) 4,5 % luvusta 1 500
- b) 4,5 % luvusta b
- c) 15,3 % luvusta b
- d) 152 % luvusta b
- e) 3 550 % luvusta b .

251. Oppikirjamaraton-tiimi kävi lounastamassa. Osoita oheisen kuitin tiedoilla vääräksi yleinen virhekäsitys, että 13 % suuruisen arvonlisäveron osuus olisi 13 % lopullisesta myyntihinnasta.



252. Eräällä luentokurssilla on 44 tunnin mittaista luentoa. Kurssin hyväksyttävään suoritukseen opiskelijan tulee olla läsnä vähintään 80 prosentilla luennoista. Kuinka monelle luennolla opiskelija voi jättää menemättä niin, että kurssin saa vielä suoritettua?

253. a) Laukun normaalihinta on 225 euroa, ja se on 25 prosentin alennuksessa. Mikä on alennettu hinta?

b) Meijun kuukausipalkka on 1 623,52 euroa. Hän saa 1,3 % palkankorotuksen. Mikä on kuukausipalkka korotuksen jälkeen?

254. Vuosien 2008 ja 2012 kunnallisvaaleissa ehdokkaita asettaneiden eduskunnan ulkopuolisten puolueiden saamat äänet koko maassa on esitetty seuraavassa taulukossa. Mukana ovat vain ne puolueet, jotka olivat mukana molemmissa vaaleissa.

Puolue / Äänet	2008	2012
Itsenäisyyspuolue	1 482	1 303
Kommunistinen Työväenpuolue	1 065	704
Köyhien Asialla	1 059	572
Suomen Kommunistinen Puolue	13 986	11 174
Suomen Työväenpuolue	703	538

- Minkä puolueen kannatus laski eniten äänissä laskettuna ja kuinka paljon?
- Minkä puolueen ”äänisaalis” laski eniten prosentuaalisesti (suhteellisesti) ja kuinka paljon?

255. Piraattipuolueen kannatus oli vuoden 2011 eduskuntavaaleissa 0,5 % ja vuoden 2014 europarlamenttivaaleissa 0,7 %.

- Kuinka monta prosenttiyksikköä kannatus kasvoi? (Tiedotusvälineissä kannatusmuutokset ilmoitetaan yleensä prosenttiyksiköissä.)
- Kuinka monta prosenttia kannatus kasvoi?

256. Samulin pituus on 165 cm ja Annikan 173 cm.

- Kuinka monta prosenttia Samulin pituus on Annikan pituudesta?
- Kuinka monta prosenttia Annikan pituus on Samulin pituudesta?
- Kuinka monta prosenttia Samuli on lyhyempi kuin Annika?
- Kuinka monta prosenttia Annika on pidempi kuin Samuli?

257. Vuosina 1983–1985 Pohjois-Amerikassa koettiin valtava videopelialan lama. Nintendo of American mukaan alan vuosittaiset tulot vuonna 1983 olivat vielä 3,2 miljardia dollaria, mutta vuonna 1985 ne olivat pudonneet sataan miljoonaan dollariin. Kuinka monen prosentin laskusta on kyse?

258. Suomalaisista masennuspotilaista arviolta jopa 30 %:lla on samanaikainen alkoholi-ongelma, ja alkoholista riippuvaisista arviolta jopa 60 %:lla on kliinisesti merkittävä depressio.

- a) Kuinka suuri osa masentuneista suomalaisista ei ole alkoholi-ongelmaisia (=alkoholiriippuvaisia)?
- b) Kuinka suuri osa alkoholi-ongelmaisista (=alkoholiriippuvaisista) suomalaisista ei ole masentuneita?
- c) Kumpia on suomalaisista enemmän: masentuneita vai alkoholi-ongelmaisia?

259. Tuotteen hinta koostuu sen verottomasta hinnasta ja tuotteesta maksettavasta arvonlisäverosta. Vuoden 2013 alusta Suomessa ruoan arvonlisäverokanta on ollut 14 %. Mikä ruokakauppiaan tulee asettaa elintarvikkeensa verottomaksi hinnaksi, jos hän haluaa myyntihinnaksi houkuttelevalta näyttävän 9,99 euroa?

260. Kirjan myyntihinta, joka sisältää arvonlisäveron, on 9 % suurempi kuin kirjan veroton hinta. Laske kirjan veroton hinta, kun myyntihinta on 27 euroa.

261. Vuonna 2012 yleinen arvonlisäveroprosentti Suomessa oli 23 % tuotteen verottomasta hinnasta. Kuinka monta prosenttia arvonlisävero oli tuotteen myyntihinnasta?

262. a) Tuote A on 25 prosentin alennuksessa ja maksaa tällöin yhtä paljon kuin tuote B, joka on parhaillaan 15 prosentin alennuksessa. Kuinka monta prosenttia tuote A on B:tä kalliimpi?

b) Tuote C on 25 prosentin alennuksessa ja maksaa tällöin yhtä paljon kuin tuote D, joka on parhaillaan 15 prosentin alennuksessa ja maksaa tavallisesti 555 euroa. Laske tuotteen C hinta.

263. Talletat pankkitilille 10 000 euroa, ja tilillä talletukselle kertyy korkoa 1,5 prosenttia vuodessa. Alkutalletuksen jälkeen muita tilitapahtumia ei koronmaksun lisäksi ole. Tilillä oleva rahamäärä pyöristetään aina sentin tarkkuuteen.

- a) Kuinka suuri ensimmäisen vuoden korko on?
- b) Kuinka paljon rahaa tilillä on vuoden kuluttua?
- c) Kuinka paljon rahaa tilillä on kymmenen vuoden kuluttua?
- d) Kuinka paljon rahaa tilillä on n vuoden kuluttua?
- e) Kuinka monta prosenttia enemmän tilillä on rahaa n vuoden kuluttua verrattuna alkuun?

264. Erään pankin myöntämä opintolaina kasvaa korkoa 2 % vuodessa. Kuinka monta prosenttia laina on kasvanut korkoa alkuperäiseen verrattuna kymmenen vuoden kuluttua?

265. Sokerijuurikkaassa on 18 % sokeria. Kuinka paljon sokerijuurikkaita (tonneissa) tarvitaan valmistettaessa 8 tonnia sokeriliuosta, jonka sokeripitoisuus on 4,5 %?

266. Hedelmissä on vettä aluksi 60 % niiden painosta. Kuinka monta prosenttia vedestä on haihdutettava, jotta hedelmissä tämän jälkeen olisi vain 20 % vettä?

267. (YO 2000K/4) Tuoreissa omenissa on vettä 80 % ja sokeria 4 %. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20?

268. Iidan ja Matin duo saa julkisuutta, ja he alkavat myydä CD-levyään keikkojen yhteydessä 10 euron kappalehinnalla. Jonkin ajan päästä he päättävät nostaa CD-levyn hintaa 20 prosenttia. Matti alkaa kuitenkin katua päätöstä, ja ehdottaa tämän korotetun hinnan alentamista 20 prosentilla, jotta useampi levy saataisiin myytyä.

a) Mikä olisi tämän toimenpiteen jälkeen CD:n uusi hinta?

b) Montako prosenttia olisi alennuksen oltava, jotta oikeasti päästäisiin takaisin alkuperäiseen 10 euron hintaan?

269. Kun matkalipun hintaa korotettiin 10,0 %, matkustajien määrä väheni 10,0 %. Kuinka monella prosentilla tällöin kasvoivat tai vähenivät liikennöitsijän lipputulot?

270. Askartelukaupassa on alennusviikot ja kaikki tavarat myydään 60 %:n alennuksella. Viimeisenä päivänä kaikista hinnoista annetaan vielä lisäalennus, joka lasketaan aiemmin alennetusta hinnasta. Minkä suuruinen lisäalennus tulee antaa, jos lopullisen kokonaisalennuksen halutaan olevan 80 %?

271. Oletetaan inflaation eli yksinkertaistettuna rahan arvon alenemisen olevan Suomessa eurojen tapauksessa vuosittain keskimäärin yksi prosentti. Talletusten ja sijoitusten arvo voi muuttua nimellisesti euroina, mutta kun myös inflaation vaikutus otetaan huomioon, puhutaan reaaliarvosta.

a) Kuinka korkea nettovuosikorkokantaa (eli lopullista korkoa, kun verot on otettu huomioon) pankin tulee vähintään tarjota, jotta asiakkaan talletuksen arvo oikeasti kasvaisi, kun inflatio otetaan huomioon?

b) Millä nettovuosikorkokannalla talletuksen reaaliarvo kasvaa yhdellä prosentilla vuodessa?

Hallitse kokonaisuus

272. Perfektionisti-Petra pelaa aivoja harjoittavaa peliä. Peli ilmoittaa mielivaltaisen pituisen session jälkeen erilaisia tilastoja kuten pelaajan prosentuaalisen vastaustarkkuuden ("onnistumisprosentin") ja sen, kuinka montaa muuta pelaajaa paremmin tämä suoriutui tehtävistä.

a) Petra haluaa sadan prosentin tuloksen. Kaikki menee ensin täydellisesti, mutta valitettavasti pelin kierroksella 13 hän teki ensimmäisen huolimattomuusvirheen. Kuinka monta lisäkierrosta Petran täytyy pelata oikein, jotta onnistumisprosentti pyöristyisi taas sataan? (Peli pyöristää sen yhden prosentin tarkkuuteen.)

b) Toisessa pelissä kävi niin, että peli kertoo Petran olevan parempi tai yhtä hyvä kuin 83 prosenttia pelin pelaajista eli parempi kuin 2 356 504 muuta. Kuinka monta pelaajaa pelillä on kaiken kaikkiaan?

273. Sekamehu valmistetaan sekoittamalla mehutiivistettä ja vettä suhteessa 1 : 5. Jos mehutiiviste jo itsessään sisältää 50 % vettä, kuinka monta prosenttia valmiista sekamehusta on vettä?

274. Paranoidi perheenäiti ei ole opiskellut suuruusluokkia, ja hänellä menee millit ja mikrot sekaisin. Kuinka monta prosenttia liian suuren annoksen hän saa, kun hän syö ravintolisänä eräänä päivänä D-vitamiinia 50 mikrogramman sijasta 50 milligrammaa? (Vihje: älä yritä tätä kotona.)

275. Vuonna 1998 tanskalaisjohtoinen tutkimusryhmä onnistui sopivilla materiaalivalinnoilla hidastaamaan valoa sen tyhjiönopeudesta (*täsmälleen* 299 792 458 m/s, koska metri itsessään määritellään nykyään valonnopeuden avulla) 17 metriin sekunnissa.

a) Kuinka monta prosenttia nopeus laski?

b) Kuinka monta prosenttia kauemmin hidastetulla valolla kestää ohittaa 100 nanometrin kokoinen molekyyli?

c) Kuinka monta prosenttia kauemmin hidastetulla valolla kestää edetä matka x (metriä)?

276. Eräällä kuvitteellisella saarella on vain kaksi valtiota: X ja Y. Valtioissa oli saman verran asukkaita, kunnes niiden välille syttyi sota. Tuhoisan ja hyvin yksipuolisen sodan seurauksena valtion Y asukasmäärä putosi sadasosaan entisestä, ja valtion X asukasmäärä putosi viisi prosenttia.

a) Esitä kokonaislukujen suhteena valtioiden sodan jälkeiset asukasmäärät.

b) Kuinka monta prosenttia valtion Y sodanjälkeinen asukasmäärä on koko saaren sodanjälkeisestä asukasmäärästä? Anna vastaus prosentin sadasosien tarkkuudella.

c) Kuinka monta prosenttia saaren asukasmäärä väheni sodan seurauksena?

277. Avoin kierros laserhippaa (laser tag) maksaa yhdeltä pelaajalta 9 euroa. Pelialueen voi kuitenkin varata seurueelle hintaan 260 euroa. Mette on menossa pelaamaan viiden kaverinsa kanssa.

a) Kuinka monta prosenttia kalliimpaa on varata joukolle yksityispeli kuin liput avoimeen peliin?

b) Kuinka suuri seurueen on vähintään oltava, jotta yksityispeli tulisi halvemmaksi?

278. Jos geenitekniikan laboratoriossa käsitellään tai tutkitaan RNA:ta, täytyy kyseistä DNA:n sukulaismolekyyliä tuhoavat entsyymit deaktivoida. Dietyylipyrokarbonaatti (DEPC) on voimakas proteiineja denaturoiva ja sakkaava yhdiste, ja se sopii tähän tarkoitukseen hyvin. Tavallinen ohje tarvittavan puhdistusliuoksen valmistamiseen on, että valmista 100 prosentin DEPC-liuosta laimennetaan 94-prosenttisella etanolilla 10-prosenttiseksi. Etanoli on laimennettu puhtaalla vedellä. Kuinka paljon vettä on 500 millilitrassa valmista käyttöliuosta? Jokainen ilmoitettu prosentuaalinen arvo on **tilavuusprosentti** eli kunkin komponentin tilavuuden suhde koko liuoksen tilavuuteen.

279. (YO 1991K/5a) Luvun $\sqrt{r^2 - a^2}$ likiarvona voidaan käyttää lukua $r - \frac{1}{2}a^2/r$. Laske tämän nojalla $\sqrt{3}$ likiarvo sopivia kokonaislukuja r ja a käyttäen. Kuinka monta prosenttia tämä likiarvo poikkeaa tarkasta arvosta?

Lisää tehtäviä

280. Jalkapalloilija Georgios Samaras teki ensimmäisellä kaudellaan Skotlannin valioliigassa (2007–2008) 5 maalia Celtic F. C.:n paidassa. Seuraavalla kaudella Samaras teki Celticille liigassa 15 maalia. Kuinka monta prosenttia Samaraksen maalimäärä nousi?

281. (YO 1877/4) Kaupungissa tuli jokaisen talonmistajan suorittaa kaupungin kassaan 5 % saadusta hyrymäärästä [vuokrasta, ruotsin sanasta *hyra*]. Sitten määrättiin, että mainittu prosentti oli oleva 10. Monellako prosentilla talonmistajien täytyi korottaa hyryjä saadakseen saman puhtaan säästön kuin ennen?

282. Tutki, pitääkö seuraava päättely paikkansa: jos tuotteen myyntihinta on p prosenttia suurempi kuin tuotteen veroton hinta, arvonlisäverokanta on p prosenttia.

283. Miksi ei kannata mennä ostoksille kauppaan, joka mainostaa liikkeessä olevan ”–40 %:n alennus”?

284. ★ Postapokalyptisessa Turussa ihmiset asuvat luolissa. Eräässä luolassa asuu 99 ihmistä. Aikuisia on 50 % vähemmän kuin lapsia. Montako aikuista luolassa asuu?

2.4 Potenssiyhtälöt



Opetus.tv: *Potenssiyhtälöt* (6.04, 3.43, 2.25 ja 3.48)

<http://opetus.tv/maa/maa1/potenssiyhtalot/>

Eräs tärkeä yhtälöiden tyyppi on **potenssiyhtälöt**.

Potenssiyhtälö

Potenssiyhtälö on muotoa $x^n = a$ oleva yhtälö, jossa n on jokin rationaaliluku. (n voi ilman ongelmia olla mikä tahansa reaalilukukin, mutta rationaalitarkastelu riittää tälle kurssille.)

Huomaa miinus- ja murtopotenssiyhtälöissä tarkistaa, millä kantaluvuilla x potenssit on määritelty. Murtopotenssia määriteltäessä vaadittiin, että kantaluku $x \geq 0$ ja negatiivisen potenssin tapauksessa on huomioitava, että kantaluku $x \neq 0$, sillä $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, eikä nimittäjässä sallita olevan lukua 0.

Eksponentin n ollessa kokonaisluku sen arvoa kutsutaan potenssiyhtälön **asteeksi**.

ESIMERKKI 2.149

- a) Potenssiyhtälön $x^2 = 0$ aste on 2.
- b) Potenssiyhtälön $x^9 = -34,5$ aste on 9.
- c) Yhtälö $27x^3 = 7$ on potenssiyhtälö, sillä jakamalla se puolittain luvulla 27 saadaan $x^3 = \frac{7}{27}$. Tämän potenssiyhtälön aste on 3.
- d) Yhtälö $2x^4 - 7 = 3$ on potenssiyhtälö, sillä se voidaan muokata muotoon $x^n = a$, ja sen aste on 4.
- e) Yhtälö $\frac{1}{x^2} = 3$ on potenssiyhtälö, sillä se voidaan kirjoittaa muodossa $x^n = a$, ja sen aste on -1 .

Potenssiyhtälöitä tarvitaan esimerkiksi tilanteissa, joissa lasketaan korolle korkoa. Myös pinta-ala- ja tilavuuslaskuissa esiintyy potenssiyhtälöitä.

Potenssiyhtälön ratkaiseminen

- Jos potenssiyhtälön aste n on parillinen ja $a \geq 0$, yhtälöllä on kaksi ratkaisua:

$$x = \pm \sqrt[n]{a}.$$

- Jos aste on parillinen, sillä on yksi ratkaisu vain kun $a = 0$, sillä $x = \pm \sqrt[n]{0} = \pm 0 = 0$
- Jos aste on parillinen ja $a < 0$, potenssiyhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.
- Siis parillisen asteen potenssifunktiolla voi olla yksi, kaksi tai ei yhtään ratkaisua.
- Jos aste on pariton, ja $a \neq 0$ yhtälöllä on aina täsmälleen yksi ratkaisu, $x = \sqrt[n]{a}$.

ESIMERKKI 2.150

Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $x^2 + 9 = 0$

Ratkaisu. a)

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

b)

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

c)

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm\sqrt{-9}$$

Vastaus. a) Yhtälöllä on yksi ratkaisu: $x = 0$.

b) Yhtälöllä on kaksi ratkaisua: $x = 3$ ja $x = -3$.

c) Yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua (koska minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen).

Paritonasteisen potenssiyhtälön ratkaisut

Mikäli potenssiyhtälön asteluku n on pariton, yhtälöllä on aina tasan yksi reaalilukuratkaisu (kun $a \neq 0$).

ESIMERKKI 2.151

Ratkaise yhtälöt.

a) $2x^3 + 16 = 0$

b) $2x^4 - 7 = 3$

Ratkaisu. a)

$$2x^3 + 16 = 0$$

$$2x^3 = -16$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

b)

$$2x^4 - 7 = 3$$

$$2x^4 = 3 + 7$$

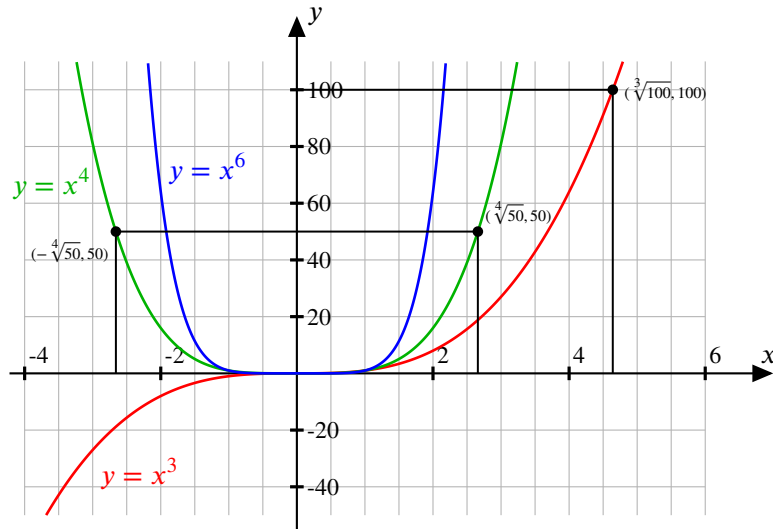
$$x^4 = \frac{10}{2}$$

$$x^4 = 5$$

$$x = \pm\sqrt[4]{5}$$

ESIMERKKI 2.152

- a) Potenssiyhtälön $x^3 = 100$ ratkaisu on $x = \sqrt[3]{100}$.
- b) Potenssiyhtälöllä $x^6 = -1$ ei ole ratkaisua, sillä $x^6 = (x^3)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
- c) Potenssiyhtälöllä $x^4 = 50$ on kaksi ratkaisua $x = \sqrt[4]{50} = 2,6591 \dots$ ja $x = -\sqrt[4]{50} = -2,6591 \dots$



ESIMERKKI 2.153

Etsitään luku x , joka toteuttaa yhtälön $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$. Tehdään tämä kahdella tapaa vaiheittain

$$\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2} \quad | \text{ Kerrotaan molemmat puolet kolmella.}$$

$$x^3 = \frac{3x^2}{2} \quad | \text{ Kerrotaan molemmat puolet kahdella.}$$

$$2x^3 = 3x^2 \quad | \text{ Vähennetään puolittain oikean puolen termillä.}$$

$$2x^3 - 3x^2 = 0 \quad | \text{ Jaetaan } x^2. \text{ Huomataan ja merkitään, että } x \neq 0.$$

$$2x - 3 = 0 \quad | \text{ Lisätään molemmille puolille 3 ja jaetaan kahdella.}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Tutkitaan vielä erikseen tilanne $x = 0$, joka ei ole määritelty yllä olevassa osamäärässä. Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$ ja saadaan $\frac{0^3}{3} = \frac{0^2}{2}$, joka pätee sillä $0 = 0$. Näin ollen siis myös $x = 0$ on ratkaisu.

Toinen tapa

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{3} &= \frac{x^2}{2} && | \text{Jaetaan molemmat puolet oikean puolen termillä.} \\ \frac{x^3}{3} : \frac{x^2}{2} &= 1 && | \text{Kerrotaan jakajan käänteisluvulla.} \\ \frac{x^3 \cdot 2}{3 \cdot x^2} &= 1 && | \text{Sievennetään. Huomataan ja merkitään, että nyt } x \neq 0. \\ \frac{x \cdot 2}{3} &= 1 && | \text{Jaetaan puolet kahdella ja kerrotaan kolmella.} \\ x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Tutkitaan vielä erikseen tilanne $x = 0$, joka ei ole määritelty yllä olevassa osamäärässä. Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$ ja saadaan $\frac{0^3}{3} = \frac{0^2}{2}$, joka pätee, sillä $0 = 0$. Näin ollen siis myös $x = 0$ on ratkaisu.

Eli molemmin tavoin saatiin sama tulos, vaikka yhtälöä muokattiin eri keinoin.

Joskus potenssiyhtälössä potenssiin on korotettu jokin laajempi lauseke kuin pelkääntään ratkaistava tuntematon. Tällöin sulkeita ei välttämättä kannata avata kertomalla potenssi auki, vaan potenssiin korotus kumotaan suoraan sopivalla juurenotolla.

ESIMERKKI 2.154

Ratkaistaan yhtälö $(2x + 1)^3 = 27$:

$$\begin{aligned}(2x + 1)^3 &= 27 && | \sqrt[3]{} \\ \sqrt[3]{(2x + 1)^3} &= \sqrt[3]{27} \\ 2x + 1 &= 3\end{aligned}$$

Nyt alkuperäinen yhtälö on palautunut (eli ns. redusoitu) aivan tavalliseksi ensimmäisen asteen yhtälöksi, joka on helppo ratkaista.

ESIMERKKI 2.155

Ratkaistaan yhtälö $1 + x = \frac{1}{1+x}$, missä nollalla jakamisen välttämiseksi $x \neq -1$:

$$\begin{aligned}
 1 + x &= \frac{1}{1+x} && | \cdot (1+x) \\
 (1+x) \cdot (1+x) &= \frac{1}{1+x} \cdot (1+x) \\
 (1+x)^2 &= 1 && | \sqrt{} \\
 \sqrt{(1+x)^2} &= \sqrt{1} \\
 \pm(1+x) &= 1 \\
 1+x &= \pm 1 && | -1 \\
 x &= \pm 1 - 1
 \end{aligned}$$

Eli $x = -2$ tai $x = 0$.

KORKOLASKUJA

ESIMERKKI 2.156

Juudas tallettaa 30 hopearahaa pankkiin. Rahamäärä kasvaa vuodessa 1 prosentin korkoa. Kuinka paljon rahaa on tilillä 2 000 vuoden kuluttua?

Ratkaisu. Tutkitaan, miten Juudaksen talletuksen suuruus lähtee kasvamaan.

Pääoma vuoden alussa / hopearahaa	Korko / hopearahaa	Pääoma / vuoden lopussa / hopearahaa
30	$0,01 \cdot 30 = 0,3$	$30 + 0,3 = 30,3$
30,3	$0,01 \cdot 30,3 = 0,303$	$30,3 + 0,303 = 30,603$
30,603	$0,01 \cdot 30,603 = 0,30603$	$30,603 + 0,30603 = 30,90903$
30,90903	$0,01 \cdot 30,90903 = 0,3090903$	$30,90903 + 0,3090903 = 31,2181203$

Huomataan, että pääoma kertaautuu aina vakiolla. Nimittäin, jos pääoma on alussa P_0 , se kasvaa $\frac{p}{100}P_0$, missä p on korkoprosentti. Nyt vuoden lopussa talletettuna on $P_1 = P + \frac{p}{100}P_0 = (1 + \frac{p}{100})P_0$, eli uusi pääoma saadaan kertomalla vanha luvulla $1 + \frac{p}{100}$. Lisäksi toisen vuoden jälkeen tilillä on siis

$$P_2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) P_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) P_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 P_0,$$

ja siis yleisesti n :n vuoden jälkeen

$$P_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n P_0.$$

Tämä on ns. **korkoa korolle** -kaava. Nyt voidaan laskea, että Juudaksen lopullinen pääoma on 2 000 vuoden jälkeen hopearahoissa

$$P_{2\,000} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{2\,000} \cdot 30 \approx 13\,178\,586\,151.5 \approx 13\,000\,000\,000.$$

Tilille kertyi siis kutakuinkin 13 miljardia hopearahaa.

Korkoa korolle -periaate

Kun korkoprosentti on p , pääoma P_0 kasvaa n :n vuoden aikana arvoon

$$P_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n P_0.$$

ESIMERKKI 2.157

Suursijoittaja Nalle Mursulla on 5 000 euroa ylimääräistä rahaa, jonka hän aikoo sijoittaa 30 vuodeksi. Nalle Mursu haluaa sijoittamansa pääoman kasvavan 100 000 euroksi 30 vuodessa. Kuinka suuren vuotuisen korkokannan Nalle Mursu tarvitsee sijoitukselleen?

Ratkaisu. Olkoon vuotuinen korkokanta r . Korkoa korolle -periaatteen nojalla 5 000 euron sijoitus kasvaa 30 vuodessa summaksi $5\,000 \cdot (1 + r)^{30}$. Merkitsemällä $x = 1 + r$ saamme yhtälön $5\,000 \cdot x^{30} = 100\,000$. Jakamalla yhtälö puolittain luvulla 5 000 päädymme potenssiyhtälöön

$$x^{30} = 20,$$

jonka ratkaisuksi saadaan $x = 20^{\frac{1}{30}} \approx 1,105$. Näin ollen suursijoittaja Nalle Mursun vaatima korkokanta sijoitukselleen on noin $r = 1 - x = 1 - 1,105 = 0,105 = 10,5\%$.

Tehtäviä

Opi perusteet

Ratkaise yhtälöt.

285. a) $x^2 = 4$

b) $x^3 = 27$

c) $x^5 = -1$

d) $x^2 - 3 = 0$

e) $x^3 + 125 = 0$

f) $x^3 = 81$

g) $x^5 = 10$

h) $x^4 = 1$

286. a) $5x^2 = 25$

b) $(2x)^3 = 8$

c) $x^4 = \frac{1}{4}$

d) $(3x)^2 = 36$

e) $(4x)^2 + 16 = 0$

287. a) $x^4 - 8 = 0$

b) $2x^3 + 7 = 0$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} = 1$

d) $1,51x^4 - 1,2 = 7,5$

288. a) $2,3x^{-1} = 7,9$

b) $\pi x^{-3} + 4 = -23$

c) $5x^{-4} = -16$

289. Ratkaise t yhtälöstä $7(t - 3) + 1 = t^2 - 1 - (t^2 - 1)$.

290. Viivi sijoitti 3 100 euroa pääomatilille. Yhdeksän vuoden kuluttua tilillä oli 5 000 euroa. Mikä oli tilin vuotuinen korkokanta prosentin sadaosien tarkkuudella, kun se oli pysynyt samana vuodesta toiseen?

291. Viivi haluaa sijoittamansa pääoman kaksinkertaistuvan seuraavassa kymmenessä vuodessa. Kuinka suurta korkoprosenttia hän esittää pankinjohtajalle?

292. Torimyyjä tarvitsee kappoja eli kuution muotoisia mitta-astioita. Pienen kapin vetoisuus on 2 litraa ja ison kapin vetoisuus 5 litraa. Määritä astioiden mitat senttimetrin kymmenesosan tarkkuudella. Kuution tilavuus lasketaan kaavalla $V = a^3$, missä a on kuution särmän pituus.

293. Suomi sitoutui vähentämään kasvihuonepäästöjään vuoden 2005 alusta 20 % vuoteen 2020 mennessä. Kuinka paljon päästöjä oli tarkoitus vähentää vuosittain? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Hallitse kokonaisuus

294. Syksyllä 2012 maapallon väkiluvun arveltiin olevan noin 7 miljardia. Väkiluku oli kaksinkertaistunut arviolta 38 vuodessa. Tutki laskimella, milloin seuraava miljardi saavutettaisiin väestönkasvun jatkuessa samalla tavalla..

295. Ihmisen punasolun keskimääräinen tilavuus on noin 90 femtolittraa. Jos punasolu oletetaan pallon muotoiseksi (oikeasti punasolu on kaksoiskupera), sen tilavuudella pätee kaava $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, missä r on pallon säde (eli puolet läpimitasta). Laske ja esitä mikrometreinä punasolun läpimitta.

296. Kun pelaajahahmo kuolee *Diablo 3* -pelissä, hänen varusteidensa kuntoluokitus pienenee 10 %.

a) Kuinka monta kertaa pelaajahahmo voi kuolla peräjälkeen ennen kuin hänen varusteidensa kunto on pudonnut alle puoleen?

b) Pelaajan taikamiekan kuntoluokitus on 90 pistettä, ja kunto voi saada vain kokonaislukuarvoja. Jokaisen kuoleman jälkeen kuntoluokitus pyöristetään lähimpään kokonaislukuun. Vaikuttaako pyöristäminen tehtävän a-kohdan tulokseen?

297. Muinainen hallitsija Tauno Alpakka rakennuttaa itselleen kuution muotoista palatsia. Palatsin tilavuuden tulee olla $5\,000\text{ m}^3$. Kuution tilavuus lasketaan kaavalla $V = a^3$, missä a on kuution särmän pituus.

a) Kuinka korkea palatsista tulee?

b) Palatsin ulkopuoli päällystetään 10 cm:n paksuisella kultakerroksella. Kuinka monta kiloa kultaa tarvitaan? (Kullan tiheys on $19,23 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$.)

c) Kuinka monta kiloa kultaa tarvitaan, jos myös palatsin sisäpuoli päällystetään?

298. (YO S1978/2) Laske $k^{\frac{5}{3}}$, kun $k^{\frac{-1}{3}} = 2$.

Lisää tehtäviä

299. Tilan eläimille rakennetaan uutta aitausta. Käytettävissä on 100 metriä sähköaitaan tarvittavaa metallijohtoa. Kuinka suuri pinta-ala kotieläimillä on käytettävissä, jos aitaus on muodoltaan

a) neliö?

b) ympyrä?

Neliön pinta-ala on sen sivun pituuden toinen potenssi, ja ympyrän pinta-ala on πr^2 , missä r on ympyrän säde. Saman ympyrän kehän pituus on $2\pi r$.

300. Tietokonepelissä *Tyrmiä ja Traakkeja* pelaajalla on käytettävissä useita eri hahmoja, kuten Santeri-soturi tai Valtteri-velho. Peli alkaa tasolta 1 ja tason noustessa hahmoista tulee vahvempia. Pelin suunnittelija määrittää kaikille vihollisille voimaluvun ja arvioi, että tasolla t Santeri-soturille keskimääräisen haastavan vihollisen on oltava voimaluvultaan $5t^{\frac{3}{2}}$ ja Valtteri-velholle $t^{\frac{5}{2}}$. Millä tasolla vihollinen on keskimääräisen haastava kullekin hahmolle, jos sen voimaluku on

- a) 30
- b) 56
- c) 100?

301. ★ Kuvaruudun pituuksien suhde on $16 : 9$. Määritä ruudun mitat sentin tarkkuudella, kun sen pinta-ala on $0,40 \text{ m}^2$. Suorakulmion pinta-ala on sen erisuuntaisten sivujen pituuksien tulo.

302. ★ 50 tuuman Full HD -näytössä on $1\,920 \times 1\,080$ kuva-alkiota eli pikseliä. Kuinka monta pikseliä näytöllä on neliösenttimetriä kohden? 1 tuuma on 2,54 senttimetriä. (Tarvitset Pythagoraan lausetta.)

2.5 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus



Opetus.tv: *Suoraan verrannollisuus* (6.21, 4.58 ja 3.46)

<http://opetus.tv/maa/maa1/suoraan-verrannollisuus/>

Kaksi muuttujaa voivat riippua toisistaan monin eri tavoin. Monissa käytännön tilanteissa ja erityisesti luonnontieteissä tavallisia riippuvuuden tyyppejä ovat suoraan ja kääntäen verrannollisuus. Suoraan verrannollisuudessa muuttujat muuttuvat samassa suhteessa, ja kääntäen verrannollisuudessa käänteisessä suhteessa.

Kaksi muuttujaa x ja y ovat suoraan verrannolliset, jos niiden suhde on aina vakio, eli pätee $\frac{x}{y} = k$, missä vakiota k kutsutaan **verrannollisuuskertoimeksi**. Yhteys kirjoitetaan yleensä muodossa $y = kx$. Jos suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset, niin tätä merkitään $x \propto y$.

Suoraan verrannollisuus voidaan tunnistaa esimerkiksi laskemalla muuttujien suhde ja toteamalla, että se on muuttujista riippumaton vakio.

ESIMERKKI 2.158

Banaanien kilohinta on 2,00 euroa. Seuraavassa taulukossa on niiden banaanien paino, jotka saa ostettua tietyllä rahamäärällä:

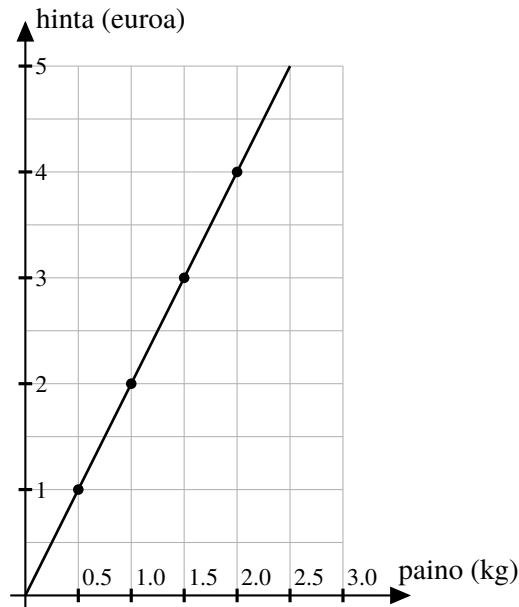
Paino (kg)	Hinta (euroa)	Hinta/paino (euroa/kg)
0,50	1,00	2,00
1,00	2,00	2,00
1,50	3,00	2,00
2,00	4,00	2,00

Hinnan ja painon suhde on vakio, 2,00 €/kg, joten ostettujen banaanien paino ja niihin käytetty rahamäärä ovat suoraan verrannolliset.

Suoraan verrannollisuutta voidaan kuvata myös niin, että jos toinen muuttujista

kaksinkertaistuu, niin toinenkin kaksinkertaistuu. Samoin jos toisen muuttujan arvo puolittuu, toisenkin arvo puolittuu.

Jos suoraan verrannollisista muuttujista piirretään kuvaaja, pisteet asettuvat suoralle:



Suoraan verrannollisia muuttujia ovat myös esimerkiksi

- a) aika ja kuljettu matka, kun liikutaan vakionopeudella, tai
- b) kappaleen massa ja painovoiman kappaleeseen aiheuttama voima.

Jos suoraan verrannolliset muuttujat x ja y saavat toisiaan vastaavat arvot x_1 ja y_1 , x_2 ja y_2 , niin voidaan muodostaa **verrantoyhtälö**:

$$k = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Suoraan verrannollisuutta monimutkaisempi riippuvuus on kääntäen verrannollisuus.

Muuttujat x ja y ovat kääntäen verrannolliset, jos toinen saadaan toisella jakamalla jokin vakio sillä, eli $y = \frac{a}{x}$.



Kääntäen verrannollisuus

Kääntäen verrannollisuus voidaan tunnistaa esimerkiksi kertomalla muuttujien arvoja keskenään ja huomaamalla, että tulo on muuttujista riippumaton vakio. Jos kääntäen verrannolliset muuttujat x ja y saavat toisiaan vastaavat arvot x_1 ja y_1 , x_2 ja y_2 , niin voidaan muodostaa verranto

$$k = x_1 y_1 = x_2 y_2$$

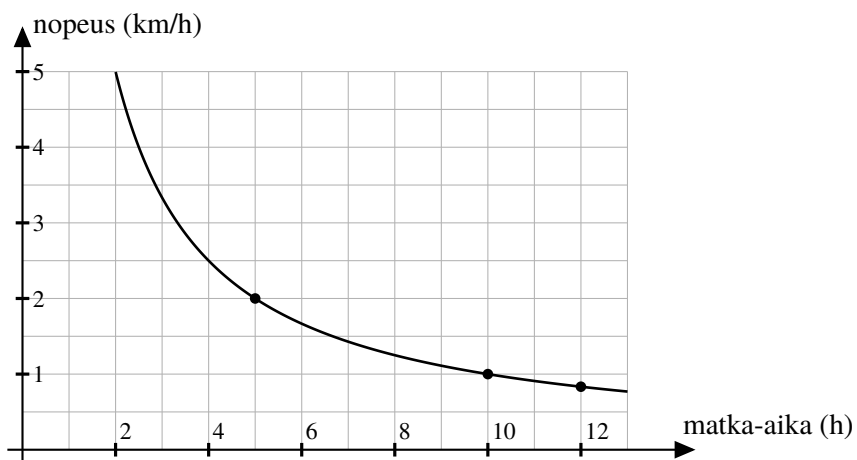
ESIMERKKI 2.159

Nopeus ja matkaan tarvittava aika ovat kääntäen verrannolliset. Jos kuljettavana matkana on 10 km, voidaan nopeudet ja matka-ajat kirjoittaa taulukoksi:

Nopeus (km/h)	Matka-aika (h)	Nopeus·matka-aika (km)
5	2	10
10	1	10
12	0,8333	10

Tulo on aina 10 km, joten nopeus ja matka-aika ovat kääntäen verrannolliset.

Kääntäen verrannollisuutta voidaan kuvata myös niin, että jos toinen muuttujista kaksinkertaistuu, toinen puolittuu. Jos kääntäen verrannollisista muuttujista piirretään kuvaaja, pisteet muodostavat laskevan käyrän:



ESIMERKKI 2.160

Kääntäen verrannollisia muuttujia ovat myös esimerkiksi

- a) kaivamistyön suorittamiseen kuluva aika ja työntekijöiden lukumäärä
- b) äänenpaine ja äänilähteen etäisyys
- c) kappaleiden välinen vetovoima ja niiden etäisyys
- d) irtomakeisten kilohinta ja viiden euron irtokarkkipussin massa.

Tehtäviä

Opi perusteet

303. Ratkaise

- a) $\frac{x}{3} = 1$
- b) $\frac{8}{y} = 2$
- c) $\frac{7}{z} = \frac{16}{8}$
- d) $\frac{t}{3} = \frac{1}{7}$.

304. Kun $x = 5$, $y = 8$. Mikä on y :n arvo silloin kun $x = 4$, ja muuttujat x ja y ovat

- a) suoraan verrannollisia?
- b) kääntäen verrannollisia?

305. Ovatko muuttujat x ja y suoraan tai kääntäen verrannolliset vai eivät kumpakaan, jos niiden

- a) osamäärä on aina 2
- b) summa on aina 5
- c) tulo on aina 4
- d) osamäärä on aina 1?

306. Tarkastele seuraavia muuttujapareja:

- a) kuljettu matka ja kulunut aika, kun nopeus on vakio
- b) sivujen pituudet suorakulmiossa, jonka pinta-ala on lukittu 5 yksikköön
- c) dieselin hinta ja 50 eurolla saatavan dieselin määrä
- d) irtomyynnistä ostetun suolakurkkuerän paino ja hinta
- e) neliön sivun pituus ja neliön pinta-ala

Tutki, miten toinen muuttuja muuttuu ensimmäisen kaksinkertaistuessa tai puolettua. Ovatko muuttujat suoraan tai kääntäen verrannolliset vai eivät kumpakaan?

307. Muodosta seuraavia tilanteita kuvaavat yhtälöt (jossakin muodossa). Voit käyttää vakion merkinä esimerkiksi kirjainta k .

a) Kultakimpaleen arvo x on suoraan verrannollinen sen massa m , eli mitä painavampi kimpale, sitä arvokkaampi se on.

b) Aidan maalaamiseen osallistuvien ihmisten määrä x on kääntäen verrannollinen maalaamiseen kuluvaan aikaan t . Toisin sanoen: mitä enemmän maalaajia, sitä nopeammin työ on valmis.

c) Planeettojen toisiinsa aiheuttama vetovoima F on suoraan verrannollinen planeettojen massojen tuloon $m_1 m_2$ ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden r neliöön.

308. Hiusten pituuskasvu on suoraan verrannollinen kuluneeseen aikaan. Iinan hiukset kasvavat noin 1,5 senttimetriä kuukaudessa. Iina päättää kasvattaa hiuksia vuoden ajan. Kuinka paljon Iinan hiukset tänä aikana kasvavat?

309. Rento pyöräilyvauhti kaupunkiolosuhteissa on noin 20 km/h. Lukiolta urheiluhallille on matkaa 7 km. Kuinka monta minuuttia kestää arviolta pyöräillä lukiolta urheiluhallille?

310. Isä ja lapset ovat ajamassa mökille Sotkamoon. On ajettu jo neljä viidesosaa matkasta, ja aikaa on kulunut kaksi tuntia. ”Joko ollaan perillä?” lapset kysyvät takapenkiltä. Kuinka pitkään vielä arviolta kuluu, ennen kuin ollaan mökillä?

311. Yhteen sokerikakkuun tarvitaan neljä kananmunaa, 1,5 desilitraa sokeria ja kaksi desilitraa vehnä jauhoja. Timolla on keittiössään 20 kananmunaa, litra sokeria ja 1,5 litraa jauhoja. Kuinka monta sokerikakkua Timo voi leipoa?

312. Pullareseptin^a mukaan taikinaan tarvitaan 5 dl maitoa, 2 dl sokeria ja 1,5 l vehnä jauhoja. Tällöin saadaan 40 pikkupullaa.

a) Taija haluaa leipoa 16 pullaa. Kuinka paljon hän tarvitsee maitoa, sokeria ja vehnä jauhoja?

b) Jos Taijalla on käytössä vain 3 dl maitoa, kuinka monta pikkupullaa hän voi enintään leipoa?

a. <http://kotiliesi.fi/ruoka/reseptit/pullataikina>

313. Kymmenen miestä kaivaa viisitoista kuoppaa kymmenessä tunnissa. Kuinka kauan viidellä miehellä kestää kaivaa 30 kuoppaa?

Hallitse kokonaisuus

314. Sotkamossa isä lämmittää savusaunaa, jonka käyttöaika on suoraan verrannollinen lämmitysaikaan. Jos saunaa lämmittää kolme tuntia, pysyy se kuumana kaksi tuntia. Perhe haluaa saunaa kolme tuntia kello kahdeksasta eteenpäin. Milloin saunaa pitää alkaa lämmittää?

315. Äidinkielen kurssilla annettiin tehtäväksi lukea 300-sivuinen romaani. Eräs opiskelija otti aikaa ja selvitti lukevansa vartissa seitsemän sivua. Kuinka monta tuntia häneltä kuluu koko romaanin lukemiseen, jos taukoja ei lasketa?

316. Alkuperäiskansojen perinteitä tutkiva etnologi kerää saamelaiden kansantari-
noita. Kierrettyään viikkojen ajan saamelaisperheiden vieraana palaa etnologi yli-
opistolle mukanaan äänitiedostoiksi tallennettuja haastatteluja. Jotta etnologi voi
ryhtyä kirjoittamaan tutkimusraporttia, pitää haastattelutiedostot ensin purkaa teks-
tiksi eli *litteroida*. Tähän etnologi pyytää apua laitoksen opiskelijoilta. Neljä opis-
kelijaa litteroi tiedostot 25 tunnissa. Kuinka kauan aikaa kuluu, jos työhön saadaan
vielä kolme opiskelijaa lisää? Kuinka monta opiskelijaa tarvitaan, jotta työ saatai-
siin tehdyksi 9 tunnissa? Oletetaan, että kaikkien opiskelijoiden työteho on sama.

317. Kappaleen liike-energia on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Kun
kappale liikkui nopeudella 9,0 m/s, sillä oli 150 joulea (J) liike-energiaa.

a) Laske kappaleen liike-energia, kun sen nopeus on 5,0 m/s.

b) Mikä saadaan verrannollisuuskertoimen yksiköksi, kun $J = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$?

318. Venematka Nauvoon kestää tyynellä säällä 75 minuuttia. Kuinka monta pro-
senttia aika lyhenee, jos ostetaan uusi vene, jonka nopeus on

a) 30 % suurempi kuin vanhan veneen nopeus 35 km/h?

b) 45 % suurempi kuin vanhan veneen nopeus v ?

319. Puun rungon tilavuutta voidaan arvioida suoran ympyräkartion tilavuuden
kaavalla, $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, missä h kuvaa puun korkeutta ja r puun sädettä.

a) Vuosien 2012–2013 aikana puun korkeus kasvoi 20 % ja säde 10 %. Kuinka mon-
ta prosenttia puun tilavuus kasvoi?

b) Samalla aikavälillä puun kuutiohintaa (€/m³) laski 35 %. Kuinka paljon puun ar-
vo muuttui (prosentteina)?

320. Pallon muotoisessa lankakerässä langan pituus on verrannollinen pallon hal-
kaisijan kuutioon. Kun lankakerässä on 500 metriä hyvin ohutta lankaa, on sen
halkaisija 4 cm. Jättimäisen lankakerän halkaisijan pituus on yksi metri. Kuinka
monta kertaa siinä oleva lanka riittäisi levitettäväksi maapallon ympäri? Maapal-
lon ympärysmitta on noin 40 000 km.

Lisää tehtäviä

321. Kun muuttujan x arvo on 6, muuttuja y saa arvon 12. Minkä arvon muuttuja
 y saa silloin, kun $x = 18$ ja

a) muuttujat x ja y ovat suoraan verrannollisia?

b) muuttujat x ja y ovat kääntäen verrannollisia?

322. Metsäpalon pinta-ala on suoraan verrannollinen palamisajan neliöön. Kahdessa päivässä metsää on palanut neliökilometrin verran.

a) Kuinka monta neliökilometriä metsää on palanut, kun metsäpalo on kestänyt kuusi päivää?

b) Kuinka monen päivän päästä metsää on palanut yli 30 neliökilometriä?

323. Karkkikulhon tyhjentymisaika on kääntäen verrannollinen syöjien määrään. Kun syöjiä on 20, kulho syödään tyhjäksi kahdessa tunnissa. Juhliin kutsuttiin sata ihmistä, mutta kulhon tyhjäksi syömiseen kului puoli tuntia. Kuinka moni vieraista ei syönyt karkkeja?

324. Kenkätehtaalla sata työntekijää valmistaa yhdeksässä tunnissa 500 paria kenkiä. Tehtaan omistaja päättää siirtää tuotannon halvemman työvoiman maahan, jossa hänellä on varaa palkata 300 työntekijää.

a) Jos uudet työntekijät ovat yhtä tehokkaita kuin vanhat, kuinka kauan heillä kestää tehdä 500 paria kenkiä?

b) Uudet työntekijät suostuvat tekemään 15 tunnin työpäivää. Kuinka monta paria kenkiä yhden työpäivän aikana valmistuu olettaen, että työteho ei hiivu?

325. Kuution tilavuus on suoraan verrannollinen sen pinta-alan neliöjuuren kolmanteen potenssiin. Kun kuution tilavuus on 64 m^3 , ja sen pinta-ala on 96 m^2 . Jos kuution pinta-ala on 100 m^2 , mikä on sen tilavuus?

326. ★ Kappaleen putoamisen kesto maahan korkeudelta x on kääntäen verrannollinen putoamiskiihtyvyyden g neliöjuureen. Vakio g on kullekin taivaankappaleelle ominainen ja eri puolilla taivaankappaletta likimain sama. Empire State Buildingin katolta (korkeus 381 metriä) pudotetulla kuulalla kestää noin 6,2 sekuntia osua maahan. Marsin putoamiskiihtyvyys on 37,6 % Maan putoamiskiihtyvyydestä. Jos Empire State Building sijaitsisi Marsissa, kuinka kauan kuluisi kuulan maahan osumiseen?

3.1 Funktio ja sen esitystavat



Opetus.tv: *Funktion käsite ja kuvaaja* (4.08, 3.49, 5.36 ja 1.34)

<http://opetus.tv/maa/maal/funktion-kasite-ja-kuvaaja/>

Usein ollaan kiinnostuneita siitä, millainen yhteys on kahden asian välillä. Funktio on matemaattinen työkalu näiden yhteyksien tarkastelemiseen.

Funktio

Funktio eli **kuvaus** f joukosta A joukkoon B liittää jokaiseen joukon A alkioon täsmälleen yhden joukon B alkion. Funktion f alkioon x liittämää arvoa merkitään $f(x)$.

Joukkoa A sanotaan tässä f :n **määrittelyjoukoksi** ja joukkoa B puolestaan f :n **maalijoukoksi**. Tällöin voidaan merkitä lyhyesti $f : A \rightarrow B$. Funktion f **arvojoukon** muodostavat f :n kaikki maalijoukkoon B kuuluvat arvot $f(x)$.

ESIMERKKI 3.161

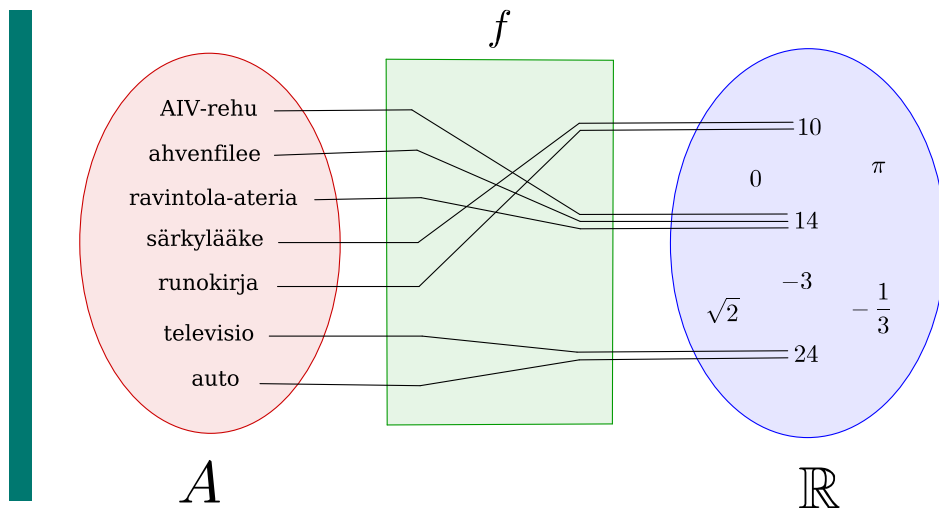
Hyödykkeen ja siitä maksettavan arvonlisäveron välistä yhteyttä voidaan kuvata funktiolla. Valitaan funktion määrittelyjoukoksi tiettyjen hyödykkeiden joukko

$$A = \{\text{ahvenfilee, AIV-rehu, auto, runokirja, ravintola-ateria, särkylääke, televisio}\},$$

ja arvojoukoksi reaalityluvut. Merkitään tätä funktiota kirjaimella f , jolloin

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Funktio voi liittää kuhunkin hyödykkeeseen esimerkiksi siitä

maksettavan arvonlisäveroprosentin: $f(\text{särkylääke}) = 10$ ja $f(\text{televisio}) = 24$.



ESIMERKKI 3.162

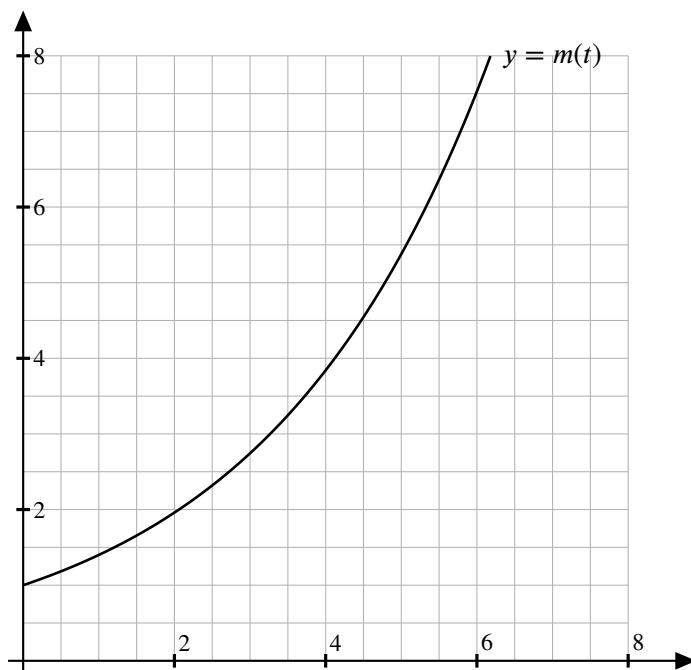
Seuraavaan taulukkoon on koottu kuukausittaiset keskilämpötilat Sodankylässä vuonna 2012.

tam	hel	maa	huh	tou	kes	hei	elo	syys	loka	mar	jou
-12	-16	-6	-3	6	11	13	12	7	0	-4	-15

Taulukon perusteella voidaan määritellä funktio f , joka kuvaa kuukaudet keskilämpötiloiksi. Määrittelyjoukko ovat vuoden kaikki kuukaudet, maalijoukkoon kuuluvat kaikki mahdolliset lämpötilat, ja arvojoukko koostuu funktion kaikista arvoista, siis eri kuukausien keskilämpötiloista. Nyt esimerkiksi $f(\text{tam}) = -12$ ja $f(\text{tou}) = 6$.

ESIMERKKI 3.163

Seuraava kuva esittää erään suotuisissa oloissa kehittyvän bakteerikannan massaa ajan t funktiona m .



Alkutilanteessa eli ajanhetkellä $t = 0$ bakteerikannan massa $m(t)$ on $m(0) = 1$ gramma. Kahden tunnin kuluttua bakteerikannan massa on $m(2) \approx 2,0$ grammaa ja kuuden tunnin kuluttua vastaavasti $m(6) \approx 7,5$ grammaa.

Funktioiden merkitsemiseen liittyy joitakin vakiintuneita tapoja:

- 1) Merkintä $f(x) = y$ luetaan esimerkiksi: ”funktio f saa arvon y pisteessä x ” tai lyhyemmin: ” f arvolla x on y .”
- 2) Funktion määrittely- ja maalijoukot jätetään usein merkitsemättä, jos ne voidaan päätellä asiayhteydestä. Tällä kurssilla funktiot ovat yleensä reaalityyppiltä reaalityypeille.
- 3) Usein kirjoitetaan esimerkiksi ”funktio $f(x) = x^2 + 3x$ ”, vaikka tarkkaan ottaen funktio on f ja $f(x)$ on sen saama arvo pisteessä x .
- 4) Toisinaan funktiolle ja funktion kuvaajalle ei tehdä selkeää eroa: $y = f(x)$ samaistetaan koordinaatistoon piirretyn funktion kuvaajan kanssa. Oikeastaan funktio ja sen kuvaaja ovat kuitenkin eri asioita.
- 5) Niitä x :n arvoja, joilla funktio saa arvon 0, sanotaan funktion **nollakohdiksi**.

Huomaa seuraavien käsitteiden erot:

Käsitteitä

Määritellään funktio f seuraavasti: $f(x) = 3x - 2$ § f on funktion nimi § merkintä $f(x)$ tarkoittaa funktion f arvoa kohdassa x § $3x - 2$ on lauseke, jolla $f(x)$ on määritelty § Yhtälö $f(x) = 3x - 2$ kertoo, että funktion f arvo kohdassa x on yhtäsuuri lausekkeen $3x - 2$ kanssa § x on funktion muuttuja

REAALIFUNKTIOT

Funktioita, jotka määritellään reaaliluvuilla, ja jotka saavat arvokseen reaalilukuja, kutsutaan reaalifunktioiksi. Funktiolla, erityisesti reaalifunktioilla, on usein jokin selkeä sääntö, joka voidaan kirjoittaa matemaattisena lausekkeena.

ESIMERKKI 3.164

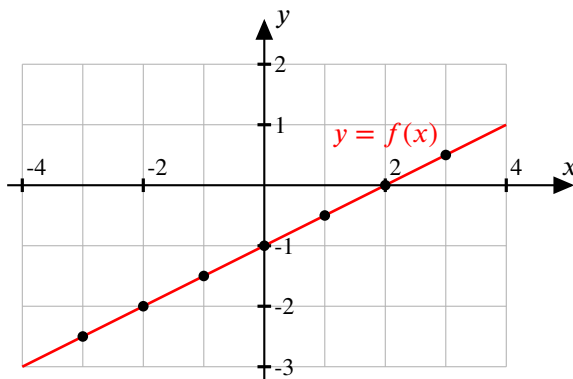
Jos neliön sivun pituutta merkitään muuttujalla x , voidaan pinta-alaa kuvata funktiolla A : $A(x) = x^2$.

Reaalifunktioita voidaan havainnollistaa koordinaatistossa *kuvaajien* avulla. Funktion f kuvaajassa koordinaatistoon piirretään ne pisteet (x, y) , joiden y -koordinaatti on f :n arvo x -koordinaatissa. Reaalifunktioilla ei kuitenkaan voida laskea $y = f(x)$ kaikilla f :n määrittelyjoukon luvuilla x , joten esimerkiksi graafiset laskimet laskevat $y = f(x)$ ”riittävän monella” luvulla ja sovittavat kuvaajan niiden perusteella. Funktioiden kuvaajia voi piirtää helposti paitsi graafisilla laskimilla, myös tietokoneohjelmilla sekä esimerkiksi verkossa Wolfram Alphalla (<http://www.wolframalpha.com/>).

ESIMERKKI 3.165

Funktion f : $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y) , joilla pätee $y = \frac{x}{2} - 1$. Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin kun $x = 2$, tämä pistettä sanotaan funktion nollakohdaksi. (Huomaa, että funktioilla voi olla myös useampia nollakohtia, tai ei yhtään nollakohtaa.)

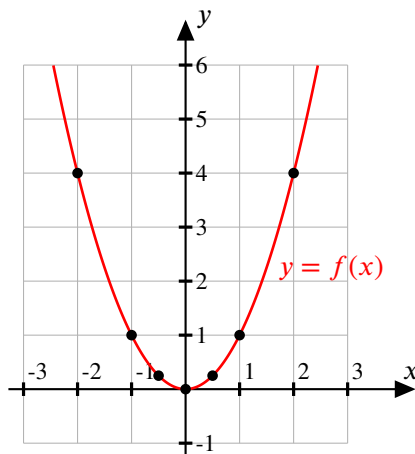
x	$y = f(x)$
-3	-2,5
-2	-2
-1	-1,5
0	-1
1	-0,5
2	0
3	0,5



ESIMERKKI 3.166

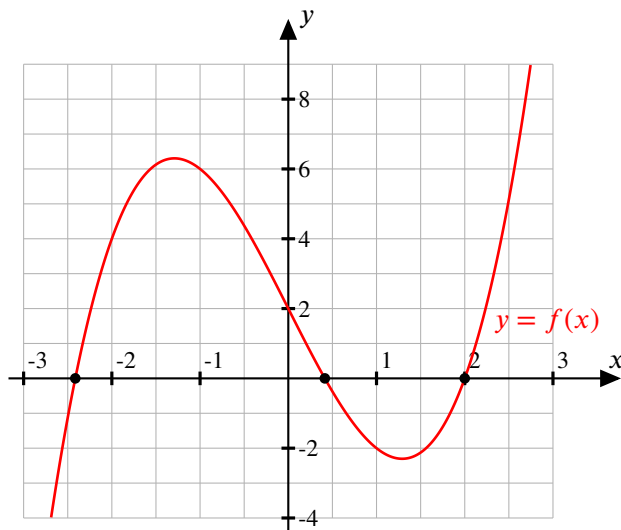
Funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y) , joilla pätee $y = x^2$. Kuvaajan nollakohta on tässä tapauksessa, kun x saa arvon 0, koska $y = 0^2 = 0$.

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
-0,5	0.25
0	0
0,5	0.25
1	1
2	4



ESIMERKKI 3.167

Funktion $f(x) = x^3 - 5x + 2$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y) , joilla pätee $y = x^3 - 5x + 2$. Funktiolla on tässä tapauksessa kolme nollakohtaa:



MÄÄRITTELYJOUKKO JA ARVOJOUKKO

Funktion **määrittelyjoukko** on niiden arvojen joukko, joille funktion arvo on olemassa. Jos määrittelyjoukkoa ei ole mainittu erikseen, määrittelyjoukon tarkoitetaan

tavallisesti olevan *mahdollisimman laaja reaalilukujen osajoukko* johon kuuluville arvoille funktion arvon voi laskea.

ESIMERKKI 3.168

Määritellään funktio g lausekkeella

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

Mikä on funktion g määrittelyjoukko?

Ratkaisu. Neliöjuuri $\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$. Funktion g määrittelyehto on siis $x \geq 0$ ja määrittelyjoukko koostuu nollasta ja sitä suuremmista reaaliluvuista.

Vastaus. $x \geq 0$.

Käytännössä määrittelyjoukon rajoituksia tarvitaan yllä esitetyn parillisen juuren lisäksi esimerkiksi silloin kun funktiossa esiintyy muuttuja nimittäjässä. Tällöin on huomioitava, ettei nimittäjässä saa olla nollaa millään muuttujan x arvolla. Soveltavissa tehtävissä saatetaan myös rajoittaa määrittelyjoukkoa vaikkapa siksi, että pituus ei voi olla negatiivinen.

ESIMERKKI 3.169

Määritellään funktio f lausekkeella

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Mikä on funktion määrittelyjoukko?

Ratkaisu. Funktio f on määritelty, kun nimittäjä $x - 1$ on erisuuri kuin 0. Tämä toteutuu kaikilla x :n arvoilla lukuun ottamatta arvoa $x = 1$. Funktion määrittelyjoukkoon kuuluvat siis kaikki reaaliluvut paitsi luku 1.

Vastaus. Funktion f määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko poislukien luku 1.

Funktion **arvojoukko** sisältää täsmälleen ne maalijoukon alkiot, jotka funktio saa arvokseen ainakin yhdessä pisteessä.

ESIMERKKI 3.170

Mikä on edellä määritellyn funktion f arvojoukko?

Ratkaisu. Arvojoukon selvittämiseksi tutkitaan, millä luvun a arvoilla yhtälöllä $f(x) = a$ on ratkaisu. Oletetaan, että $x \neq 1$ (ks. edellinen esimerkki).

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{x-1} & | \cdot (x-1), \text{ sillä } x \neq 1 \\ a(x-1) &= 1 \end{aligned}$$

Havaitaan, että jos $a = 0$, yhtälöllä ei voi olla ratkaisua, koska $0 \cdot (x-1) = 0 \neq 1$. Oletetaan jatkossa, että $a \neq 0$.

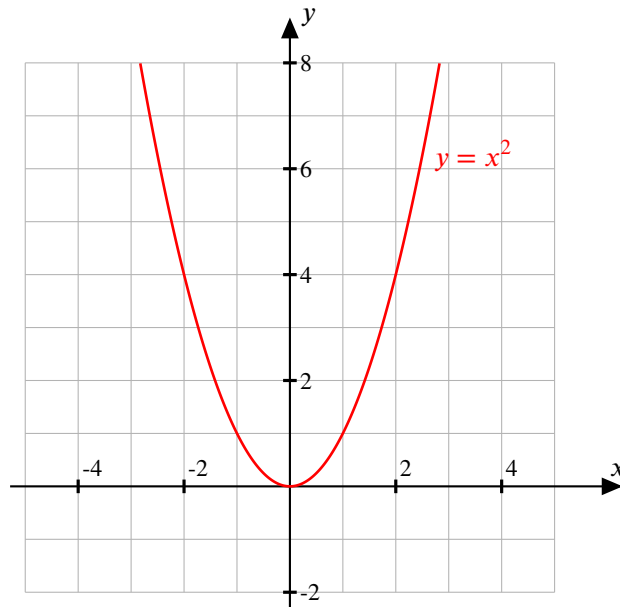
$$\begin{aligned} a(x-1) &= 1 & | : a, \text{ sillä } a \neq 0 \\ x-1 &= \frac{1}{a} \\ x &= 1 + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Havaitaan, että yhtälöllä on ratkaisu kaikilla $a \neq 0$.

Vastaus. Funktion f arvojoukko on reaalilukujen joukko poislukien luku 0.

ESIMERKKI 3.171

Tarkastellaan reaalifunktiota $f(x) = x^2$. Funktion f määrittelyjoukko on selkeästi koko reaalilukujen joukko, sillä toinen potenssi x^2 on määritelty, olipa muuttuja x mikä reaaliluku tahansa. Funktio f on reaalifunktio, joten sen arvot ovat reaalilukuja. Sen maalijoukko on siis koko reaalilukujen joukko. Kuitenkin, koska parillisena potenssina $x^2 \geq 0$, olipa x mikä luku hyvänsä, funktion f arvojoukko on kaikki positiiviset reaaliluvut.



PALOITTAIN MÄÄRITELTY FUNKTIO

Käsiteltäessä aiemmin neliojuurta sivuttiin itseisarvon määritelmää. Itseisarvofunktio $f : f(x) = |x|$ voidaan määritellä seuraavasti:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

Funktio siis jättää ei-negatiiviset luvut ennalleen, mutta vaihtaa negatiivisen luvun vastaluvukseen, ja arvojoukko koostuu pelkästään ei-negatiivisista luvuista. Funktio on määritelty kahdessa eri osassa: lähtöjoukon alkion arvosta riippuen valitaan sille sovellettava lauseke.

ESIMERKKI 3.172

Määritellään funktio $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeilla

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{jos } x \neq 0 \\ 1 & \text{jos } x = 0 \end{cases}$$

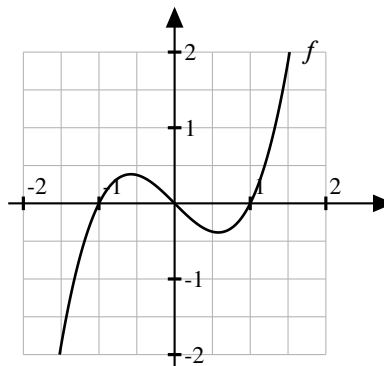
Mikä on funktion arvojoukko? Miksi määrittelemme kohdan $x = 0$ erikseen?

Ratkaisu. Kun $x \neq 0$, osamäärästä $\frac{x}{x}$ saadaan aina 1. Kohdassa $x = 0$ funktion arvoksi on puolestaan määritelty 1. Näin ollen funktion g arvojoukko koostuu yhdestä ainoasta luvusta, ykkösestä. Koska lauseke $\frac{0}{0}$ ei ole määritelty, määrittelemme kohdan $x = 0$ erikseen. Funktio on siis vakioarvoinen ja voisimme kirjoittaa sen yksinkertaisesti $g : g(x) = 1$.

Tehtäviä

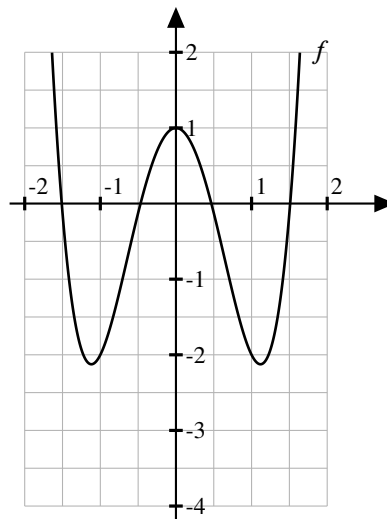
Opi perusteet

327. Määritä kuvaajasta katsomalla funktion f nollakohdat. Saako funktio f ne-



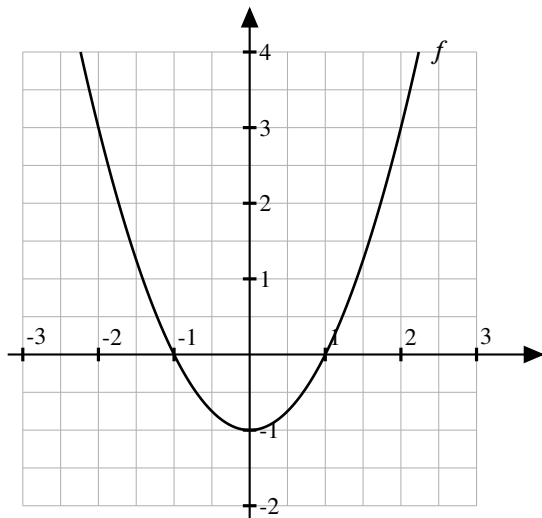
gatiivisia ja positiivisia arvoja?

328. Määritä kuvaajasta katsomalla funktion f nollakohdat. Saako funktio f sekä



negatiivisia ja positiivisia arvoja?

329. Määritä kuvaajasta funktion f arvot muuttujan arvoilla 0 ja 1. Millä muuttujan arvoilla f saa arvon 3? Entä arvon 0?



330. Hahmottele funktion kuvaaja koordinaatistoon. Voit myös käyttää tietokonetta.

- a) $f(x) = 2$
- b) $f(x) = 3x + 2$
- c) $f(x) = x^2$
- d) $f(x) = \frac{2}{x}$

331. Laske taulukkoon funktion arvo pisteissä $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$. Hahmottele näiden tietojen avulla funktion kuvaaja.

- a) $f(x) = x^2 + x + 1$
- b) $f(x) = 3x^2$
- c) $f(x) = x^3 + 2x + 2$

332. Mikä on funktion $f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ laajin reaalinen määrittelyjoukko?

333. Olkoon $f(x) = 2x - 1$ ja $g(x) = 2 - x$. Millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$? Piirrä funktioiden kuvaajat ja tarkista vastauksesi kuvasta.

334. Missä pisteessä funktio $P(t) = -2t + 4$ saa arvon

- a) 4
- b) -2
- c) 8?
- d) Mikä on funktion P nollakohta?

335. Tuuli ostaa joka viikko pussin vadelmaveneitä. Yksi pussi maksaa 2,5 euroa. Tuulin rahatilannetta euroina havainnollistaa funktio $f(x) = -2,5x + 20$, jossa muuttuja x kuvaa aikaa viikkoina.

- a) Kuinka paljon rahaa Tuulilla on aluksi?
- b) Kuinka paljon rahaa Tuulilla on viiden viikon jälkeen?
- c) Milloin Tuulilla on jäljellä enää 5 euroa?
- d) Milloin rahat loppuvat?
- e) Piirrä funktion f kuvaaja ja tarkista vastauksesi siitä.

Hallitse kokonaisuus

336. Olkoon $f(x) = \frac{x}{3} - 4$ ja $g(x) = 3x - 7$. Millä x :n arvolla pätee $f(x) = g(x)$?

337. Mikä on funktion määrittelyehto?

a) $f(x) = \sqrt{x+6}$

b) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

c) $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}}$

338. Määritä funktion g arvojoukko, kun

a) $g(x) = x - \sqrt{2}$

b) $g(x) = \frac{3}{x-2}$

c) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

d) $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

339. Lääketieteen valintakoneessa on monivalintatehtävä, jossa kustakin oikeasta vastauksesta saa 0,25 pistettä ja kustakin väärästä vastauksesta pistemäärästä vähennetään 0,5 pistettä. Monivalintakohtia on 28. Esitä kokonaispistemäärä p väärin vastauksien määrän v funktiona olettaen kokelaan vastaavan jokaiseen tehtävään. Kuinka moneen kohtaan kokelas on korkeintaan vastannut väärin, jos hän saa positiivisen kokonaispistemäärän?

340. Suorakaiteen muotoisen aitauksen toinen sivu on 2 m pidempi kuin toinen. Muodosta aitauksen pinta-alan funktio $A(x)$. Mikä on aitauksen pinta-ala, kun lyhyemmän sivun pituus on

- a) 0 m
- b) 5 m
- c) 20 m?
- d) Mikä on funktion $A(x)$ määrittelyehto?

341. Olkoon $f(x) = \frac{7s+5x}{6} + 2s - 1$ ja $g(x) = -2x + \frac{1}{2}$. Määritä vakio s , kun

a) $f(0) = g(0)$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Määritä vielä $f(6)$ ja $g(f(6))$, kun $s = 1$.

342. Olkoon $f(x) = -2x$. Mitä on

a) $f(x + 3)$

b) $f(x) + 3$

c) $f(3x)$

d) $3f(x)$?

343. Olkoon $z(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2}x}{x} - x + 5$. Määritä

a) $z\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $z(-1)$

c) $z(2013)$.

Osoita, ettei funktion z arvo riipu muuttujan arvosta.

344. Millä vakion a arvolla funktio $g(x) = \frac{2x+1+a}{5x}$ saa arvon 5 kohdassa $x = 3$?

Lisää tehtäviä

345. Olkoon $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-x}$. Laske, mikäli mahdollista:

a) $f(2)$

b) $f(1)$

c) $f(0)$

d) $f(-1)$

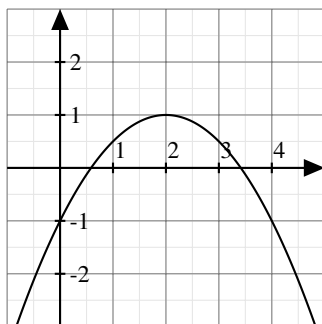
346. Määritellään funktio f lausekkeella

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1.$$

Funktion f kuvaaja löytyy alta. Oletetaan lisäksi, että $a > 1$. Päätele lukujen suuruusjärjestys.

a) $f(a)$ ja $f(a+2)$

b) $f(-a)$ ja $f(a)$



$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

347. Keksi jokin sellainen funktio, joka toteuttaa annetun ehdon. Jonkinlaisen kuvan hahmottelusta on apua.

a) $f(3) = 2$ ja $f(24) = 16$

b) Jos $f(a) = b$, niin $f(a+1) = b+1$

c) Jos $f(a) = b$, niin $f(a+1) = b-1$

d) Jos $f(0) = 0$ ja $z > 0$, niin $f(\pm z) = z$. (Vinkki: $|\pm a| = a$)

348. a) Voiko funktio olla relaationa sekä transitiivinen että refleksiivinen? Jos voi, anna esimerkki. Jos ei, perustele.

b) Anna perusteltu esimerkki sellaisesta reaalifunktion f lausekkeesta, jolle pätee $f(f(x)) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

349. ★ Millä muuttujan x arvoilla yhtälö $f(f(x)) = x$ pätee, kun

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = x+1$

d) $f(x) = 2x+1$?

350. ★ Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$ ja

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Laske

a) $g(f(2))$

b) $g(f(0))$.

351. ★ Olkoon $f(x) = \frac{x}{5}$ ja $g(x) = 2x - 3$. Laske

a) $f(f(4))$

b) $f(g(4))$

c) $g(f(4))$

d) $g(f(x))$

e) $f(g(x))$.

3.2 Potenssifunktio



Opetus.tv: *Potenssifunktiot* (4.24, 3.16, 3.37 ja 5.51)

<http://opetus.tv/maa/maa1/potenssifunktiot/>

Kahden muuttujan välinen riippuvuus ei monesti ole suoraan tai kääntäen verrannollista. Potenssifunktion käyttäminen on eräs keino kuvata tällaisia yleisempiä riippuvuuksia.

Potenssifunktio

Potenssifunktiot ovat muotoa $f(x) = ax^n$ olevat funktiot, jossa $a \neq 0$.

EkspONENTTIA n kutsutaan potenssifunktion **asteluvuksi** tai **asteeksi**. Potenssifunktion eksponentti voi olla mikä tahansa reaaliluku, mutta rajoitumme ensin käsittelemään tapauksia, jossa $n = 1, 2, 3, \dots$

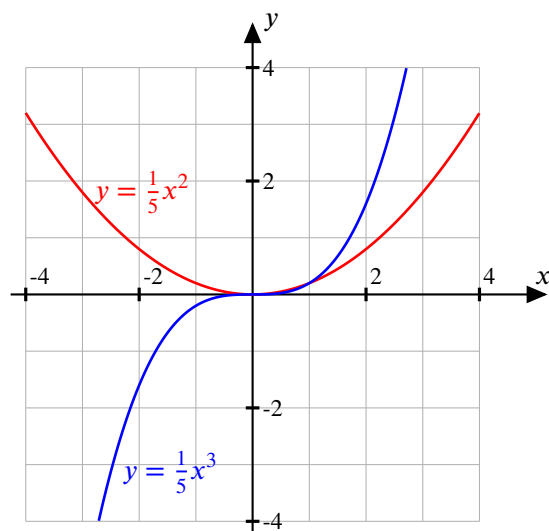
ESIMERKKI 3.173

Jos neliön sivun pituus on x , neliön pinta-ala voidaan laskea funktiolla $A(x) = x^2$. Esimerkiksi jos $x = 3$ cm, saadaan neliön pinta-alaksi $A(x) = 9$ cm². Vastaavasti kuutiolle: jos x kuvaa kuution särmän pituutta, funktiolla $V(x) = x^3$ voidaan laskea kuution tilavuus. Sekä $A(x)$ että $V(x)$ ovat esimerkkejä potenssifunktioista.

Potenssifunktion aste vaikuttaa funktion kuvaajan muotoon:

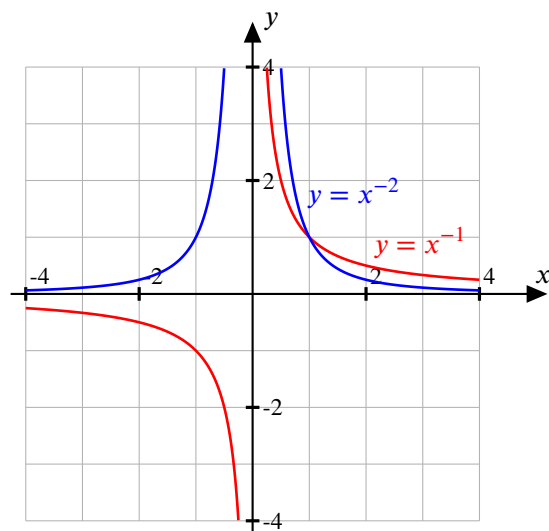
Kuvaajan muoto

- Jos aste on parillinen, kuvaaja on U-kirjaimen muotoinen ja funktio saa a :n merkistä riippuen joko pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia arvoja.
- Jos aste on pariton, kuvaaja muodostaa ”kaksoismutkan” ja potenssifunktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.



Potenssifunktion tärkeitä erikoistapauksia ovat asteluvut $n = 1$ ja $n = -1$. Kun $n = 1$, saadaan edellisessä luvussa esitelty suoraan verrannollinen riippuvuus x :n ja $f(x)$:n välillä, ja kun $n = -1$, muuttuja x ja funktion arvo $f(x)$ ovat kääntäen verrannolliset.

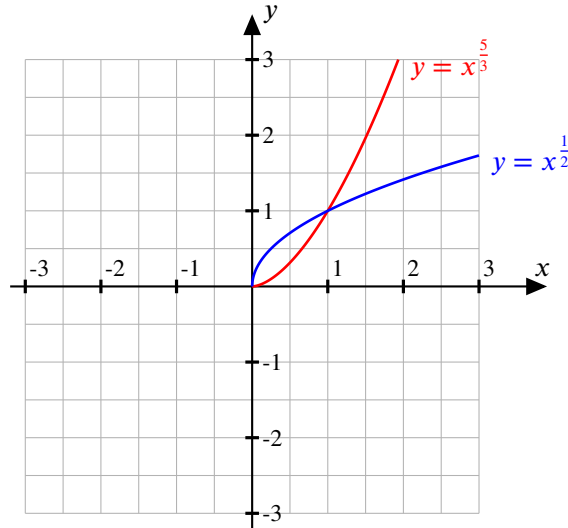
Potenssifunktiota voidaan laajentaa sallimalla eksponentille n myös negatiiviset arvot. Tällöin funktion muoto muuttuu merkittävästi. Funktio ei myöskään ole enää määritelty kohdassa $x = 0$, vaan funktion arvot ”räjähtävät äärettömyyteen”, kun y -akselia lähestytään:



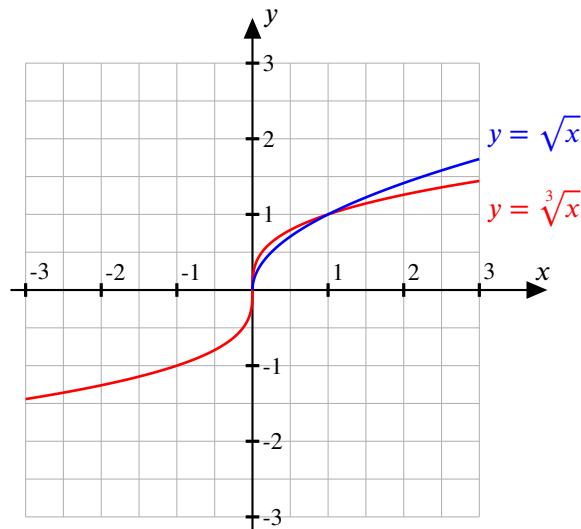
Aiemmin määriteltiin murtopotenssi $x^{\frac{m}{n}}$, missä kantaluku $x \geq 0$. Murtopotenssifunktiota määriteltessä pitää myös muistaa kantaluvun positiivisuus, joten murtopotenssifunktion $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ määrittelyjoukko on positiivisten reaalilukujen joukko,

eli $x \geq 0$.

Huomaa, että koska murtopotensseilla pätee $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, funktio $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ on itse asiassa sama kuin funktio $g(x) = \sqrt{x}$. Kuitenkin, koska murtopotensseja ei määritellä negatiivisilla kantaluvuilla, funktio $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ on määritelty ainoastaan kun $x \geq 0$, mutta funktion $w(x) = \sqrt[3]{x}$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko. Alla jotain murtopotenssifunktioita ja juurifunktioita esitettynä koordinaatistossa.



Juurifunktioiden kuvaajissa huomataan määrittelyjoukko ja yhteys murtopotenssifunktioihin. Parillisen juurifunktion kuvaajaa ei voida piirtää negatiivisille muuttujan arvoille:



Kuvaajista voidaan nähdä yhteys potenssin ja kuvaajan tyyppin välillä. Tarkastellaan

potenssifunktiota $f(x) = x^a$.

Kuvaajan tyyppi

- Jos potenssi $a > 1$, kuvaajan kasvu kiihtyy, kun x kasvaa.
- Jos potenssi $a < 1$, kuvaaja kasvaa aluksi nopeasti, mutta funktioiden arvojen kasvu hidastuu todella vähäiseksi x :n kasvaessa.
- Jos potenssi $a = 1$, funktio f saa muodon $f(x) = x^1 = x$, ja funktion kuvaaja on suora $y = x$.
- Jos potenssi $a < 0$, funktiota $f(x) = x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ei ole määritelty, kun $x = 0$, ja funktio käyttäytyy origon ympäristössä erikoisesti.

Tässä kurssissa on tarkoitus vain sivuta erilaisia funktioita ja niiden kuvaajia, ja tutustua niiden käyttäytymiseen alustavasti. Asiaan palataan useaan otteeseen myöhemmillä kursseilla. Esimerkiksi funktioita kokonaislukupotenssilla tarkastellaan lähemmin kurssilla MAA2 ja juuri- ja murtopotenssifunktioita kurssilla MAA8.

3.2.1 YLEINEN VERRANNOLLISUUS

Suoraan ja kääntäen verrannollisuus ovat tärkeitä erikoistapauksia yleisestä verrannollisuudesta, jossa muuttuja y on verrannollinen muuttujan x johonkin potenssiin:

Yleinen verrannollisuus

$y \propto x$ siten, että $y = kx^r$, missä k ja r ovat reaalilukuja.

ESIMERKKI 3.174

- a) Kokeellisesti on havaittu, että auton jarrutusmatka x on likimain verrannollinen vauhdin v neliöön: $x \propto v^2$.
- b) Newtonin painovoimalain mukaan kahden massan välisen vuorovaikutuksen (vetovoiman) suuruus on verrannollinen käänteisesti niiden etäisyyden neliöön: $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, missä γ on universaali painovoimavakio ja r on massojen välinen etäisyys. Vetovoima on myös suoraan verrannollinen kummankin kappaleen massaan. Siis $F \propto m_1$, $F \propto m_2$ ja $F \propto r^{-2}$.

ESIMERKKI 3.175

Hehkulamput ovat herkkiä jännitteen (V) muutoksille. Lampun tuottama valomäärä I ($\approx$ kirkkaus) on verrannollinen jännitteen 3,4:nteen potenssiin ($I \propto V^{3,4}$), ja hehkulampun käyttöikä t on kääntäen verrannollinen jännitteen 16:nteen potenssiin ($t \propto V^{-16}$). Käyttöjännitettä alennetaan 5 %. Mitä käy lampun

- a) kirkkaudelle
- b) käyttöiälle?

Ratkaisu. a) Hehkulampun kirkkaudelle pätee verrannollisuuden perusteella yhtälö $I(V) = kV^{3,4}$, missä k on verrannollisuuskertoimen. Jos jännitettä alennetaan 5 %, se tarkoittaa, että alkuperäinen jännite V korvataan jännitteellä $0,95V$. Sijoittamalla uusi jännite kirkkauden antavaan lausekkeeseen $kV^{3,4}$ saadaan $k(0,95V)^{3,4}$, josta sieventämällä $k \cdot 0,95^{3,4} V^{3,4} = 0,95^{3,4} kV^{3,4}$. Koska $kV^{3,4} = I$, saadaan uudeksi kirkkaudeksi $0,95^{3,4} I \approx 0,84I$. Viiden prosentin jännitteen pudotus saa siis kirkkauden vähenemään $1 - 0,84 = 0,16 = 16 \%$.

b) Hehkulampun eliniälle pätee verrannollisuuden perusteella yhtälö $t(V) = \frac{k}{V^{16}}$. Jos jännitettä alennetaan 5 %, se tarkoittaa, että alkuperäinen jännite V korvataan jännitteellä $0,95V$. Sijoittamalla uusi jännite eliniän antavaan lausekkeeseen $\frac{k}{V^{16}}$ saadaan $\frac{k}{(0,95V)^{16}}$, josta saadaan sieventämällä $\frac{k}{0,95^{16} V^{16}} = \frac{1}{0,95^{16}} \cdot \frac{k}{V^{16}}$. Muoto on kerrointa $\frac{1}{0,95^{16}}$ vaille sama kuin alkuperäinen elinikä, eli uusi elinikä on $\frac{1}{0,95^{16}} t \approx 2,27t$. Jännitteen pudotus viidellä prosentilla siis yli kaksinkertaistaa lampun eliniän! (Vanhin vielä toiminnassa oleva hehkulamppu on toiminut yli sata vuotta – juurikin sen vuoksi, että se loistaa aliteholla.)

Tehtäviä

Opi perusteet

352. Mikä on seuraavien potenssifunktioiden aste?

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 5x^5$

c) $f(x) = \frac{1}{2x}$

d) $f(x) = x^{-2}$

353. Olkoon $g(x) = -2x^{-2}$. Laske

a) $g(4)$

b) $g(\frac{1}{4})$

c) $g(-\frac{1}{4})$

d) $g(-4)$.

354. Olkoon $f(x) = x^{-3}$. Laske

a) $f(1)$

b) $f(2)$

c) $f(-\frac{1}{3})$.

355. Saako potenssifunktio f negatiivisia arvoja, jos

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -2x^7$

c) $f(x) = 3x^{-3}$

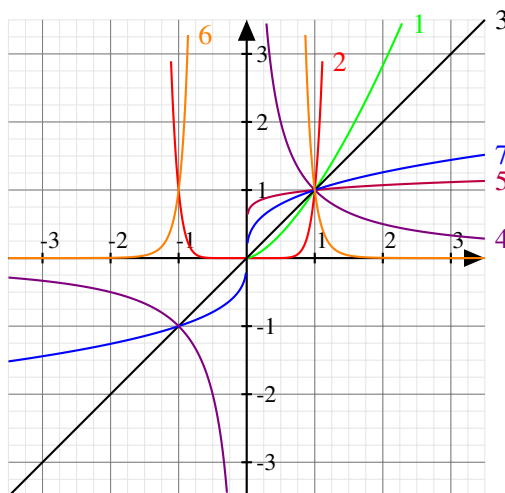
d) $f(x) = -6x^{-4}$

e) $f(x) = x^{-6}$?

356. Saavatko funktiot, jotka määritellään lausekkeilla $f(x) = x^3 - 1$ ja $g(x) = x^3 + 1$, missään kohdassa samaa arvoa?

357. Yhdistä funktioiden kuvaajat oikeaan funktion lausekkeeseen.

- a) $g(x) = x$
- b) $c(x) = x^{10}$
- c) $a(x) = \sqrt[3]{x}$
- d) $b(x) = x^{\frac{1}{10}}$
- e) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$
- f) $d(x) = x^{-1}$
- g) $h(x) = x^{-8}$



Hallitse kokonaisuus

358. Olkoon $f(x) = x^2$. Millä x :n arvoilla

- a) $f(x) = 4$
- b) $f(x) = 25$
- c) $f(x) = 121$?

359. Minkä kahden peräkkäisen kokonaisluvun välissä yhtälön $x^2 = 12$ positiivinen ratkaisu on?

360. Vapaassa pudotuksessa olevan kappaleen etäisyydelle metreinä pudotuskorkeudesta antaa hyvän arvion funktio $s(t) = 4,9t^2$, missä t on putoamisaika sekunteina. Kuinka monen sekunnin päästä pudotettu kappale on pudonnut 100 metriä?

361. Suorakulmaisen kolmion molempien kateettien pituus on x .

- a) Muodosta kolmion pinta-alan lauseke.
- b) Mikä on kolmion pinta-ala, jos $x = 10$?
- c) Kolmion pinta-ala on 72. Mikä on kateettien pituus?

Lisää tehtäviä

362. Tasasivuisen kolmion pinta-ala sivun pituuden funktiona on $A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Jos tasasivuisen kolmion sivun pituus on 10, mikä on sen pinta-ala?

363. Asta kehitti funktion $t(p) = \frac{1}{10}p^{\frac{6}{5}}$, joka ennustaa palapelin kokoamiseen kuluva aikaa minuutteina palojen määrän p funktiona. Kuinka kauan mallin mukaan kuluu aikaa

- a) 100 palan palapelin kokoamiseen
- b) 1 000 palan palapelin kokoamiseen
- c) kahden palan palapelin kokoamiseen?

364. Stefanin–Boltzmannin lain mukaan kappaleen säteilyteho tiettyä pinta-alaa kohden on suoraan verrannollinen sen absoluuttisen lämpötilan neljänteen potenssiin. Lakia kuvaa funktio $P(T) = A\epsilon\sigma T^4$, missä A , ϵ ja σ ovat vakioita. Jos absoluuttinen lämpötila kaksinkertaistuu, kuinka moninkertaiseksi säteilyteho kasvaa?

365. Säteilyn intensiteetti säteilylähteen etäisyyden r funktiona on $I(r) = \frac{I_0}{r^2}$, missä I_0 on vakio, joka kuvaa säteilyn intensiteettiä etäisyydellä 0. Arvioi funktion avulla kuinka monta prosenttia Auringon säteilyn intensiteetti Maan pinnalla vähenee, jos Maan ja Auringon välinen etäisyys kasvaa 20 prosenttia?

3.3 Eksponenttifunktio



Opetus.tv: *Eksponenttifunktio* (2.09, 5.42, 4.00, 5.14 ja 2.04)

<http://opetus.tv/maa/maa1/eksponenttifunktio/>



Opetus.tv: *Eksponenttiyhtälö* (5.41, 4.59, 5.53 ja 3.48)

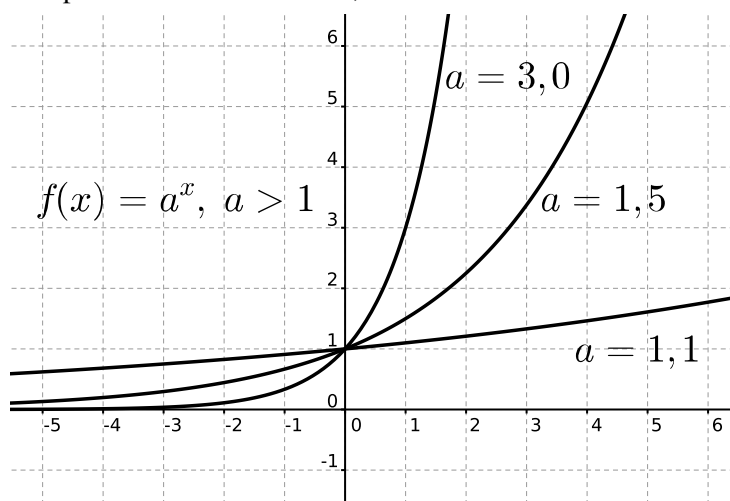
<http://opetus.tv/maa/maa1/eksponenttiyhtalo/>

Potenssifunktiossa $f(x) = x^n$ muuttuja x on kantalukuna. Jos muuttuja x on sen sijaan eksponenttina, saadaan joukko funktioita, joita kutsutaan **eksponenttifunktioiksi**.

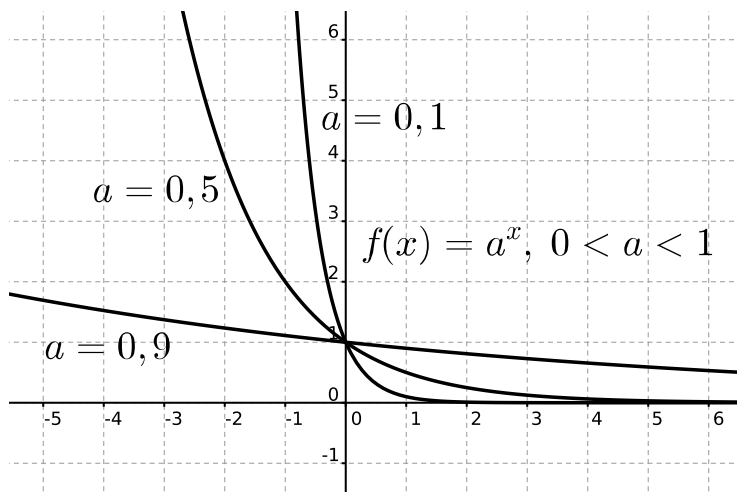
Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktiot ovat muotoa $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ olevia funktioita.

Funktio $f(x) = 1^x = 1$ on vakiofunktio, joten sitä ei yleensä ole järkevää tarkastella eksponenttifunktiona. Eksponenttifunktioita on kahta tyyppiä: kasvavia ja väheneviä. Kasvavilla eksponenttifunktioilla $a > 1$, esimerkiksi



Kun a on pieni mutta positiivinen $-0 < a < 1$, eksponenttifunktio on vähenevä:



Huomaa, että eksponenttifunktion kuvaaja kulkee aina pisteen $(0,1)$ kautta. Tämä johtuu potenssin laskusäännöstä, jonka mukaan $a^0 = 1$, kun $a \neq 0$

Negatiiviselle kantaluville ei ole määritelty yleistä reaalilukupotenssia, joten eksponenttifunktiota ei ole määritelty, kun $a < 0$.

Kun $a = 0$ tai $a = 1$, eksponenttifunktio pelkistyy vakiofunktioiksi. Lisäksi 0^0 :a ei ole määritelty, joten vaaditaan, että eksponenttifunktion kantaluville a pätee $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Eksponenttiyhtälö muodostuu, kun kysytään, millä x :n arvoilla

ESIMERKKI 3.176

Millä muuttujan x arvoilla eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ saa arvon $f(x) = 64$?

Ratkaisu. Kirjoitetaan tehtävä yhtälöksi: $2^x = 64$. Kokeilemalla luvun 2 potensseja huomataan, että $x = 6$ ratkaisee yhtälön.

Varmistutaan vielä siitä, että yhtälöllä ei ole muita ratkaisuja.

Eksponenttifunktion kantelukuna on 2, joten eksponenttifunktio on kasvava.

Funktio $f(x) = 2^x$ ei siis voi saada uudelleen arvoa 64, kun $x > 6$. Samasta syystä $f(x)$ ei voi olla 64, kun $x < 6$.

Ainoa ratkaisu yhtälölle on siis $x = 6$.

ESIMERKKI 3.177

Millä muuttujan x arvoilla eksponenttifunktio $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ saa arvon $f(x) = 1/5$?

Ratkaisu. Edellisen esimerkin tavoin kokeillaan x :n eri arvoja. Havaitaan, että kun $x = 2$, funktio saa arvon $f(x) = \frac{1}{4}$, ja kun $x = 3$, on $f(x) = \frac{1}{8}$. Ratkaisu on siis välillä $2 < x < 3$.

Ratkaisun etsimistä voidaan jatkaa kokeilemalla esimerkiksi arvoa $x = 2,5$. Näin päästään lähemmäksi ratkaisua, mutta yhtälön ratkaisu on irrationaalinen, joten sen desimaalikehitelmä on äärettömän pitkä ja jaksoton. Tarkkaa ratkaisua ei siis saada tällä menetelmällä.

Yleisen eksponenttiyhtälön tarkkaan ratkaisemiseen niin sanotun logaritmin avulla palataan kurssilla MAA8.

3.3.1 EKSPONENTIAALINEN MALLI

Kun eksponenttifunktiota käytetään kuvaamaan jotakin reaalimaailman ilmiötä, siitä käytetään nimeä **eksponentiaalinen malli**.

Eksponentiaalinen malli on eräs yleisimmin käytetyistä matemaattisista malleista. Sillä kuvataan sellaista kasvua tai vähenemistä, jossa kullakin ajanhetkellä funktion hetkellinen muutos on suoraan verrannollinen funktion sen hetkiseen arvoon. Tämä muotoillaan täsmällisesti myöhemmillä matematiikan kursseilla.

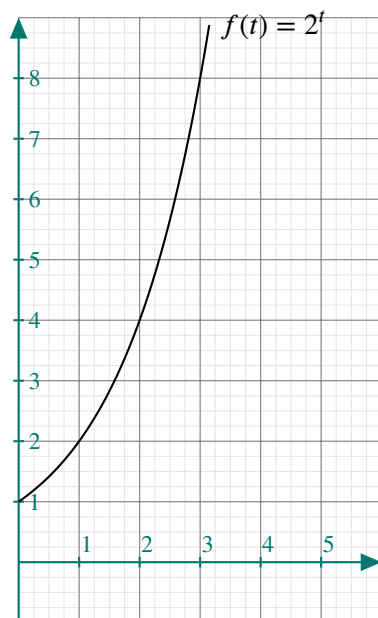
ESIMERKKI 3.178

Soluviljelmässä olevien *Escherichia coli* -bakteerien määrää voidaan kuvata eksponentiaalisella mallilla: ajanhetkellä $t = 0$ bakteerien lukumäärä on 1, ja kullakin aika-askeleella bakteerien lukumäärä tuplaantuu. Malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = 2^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on bakteerien lukumäärä ajanhetkellä t . (Tässä ei oteta kantaa käytettyyn ajan yksikköön – mikä tahansa käy.)

Huomaa, että funktion $f(t)$ arvot voivat olla myös rationaalisia tai irrationaalisia, vaikka bakteerien määrä on kokonaisluku. Yleensä tätä ei pidetä ongelmallisena, vaan funktiota voidaan käsitellä, ikään kuin bakteerien määrä olisi jatkuvasti kasvava suure. Mallit ovat harvoin täydellisiä, eikä virhe ei ole käytännössä merkittävä, koska mallin antamat luvut voidaan helposti pyöristää.



ESIMERKKI 3.179

Radioaktiivisessa hajoamisessa atomiydinten lukumäärää kuvataan eksponentiaalisella mallilla. Jos ydinten määrä ajanhetkellä $t = 0$ on $f(t) = k$, malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on atomiydinten lukumäärä ajanhetkellä t . Atomiydinten lukumäärä siis puolittuu kullakin aika-askeleella.

ESIMERKKI 3.180

Vuonna 2114 Mars-planeetan ilmasto ja olosuhteet on onnistuttu muuttamaan elämää ylläpitäviksi. Planeetan pintaa peittävät ruohomaat, ja planeetan asuttaminen on kovassa vauhdissa. Eräs riistan mausta nauttiva uudisasukas tuo maatilalleen aitaukseen 24 kaniinia. Hän ei kuitenkaan ole ottanut huomioon planeetalla vallitsevaa pienempää painovoimaa, jossa kaniinit loikkivat helposti aidan yli ja karkaavat. Koska Marssissa ei ole kaniinien luontaisia vihollisia ja ravintoa on riittämiin, kanien lisääntymistä ei rajoita oikeastaan mikään ja kanipopulaatio alkaa kasvaa eksponentiaalisesti. Kaniineista puolet on naaraita. Kukin naaraskaniini voi saada 11 poikasta vuodessa, joista noin puolet on naaraita.

Kuinka paljon kaniineja Marssissa on

a) 1 tai 2 vuoden kuluttua?

b) n vuoden kuluttua?

c) Monenko vuoden kuluttua Marssin kaniinipopulaatio on ylittänyt miljoonan yksilön rajan?

Ratkaisu. a) Lasketaan kanipopulaation kokoa peräkkäisinä vuosina.

Merkitään a = alkuperäinen kaniinien määrä = 24 ja

$f(t)$ = kaniinipopulaation vuoden t lopussa.

Ensimmäisen vuoden kuluttua $\frac{a}{2} = \frac{24}{2} = 12$ naaraskaniinia on kukin saanut 11 poikasta vuodessa. Poikasten lukumäärä vuoden kuluttua on siis $11 \cdot 12 = 132$ ja kaniinien kokonaismäärä muodostuu aikuisten kaniinien ja poikasten lukumäärän summana. Siis vuoden kuluttua kaniinipopulaation koko on $24 + 132 = 156$ yksilöä.

Puolet tästä on naaraita, jotka lisääntyvät jälleen seuraavan vuoden aikana.

Kaniinipopulaatioon syntyvien poikasten määrä 2. vuonna saadaan kertomalla edellisen vuoden kaniinien määrä kertoimella $\frac{11}{2}$. Siis syntyy $156 \cdot \frac{11}{2} = 858$ poikasta. Kanipopulaation koko 2. vuonna on yhteensä $858 + 156 = 1\,014$ poikasta.

b) Taulukoidaan kaniinipopulaation arvoja. Huomaamalla, että $f(t):n$ lausekkeesta voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi a , saadaan lauseketta yksinkertaistettua. Taulukkoa laatiessa huomataan, että pystytään pääättelemään sääntö, jolla voidaan laskea kanipopulaation koko $n:n$ vuoden kuluttua.

vuosi t	$f(t):n$ lauseke	kaniinipopulaation koko
1	$\frac{a}{2} \cdot 11 + a = a(1 + \frac{11}{2}) = \frac{13}{2}a$	$f(1) = 24 \cdot \frac{13}{2} = 156$
2	$\left(\frac{13}{2}a\right) \cdot \frac{13}{2} = \frac{13^2}{2^2}a$	$f(2) = 24 \cdot \frac{13^2}{2^2} = 1\,014$
...	...	...
n	$\left(\frac{13^2}{2^2}a\right) \cdot \frac{13}{2} = \frac{13^n}{2^n}a$	$f(n) = 24 \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^n$

c) Halutaan tietää, millä $t:n$ arvolla kaniinipopulaation kokoa kuvaava funktio saa arvokseen vähintään miljoonan, eli $f(t) \geq 1\,000\,000$. Tämän epäyhtälön täsmällinen, tarkka ratkaiseminen ei onnistu tämän kurssin tiedoilla, mutta tehtävä voidaan ratkaista sijoittamalla erilaisia $t:n$ arvoja $f(t):n$ lausekkeeseen.

Kun $t = 5$, $f(t) = 24 \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^5 \approx 278\,470$.

Kun $t = 6$, $f(t) = 24 \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^6 \approx 1\,810\,053$.

Näyttää siltä, että miljoonan ruohonsyöjän populaatiokoko on ylitetty kuusi vuotta epäonnistuneen kaniinitarhausyrityksen jälkeen.

Vastaus. a) Vuoden kuluttua noin 160 yksilöä, kahden vuoden kuluttua noin 1 010 yksilöä

b) $24 \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^n$ yksilöä

c) Kuuden vuoden kuluttua

Tehtäviä

Opi perusteet

366. Olkoon $f(x) = 4^x$. Laske

a) $f(0)$

b) $f(3)$

c) $f(\frac{1}{2})$.

367. Olkoon $g(x) = (\frac{1}{4})^x$. Laske

a) $f(0)$

b) $f(4)$

c) $f(\frac{1}{2})$.

368. Olkoon $f(x) = 10^x$. Millä x :n arvoilla

a) $f(x) = 1\,000$

b) $f(x) = \frac{1}{100}$

c) $f(x) = -1$?

369. Eksponenttifunktio $e(x) = 2^x$ kuvaa ihmisen esivanhempien määrää, kun x on välissä olevien sukupolvien määrä. Kuinka monta esivanhempaa ihmisellä on

a) kolmen sukupolven päässä

b) kymmenen sukupolven päässä

c) kahdenkymmenen sukupolven päässä?

370. Leipuri haluaa tehdä tuulihattuja varten lehtitaikinaa, jossa on yli tuhat kerrosta. Alussa kerroksia on yksi ja yhdellä taikinan taitoksella ja kaulinnalla kerrosten määrä aina kolminkertaistuu. Kuinka monen taitoksen jälkeen lehtitaikinassa on yli tuhat kerrosta?

371. Biologi vei autiosaarelle sata jänistä tutkiakseen, miten hyvin funktio $p(t) = 100 \cdot 1,05^t$, missä t on aika viikkoina, kuvaa populaation kasvua. Jos malli toimii hyvin, miten paljon jäniksiä tulisi saarella olla vuoden kuluttua kokeilun aloittamisesta?

372. Olkoon $f(t) = 20 \cdot 2^t$ bakteerien lukumäärä soluviljelmässä ajanhetkellä t . Millä ajanhetkellä bakteerien lukumäärä on tasan 160?

373. Miten muokkaisit edellisen tehtävän funktiota, jos bakteerien lukumääräksi halutaan alussa 5?

Hallitse kokonaisuus

374. Eräälle eksponenttifunktiolle, joka on muotoa $f(x) = k \cdot a^x$, missä a ja k ovat vakioita, pätee $f(0) = 12$ ja $f(2) = 192$. Määritä vakiot a ja k .

375. Minkä kahden peräkkäisen kokonaisluvun välissä yhtälön $10^x = 500$ ratkaisu on?

376. Eräänä vuonna omenapuuhan tuli 90 omenaa, seuraavana vuonna 108 ja sitä seuraavana vuonna 43 omenaa. Voiko eksponenttifunktiolla kuvata tämän omenapuun omenoiden määrää ajan funktiona? Miksi/Miksei?

377. Funktio $k(t) = 10 \cdot 5^t$, missä t on aika tunteina kuvaa hauskan kissavideon katselukertojen määrää ajan funktiona. Kuinka monen tunnin kuluttua katselukertoja on kertynyt yli miljoona?

378. Villen levykokoelma kasvaa eksponentiaalisesti. Alussa levyjä oli 200, vuoden päästä 300 ja kahden vuoden päästä 450. Muodosta funktio, joka kuvaa levykokoelman kasvamista ajan funktiona ja laske arvio sille, miten monta levyä kokoelmassa on 10 vuoden kuluttua kokoelman keräämisen aloittamisesta.

379. Jos atomiydinten, joiden määrä pienenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena, määrä ajanhetkellä $t = 0$ on $f(t) = k$, atomiydinten määrää hetkellä t kuvaava malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on atomiydinten lukumäärä ajanhetkellä t . Millä ajanhetkellä atomiydinten määrä on alle $1/200$ alkuperäisestä?

380. Kaino-Vieno saa perinnöksi maatilan. Hän päättää jättää työnsä kirjanpitäjänä, muuttaa maalle ja alkaa viljelemään luomuperunaa. Ensimmäisenä keväänä Kaino-Vieno kylvää maahan 10 siemenperunaa. Kesän aikana kukin siemenperuna työntää esiin perunanversion ja muodostaa keskimäärin 6 uutta perunan mukulaa, samalla kun alun perin istutettu siemenperuna mätänee. Perunan noston jälkeen Kaino-Vieno päättää säästää 40 % perunoista seuraavan kevään siemenperunoiksi. Kuinka pitkään Kaino-Vienon täytyy jatkaa luomuviljelyä, jotta perunasato ylittää 1 000 perunan rajan?

381. Funktion $h(x) = (-2)^x$ maalijoukko ei ole reaalilukujen joukko. Anna esimerkki muuttujan arvosta, jolla funktion arvo ei ole reaalinen.

Lisää tehtäviä

382. Villiintynyt 3D-printteri alkaa tulostamaan uusia 3D-printtereitä, jotka taas toimivat vastaavasti. Funktio $d(x) = 4^x$, missä x on aika päivinä, kuvaa printterien määrää ajan funktiona. Kuinka monen päivän kuluttua 3D-printtereitä on maapallolla enemmän kuin ihmisiä, kun ihmisiä on noin 7 miljardia?

383. Todennäköisyys nopalla peräkkäin heitetyille kutosille noudattaa funktiota $g(x) = (\frac{1}{6})^x$, missä x on peräkkäisten kutosten lukumäärä. Mikä on todennäköisyys heittää nopalla kymmenen kutosta peräkkäin?

384. Sukujuhliin on ostettu viiden kilon kääretorttu. Vieraita on 30, joista ensimmäinen leikkaa itselleen kahdeskymmenesosan tortusta ja seuraava aina kahdeskymmenesosan sillä hetkellä jäljellä olevasta tortusta. Muodosta funktio, joka kuvaa jäljellä olevan tortun määrää sitä leikanneiden vieraiden määrän funktiona. Kuinka paljon torttua on jäljellä, kun kaikki vieraat ovat leikanneet yhden palan?

385. Määritä yksi kohta, jossa funktiot $g(x) = 5^x$ ja $h(x) = 4^x$ saavat saman arvon.

386. Funktio $k(x) = 29^x$ kuvaa kaikkien mahdollisten kirjainyhdistelmien määrää, kun yhdistelmän pituus on x ja käytössä ovat suomen kielen aakkoset. Jos Suomen kymmenen merkin mittaiset henkilötunnukset korvataan kirjainyhdistelmillä, kuinka lyhyet yhdistelmät riittäisivät, jotta kaikki 5,4 miljoonaa kansalaista saavat muista poikkeavan yhdistelmän?

LUKU 4

Kertausosio

Testaa tietosi!

OSAATKO SELITTÄÄ?

Luvut ja laskutoimitukset

- 387. Mitä eroa on luvulla ja numerolla?
- 388. Miten vähennyslasku ja jakolasku määritellään?
- 389. Minkälainen ristiriita seuraisi, jos nollalla jakaminen olisi määritelty reaali-luvuille?
- 390. Mitä eroa on kertomisella ja laventamisella?
- 391. Mitä tarkoitetaan alkuluvulla?
- 392. Mitä tarkoitetaan luvun alkulukukehitelmällä (tai alkutekijäkehityksellä)?
- 393. Miksei reaalitykijä käytettäessä negatiivisesta luvusta voi ottaa neliöjuurta?
- 394. Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan luvun olevan epänegatiivinen?
- 395. Miksi mielivaltaisen, nolasta poikkeavan luvun nollas potenssi on arvoltaan yksi?
- 396. Mitä tarkoitetaan johdannaissuureella?
- 397. Mikä nyanssiero on saman luvun esitysmuodoilla $9,1$ ja $9,10$?
- 398. Tutkit luvun desimaalikehitelmää ja huomaat siinä äärettömästi toistuvan jakson 2104 . Minkälainen luku on kyseessä?
- 399. Mikä yhteys murtopotensseilla ja juurilla on?

Yhtälöt

400. Mitä tarkoitetaan yhtälön ratkaisulla?

401. Jos lukua kasvatetaan p :llä prosentilla ja sen jälkeen pienennetään p :llä prosentilla, miksi ei päädytä takaisin alkuperäiseen lukuun? (Oletetaan, että $p \neq 0$.)

Funktiot

402. Mitä eroa on funktion määrittelyjoukolla ja määrittelyehdolla?

403. Mitä eroa on funktion maali- ja arvojoukolla?

MONIVALINTA

Valitse kussakin monivalintatehtävässä yksi paras vastaus.

Luvut ja laskutoimitukset

404. Mikä laskuista antaa suurimman tuloksen?

- a) $21 \cdot 20 - 18 + 19$
- b) $18 \cdot 19 - 21 + 20$
- c) $20 \cdot 18 - 19 + 21$
- d) $21 \cdot 18 - 20 + 19$
- e) $20 \cdot 19 - 21 + 18$

405. Luvun 180 alkulukukehitelmä on

- a) $2 \cdot 3 \cdot 5$
- b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
- c) $4 \cdot 3^2 \cdot 5$
- d) $4 \cdot 9 \cdot 5$
- e) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

406. Kun lausekkeeseen $x(x - 2)$ sovelletaan osittelulakia, saadaan sille jokin alla olevista esityksistä. Mikä?

- a) $x^2 - 2$
- b) $2x - 2$
- c) $2x - 2x$
- d) $x^2 - 2x$
- e) Osittelulakia ei voi soveltaa tässä tapauksessa.

407. Karinilla on neljä koiraa. Jos jokaiselle pitää ostaa kaulapanta (p) ja kuusi pakkausta ruokaa (r), niin mikä seuraavista lausekkeista vastaa ostosten kokonaismäärää?

- a) $4pr$
- b) $p + 4r$
- c) $4p + 4r$
- d) $4p + 6r$
- e) $4(p + 6r)$
- f) $4 + p + r$

408. Kun lausekkeeseen $bc - 2ac + 3b - 6a$ sovelletaan osittelulakia, saadaan sille siistimpi esitys, joka on jokin allaolevista. Mikä?

a) $(b - 3a)(c + 3)$

b) $(b - 2a)(c + 3)$

c) $2(b - a)(c + 3)$

d) $(b - a)(2c + 3)$

e) Osittelulakia ei voi soveltaa tässä tapauksessa.

409. Kuinka monta kolmasosaa mahtuu yhdeksään?

a) 3

b) 9

c) 18

d) 27

e) 30

410. Mikä seuraavista luvuista on pienin?

a) 0,7

b) 0,77

c) 0,707

d) 7,7

e) 7,07

f) 77,0

411. Sekaluku $7\frac{3}{8}$ ilmaistuna murtolukuna?

a) $\frac{31}{4}$

b) $\frac{21}{8}$

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{59}{8}$

e) $\frac{53}{8}$

412. Kahdelle reaalityluvulle s ja t pätee ehto $4s = t$. Tämän perusteella voidaan sanoa, että

a) s on suurempi kuin t

b) s on pienempi kuin t .

c) Ei ehdottomasti kumpikaan edellisistä – riippuu tilanteesta.

413. Millä lausekkeista on suurin arvo?

- a) $2^2 \cdot 2^2$
- b) $2^{2^2 \cdot 2}$
- c) $2 : 2^{2^2}$
- d) $2^{2^2} : 2$
- e) $(2^2)^{2^2}$
- f) $2^{2^{2^2}}$

414. Potenssi $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ sievennettynä on jokin seuraavista. Mikä?

- a) 36
- b) $\frac{1}{36}$
- c) $\frac{4}{9}$
- d) $-\frac{4}{9}$
- e) $\frac{9}{4}$
- f) $-\frac{9}{4}$

415. Kuinka monta nollaa on biljoonassa?

- a) 6
- b) 9
- c) 12
- d) 15
- e) ei mikään annetuista vaihtoehdoista

416. Mitä on 0,34 nm esitettyä metreinä kymmenpotenssimuodossa ("oikeaoppisesti", *scientific notation*)?

- a) $0,34 \cdot 10^{-9} \text{ m}$
- b) $3,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
- c) $34 \cdot 10^{-9} \text{ m}$
- d) $3,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$
- e) $34 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

417. Kuinka monta merkitsevää numeroa on luvussa 1,0240?

- a) ei yhtään
- b) yksi
- c) kolme
- d) neljä
- e) viisi

418. Kuinka monta merkitsevää numeroa on luvussa $-0,0100$?

- a) ei yhtään
- b) yksi
- c) kolme
- d) neljä
- e) viisi

419. Luku $-78,2449$ pyöristettynä sadasosien tarkkuuteen?

- a) $-78,245$
- b) $-78,25$
- c) $-78,24$
- d) $-78,2$

420. Pyöristä luku neljäkymmentäseitsemäntuhatta yhdeksänsataakahdeksankymmentäkolme lähimpään tuhanteen.

- a) 47 000
- b) 50 000
- c) 100 00
- d) 48 000
- e) 49 000
- f) 48 900

421. Kaksi litraa kuutiosenttimetreinä on

- a) 2 cm^3
- b) 20 cm^3
- c) 200 cm^3
- d) $2\,000 \text{ cm}^3$.
- e) Ei mikään annetuista vaihtoehdoista.

422. Jauhosaikin massa voisi olla

- a) 2 g
- b) 2 000 mg
- c) 2 litraa
- d) 2 kg
- e) $2 \cdot 10^6$ g.
- f) 2 dm^3 .

423. Nopeus 60 km/h ilmaistuna yksiköissä m/s on suunnilleen

- a) 10
- b) 17
- c) 30
- d) 36
- e) 216.

424. Neliöjuuri luvusta 8 mahdollisimman pitkälle sievennettynä on

- a) $\sqrt{8}$
- b) $2\sqrt{2}$
- c) 4
- d) 16
- e) 64.

Yhtälöt

425. Yhtälön $x = x - 1$ totuusarvo?

- a) Aina tosi
- b) Joskus tosi
- c) Ei koskaan tosi

426. Yhtälön $x = 4$ totuusarvo?

- a) Aina tosi
- b) Joskus tosi
- c) Ei koskaan tosi

427. Yhtälön $x = x$ totuusarvo?

- a) Aina tosi
- b) Joskus tosi
- c) Ei koskaan tosi

428. Milloin yhtälön molemmat puolet voi kertoa samalla luvulla niin, että tosi yhtälö säilyy totena?

- a) Aina muttei millä tahansa luvulla
- b) Aina ja millä tahansa luvulla
- c) Vain joskus tietyissä tilanteissa
- d) Ei koskaan

429. Milloin yhtälön molemmat puolet voi kertoa samalla luvulla niin, että yhtälö säilyy yhtäpitävänä?

- a) Aina muttei nollalla
- b) Aina ja millä tahansa luvulla
- c) Vain joskus tietyissä tilanteissa
- d) Ei koskaan

430. Jos muuttujat x ja y ovat suoraan verrannolliset, ja muuttuja x kasvaa, mitä tapahtuu muuttujalle y ?

- a) Muuttuja y kasvaa myös mutta suhteessa vähemmän.
- b) Muuttuja y kasvaa myös mutta suhteessa enemmän.
- c) Muuttuja y kasvaa myös – ja samassa suhteessa.
- d) Muuttuja y pienenee – ja samassa suhteessa.
- e) Muuttujan y arvo pysyy vakiona.

431. Jos muuttujat x ja y ovat suoraan verrannolliset, ja muuttujat y ja z ovat kääntäen verrannolliset, millainen on muuttujien x ja z välinen suhde?

- a) x ja z ovat suoraan verrannolliset.
- b) x ja z ovat kääntäen verrannolliset.
- c) x on verrannollinen z :n neliöön.
- d) z on verrannollinen x :n neliöön.
- e) Mikään annetuista vaihtoehdoista ei ole oikein.

432. Yhtälön $a^2 + a^{-2} = 0$ (eräs) juuri on

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) $\sqrt{2}$
- e) ei mikään mainituista vaihtoehdoista.

433. Kuinka monta eri reaalityhtälöä yhtälöllä $x^{10} = -2$ on?

- a) ei yhtään
- b) yksi
- c) kaksi
- d) kymmenen
- e) ei mikään mainituista vaihtoehdoista

434. Yhtälönratkaisun vaiheessa

$$2x + x = 4$$

$$3x = 4$$

käytettiin avuksi:

- a) reaalityhtälöiden vaihtolaki
- b) reaalityhtälöiden liitännäisyyttä
- c) reaalityhtälöiden osittelulaki
- d) kaikkia edellä mainittuja
- e) ei mitään edellä mainituista.

435. $0,46\%$ esitettynä desimaalityhtälönä on

- a) 0,046
- b) 0,0046
- c) 0,00046
- d) 0,000046
- e) Ei mikään annetuista vaihtoehdoista.

436. Jos lukua a pienennetään 3% , laskutoimitusta vastaava lauseke on

- a) $0,03a$
- b) $0,97a$
- c) $a - 0,03$
- d) $a - 0,97$
- e) $\frac{a}{0,03}$
- f) $\frac{a}{1,03}$.

437. Erään tuotteen hinta on noussut, ja vertaamme uutta ja vanhaa hintaa toisiinsa. Mikä seuraavista *ei* tarkoita samaa kysymyksenasettelun ”Kuinka monta prosenttia hinta on noussut” kanssa?

- a) ”Kuinka monta prosenttia uusi hinta on suurempi kuin vanha hinta?”
- b) ”Kuinka monta prosenttia uusi hinta on vanhaa hintaa suurempi?”
- c) ”Kuinka monta prosenttia vanha hinta on uutta hintaa pienempi?”
- d) ”Mikä on uuden ja vanhan hinnan suhteellinen erotus, kun verrataan vanhaan hintaan?”
- e) ”Kuinka paljon vanhan ja uuden hinnan suhde poikkeaa yhdestä?”

438. Ratauudistusten jälkeen junien matka-ajat ovat lyhentyneet. Merkataan vanhaa matkan kestoa t_1 ja uudistusten jälkeistä kestoa t_2 . Kysymykseen ”Kuinka monta prosenttia matkan kesto on lyhentynyt?” (sopivalla vastauksen tulkinnalla) vastaa lauseke

- a) $t_1 - t_2$
- b) $\frac{t_1}{t_2}$
- c) $\frac{t_2}{t_1}$
- d) $\frac{t_1 - t_2}{t_1}$
- e) $\frac{t_1 - t_2}{t_2}$
- f) $\frac{t_1}{t_2} - 1$
- g) $\frac{t_2}{t_1} + 1$.

439. Jos pääoma K kasvaa korkoa n kertaa korkokannalla p , niin talletuksen suuruus on lopulta

- a) nK
- b) npK
- c) $n \frac{p}{100} K$
- d) $n(1 + \frac{p}{100})K$
- e) $(1 + \frac{p}{100})^n K$
- f) $(1 + \frac{p^n}{100})K$

Funktiot

440. Funktio f määritellään yhtälöllä $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Funktion määrittelyjoukko on tällöin

- a) $\mathbb{R}$
- b) $\mathbb{R}_+$
- c) $\mathbb{R}_-$
- d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- e) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- f) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

441. Funktio g määritellään yhtälöllä $g(y) = \sqrt{y}$. Funktion määrittelyehto on tällöin

- a) $y < 0$
- b) $y \leq 0$
- c) $y \in \mathbb{R}$
- d) $y \geq 0$
- e) $y > 0$.

442. Pallon tilavuus lasketaan pallon säteen funktiona kaavalla $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Funktiolle V sopivin arvojoukko on tällöin

- a) $\mathbb{N}$
- b) $\mathbb{Q}$
- c) $\mathbb{R}$
- d) $\mathbb{R}_-$
- e) $\mathbb{R}_+$.

443. Arvosanojen 6, 7 ja 10 aritmeettinen keskiarvo on

- a) 7
- b) 7,25
- c) $7\frac{2}{3}$
- d) 8,25.
- e) Ei mikään annetuista vaihtoehdoista.

444. Tarkastellaan reaalifunktiota f , jonka arvot määritellään kaavalla $f(x) = x^2 - 2$. Mikä väitteistä on epätosi?

- a) Funktio saa negatiivisia arvoja.
- b) Funktio saa mielivaltaisen suuria arvoja.
- c) Funktion määrittelyjoukoksi sopii kaikkein reaalilukujen joukko.
- d) Funktion määrittelyjoukoksi sopii luonnollisten lukujen joukko.
- e) Funktio ei saa irrationaaliarvoja.

445. Tarkastellaan reaalifunktiota g , jonka arvot määritellään kaavalla $g(x) = \pi$. Mikä väitteistä on epätosi?

- a) Funktion arvojoukko koostuu yhdestä luvusta.
- b) Funktion pienin arvo on π .
- c) Funktion suurin arvo on π .
- d) Funktio ei saa irrationaaliarvoja.
- e) Funktiolla ei ole nollakohtia.

TOSI VAI EPÄTOSI?

Pitävätkö väitteet paikkansa?

Luvut ja laskutoimitukset

446. a) Kahden eri alkuluvun osamäärä ei voi olla kokonaisluku.

b) Triljoona kirjoitetaan kymmenpotenssimuodossa 10^{15} .

c) Lukujen osamäärä on laskutoimituksena liitännäinen.

d) Erotus on laskutoimituksena vaihdannainen.

447. a) Kaikki kokonaisluvut ovat rationaalilukuja.

b) Lämpötila on skalaarisuure.

c) Jos tiheys kerrotaan tilavuudella, saadaan massa.

d) Suurin osa luonnollisista luvuista on suurempia kuin 10^{100} .

448. a) On olemassa yksiselitteinen pienin positiivinen rationaaliluku.

b) Nolla on epänegatiivinen luku.

c) Mistään aidosta murtoluvusta (ei-kokonaisluku) ei voi kokonaislukupotenssiin korottamalla saada kokonaislukua.

d) Jokaisen rationaaliluvun välistä löytyy uusia rationaalilukuja.

449. a) Irrationaaliluvun voi joissain tilanteissa esittää kahden kokonaisluvun suhteena.

b) Kahden positiivisen luvun suuri absoluuttinen ero johtaa aina myös suureen suhteelliseen eroon.

c) Kahden positiivisen luvun suuri suhteellinen ero johtaa aina myös suureen absoluuttiseen eroon.

d) Jos kahden muuttujan osamäärä on vakio, myös niiden tulo on vakio.

Yhtälöt

450. a) Jos keskinopeus nousee 5 %, matka-aika lyhenee 5 %.

b) Jos a on p prosenttia suurempi kuin b , niin b on p prosenttia pienempi kuin a .

c) Yhtälö $2(3x^2 - x - 1) = 3(2x^2 - x - 1)$ on ensimmäisen asteen yhtälö.

d) Verrannollisuuskertoimen lukuarvoa ei tarvitse tuntea, jos halutaan selvittää vain suhteellisia (esimerkiksi prosentuaalisia) muutoksia.

451. a) Yhtälöllä voi olla äärettömän monta juurta.
 b) Yhtälöllä $y = y - 1$ ei ole ratkaisuja.
 c) Jos muuttuja x on kääntäen verrannollinen muuttujaan y , niin y on myös kääntäen verrannollinen x :ään.
 d) Jos Pythagoraan lauseena tunnetusta yhtälöstä $a^2 + b^2 = c^2$ ratkaistaan b , kyseessä on potenssiyhtälö.
452. a) Erikoistapauksessa on mahdollista, että jos lukua kasvatetaan ensin p prosenttia ja sitten pienennetään p prosenttia, päädytään takaisin alkuperäiseen lukuun.
 b) Jos punaisia palloja on 50 prosenttia enemmän kuin keltaisia palloja, niin keltaisia palloja on 50 prosenttia vähemmän kuin punaisia palloja.
 c) Jos junalippujen hinnat nousevat 10 prosenttia ja matkustajien määrä vähenee 10 prosenttia, junayhtiön voitot pienevät.

Funktiot

453. a) Jos funktio on relaationa symmetrinen, sen määrittely- ja arvojoukko ovat samat.
 b) Funktiot f ja g ovat täsmälleen samat, jos ne määritellään kaavoilla $f(z) = 1$ ja $g(z) = \frac{z}{z}$.
 c) Jos eksponenttifunktion kantalukuna on positiivinen reaaliluku, ja funktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$, tällöin funktion arvojoukko on myös $\mathbb{R}$.

Kertaustehtäviä

LUVUT JA LASKUTOIMITUKSET

454. Laske

- a) $-8 \cdot 2 \cdot (-3)$
- ^s b) $(-(-4)/2)/4$
- c) $(2 + 3 : 6 + 1 : 2) \cdot 2$
- d) $-(-2) \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1$

455. Laske ja jaa alkutekijöihin $(32 + 22 : 2) - 3(5 - 2) \cdot \left(2 - \frac{16 : 4}{1 + 2 \cdot 4}\right) + 1$

456. Laske lausekkeen $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n}$ arvo, kun tiedetään, että $n = 10$.

457. Laske.

- a) $3\frac{2}{15} : 1\frac{7}{3}$
- b) $\frac{6}{18} - \frac{4}{3} \cdot \frac{4+2}{2}$
- c) $a \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{2b}$
- d) $\frac{de}{a} : \frac{db}{a} - \frac{e^2b^2}{be^2}$

458. Esitä desimaalilukuna.

- a) $\frac{23}{50}$
- b) $-\frac{7}{11}$

459. Esitä murtolukumuodossa.

- a) 73,02
- b) $17,\overline{1234}$
- c) 0,85333 ...
- d) $-7,1232323$

460. Muuta sekaluvut murtoluvuiksi.

a) $2\frac{3}{4}$

b) $\frac{4}{13}$

c) $-7\frac{2}{11}$

d) 4

461. Sievennä.

a) $\frac{a^2b^2}{a}, a \neq 0$

b) $ab(a + 2a)$

c) $(a^3b^2c)^2$

d) $\frac{ab+ca}{a} \cdot (b - c)$

e) $\frac{7^{10\,002}}{7^{10\,000}}$

462. a) Muuta 1,25 h minuuteiksi.

b) Laske ja ilmoita vastaus senttimetreinä: 1,23 m + 320 mm.

c) Laske $300 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} : 30 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$.

463. Pyöristä 3 merkitsevän numeron tarkkuudella ja ilmoita kymmenpotenssi-muodossa $a \cdot 10^n$, missä $1 \leq a \leq 10$.

a) 2,0007

b) 0,00003125

c) 79 981 633 851,2

464. Sievennä.

a) $\sqrt{108}$

b) $\sqrt[3]{-64}$

c) $\frac{\sqrt{a^2b}}{a}$

d) $\frac{abc}{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}$

465. Laske.

a) $\sqrt{9 + 16}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{(9 + 16)^3}}$

466. Sievennä.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$

b) $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

c) $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{30}}$

d) $a - (ab)^2 + a^2b^2$

e) $(\sqrt[3]{a})^5 \cdot a^{\frac{8}{6}}$

467. Muuta murtopotenssimuotoon.

a) $\sqrt[7]{\frac{1}{a^5}}$

b) $\sqrt{\sqrt{2}}$

YHTÄLÖT

468. Ratkaise yhtälö.

a) $11x = 77$

b) $8x + 174 = 50x$

c) $3x - 6 = 18$

d) $\frac{3x}{2} + \frac{2x}{3} = 13$

e) $f^3 + 1 = -7$

f) $x^2 + 2(3x + 1) = x^2 + 3(2x + 1)$

g) $\frac{5x+20}{20} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x + x^0$

h) $\frac{5x}{4} - 1 = \frac{4}{5}x$

469. 1,17 metriä pitkä lauta katkaistaan niin, että toinen pala on 32 senttimetriä pitempi kuin toinen. Minkä pituinen on lyhyempi pala?

470. Ympyrän pinta-ala A määritellään $A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde. Tiedetään, että ympyrän pinta-ala on π^2 . Ratkaise ympyrän säde.

471. Kuinka monta prosenttia

a) suurempi 30 euroa on verrattuna 10 euroon

b) lyhyempi 6 metriä on verrattuna 30 metriin

c) $1\,800c$ on $2\,400c$:stä?

472. Bändi nostaa musiikkiraitansa hintaa 20 %. Pian heitä alkaa kuitenkin kaduttaa. Monellako prosentilla muutettua hintaa olisi laskettava, jotta hinta olisi ennallaan?

473. Arvonlisäverokanta eräälle tuotteelle on 13 %, ja ALV lasketaan verottomasta hinnasta. Tuotteen verollinen myyntihinta koostuu verottomasta hinnasta ja arvonlisäverosta. Jos tuote maksaa verollisena 50,00 euroa, kuinka monta euroa tuotteesta maksettiin veroa? Anna vastaus sentin tarkkuudella.

474. Mirjami heittää pallon 10 metrin korkeuteen. Pallo pomppaa aina 80 % edellisen pompun korkeudesta. Kuinka korkealle pallo nousee toisen pompuun jälkeen? Monennenko pompun jälkeen pallo ei enää nouse yli 5 metrin?

475. Olkoon $f(t) = 35 \cdot 2^t$ bakteerien lukumäärä soluviljelmässä ajanhetkellä t (tuntia). Monenko kokonaisen tunnin kuluttua bakteereita on yli 1 000?

476. Pölysuodatin pidättää 65 % pölyhiukkasista.

a) Kuinka monta hiukkasta miljoonasta pääsee viiden peräkkäisen suodattimen läpi?

b) Kuinka monta hiukkasta jää neljänteen suodattimeen?

477. Kuution tilavuus särmän pituuden funktiona on $f(x) = x^3$. Jos kuution tilavuus on 64, mikä on särmän pituus?

478. Määritä yhtälön $x^{42} = 42$ kaikki reaaliset ratkaisut. Anna vastaus sadasosien tarkkuudella.

479. Pihtiputaan 84-henkinen sinfoniaorkesteri harjoittelee salissa. Puolet orkesterimuusikoista on jousisoittajia, lyömäsoittajia orkesterissa on yhdeksän. Loput orkesterista on puhallinsoittajia. Kaksi kolmasosaa puhallinsoittajista soittaa vaskepuhallinta. Montako puupuhallinsoittajaa orkesterissa on? Kaikki puhallinsoittimet ovat joko puu- tai vaskepuhalltimia.

480. Riippuvainen matemaatikko joutuu vieroitukseen. Tällä hetkellä hän ratkoo 1 000 tehtävää päivässä, mikä on sairaalloista. Vieroituksen aikana hän ratkoo aina $\frac{4}{5}$ edellisenä päivänä ratkotusta tehtävämäärästä. Tavoitteena on, että hän ratkoisi vieroituksen jälkeen vain 10 tehtävää päivässä. Kuinka monta kokonaista päivää vieroitus kestää?

481. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{x+2}{4} = \frac{x-1}{7}$

b) $\frac{3x+1}{4x+2} = 3$

482. Siiri haastaa Oskarin Pokémon-otteluun. Oskarin Charmanderin hännän liekin lämpötila on kääntäen verrannollinen Siirin Hoppipin maksimipomppukorkeuteen. Kun liekin lämpötila on 45 Fahrenheit-astetta, Hoppip hyppää 37 m korkeuteen. Kuinka korkealle Hoppip voi hypätä, kun Charmanderin liekin lämpötila kasvaa 431 Fahrenheit-astetta?

FUNKTIOT

483. Olkoon $f(x) = \frac{2^x+4}{x}$. Laske, mikäli mahdollista:

- a) $f(2)$
- b) $f(\frac{1}{3})$
- c) $f(0)$
- d) $f(-1)$

484. Mikä on funktion f määrittelyjoukko, kun funktion arvot määritellään kaavalla $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$?

485. Mikä on funktion $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$ määrittelyehto?

486. Olkoon $f(x) = 2x+9$ ja $g(x) = 12x-1$. Millä x :n arvolla pätee $f(x) = g(x)$?

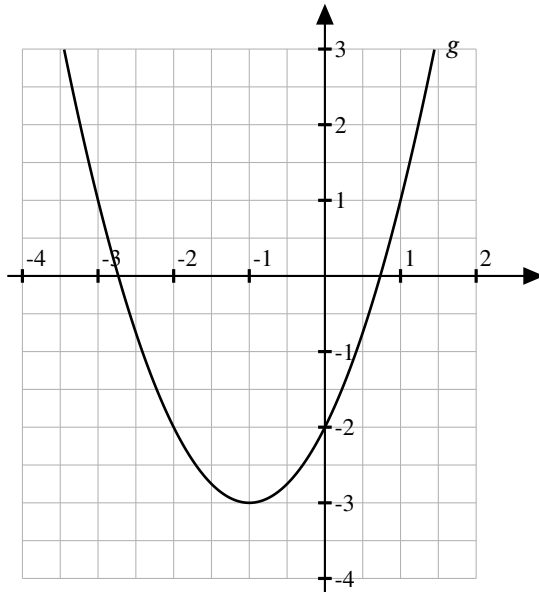
487. Olkoon $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$. Laske

- a) $f(2)$
- b) $f(a)$
- c) $f(2a)$
- d) $2f(x^2)$
- e) $f(\sqrt{x+1})^2$.

488. Olkoon $f(x) = -4x^{-3}$ ja $g(x) = \frac{1}{2}(-x)^2$. Määritä.

- a) $f(2)$
- b) $f(0)$
- c) $g(-4)$
- d) $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right)$
- e) $f(g(2))$

489. Arvioi kuvaajasta funktion g nollakohdat. Mikä on funktion g pienin arvo? Millä muuttujan x arvolla $g(x) = -2$? Määritä $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.



490. Hyvä haltijatar taikoo karkkeja jättikulhoon syntymäpäivälahjaksi Tuhkimolle. Karkkien määrä kasvaa 3,1-kertaiseksi joka tunti. Kun kello 12.15, karkkeja on 3 000. Muodosta funktio, joka ilmaisee karkkien lukumäärän t tunnin kuluttua. Kulhoon mahtuu 1 000 000 karkkia. Laske karkkien määrä

- a) 3,5 tunnin kuluttua.
- b) 5 tuntia sitten.
- c) Tuhkimon syntymäpäivät alkavat kello 18.00. Saako hyvä haltijatar lahjan ajoissa valmiiksi (eli kulhon täyteen)?

Ilmoita vastaukset 10 karkin tarkkuudella.

491. Hiiri syö Erikin juustosta 10 % joka päivä. Nyt juustoa on 509 g. Paljonko juustoa

- a) on 3 päivän kuluttua?
- b) oli 5 päivää sitten?

492. Funktio $e(t) = 15\,000 \cdot 0,80^t$, missä t on aika tunteina kuvaa autiomaalle eksyneen janoisen ihmisen etäisyyttä lähimmästä keitaasta metreinä. Kuinka kaukana keidas on

- a) kolmen tunnin vaelluksen jälkeen?
- b) vuorokauden vaelluksen jälkeen?

493. (YO 1877 4) Vuosikymmenen 1860–70 kuluessa lisääntyi Helsingin väkiluku puolella vuoden 1860 väkiluvulla. Jos väkiluvun lisäys tapahtuisi seuraavinakin vuosikymmeninä samassa suhteessa, paljonko väkeä Helsingissä olisi 1890, kun siellä 1860 oli 21 700 asukasta?

494. Missä kohdassa funktiot $g(x) = 5^x$ ja $h(x) = (\frac{1}{4})^x$ saavat saman arvon?

495. Kaikki funktiot ovat relaatioita, mutta kaikki relaatiot eivät ole funktioita.

a) Anna esimerkki relaatiosta, joka ei ole funktio, ja selitä, miksei se ole funktio. (Muista, että relaation ei tarvitse käsitellä lukuarvoja.)

b) Valitse funktiolle $f, f(x) = |x - 1|$ sopiva määrittelyjoukko niin, että f on relaationa symmetrinen.

Harjoituskokeita

Seuraavissa harjoituskokeissa on kussakin yhdeksän tehtävää, jotka on suunniteltu niin, että jokaisesta (alakohtineen) saa korkeintaan kuusi pistettä.

HARJOITUSKOE 1

496. a) Perustele, onko 341 alkuluku. (2 p.)

b) Mainitse jokin aina epätosi yhtälö. (0,5 p.)

c) Mainitse jokin reaaliluku, joka ei ole rationaaliluku. (0,5 p.)

d) Esitä jokin laskutoimitus, jota ei ole määritelty reaaliluvuilla, ja perustele, miksi on niin. (2 p.)

e) Kuinka monta eri reaalijuurta on yhtälöllä $x^4 = 9$? (1 p.)

497. Sievennä lausekkeet.

a) $\sqrt[3]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^3}$

b) $\frac{2x-4}{2-x}$

c) $8^{7a+\frac{a}{3}} - 2^{21a+a}$

498. a) Ratkaise välivaiheet esittäen yhtälö $x^3 - \frac{14}{27} = \frac{20}{6} + \frac{14}{18}$. (3 p.)

b) Esitä luku 0,3888 ... murtolukuna. (3 p.)

499. a) Eräs bakteerikanta kasvaa päivässä 75 prosentilla. Montako prosenttia bakteerikannan alkuperäinen koko on bakteerikannan määrästä kolmen päivän kuluttua? (3 p.)

b) Mursupuvun hinnasta puolet tulee valmistuskuluista. Valmistuskuluista 75 % on materiaalikuluja. Montako prosenttia materiaalikulujen pitää laskea, jotta mursupuvun hinta tippuu 10 %? (3 p.)

500. a) Lounaspalvelu myy lounasta hintaan 8,00 euroa. Asiakas voi myös ostaa kerralla tarjouspaketin hintaan 170 euroa, johon sisältyy lounas kuukaudeksi (30 päivää). Kuinka monena päivänä kuukaudessa vähintään on käytävä lounaalla, jotta tarjouspaketti tulisi halvemmaksi?

b) Kaupassa myydään kolajuomatölkkejä (à 33 cl) kuuden pakkauksissa litrahinnalla 2,96 €/l. Kanta-asiakkaat voivat ostaa pakkauksen hintaan 4,90 €. Kuinka monen prosentin alennuksen kanta-asiakkaat saavat? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

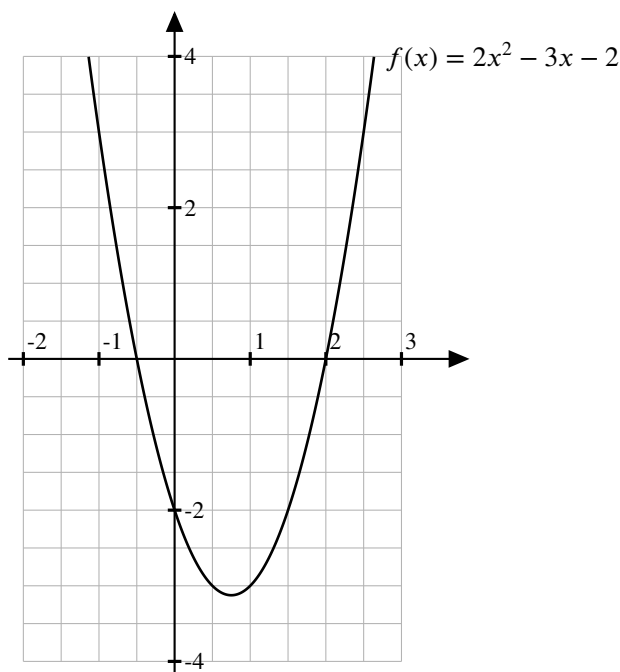
501. Pullaohjeen mukaan 4 dl maitoa ja 2 dl sokeria riittää 20 pullaan. Jon leipoo niin monta pullaa kuin litralla maitoa on mahdollista. Riittääkö leipomiseen tällöin täysi kilogramman paketti sokeria? Jos riittää, niin kuinka monta grammaa sokeripakkauksesta jää tällöin jäljelle? Tavallisen pöytäsokerin eli sakkaroosin tiheys on $1,59 \text{ g cm}^{-3}$.

502. a) Laske $f(2)$, kun $f(x) = 5x^3 - 12x^{-2} - 2$.

b) Tutki kuvaajasta, mitkä ovat funktion f nollakohdat.

c) Millä muuttujan arvoilla funktio saa arvon 3?

d) Arvioi funktion pienin arvo.



503. Jaana-Petterillä on suorakulmainen pala kartonkia, jonka pinta-ala on 36 cm^2 , lyhyen sivu pituus on 4 cm ja pitemmän sivun pituus on x cm. Hän haluaa taivuttaa kartongista putken niin, että lyhyet sivut ovat yhdessä. Laske putken tilavuus, kun putkelle soveltuva tilavuuden kaava on $V = \pi r^2 h$, jossa V on tilavuus, h on kartonkipalan lyhyen sivun pituus, ja $x = 2\pi r$.

504. Internetoperaattori myy sinulle liittymän, jolle luvataan teoreettinen maksimilatausnopeus 50 Mb/s. Jos oletetaan latausnopeuden olevan käytännössä keskimäärin puolet luvatusista, kuinka monta minuuttia kestää ladata peli, jonka tosiasiallinen koko on 2,0 gigitavua?

HARJOITUSKOE 2

505. a) Mainitse jokin ehdollisesti tosi yhtälö ja milloin se on tosi. (1 p.)

b) Mainitse jokin kokonaisluku, joka ei ole luonnollinen luku. (0,5 p.)

c) Mainitse jokin reaaliluku, joka ei ole irrationaaliluku. (0,5 p.)

d) Perustele, onko 61 alkuluku. (2 p.)

e) Näytä esimerkillä, että vähennyslasku ei ole vaihdannainen. (2 p.)

506. Sievennä.

a) $3(a^2 + 1) - 2(a^2 - 1)$

b) $\frac{x^2+1}{x} - x$

c) $\frac{a}{a-1} : (\frac{1}{a} - 1)$

d) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}(2a)^{-\frac{5}{2}}$

507. Ellulla meni filosofian toinen kurssi ensimmäistä huonommin, ja nyt filosofian keskiarvo (ei-pyöristettynä) kahden suoritettun kurssin jälkeen on 7,5.

a) Minkä päättöarvosanan Ellu saa filosofiasta (keskiarvo pyöristettynä), kun hän saa viimeisestä eli kolmannesta kurssista ansaitsemansa kympin? (Oletetaan, ettei Ellu korota päättöarvosanaa mahdollisessa erilliskokeessa.)

b) Taulukoi kaikki mahdolliset kurssiarvosanat, jotka Ellu on voinut saada kahdesta ensimmäisestä kurssista.

c) Ellu opiskelee myös kolme kurssia terveystietoa. Hän on on saanut ensimmäisestä kurssista arvosanaksi 7 ja toisesta 8, ja hänen pyöristetty kurssikeskiarvonsa on 8. Minkä arvosanan Ellu sai kolmannesta kurssista?

508. a) Muuta desimaaliluku $-5,2\overline{0}$ sekamurtoluvuksi.

b) Ratkaise z yhtälöstä $-\sqrt{az} - \sqrt{a} = -az$. Missä a :n arvoilla yhtälöllä on olemassa reaalityökalu?

509. Tuoreessa ananaksessa veden osuus on 80 % ananaksen massasta ja A-, B- ja C-vitamiinien yhteenlaskettu osuus 0,05 % massasta. Ananas kuivatetaan niin, että veden osuus laskee 8 prosenttiin ananaksen massasta. Kuinka suuri on A-, B- ja C-vitamiinien osuus kuivatun ananaksen massasta? (Luvut eivät ole faktuaalisia.)

510. Isabellan ajaessa nopeudella 60 km/h juuri ennen jarrutusta, jarrutusmatka oli 100 metriä. Kuinka monta metriä pitkä pysähtymismatka on samoissa ajo-olosuhteissa nopeudella 100 km/h, kun otetaan lisäksi huomioon Isabellan yhden sekunnin reaktioaika? Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, ja pysähtymisaika on reaktioajan ja jarrutusajan summa.

511. Erään valtion asukasmäärä vuoden 2000 alussa oli 1,52 miljoonaa ja vuoden 2014 alussa 2,23 miljoonaa.

a) Kuinka monella asukkaalla valtion asukasmäärä on kasvanut mainitulla välillä keskimäärin vuodessa? (1 p.)

b) Kuinka monta prosenttia asukasmäärä on kasvanut keskimäärin vuodessa? Anna vastaus prosentin sadaosien tarkkuudella. (3 p.)

c) Muodosta lauseke, jolla voidaan arvioida kyseisen valtion asukasmäärää vuonna n , kun väestönkasvun oletetaan olevan eksponentiaalista. (Mallin ei tarvitse kattaa aikaa ennen ajanlaskun alkua.) (2 p.)

512. Aape Ronkalla on kuution muotoisia kananmunia, joiden tiheys on $4,0 \text{ g cm}^{-3}$. Jos 20 munan yhteismassa on 1,0 kilogrammaa, kuinka monta senttimetriä pitkä on kunkin munan särmä? Kaikki munat ovat saman kokoisia. Kuution tilavuus lasketaan kaavalla $V = a^3$, missä a on kuution särmän pituus.

513. Määritellään funktio f lausekkeella $f(t) = 2t - 3$. Ratkaise

a) $f(t - 1) + f(t) + f(t + 1) = 3$

b) $f(f(t^2)) = 0$.

HARJOITUSKOE 3

514. a) Esitä yhdistetyn luvun 124 alkulukukehitelmä. (1 p.)

b) Osoita esimerkillä, että jakolasku ei ole liitännäinen. (2 p.)

c) Viidesosa mölleistä on pällejä, ja kuudesosa pälleistä on tirboja. Jos pälleistä puolet on jukebokseja, joita on kolme, niin kuinka monta mölliä on enemmän kuin tirboja? (3 p.)

515. Avaa mahdolliset sulut ja sievennä.

a) $-(-x + y) - (-y)$

b) $(x + 1)^2$

c) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{13}{60}}$

516. a) Kymmenen maalaria maalaa keskimäärin kaksikymmentä aitaa kolmessa tunnissa. Kuinka monta aitaa kolmekymmentä maalaria ehtii maalata tunnissa?

b) Pertsä ajaa kotoansa mummolaan tunnissa, jos ajovauhti on lupsakka 60 km/h. Nyt Pertsalla on kuitenkin kiire, ja hän yrittää keretä mummolaan kahdessa kolmasosatunnissa. Kuinka nopeasti Pertsan pitää ajaa?

517. Ostat vuoden voimassa olevan parturikortin, jolla voi käydä parturissa niin usein kuin haluaa. Kortti maksaa 230 € ja kertakäynti 25 €.

a) Kuinka monta kertaa sinun pitäisi käydä parturissa vuoden aikana, jotta ostos olisi kannattava?

b) Esitä sievennetty lauseke, jonka arvona on vuosikortin prosentuaalisen alennus (verrattuna yksittäiskäynteihin), kun vuodessa käydään parturissa n kertaa.

518. a) Ratkaise a ja x yhtälöstä $x - a^{9001} = a^{9001} + x$.

b) Ratkaise t yhtälöstä $\frac{t}{t-1} = \frac{2t-1}{t-1}$.

519. a) Mansikasta noin 99 % on vettä. Ostat 3,00 kiloa mansikoita ja laitat ne kuivumaan, kunnes kaksi kolmasosaa mansikoiden vedestä on haihtunut. Kuinka monta kilogrammaa mansikoita sinulla on kuivatuksen jälkeen?

b) Laitat suuren lottovoiton tilille, jolla talletus kasvaa 1,5 % vuodessa. Nostat rahat 20 vuoden päästä. Kuinka monta prosenttia arvokkaampi talletus tällöin on, kun inflaatio on pienentänyt joka vuosi rahan arvoa yhdellä prosentilla?

520. Kuutiosenttimetrissä ilmaa on keskimäärin 100 bakteeria. Bakteerisolujen oletetaan olevan pallon muotoisia (säde yksi mikrometri) ja vastaavan tiheydeltään vettä. Puhtaan ilman tiheys (ilman bakteereita) on $1,275 \text{ kg m}^{-3}$. Kuinka monta miljardisosaa (yksikössä ppb, *parts per billion*) ilman massasta on bakteereja? Pallon tilavuus lasketaan kaavalla $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, missä r on pallon säde eli puolet halkaisijasta/läpimitasta.

521. Todista jaollisuuden määritelmän avulla oikeaksi tai vääräksi väite: jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid b + c$, kun a , b ja c ovat kokonaislukuja.

522. Funktion T arvot määritellään yhtälöllä $T(x) = \frac{3}{4x^3-2}$. Määritä funktiolle mahdollisimman laaja reaalinen määrittelyjoukko ja sitä vastaava arvojoukko.

HARJOITUSKOE 4

523. a) Mainitse jokin aina tosi yhtälö. (0,5 p.)

b) Määritä luvun -7 käänteisluvun vastaluku. (0,5 p.)

c) Miksei reaalitykijua käytettäessä voida ottaa parillista juurta negatiivisesta luvusta? (2 p.)

d) Järjestä joukot $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{Z}$ järjestykseen pienimmästä suurimpaan ts. siten, että edellinen sisältyy seuraavaan. (1 p.)

e) Esitä luku 1 705,02 kymmenen potenssien summana. Kirjoita kaikki kertoimet ja eksponentit selvästi näkyviin. (1 p.)

f) Esitä luvun 81 alkutekijäkehitemä. (1 p.)

524. a) Esitä $0,\overline{285714}$ murtolukuna. (3 p.)

b) Ratkaise t yhtälöstä $\frac{ta}{2} = t + 1$. Esitä myös mahdolliset muuttujien rajoitukset. (3 p.)

525. Sievennä.

a) $\frac{2x-1}{\frac{1}{2}-x}$

$$\text{b) } \frac{5,7 \cdot 10^{1\ 002} + 3 \cdot 10^{1\ 001}}{60}$$

c) $x^2 \cdot 4^{28} \cdot x^{-1} \cdot 0,25^{27}$

526. Itämeren keskisyyvyys on 55 metriä ja pinta-ala 415 000 km². Jos veden keski-suolaisuus olisi 1 ‰ (painoprosentteina eli massaa suolaa per massa suolavettä), kuinka monta tonnia suolaa itämeressä olisi yhteensä? Veden tiheydeksi oletetaan 1 kg dm⁻³.

527. a) Sukkien hintaa alennettiin 50 %. Kuinka monta prosenttia hintaa täytyy nostaa, jotta saavutetaan alkuperäinen hinta?

b) Erään valtion väestö on kasvanut 10 vuodessa 10 %. Kuinka monta prosenttia väestö on kasvanut keskimäärin vuodessa? Anna vastaus prosentin sadasosien tarkkuudella.

528. Kuntosaliryitys myy palveluitaan kahdella maksusuunnitelmalla: asiakas ostaa joko yksittäisiä käyntejä tai kuukausikortin. Yksittäinen käynti maksaa 7 euroa. Kuinka paljon kuukausikortin hinnaksi tulee, kun yritys suunnittelee sen olevan 15 päivänä kuukaudessa (30 päivää) kuntoilevalle asiakkaalle 20 prosenttia halvempi kuin vastaavien käyntien ostaminen erikseen? Kuinka monta kertaa kuukaudessa salilla tulee tällöin käydä, jotta kuukausikortti olisi edullisempaa kuin yksittäiset maksut? (Oletetaan asiakkaan käyvän kuntosalilla korkeintaan yhden kerran vuorokaudessa.)

529. Timanttien arvo on karkeasti suoraan verrannollinen niiden massan neliöön. Kuuluisa timantti *The Great Mogul* painaa noin 800 karaattia. *The Sancy* -timantti painaa noin 50 karaattia. Kuinka monta kertaa

- a) suurempi *The Great Mogul* on verrattuna *The Sancyyn*?
- b) arvokkaampi *The Great Mogul* on verrattuna *The Sancyyn*?

530. Laboratoriossa viljeltävän bakteeriviljelmän massa kolminkertaistuu päivässä. Kun bakteereja on kasvatettu 5 päivän ajan, niitä on 243 grammaa.

- a) Kuinka paljon bakteereja oli kasvatuksen alussa?
- b) Kuinka monen päivän kuluttua kasvatuksen alusta bakteerimassaa on yli kaksi kilogrammaa?

531. Tuotteen hintaa laskettiin ensin $p\%$, minkä jälkeen tuotteen hintaa korotettiin samat $p\%$. Kokonaisuudessaan tuotteen hinta laski 15% . Määritä p :n lukuarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

Ylioppilaskoetehtäviä

Ylioppilaskokeissa on aina tehtäviä tai tehtävien alakohtia, joiden ratkaiseminen on mahdollista ensimmäisen kurssin tiedoin.

LYHYT OPPIMÄÄRÄ

532. (K2014/1b,c)

a) Laske lausekkeen $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} = \frac{x-1}{4}$.

533. (K2014/2b) Ratkaise yhtälö $4x^3 = 48$. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.

534. (K2014/5) Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %?

PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

535. (K2013/1a) Ratkaise yhtälö $(x-4)^2 = (x-4)(x+4)$.

536. (K2013/3b) Sievennä lauseke $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$.

537. (S2012/1a) Ratkaise yhtälö $2(1-3x+3x^2) = 3(1+2x+2x^2)$.

538. (S2012/1c) Ratkaise yhtälö $1-x = \frac{1}{1-x}$.

539. (K2012/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$.

540. (K2012/2a) Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ arvo.

541. (S2011/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{4x-1}{5} = \frac{x+1}{2} + \frac{3-x}{4}$.

542. (S2011/2a) Sievennä välivaiheet esittäen lauseke $\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{2+\sqrt{2}}}}$.

543. (K2011/1a) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}$.

544. (K2011/2a) Osakkeen arvo oli 35,50 euroa. Se nousi ensin 12 %, mutta las-
ki seuraavana päivänä 10 %. Kuinka monta prosenttia arvo nousi yhteensä näiden
muutosten jälkeen?

545. (S2010/1a) Sievennä lauseke $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

546. (K2010/1b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$.

547. (S2009/1c) Osoita, että $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = 5 - \sqrt{2}$.

548. (S2009/2b) Ratkaise yhtälö $\sqrt{x + 2} = 3$.

549. (K2009/1a) Sievennä $\frac{a^2}{3} - \left(\frac{-a}{3}\right)^2$.

550. (S2008/1b) Sievennä lauseke $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1+x}{x^2}$.

551. (S2009/2b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{5}{12}$.

552. (K2008/4) Vuonna 2007 alennettiin parturimaksujen arvonlisäveroa 22 pro-
sentista 8 prosenttiin. Jos alennus olisi siirtynyt täysimääräisenä parturimaksuihin,
kuinka monta prosenttia ne olisivat alentuneet? Arvonlisävero ilmoitetaan prosent-
teina verottomasta hinnasta ja se on osa tuotteen tai palvelun hintaa.

553. (S2007/4) Tuotteen hintaa korotettiin p prosenttia, jolloin menekki väheni.
Tämän johdosta hinta päätettiin alentaa takaisin alkuperäiseksi. Kuinka monta pro-
senttia korotetusta hinnasta alennus oli?

554. (K2007/1c) Sievennä lauseke $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \quad (a > 0)$.

555. (K2007/3a) Merivettä, jossa on 4,0 painoprosenttia suolaa, haihdutetaan al-
taassa, kunnes sen massa on vähentynyt 28 %. Mikä on suolapitoisuus haihdutta-
misen jälkeen? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

556. (K2007/3b) Mikä on vuotuinen korkoprosentti, jos tilille talletettu rahamäärä
kasvaa korkoa korolle 1,5-kertaiseksi 10 vuodessa? Lähdeveroa ei oteta huomioon.
Anna vastaus prosentin sadasosan tarkkuudella.

557. (K2006/1a) Ratkaise x yhtälöstä $4x + 2 = 3 - 2(x + 4)$.

558. (K2006/1c) Sievennä lauseke $\frac{1}{a-1} \left(a - \frac{1}{a}\right)$

559. (K2006/4) Kesämökin rakentaminen tuli 25 % arvioitua kalliimmaksi. Raken-
nustarvikkeet olivat 19 % ja muut kustannukset 28 % arvioitua kalliimpia. Mikä oli
rakennustarvikkeiden arvioitu osuus ja mikä lopullinen osuus kokonaiskustannuk-
sista?

560. (S2005/1a) Ratkaise reaalityöalueella yhtälö $2(x - 1) + 3(x + 1) = -x$

561. (S2005/1c) Ratkaise reaalityöalueella yhtälö $x^{16} = 256$.

562. (K2005/1a) Sievennä lauseke $\frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x}$

563. (K2005/3) Asuinrakennuksesta saadut vuokrat ovat 12 % pienemmät kuin ylläpitokustannukset. Kuinka monta prosenttia vuokria oli korotettava, jotta ne tulisivat 10 % suuremmiksi kuin ylläpitokustannukset, jotka samanaikaisesti kohoavat 4 %?

564. (K2004/3) Perheen vuokramenot olivat 25 % tuloista. Vuokramenot nousivat 15 %. Montako prosenttia vähemmän rahaa riitti muuhun käyttöön korotuksen jälkeen?

565. (K2003/1) Sievennä lausekkeet

a) $\sqrt{3\frac{3}{4}} / \sqrt{1\frac{2}{3}}$

b) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) / \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$.

566. (S2002/2) Vuoden 1960 jälkeen on nopeimman junayhteyden matka-aika Helsingin ja Lappeenrannan välillä lyhentynyt 37 prosenttia. Laske, kuinka monta prosenttia keskinopeus on tällöin noussut. Oletetaan, että radan pituus ei ole muuttunut.

567. (S2002/4a) Olkoon $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Sievennä lauseke $\frac{a + \frac{b^2}{a}}{b + \frac{a^2}{b}}$.

568. (K2002/3) Vuonna 2001 erään liikeyrityksen ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo kasvoi 10 % vuoteen 2000 verrattuna. Samaan aikaan myynnin arvo kotimaassa väheni 5 %. Tällöin koko myynnin arvo kasvoi 6 %. Laske, kuinka monta prosenttia myynnistä meni vuonna 2000 ulkomaille.

569. (S2001/3) Juna lähtee Tampereelta klo 8.06 ja saapuu Helsinkiin klo 9.58. Vastakkaiseen suuntaan kulkeva juna lähtee Helsingistä klo 8.58 ja saapuu Tampereelle klo 11.02. Matkan pituus on 187 kilometriä. Oletetaan, että junat kulkevat tasaisella nopeudella, eikä pysähdyksiin kuluvia aikoja oteta huomioon. Laske kummankin junan keskinopeus. Millä etäisyydellä Helsingistä junat kohtaavat, ja paljonko kello tällöin on?

570. (K2001/4) Säiliö sisältää 2,3 kg ilmaa, ja pumppu poistaa jokaisella vedolla 5 % säiliössä olevasta ilmasta. Kuinka monen vedon jälkeen säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa?

571. (S2000/1) Sievennä seuraavat lausekkeet:

a) $(x^{n-1})^{n-1} \cdot (x^n)^{2-n}$

b) $\sqrt[3]{a} (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$

572. (S2000/3) Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkasta on jäljellä 40 %, nopeutta lisätään 20 %. Kuinka monta prosenttia koko matkaan kuluva aika tällöin lyhenee?

s

Pääsy- ja valintakoetehtäviä

ARKKITEHTIVALINTA

(2012/1) Taloyhtiössä on 210 asukasta. Taloyhtiö perii vesimaksua 15 €/henkilö/kk. Kaupunki perii taloyhtiöltä vesimaksua kokonaiskulutuksen mukaan 3,17 €/m³. Taloyhtiön toteutunut kokonaisvedenkulutus on asukasta kohden 155 litraa vuorokaudessa, mihin sisältyy hukkaan valuvia vuotoja yhtiötä kohden 1 500 m³ vuodessa. Oletamme, että vuodessa on 365 vuorokautta.

- a) Kuinka monta litraa vettä taloyhtiössä valuu hukkaan minuutissa?
- b) Vuodot tukitaan. Montako prosenttia vesimaksua voitaisiin laskea tai tulee korottaa, jotta vesimaksu tällöin kattaisi taloyhtiön vuotuiset vesikulut?

Anna vastaukset kolmen numeron tarkkuudella.

(2010/3) Arkkitehdit M. Uoto, F. Örm ja S. Hapé ovat suunnitelleet Aalto-yliopiston aulaan kullatusta teräskuutiosta muodostuvan taideteoksen. Kultaus on ohut. Toteutuksen aikana teoksen sijoituspaikka muuttuu, jolloin teräskuution tilavuutta kasvatetaan 19 % alkuperäisestä. Loppulaskutuksessa materiaalikustannusten todetaan kasvaneen samaiset 19 % alkuperäisestä budjetista.

- a) Paljonko kultaukseen käytetyn kullan määrä kasvoi toteutuksen aikana?
- b) Teräksen yksikköhinta ei toteutuksen aikana muuttunut. Miten kullan yksikköhinta siis muuttui?

Anna vastaukset prosentteina 0,1 prosenttiyksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

DIPLOMI-INSINÖÖRIVALINTA

(2012/3) Asumistukea maksetaan 80 % vuokran määrästä, siltä osin kuin vuokra ei ylitä 252 euroa. Vuokran määrää vähennettynä asumistuella kutsutaan omavastuuksi.

- a) Minkä suuruinen vuokra on, kun omavastuu on puolet vuokrasta?

(2009/1) Kokonaistuotanto jaetaan materian ja palveluiden tuotantoon. Verrataan tuotantoa tammikuussa 2008 tammikuuhun 2009. Tänä vuoden pituisen tarkastelujakson aikana materiatuotanto kasvoi 2,0 % ja palvelutuotanto laski 7,0 %.

Kuinka suuri oli materiatuotannon osuus kokonaistuotannosta tammikuussa 2009,

- a) kun tammikuussa 2008 materia- ja palvelutuotanto olivat yhtäsuuret?
- b) kun vertailuaikana kokonaistuotanto laski 2,0 %?

Anna kummatkin vastaukset 0,1 %-yksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

(2008/2) Yritys hankkii 5 000 kg raaka-ainetta, josta on vettä 5,40 % (painoprosenttia) ja väripigmenttiä 2,60 %. Ennen käyttöä raaka-aine on laimennettava siten, että lisäyksen jälkeen sekoituksesta 6,60 % on vettä.

- a) Miten paljon hankittuun raaka-aineeseen tulee lisätä vettä, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan?
- b) Miten paljon vettä ja väripigmenttiä tulee lisätä hankittuun raaka-aineeseen, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan, ja lisäksi väripigmentin suhteellinen osuus massasta säilyy alkuperäisenä 2,60 %:na?

Anna vastaukset sadan gramman tarkkuudella.

(2007/1) Vaaleissa kaikkiaan 39 300 äänestäjistä 45 % äänestää varmasti puoluetta A ja 47 % puoluetta B. Loput ovat ns. liikkuvia äänestäjiä, jotka eivät ole vielä päättäneet kantaansa.

- a) Oletetaan, että kaikki äänioikeutetut äänestävät. Kuinka monta liikkuvien äänestäjien ääntä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön, vähintään puolet annetuista äänistä?
- b) Oletetaan, että täsmälleen kolmasosa liikkuvista äänestäjistä jättää äänestämättä. Kuinka monta prosenttia liikkuvien äänestäjien annetuista äänistä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön kaikista annetuista äänistä?

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN VALINTA

(2012/1a) Ratkaise yhtälö $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$.

(2011/1) Oletetaan, että polttoaineessa E05 on etanolia 5 % ja bensiiniä 95 % ja polttoaineessa E10 etanolia 10 % ja bensiiniä 90 %. Oletetaan myös, että etanolin energiasisältö on $\frac{2}{3}$ puhtaan bensiinin energiasisällöstä. Jos tietyllä autolla 100 km kulutus on 10 litraa polttoainetta E05, paljonko kulutus on polttoainetta E10? Anna vastaus sievennettynä murto- tai sekalukuna. Jos polttoaineen E10 hinta on 1,60 €/l ja polttoaineen E05 hinta on 1,65 €/l, kumpaa on edullisempaa käyttää?

(2008/1) Matkailuauton nopeus on 80 km/h, mutta kolmasosalla matkasta Jyväskylästä Heinolaan se laskee tietöiden takia 40 kilometriin tunnissa. Kuinka paljon

TEKNIIKAN JA LIIKENTEEN ALAN AMK-VALINTA

KAUPPATIETEIDEN VALINTAKOE

(2008/43) TietoEnatorin liikevaihto vuonna 2007 oli 1 772,4 MEUR (miljoona euroa). Mikä alla olevista vaihtoehtoista on lähimpänä vuoden 1999 liikevaihtoa, kun liikevaihdon keskimääräinen vuotuinen muutosprosentti kahdella desimaalilla on ollut 3,96 %? Keskimääräinen muutosprosentti on luku, joka ilmaisee kuinka paljon liikevaihto olisi vuosittain prosentuaalisesti kasvanut, jos prosentuaalinen kasvu olisi ollut vakio.

- a) 1 299,1 MEUR
- b) 1 346,0 MEUR
- c) 1 704,9 MEUR
- d) 1 249,6 MEUR

(2004/40) Piensijoittajan rahavarat r vuoden alussa ovat 1 000 €, ja ne kasvavat korkoa vuotuisen korkotekijän $R = 1,04$ mukaisesti. Vuoden lopussa korko lisätään pääomaan, ja seuraavana vuotena vuotuinen korkotekijä on $R = 1,10$. Korkotuotto kahdelta vuodelta on (lähimpään kokonaislukuun pyöristettynä)

- a) 145 €
- b) 140 €
- c) 100 €
- d) 144 €.

(2003/33) Yhtä tuotetta valmistavan monopolirytyksen kuukauden tarjontamäärän ollessa q (yks/kuukausi) on tuotteen hinta p (euroa/yks) annettu hintafunktiolla $p = 100 - q$. Kun kyseessä on monopoli, yritys määrää markkinahinnan p valitsemalla tuotantomäärän q , jolloin hinta määräytyy hintafunktion mukaisesti. Yrityksen tuotantokustannukset $c(q)$ (euroa/kuukausi) tuotantomäärän q funktiona ovat

$$c(q) = 100 + 80q, \text{ kun } q \leq 15, \text{ ja}$$

$$c(q) = 700 + 40q, \text{ kun } q \geq 15.$$

Yrityksen voitto $pq - c(q)$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun

- a) $q = 10$
- b) $q = 15$
- c) $q = 30$
- d) $q = 60$.

(2000/33) Erään tuotteen kysyntämäärä d (yksikköä) riippuu yksikkö hinnasta p (mk/yksikkö) funktion $d = 5\,000p^{-1,5}$ mukaisesti. Tuotteen yksikkökustannukset ovat vakio 15 mk/yksikkö. Suurin nettotuotto saadaan tällöin hinnalla

- a) 40 mk
- b) 45 mk
- c) 50 mk
- d) 55 mk.

Vastaukset ja hakemisto

Vastaukset

1.

a) $-16 - (-8) = -16 + 8 = -8$

b) $\frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

d) $-8x^2 + x$

e) $\frac{b}{a^2}$

2.

a) 20, sillä $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$

b) $20\text{ dm}^3 = 20 \cdot (\text{dm})^3 = 20 \cdot \text{d}^3 \cdot \text{m}^3 = 20 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \text{ m}^3 = 20 \cdot \frac{1}{1\,000} \text{ m}^3 = \frac{20}{1\,000} \text{ m}^3 = \frac{2}{100} \text{ m}^3 = 0,02 \text{ m}^3$

3.

a) $x = -\frac{11}{4}$

b) $x = -3$ tai $x = 3$

c) $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

4.

a) $(-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 0$

b) $x = 4$

5.

a) Aika kaksinkertaistuu.

b) Aika puolittuu.

6.

a) Alennettu hinta on

$$25,95 \text{ €} - 25,95 \cdot 0,15 = 25,95 \text{ €} \cdot (1 - 0,15) = 25,95 \text{ €} \cdot 0,75 = 22,06 \text{ €} \approx 22,05 \text{ euroa}$$

b) Merkataan tuotteen alkuperäistä hintaa (esimerkiksi) x :llä, jolloin saadaan yhtälö

$$x \cdot 0,75 = 21,25 \text{ €}. \text{ Tästä saadaan ratkaistua jakolaskulla alkuperäiseksi hinnaksi}$$

$$x = \frac{21,25 \text{ €}}{0,75} = 25,00 \text{ €}$$

7.

a) 37 616,003

b) -67 360 008

8.

a) Kukaan ei ole itsensä sisar, joten relaatio ei ole refleksiivinen.

b) Sisaruus on aina molemminpuolista (jos a on b :n sisar, niin myös b on a :n sisar), joten relaatio on symmetrinen.

c) Jokainen mielivaltaisen henkilön sisar on myös muiden kyseisen henkilön sisarten sisar (sisaruus ”välittyy eteenpäin”), joten relaatio on transitiivinen.

9.

a) refleksiivinen ja transitiivinen

b) transitiivinen

c) ei mikään vaihtoehtoista

d) symmetrinen (ei transitiivinen, koska oma työkaveri voi olla töissä lisäksi jossain muualla)

10. Relaatio on symmetrinen, symmetrinen ja transitiivinen.

11.

a) epätosi

b) epätosi

c) tosi

d) tosi

e) tosi

12. Pisteeseen

a) $-2 + (-3) = -5$

- b) $-2 + 6 + (-2) = 2$
c) $-2 + 2 + (-6) = -6$

13.

- a) $17 - 5 = 12$
b) $5 + 6 = 11$
c) $-10 + (-2) = -12$
d) $-20 - (-3) = -17$

14.

- a) h
b) $-h$
c) 0
d) 0

15.

- a) -5
b) 12
c) -3
d) 3
e) 0

16.

- a) -36
b) -49
c) 40
d) -64
e) -40
f) -80

17.

- a) $5 : (-15) = -\frac{1}{3}$
b) $-(2 \cdot 8) = -16$
c) $\frac{-(-2)}{x-y} = \frac{2}{x-y}$

18.

- a) Sivulle 92. Luku saadaan laskutoimituksesta $47 + 3 \cdot 15$.
- b) 490 riviä. Luku saadaan laskutoimituksesta $2\,450 : 5$. (Kirjoitettujen rivien laskeminen on muuten oikeasti *erittäin* huono tapa seurata työn tehokkuutta.)
- c) 21 sivua
- d) 58 sivua
- e) 60 sivua
- f) 17 pistettä. Luku saadaan laskutoimituksesta $8 + (20 - 11)$. (Sulkeet selkeyden vuoksi.)
- g) 8 minuuttia. Vastaukseen päädytään laskemalla ensin kulunut aika minuuteissa $32 - 15$ ja vähentämällä tämä 25 minuutista: $25 - (32 - 15)$. (Tai $25 - 7$, kun $32 - 15$ on jo laskettu.)

19.

- a) Aseta herätysajaksi 9.30. Jos puhelimesi näyttää Ruotsin aikaa, ongelmaa ei ole. Jos puhelimesi on Suomen ajassa, puhelimesi herättää sinut tuntia aiemmin, mutta tällöin et ainakaan myöhästy. Sitä aikaisemmaksi on turha herätystä asettaa – se vie vain unelta tunteja.
- b) Herätysajaksi kannattaa asettaa 7.30. Jos puhelimesi näyttää Suomen aikaa, Moskovassa on kello tällöin juuri sopivasti 9.30. Jos puhelimesi näyttää Moskovan aikaa (tai välissä olevaa tunnin Suomesta edellä olevaa aikaa), herätys on aikaisintaan kello 7.30, jolloin olet kuitenkin ajoissa.

20. $(49 - 33) : 4 = 16 : 4 = 4$ eli 4 pistettä

21.

- a) 36 minuuttia
- b) 48 minuuttia

22.

- a) $130 + 5$
- b) $-4 + (-7)$
- c) $2a + (-b)$ (a :n ja b :n tarkempi määrittely teki laskutoimituksesta ylipäättään hyvin määritellyn, mutta tehtävän suorituksen kannalta ei ole olennaista, minkälaisia lukuja a ja b ovat.)

23.

a) $31 - (-4)$

b) $-15 - 92$

c) $-a - (-2b)$ (a :n ja b :n tarkempi määrittely teki laskutoimituksesta ylipäättään hyvin määritellyn, mutta tehtävän suorituksen kannalta ei ole olennaista, minkälaisia lukuja a ja b ovat.)

24. $240 : 14$ on hiukan yli seitsemäntoista, eli jokaiseen ryhmään tulee (alustavasti) seitsemäntoista oppilasta. $14 \cdot 17 = 238$, eli $240 - 238 = 2$ oppilasta ”jää yli”. Kun nämä kaksi sijoitetaan johonkin olemassaolevista ryhmistä, ryhmään tulee 19 oppilasta.

25.

a) Molempien lausekkeiden lukuarvo on 66.

b) Ei – ensimmäisestä tulee 1 ja jälkimmäisestä 4.

c) Ei – ensimmäisestä tulee -22 ja jälkimmäisestä 0.

26.

a) 9

b) 48

c) 6

27.

a) $(5 - 1) \cdot 3 + 2 = (1 + 4) \cdot (4 - 2) - (4 - 8)$

b) $2 \cdot (-1 : 8 + 3) \cdot 4 = (2 + 1) \cdot 8 - 1$

c) $7 - 9 + 25 \cdot (5 - 1) : (61 - 6 - 5) = (3 + 4) \cdot 7 \cdot (1 - 5) + 14 \cdot (6 + 8)$

28. 96 erilaista

29.

a) Ei ole jaollinen luvulla 4

b) On jaollinen luvulla 4, sillä $12 = 4 \cdot 3$

c) Ei ole jaollinen luvulla 4

d) Ei ole jaollinen luvulla 4

e) On jaollinen luvulla 4, sillä $-20 = 4 \cdot (-5)$

f) On jaollinen luvulla 4, sillä $0 = 4 \cdot 0$

30.

- a) tosi
- b) epätosi
- c) tosi
- d) epätosi

31.

- a) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
- b) $15 = 3 \cdot 5$
- c) $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$
- d) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- e) $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
- f) $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- g) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

32.

- a) Luku 111 voidaan kirjoittaa tulona $3 \cdot 37$, joten 111 ei ole alkuluku.
- b) Luku 74 voidaan kirjoittaa tulona $3 \cdot 5 \cdot 5$, joten 74 ei ole alkuluku.
- c) 97 on alkuluku.
- d) Luku 360 voidaan kirjoittaa tulona (esimerkiksi) $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6$, joten 360 ei ole alkuluku.

33. Vuodet 800, 1960, 1996, 2000 ja 10000

34. Saavuttamattomissa olevat annoskoot ovat 1, 2, 3, 5, 7 ja 11. Jos neljän pakkaukset eivät innosta, mahdottomia annoskokoja on paljon enemmän: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22 ja 23.

35.

- a) kyllä
- b) ei
- c) kyllä

36.

- a) $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

b) Eivät voi olla. Jos negatiivisella kokonaisluvulla on tekijä a , niin myös sen vastaluku $-a$ on tekijä. Jos nämä tekijäparit lasketaan yhteen, summaksi tulee nolla. Koska negatiivisen luvun tekijä on myös sen positiivinen vastaluku, kaikkien (alkuperäisestä luvusta poikkeavien) tekijöiden summaksi tulee välttämättä tuo alkuperäisen luvun vastaluku. Koska negatiivisen luvun vastaluku ei voi olla luku itse, negatiiviset luvut eivät voi olla täydellisiä lukuja.

38.

a) $(-6) \cdot 3$

b) $5 \cdot (6 + 7)$

c) $(7 + 6) \cdot 5$

d) $5 \cdot 7 + 5 \cdot 6$

e) $-8 \cdot ((-5) \cdot 2)$

39.

a)

$$\begin{aligned} & 350 \cdot 271 - 272 \cdot 350 \\ &= 350 \cdot 271 - 350 \cdot 272 && \text{(vaihdantalaki)} \\ &= 350 \cdot (271 - 272) && \text{(osittelulaki)} \\ &= 350 \cdot (-1) \\ &= -350 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & 370 \cdot 1\,010 \\ &= 370 \cdot (1\,000 + 10) \\ &= 370 \cdot 1\,000 + 370 \cdot 10 && \text{(osittelulaki)} \\ &= 370\,000 + 3\,700 \\ &= 373\,700 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & 594 + 368 + 3 - 368 \\ &= 594 + 368 + (3 - 368) && \text{(liitântälaki)} \\ &= 594 + 368 + (-368 + 1) && \text{(vaihdantalaki)} \\ &= 594 + (368 + (-368)) + 1 && \text{(liitântälaki)} \\ &= 594 + 0 + 1 \\ &= 595 \end{aligned}$$

40.

- a) -1
- b) 12
- c) 3

41.

- a) $a + 2b$
- b) $8a + 4b$
- c) $-a + b$
- d) 0

42.

- a) $bc - b - c + 1$
- b) $bc - 2b - ac + 2a$
- c) $1 - 2y - 2x + 4xy$

43.

- a) $3 \cdot 2 = 6$, koska $2 + 2 + 2 = 2 + 4 = 6$
- b) $6 - 4 = 2$, koska $2 + 4 = 6$
- c) $3x + x = 3 \cdot x + 1 \cdot x = (3 + 1) \cdot x = 4x$
- d) $xy + yx = xy + xy = 1 \cdot (xy) + 1 \cdot (xy) = (1 + 1) \cdot (xy) = 2(xy) = 2xy$

44. Olkoon a mainittu mielivaltainen kokonaisluku. Väite 6 | a on yhtäpitävä sen kanssa, että on olemassa kokonaisluku b siten, että $a = 6b$. Koska $6 = 2 \cdot 3$, ehto voidaan kirjoittaa $a = 2 \cdot 3 \cdot b$. Koska kahden kokonaisluvun tulo on aina kokonaisluku, niin sekä $2b$ että $3b$ ovat myös kokonaislukuja. Siis voidaan kirjoittaa

$a = 2 \cdot (3b) = 2 \cdot k$, missä k on kokonaisluku: a on jaollinen kahdella. Toisaalta voidaan kirjoittaa $a = 3 \cdot (2b) = 3 \cdot l$, missä l on kokonaisluku: a on jaollinen kolmella. a on siis jaollinen sekä kahdella että kolmella.

45.

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $3ab$
- c) $3 + b$

46.

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{9}{10}$
- c) $\frac{1}{16}$
- d) $\frac{13}{21}$
- e) $\frac{16}{27}$

47.

- a) $\frac{10}{15}$ ja $\frac{12}{15}$
- b) $\frac{15a}{18}$ ja $\frac{14b}{18}$
- c) $\frac{4}{6a}$ ja $\frac{15ab}{6a}$

48.

- a) $-7, \frac{-19}{9}, \frac{-15}{11}, \frac{3}{4}, \frac{11}{12}$
- b) $\frac{5}{-2}, \frac{7}{-3}, \frac{15}{21}, \frac{-3}{-4}, \frac{8}{9}$

49.

- a) $\frac{8}{11}$
- b) $\frac{3}{5}$
- c) $\frac{7}{6}$
- d) $\frac{19}{12}$

50.

- a) $7\frac{1}{2}$
- b) $11\frac{1}{16}$
- c) $134\frac{3}{15}$

51.

- a) $\frac{17}{5}$
- b) $\frac{137}{34}$
- c) $\frac{6\,296}{3\,145}$

52.

- a) $\frac{16}{9}$ tai $1\frac{7}{9}$
- b) $\frac{8}{3}$
- c) $\frac{7}{1}$
- d) $1\frac{2}{3}$

53.

- a) $\frac{8}{15}$
- b) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$
- c) $\frac{3}{7}$
- d) 12

54. 5 (Vihje: on varsin työlästä laskea osoittajien ja nimittäjien tulot ennen sieventämistä supistamalla. Huomaa sen sijaan heti aluksi yhteiset (eli supistettavat) tekijät jo ennen kuin murtoluvut yhdistetään.)

55.

- a) $1\frac{1}{21}$
- b) $-\frac{16}{39}$
- c) $\frac{7}{32}$
- d) ei määritelty (nollalla jakaminen)

56.

- a) $\frac{-3}{4}$
- b) $\frac{4}{3}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $-\frac{4}{3}$
- e) $-\frac{4}{3}$
- f) $\frac{3}{4}$

g) kohdat c ja f; Luvun vastaluvun vastaluku on sama kuin luku itse – samoin käänteisluvun käänteisluku.

h) kohdat d ja e: käänteisluvun vastaluku on sama kuin vastaluvun käänteisluku.

57.

a) $\frac{-11}{8}$

b) $8\frac{5}{4} = 9\frac{1}{4}$

c) $-\frac{11}{8}$

d) $-\frac{8}{11}$

58.

a) $\frac{3}{4}$

b) 3

c) $\frac{9}{4}$

d) $-\frac{9}{2}$

59. $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{60}{60} - \frac{20}{60} - \frac{15}{60} - \frac{12}{60} = \frac{60}{60} - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$

60. Yksi kahdeksasosa

61. Muut saivat piirakasta kuudesosan.

62.

a) 50 euroa

b) 37,50 euroa

63. $40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40 \cdot \frac{4}{10} = 16$ euroa.

64. Toisena päivänä aamulla kakkua on jäljellä puolet, kolmantena päivänä aamulla $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, neljäntenä päivänä $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$, jne. Siis seitsemän päivän jälkeen kakkua on jäljellä $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}\right) = \frac{1}{128}$.

65.

a) $-\frac{x}{6}$

b) $\frac{2}{3}x - \frac{17}{6}$

c) $\frac{x}{4}$

66.

- a) $\frac{7}{10}$
- b) $\frac{29}{30}$
- c) $-\frac{1}{9}$
- d) $-\frac{25}{4}$ eli $-6\frac{1}{4}$

67.

- a) $\frac{5}{8}$
- b) $\frac{19}{30}$

68.

- a) $\frac{6+b}{2}$
- b) ab

69.

- a) $\frac{2}{11}$
- b) $5\frac{2}{3}$

70.

- a) Kun $x = 0$ (ja vain silloin; tulosta tulee nolla vain nollalla)
- b) $\frac{8}{3}$ (käänteisluvun määritelmä)
- c) $\frac{26}{23}$

71.

- a) 0
- b) $-\frac{2}{5}$
- c) $-\frac{1}{7}$
- d) -7

72. Kaikilla paitsi nollalla, sillä jos $a \neq 0$, $-\frac{1}{a} = \frac{1}{-a}$

73. $\frac{81}{10}$

74.

- a) $\frac{4}{5}$
- b) $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$
- c) $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
- d) 4

75.

- a) $\frac{18}{5}$
- b) $\frac{5}{8}$
- c) 3
- d) $\frac{1}{4}$

76.

- a) $\frac{4}{5}$
- b) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
- c) $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$
- d) $\frac{3}{28}$

77.

- a) $\frac{2}{5}$
- b) $-\frac{5}{6}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{1}{8}$

78.

- a) $\frac{47}{84}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $-\frac{2}{15}$
- d) $\frac{27}{5}$

79.

- a) $\frac{20}{9}$
- b) $\frac{18}{35}$
- c) $\frac{1}{2}$

80.

- a) 1
- b) $-\frac{1}{7}$

81.

- a) Sarjalippu on kannattavampi. (Liput maksaisivat erikseen ostettuina 48 euroa.)
- b) 7,60 euroa

82. Luku $\frac{3+a}{a}$, sillä $3 > \frac{5}{3}$. Vakio a on molemmissa sama luku, joten se vaikuttaa samalla tavalla molempien lukujen suuruuteen.

83. Summa on $\frac{rs}{r+s}$. Jos $r = \frac{2}{3}$ ja $s = 3$, niin lausekkeen arvo on $\frac{6}{11}$.

84.

a) $\frac{1}{n(n+1)}$

b) $1 - \frac{1}{n}$

85. Kun $x > 1$

86.

a) $a + 1$

b) $4a$

87. Luvut ovat sievennettynä peräkkäisten Fibonaccin lukujen osamääriä:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots$$

88. Vanhin sai 6 esinettä, keskimäinen 3 esinettä ja nuorin 2 esinettä. Vanha matemaatikko pitää yhden palkinnon itsellään, sillä $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$. (Tämä vastaus on oikein. Jos ihmetyttää, kannattaa lukea tarkkaan, mitä tehtävässä oikein sanotaan.)

89.

a) kantaluku 5, eksponentti 3, potenssin arvo 125

b) kantaluku 2, eksponentti 5, potenssin arvo 32

c) kantaluku 9, eksponentti 1, potenssin arvo 9

d) kantaluku 1, eksponentti 1, potenssin arvo 1

e) kantaluku -4, eksponentti 3, potenssin arvo -64

f) kantaluku -1, eksponentti 10, potenssin arvo 1

g) kantaluku 6, eksponentti -1, potenssin arvo $\frac{1}{36}$

90.

a) a^3

b) a^3b^4

c) a^4b^3

91.

- a) a^5
- b) a^6
- c) a^2
- d) 1, ei määritelty kun $a = 0$
- e) a^{10}
- f) a^{20}

92.

- a) 64
- b) 64
- c) 64
- d) 64

93.

- a) 16
- b) 16
- c) -16

94.

- a) -49
- b) 49
- c) $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$
- d) $\frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$

95.

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{25}$
- c) $\frac{7}{1}$
- d) $\frac{4}{3}$

96.

- a) a^2b^3
- b) 1
- c) a^{17}

97.

a) a

b) b^2

c) c^2

d) d^3

e) e^{-1}

f) f^{-2}

g) k^8

98.

a) $x^3 - x^2$

b) $k^5 - 3k^4$

c) $t^2 - t^{102} - t^{100}$

99.

a) $2x^2$

b) $3x^2y$

c) $\frac{xz}{y}$

d) $3y^3z$

100.

a) $\frac{1}{a^4}$

b) $\frac{a^3}{b^3}$

101.

a) $\frac{1}{10}$

b) $5^5 = 3\,125$

c) 2^{2n-3}

d) 2^{6i+12}

102.

a) b^9

b) $-\frac{1}{3}a = -\frac{a}{3}$

c) $\frac{10\,000}{b^6}$

103.

- a) $-a^6$
- b) 1
- c) $27a^3$
- d) $a^{15}b^9$

104.

- a) $-\frac{b^3}{a^3}$
- b) a^8b^8
- c) $\frac{a^8}{b^8}$

105.

- a) $y^2 - 1$
- b) $-2s^3 + 2s^2 + s - 1$
- c) $z^4 + 4z^2 + 4$

106.

- a) $2x^3 + 3x$
- b) $3 + 4\frac{y}{x^2}$
- c) $\frac{3}{y} - 2xy^2$
- d) $\frac{x}{y^2z} + \frac{3}{2} + \frac{2}{y^2}$

107.

- a) $7x^2 + 3x$
- b) $4(x^2 + x^3)$ tai $4x^2 + 4x^3$
- c) $ax^2 + (b + c)x$ tai $ax^2 + bx + cx$
- d) $(a + f)x^3 + (b + d)x + (c + e)y^3$

108.

- a) kaikilla kokonaisluvuilla
- b) parillisilla kokonaisluvuilla
- c) parittomilla kokonaisluvuilla
- d) ei millään kokonaisluvulla

109.

a) 8

b) $\left(\frac{2:3}{7}\right)^4 = \frac{1\,296}{2\,401}$

110.

a) Kolmas alkuluku on 5, sijoittamalla alkulukukaavaan $n = 5$, saadaan

$p = 2^5 - 1 = 31$, josta edelleen täydelliseksi luvuksi

$$p(p+1)/2 = 31(31+1)/2 = 31 \cdot 32/2 = 496.$$

b) Sijoitetaan $p = 2^n - 1$ kaavaan $p(p+1)/2$, niin saadaan sieventämällä $p(p+1)/2 = (2^n - 1)(2^n - 1 + 1)/2 = (2^n - 1)2^n/2 = 2^n(2^n - 1)/2 = \frac{2^n}{2}(2^n - 1) = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

111.

a) a^3

b) $4a^2$

c) $-8a^3b^3c^3$

d) $91a^4$

112.

a) a^5

b) a^2b

c) $-a^4$

113.

a) a^6b^4

b) a^9b^{12}

c) $a^{20}b^{10}$

d) $8a^3b^7$

114.

a) ab

b) b

c) 1

d) 1

e) $-\frac{a}{b}$

115.

- a) $\frac{1}{a^3}$
- b) $\frac{1}{a^2}$
- c) a^3
- d) $\frac{1}{a^4 b^3}$
- e) a^8

116.

- a) 1 ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)
- b) 1 ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)
- c) a^2
- d) a ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)
- e) a ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)

117.

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{27}$
- c) $\frac{a^4}{b^4}$
- d) $\frac{a^4}{b^6}$
- e) $\frac{a^2}{b^4}$

118.

- a) a^7
- b) a^2
- c) a^6
- d) 1

119.

- a) $\frac{1}{4}$
- b) a^2
- c) $\frac{1}{9}$
- d) $\frac{1}{a^{12} b^{16}}$ tai $a^{-12} b^{-16}$

120.

- a) $a^8 b^2$
- b) $a^2 b^6$
- c) $a^{15} b^{12}$
- d) $10^8 = 100\,000\,000$

121.

- a) a^2
- b) $-a^2 b^3$
- c) $-a^4$

122.

- a) a^5
- b) a^5
- c) a^3
- d) a^4
- e) a^6

123.

- a) a^4
- b) a^4
- c) $a^5 b$
- d) $a^2 b^2$

124. Onnettoman elämän. Jotain kaksi.¹

125.

- a) $2^4 = 16$
- b) 2^{63}
- c) 2^{n-1}
- d) $2^{64} - 1$

= 18 446 744 073 709 551 615 (Huomataan, että kullakin ruudulla on yksi jyvä vähemmän kuin kaikilla edellisillä ruuduilla yhteensä.)

1. Ketosen ja Myllyrinteen mukaan: <https://www.youtube.com/watch?v=NwNzYJuXzZY>
Joidenkin mielestä sievin muoto onkin $\frac{x^2 y^2 - (x - y^2) \cdot 8}{\pi} = \frac{1}{\pi}(x^2 y^2 - 8x + 8y^2) = \frac{y^2}{\pi}(x^2 - 8x + 8)$

126. $2b$

127.

a) $42 = 2^{2^{2^2}}$

$= 2^{2^4} = 2^{16}$

$= 65\,536$

b) $35 = 4^{4^4}$

$= 4^{256}$

$\approx 1,34 \cdot 10^{154}$

128. $a^{20}c^2$

129.

a) $-i$

b) 1

c) i

d) i

e) $-i$

f) 2

g) $x^2 + y^2$

131.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1\,234}{1\,000}$
 $= \frac{617}{500}$

d) $-\frac{1}{5}$

132.

a) $-1,5$

b) $0,75$

c) $0,6$

d) $-1,1666\dots$

133.

a) $\frac{43\,532}{1\,000}$

- b) $\frac{5\,031}{1\,000}$
 c) $\frac{23}{100}$
 d) $\frac{3\,002}{1\,000}$
 e) $\frac{101}{1\,000}$

134.

- a) $\frac{1}{100}$
 b) $\frac{49}{200}$
 c) $\frac{1}{250}$
 d) $\frac{251}{250\,000}$

135.

- a) $\frac{7}{9}$
 b) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$
 c) $\frac{205\,426}{99\,900} = \frac{102\,713}{49\,950}$
 d) $\frac{9}{9} = 1$

136.

- a) 0,604
 b) 0,4016
 c) 0,3088
 d) 0,986

137.

- a) $\frac{649}{999}$
 b) $\frac{718}{3\,333}$

138.

- a) $3,\overline{81}$
 b) $2,\overline{846153}$
 c) $0,\overline{38}$
 d) $0,\overline{93}$

139. Koska tunnetusti $\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$, niin kertomalla molemmat lausekkeet kolmella saadaan toisaalta $0,9999 \dots$ ja toisaalta $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Siis $0,9999 \dots = 1$.

140.

- a) 10
- b) 20
- c) 70
- d) 9 000
- e) 0
- f) -10
- g) -10
- h) 99 990

141.

- a) 1
- b) 2
- c) 1
- d) 3
- e) 7
- f) 2
- g) 1
- h) 2

142.

- a) 1,0
- b) 3,7
- c) 150
- d) 7 000
- e) $-2,0$
- f) 0,0055
- g) $-1\,300$
- h) 0,000050

144.

- a) On: joule, J tai kalori, cal
- b) On: celsiusaste, $^{\circ}\text{C}$ tai kelvin, K

- c) Ei ole.
- d) On: gramma, g
- e) On: kilogrammaa per kuutiometri, kg/m^3

145.

- a) 0,05 l
- b) 0,233 m
- c) 0,33 metriä
- d) 16 000 g
- e) 2 000 000 J
- f) 4 096 tavua
- g) 131 072 t

146.

- a) 4 tuntia
- b) kello 21.07

147.

- a) 12,7 cm
- b) 7,62 mm
- c) 72,206 m
- d) 128,72 km
- e) 170,28 cm
- f) 100,65 m

148.

- a) $5\,910\text{ cm}^2$
- b) 1 000 litraa

149.

- a) 45 cm^3
- b) 50 s
- c) 40 ml
- d) 75 mg
- e) 50 s
- f) $1,5\text{ g/dm}^2$

150. 24,0 J

151.

a) Perunoihin kuluu rahaa $0,81 \frac{\text{€}}{\text{kg}} \cdot 3 \text{ kg} = 2,43 \text{ €}$

b) $5 \text{ €} - 2,43 \text{ €} = 2,57 \text{ €}$

c) $2,57 \text{ €} : (1,04 \frac{\text{€}}{\text{kg}}) = \frac{2,57}{1,04} \frac{\text{€}}{\frac{\text{€}}{\text{kg}}} = \frac{2,57}{1,04} \text{ kg} \approx 2,47 \text{ kg}$

d) Käytetään edellisen kohdan *tarkkaa* tulosta: $\frac{2,57}{1,04} \text{ kg} : (120 \text{ g}) = \frac{2,57}{1,04} \cdot 1\,000 \text{ g} : (120 \text{ g}) = \frac{2\,570}{1,04} \text{ g} : (120 \text{ g}) = \frac{2\,570}{1,04} \text{ g} \cdot \frac{1}{120 \text{ g}} = \frac{2\,570}{1,04 \cdot 120} \approx 20,6$, eli kokonaisia banaaneja saa ostettua 20.

e) $20 \cdot 120 \text{ g} \cdot 1,04 \frac{\text{€}}{\text{kg}} = 20 \cdot 0,120 \text{ kg} \cdot 1,04 \frac{\text{€}}{\text{kg}} = 20 \cdot 0,120 \cdot 1,04 \text{ €} = 2,496 \text{ €} \approx 2,50 \text{ €}$

f) $2,57 \text{ €} - 2,496 \text{ €} \approx 0,07 \text{ €}$

152.

a) $[c] = \text{mg/ml}$ (tai sievennettynä g/l)

b) 9 mg/ml (tai 9 mg/ml)

153.

a) 25 m/s (tasan)

b) 55 metriä (tasan)

154.

a) $\frac{5}{22} \cdot 10^{-12} \text{ s}$

b) 227 ns

155.

a) 625 Mt/s

b) USB 3.0:n tiedonsiirtonopeus gigatavuina sekunnissa on $\frac{5}{8} \text{ Gb/s} = 0,625 \text{ Gt/s}$. Elokuvan koko gigatavuina on $13 \text{ Gt} = 13 \cdot 2^{30} \text{ t} \approx 13,959 \text{ Gt}$. Jakamalla tämä koko siirtonopeudella saadaan vastaukseksi sekunteina $13,959 \text{ Gt} : 0,625 \text{ Gt/s} \approx 22,3$ sekuntia.

156. Kyllä voidaan: hautakiven tilavuus on noin $0,54 \text{ m}^3$, joten se painaa noin 1,5 tonnia.

157. Viidennen pompun korkeus on $(1/2)^4 \text{ m} = 1/16 \text{ m} \approx 0,06 \text{ metriä}$. Pallon 13. pompun korkeus on $(1/2)^{12} \text{ m} \approx 0,0002 \text{ metriä}$ eli 0,2 millimetriä.

158. Pinta-ala on $\pi \cdot 0,6^2 \approx 1,1 \text{ cm}^2$.

159. Jälkimmäisellä. (Aikaisemmalta pysäkiltä kävely kestää 180 sekuntia. Ajaminen jälkimmäiselle pysäkillä ja kävely sieltä kestää vain noin 170 sekuntia.)

160. $943 \mu\text{l}$. (Lapselle annettava Bricanyl-annos on $330 \mu\text{l}$.)

161. Tarvitaan 6 pakkausta. Mikstuuraa jää käyttämättä $44,3 \text{ ml}$.

162.

- a) $6\,120 \text{ s}$
- b) $12\,720 \text{ s}$
- c) $4\,500 \text{ s}$
- d) $16\,200 \text{ s}$

163.

- a) 77 min
- b) 165 min
- c) 90 min
- d) 105 min

164.

- a) $1,217 \dots \text{ tuntia}$
- b) $0,180 \dots \text{ tuntia}$
- c) $0,264 \dots \text{ tuntia}$
- d) $0,715 \text{ tuntia}$

165.

- a) $2 \text{ h } 5 \text{ min}$
- b) $11 \text{ h } 7 \text{ min}$
- c) 2 h
- d) $3 \text{ h } 14 \text{ min}$

166.

- a) 500 m
- b) 5 cm
- c) $8,4 \text{ km}$
- d) $4,2 \text{ cm}$

167.

- a) 5,0 km/h
- b) 1,4 m/s
- c) 11 s

168. Jasper-Korianterilla, sillä 5,9 tuumaa = 14,986 cm

169. Kello 5.12

171. 125 pianonvirittäjää

172. $[\gamma] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

173.

- a) 8
- b) Ei määritelty
- c) 4
- d) -4
- e) 10

174.

- a) 3
- b) Ei määritelty
- c) 2
- d) -2
- e) 10

175.

- a) 9
- b) 3
- c) Ei määritelty
- d) 2

176.

- a) 4
- b) $\sqrt{15}$ (Ei sievene enempää.)
- c) 9
- d) 5

177.

- a) 2
- b) $\frac{3}{2}$
- c) 3
- d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

178. $\sqrt{8100} = \sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90.$

179. Pienen kuution sivu on $\sqrt[3]{64/2} = 2.$

180.

- a) 17,89
- b) 3,87
- c) 8,43

181.

- a) $9/7$
- b) $\sqrt{5}$
- c) 4

182.

- a) $\sqrt{3} + \sqrt{5} - 1$
- b) $\sqrt{2}$

183. Korotetaan luvut toiseen potenssiin, jolloin päästään eroon juurista:

$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$ ja $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot \sqrt{3}^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Koska $3\sqrt{2}$ ja $2\sqrt{3}$ ovat molemmat lukua 1 suurempia, voidaan niiden keskinäinen suuruusjärjestys lukea neliöiden suuruusjärjestyksestä. Edellisten laskujen perusteella $(3\sqrt{2})^2 > (2\sqrt{3})^2$, joten $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

184.

- a) $\sqrt[3]{8} = 2 < \sqrt{16} = 4$
- b) $\sqrt{8} = \sqrt{4} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- c) $\sqrt[3]{64} = 4 > \sqrt[5]{32} = 2$
- d) $\sqrt[2]{121} = 11 > \sqrt[5]{243} = 3$

185. Neliöjuuri kasvaa 10-kertaiseksi. Reaalilukujen a ja $100a$ neliöjuuret ovat nimitään $\sqrt{a}$ ja $\sqrt{100a} = \sqrt{100}\sqrt{a} = 10\sqrt{a}$. Yleisesti jos juurrettavaa kerrotaan reaaliluvulla k , neliöjuuri kasvaa $\sqrt{k}$ -kertaiseksi.

186. Suorakaide muodostuu kahdesta vierekkäisestä neliöstä, joiden pinta-ala on 5. Tämän neliön sivun pituus on $\sqrt{5}$. Siis suorakaiteen korkeus on $\sqrt{5}$ ja leveys $2\sqrt{5}$.

187. $a = \sqrt[4]{83\,521}$

188.

a) $\sqrt[6]{1\,000\,000} = \sqrt[6]{10^6} = 10$

b) $\sqrt[10]{10\,000\,000\,000} = \sqrt[10]{10^{10}}$

$= 10$

c) $\sqrt[5]{10\,000\,000\,000} = \sqrt[5]{10^{10}} = \sqrt[5]{10^{2 \cdot 5}} = \sqrt[5]{(10^2)^5} = 10^2 = 100$

189.

a) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a , koska kaikkien lukujen neliöt ovat vähintään nolla. Vastaus on aina epänegatiivinen.

b) Juuri on määritelty vain luvulla $a = 0$. Muilla a :n arvoilla $-a^2$ on negatiivinen, jolloin parillinen juuri ei ole määritelty. Ainoa vastaus, joka voidaan saada, on siis $\sqrt[4]{0} = 0$.

c) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a , koska $(-a)^2$ on aina vähintään nolla. Vastaus on aina epänegatiivinen.

d) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a , koska kaikkien lukujen neliöt ovat vähintään nolla. Vastaus on aina ei-positiivinen, koska $\sqrt[4]{a^2}$ on aina epänegatiivinen.

190.

a) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a . Vastaus on aina epänegatiivinen (≥ 0).

b) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a . Vastaus voi olla mikä tahansa luku.

c) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a . Vastaus on aina epäpositiivinen (≤ 0).

d) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a . Vastaus on aina epäpositiivinen (≤ 0).

191.

a) $a = 8$

b) $a = 27$

192. Esimerkiksi $a = -1$ ja $b = 2$. Tällöin annetun ehdon vasemman lausekkeen arvoksi tulee 1, mutta oikea ei ole reaaliluvuilla määritelty, jolloin se ei voi olla yhtä suuri vasemman puolen kanssa.

193.

a) Esimerkiksi $a = 27$ ja $b = 3$.

b) Esimerkiksi $a = 16$ ja $b = 4$.

194. Luvuvakiot 2 ja π eivät vaikuta yksikköön. $[T] = \sqrt{\frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\text{m} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}}} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s}$

195. $9(3 + \sqrt{3}x)$

196.

a) 1,41421

b) 1,41421

c) 1,41421

Kyseessä on tietysti $\sqrt{2}$ ja annetut laskut mukailevat neliön halkaisijan suhdetta sivuun. (Tästä lisää geometrian kurssilla.)

197. Esimerkiksi $a = 3$ ja $b = 27$

198.

a) Esimerkiksi $\sqrt[4]{3^8} = 16$

b) Esimerkiksi $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

199.

a) $a^{\frac{1}{3}}$

b) $a^{\frac{1}{6}}$

c) $a^{\frac{1}{n}}$

200.

a) z^2

b) $y^{\frac{1}{2}}$

c) $b^{\frac{2}{5}}$

d) $\ddot{o}^{\frac{1}{4}}$

201.

- a) $\sqrt[5]{x}$
- b) $\sqrt[3]{x^4}$
- c) x^2
- d) $\sqrt[4]{x}$

202.

- a) 3
- b) 2
- c) 8
- d) 27

203.

- a) x
- b) $a(1 - a)$

204.

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
- b) $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$
- c) $\sqrt{x^3}$
- d) $\sqrt[7]{x^8}$

205.

- a) $2\sqrt{2}$
- b) 32
- c) $(\sqrt[3]{16})^2$
- d) $5(\sqrt[3]{5})^2$

206.

- a) $k^{\frac{1}{4}}$
- b) $k^{\frac{1}{12}}$
- c) $m^{\frac{3}{4}}$
- d) $m^{\frac{8}{35}}$

207.

- a) 81
- b) 350,48
- c) 0,037
- d) 0,0029

208.

- a) 2^x
- b) $2^{x^2-y^2}$
- c) $\sqrt[x]{x}$

209.

- a) $\alpha^{\frac{2}{9}}$
- b) $q^{\frac{1}{2}}$
- c) $P^{\frac{27}{4}}$

210.

- a) $\sqrt{3}$
- b) $\sqrt[3]{2}$
- c) $\sqrt[60]{42}^{11}$

211.

- a) $\sqrt[3]{a} - 1$
- b) $\frac{1}{2}a$
- c) 1
- d) $a\sqrt{a}$

212.

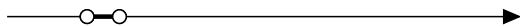
- a) Kun $x = 1,3$, tornien arvot vakiintuvat lukuun 1,4709 ...; kun $x = 1,7$, tornien arvot kasvavat mielivaltaisen suuriksi; kun $x = 0,05$, tornien arvot vuorottelevat lukujen 0,136 ... ja 0,664 ... välillä.
- b) Arvot vakiintuvat, kun $0,00659 \dots \leq x \leq 1,444667 \dots$. Tämän voi esittää muodossa $\frac{1}{e^e} \leq x \leq \sqrt[e]{e}$, missä e on irrationaalivakio nimeltään Neperin luku. Desimaalikehitelmänä $e = 2,718281828459 \dots$ (Kyseistä ratkaisua ei tämän kurssin tiedoilla voida saavuttaa.)i

213. $x = \sqrt{2}$

214. Järjestys on $-3, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{\pi}, \pi, 4$



215.



216.

a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

c) vain $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

i) $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

d) vain $\mathbb{R}$

217.

a) irrationaaliluku

b) rationaaliluku (jakso on 151)

c) irrationaaliluku

218.

a) Ei ole

b) Ei ole

c) On

219.

a) -2

b) 0

c) Sellaista ei ole. Jos nimittäin $a > -3$, niin keskiarvo $\frac{-3+a}{2}$ on vielä lähempänä lukua -3 .

220.

- a) 4
- b) 7
- c) äärettömän monta

221. Vihjeitä:

- a) keskiarvo
- b) $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Käytä painotettua keskiarvoa. (Joudut luultavasti etsimään lisätietoja.)
- c) pyöristäminen
- d) hyödynnä c-kohtaa
- e) keskiarvot

Ohjeita:

- a) $\frac{a+b}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{2}a+b}{\sqrt{2}+1}$
- c) Pyöristä pienempi luku ylöspäin sen desimaalin tarkkuudella, jossa lukujen kymmenjärjestelmäsitykset eroavat ensimmäisen kerran.
- d) Jos rationaaliluku r on irrationaalilukujen a ja b välissä, niin $\frac{a+r}{2}$ kelpaa.
- e) Jos kahden rationaaliluvun välissä olisi vain äärellinen määrä rationaalilukuja, löytyisi kahden vierekkäisen välistä a-kohdan perusteella vielä yksi. Koska kahden rationaaliluvun välissä on ääretön määrä rationaalilukuja, b-kohdasta seuraa, että niiden välissä on äärettömän monta irrationaalilukua. Irrationaalilukujen välissä olevien rationaali- ja irrationaalilukujen äärettömyys seuraa vastaavasti.

222.

- a) tosi
- b) epätosi
- c) tosi
- d) tosi
- e) epätosi
- f) ehdollisesti tosi (tosi, kun $x = 0$)

223.

- a) ehdollisesti tosi (tosi, kun $x = 0$)

- b) tosi
- c) tosi
- d) tosi
- e) epätosi
- f) ehdollisesti tosi (tosi, kun $y = 2$)

224.

- a) esim. $x = x$
- b) esim. $x = 1$, tosi vain kun $x = 1$
- c) esim. $1 = 2$

225. Ei ole. $3(-2) - 4 = -10 \neq 11 = 7 - 2(-2)$

226.

- a) kyllä
- b) ei
- c) kyllä
- d) kyllä
- e) ei

227.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) ei
- d) ei
- e) kyllä
- f) kyllä

228.

- a) Pätee.
- b) Ei päde.
- c) Ehdollisesti. (Vain, kun $x = \sqrt[7]{a}$.)

229.

- a) On, sillä $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
- b) Ei, sillä $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.
- c) On, sillä $(-1)^4 - 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

230.

a) $3 + 1 = 4$

b) $2m = 42 \text{ kg}$

c) $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

d) $p = \pi d$

e) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (tai $a \cdot a^{-1} = 1$)

f) $k + (-k) = 0$

g) $k + (-k) = 1$ (Huomaa, että tämä yhtälö on aina epätosi!)

231. Kokeilemalla selviää, että $x = 3$. Systemaattinen tällaisten yhtälöiden ratkaisutapa ei kuulu lukion oppimäärään.

232. Jos $b = 0$, yhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla. Jos $b \neq 0$, yhtälö ei toteudu millään x :n arvolla. Periaatteessa kyseessä ei kuitenkaan enää ole ensimmäisen asteen yhtälö, mikäli $a = 0$.

233.

a) $x = 1$

b) $x = 4$

c) $x = 35/7$

d) $x = -2$

e) $x = 10/3$

f) $x = 1/5$

g) $x = 10$

h) $x = -1/8$

234.

a) $x = -\frac{5}{4}$

b) $x = \frac{19}{5}$

c) Yhtälö toteutuu kaikilla reaaliluvuilla.

d) $x = 80\,000$

e) $x = 3\,000$

f) Yhtälö ei toteudu millään reaaliluvulla.

235.

a) $a = 6$

b) $a = -\frac{5}{2}$

236. 6 laitteessa, yhtälöstä $7x = 37$ pyöristäen vastaus ylöspäin kokonaislukuun

237. 8 min 34 s

238.

a) 350 puheminuuttia tai tekstiviestiä

b) 100 tekstiviestiä

239. 15, 17, 19, 21

240. Tilanne: jos kohde on tarpeeksi lähellä jälkimmäistä pysäkkiä, on nopeampaa mennä jälkimmäiselle ja kävellä takaisin tulosuuntaan. Etäisyyden kasvaessa on järkevämpää jäädä pois edellisellä pysäkillä. Merkataan etäisyyttä metreinä jälkimmäisestä pysäkestä x :llä. Kävelynopeus 9 km/h on 2,5 m/s, joten kävelymatka jälkimmäiseltä pysäkiltä kestää $\frac{x}{2,5}$ s. Kävelymatka edelliseltä pysäkiltä on $340 - x$, joten kesto on $\frac{340-x}{2,5}$ s. Jälkimmäiseltä pysäkiltä jäädessä matkan kestoon lisätään vielä raitiovaunun siirtyminen pysäkkien välillä: 18 km/h = 5 m/s, joten pysäkinväli on $\frac{340}{5}$ s. Työmatkan kestot pysäkeiltä ovat yhtä pitkät, jos yhtälö $\frac{340}{5} s + \frac{x}{2,5} s = \frac{340-x}{2,5} s$ pätee. Sekunneilla jaetun yhtälön $\frac{340}{5} + \frac{x}{2,5} = \frac{340-x}{2,5}$ ratkaisuna saadaan $x = 85$ metriä. Jos siis työpaikan ovi on lähempänä kuin 85 metriä ennen jälkimmäistä pysäkkiä, on nopeampaa jäädä pois jälkimmäisellä pysäkillä.

241.

a) $x = 4\frac{1}{2}$

b) $x = 2\frac{2}{5}$

c) $x = -1\frac{1}{15}$

d) $x = -3\frac{2}{3}$

e) $x = 6$

f) $x = -6\frac{1}{2}$

242.

a) $x = \frac{1}{7}$

b) $x = 2$

c) $x = \frac{54}{5}$

d) Ei ratkaisua

e) $x = \frac{101}{7}$

243.

a) $x = 3$

b) $x = \frac{1}{8}$

244.

a) $m = \frac{F}{a}$

b) $F = pA$

c) $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

d) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

245.

a) 14,5 kilometriä

b) 10,4 kilometriä

246. 0,75 mm/h

247. 2 hours

248.

	desimaaliluku	murtoluku	%	‰
	0,1	$\frac{1}{10}$	10	100
	-0,8	$-\frac{4}{5}$	-80	-800
a)	0,999	$\frac{999}{1000}$	99,9	999
	0,00042	$\frac{21}{50\,000}$	0,042	0,42
	1,25	$\frac{5}{4}$	125	1 250
	-7,5	$-\frac{15}{2}$	-750	-7 500

	perusarvo	$\pm p$ %	lauseke
	a	+10 %	$1,10a$
	b	-24 %	$0,76b$
b)	5 000 €	-1 %	$0,99 \cdot 5\,000 \text{ €}$
	x	-58 %	$0,42x$
	3 m	+2 500 %	$26 \cdot 3 \text{ m}$
	-7,5	-99,7 %	$0,003 \cdot (-7,5)$

Huom.: $0,42x$ voidaan tulkita myös niin, että perusarvo on 0,42 ja x on prosenttikerroin (muotoa $1 \pm \frac{p}{100}$). Sama tulkinnanvaraisuus koskee viimeisen rivin lauseketta $0,003 \cdot (-7,5)$

249.

- a) 20 %
- b) 150 %
- c) 11 428,6 %
- d) 70,6 %
- e) 240 %
- f) 11 328,6 %

250.

- a) 67,5
- b) 0,045*b*
- c) 0,153*b*
- d) 1,52*b*
- e) 35,5*b*

251. 13 % sadasta eurosta on 13 euroa – ei 11,50 euroa, niin kuin kuitissa todetaan.
Arvonlisävero lasketaan suhteessa verottomaan hintaan, ei lopulliseen myyntihintaan.

252. 8 luentoa voi jättää väliin (9 on jo enemmän kuin 80 prosenttia 44:stä)

253.

- a) 168,75 euroa
- b) 1 644,63 euroa

254.

- a) Suomen Kommunistisen Puolueen, 2 812 ääntä
- b) Köyhien Asialla -puolueen, 46 %

255.

- a) Kannatus kasvoi 0,2 prosenttiyksikköä.
- b) Kannatus kasvoi 40 prosenttia.

256.

- a) 95,4 %
- b) 104,8 %
- c) 4,62 %
- d) 4,85 %

257. Noin 97 prosenttia

258.

a) 70 %

b) 40 %

c) Masentuneita on enemmän.

259. Merkitään verotonta hintaa x :llä, jolloin saadaan yhtälö $x + 0,14x = 9,99$ €, eli $1,14x = 9,99$ €, josta ratkeaa jakolaskulla $x = \frac{9,99 \text{ €}}{1,14} \approx 8,76$ €.

260. Kirjan veroton hinta on 24,77 euroa.

261. 18,7 %

262.

a) Merkataan a :lla tuotteen A hintaa ja b :llä tuotteen B hintaa. Annetuista tiedoista saadaan yhtälö $0,75a = 0,85b$. $0,75$:llä jakamalla saadaan yhtälölle muoto $a = \frac{0,85}{0,75}b = \frac{17}{15}b \approx 1,133b$, josta voidaan lukea, että tuotteen A hinta on noin 13,3 prosenttia suurempi kuin b :n. (Tarkka suhdeluku on $\frac{17}{15}$, mutta prosentit esitetään yleensä desimaalilukuina, ja tässä tapauksessa desimaalikehitelmässä toistuu numero 3 äärettömän pitkään, joten pyöristäminen on mielekäästä. Alennusprosentit 25 ja 15 ovat kuitenkin tarkkoja, määrättyjä arvoja eivätkä arvioita, joten on turha puhua merkitsevästä numeroista tässä tapauksessa.)

b) Saadaan yhtälö $0,75c = 0,85 \cdot 555$ €, josta jakolaskulla vastaukseksi tulee $c = \frac{0,85 \cdot 555 \text{ €}}{0,75} = 629$ euroa.

263.

a) Korko on 1,5 % talletuksesta, eli $0,015 \cdot 10\,000 \text{ €} = 150$ euroa.

b) $10\,000 \text{ €} + 150 \text{ €} = 10\,150 \text{ €}$ (tai $1,015 \cdot 10\,000 \text{ €} = 10\,150 \text{ €}$)

c) $1,015^{10} \cdot 10\,000 \text{ €} \approx 11\,605,41 \text{ €}$

d) $1,015^n \cdot 10\,000$

e) $\frac{1,015^n \cdot 10\,000 - 10\,000}{10\,000}$, joka sievenee muotoon $1,015^n - 1$ (vastaus ei siis riipu alkuperäisen talletuksen suuruudesta).

264. 22 %

265. 2 tonnia

266. $\approx 83,3$ %

267. 16 %

268.

a) 9,60 €

b) 17 %

269. Lipputulot vähenivät 1 prosentilla.

270. 50 %

271.

a) Olkoon alkuperäisen talletuksen suuruus a ja pankin tarjoama korkokanta p %. Jos sekä korko että inflaatio otetaan huomioon, talletuksen arvo on vuoden kuluttua $0,99(1 + \frac{p}{100})a$. Jos prosenttikertoimet yhdessä sieventyvät suuremmaksi kuin 1, talletuksen arvo kasvaa. Yhtälön $0,99(1 + \frac{p}{100}) = 1$ ratkaisuna saadaan $p = \frac{100}{99} \approx 1,01$. Jos siis korkokannaksi tarjotaan suurempaa kuin $p = \frac{100}{99}$ %, niin tällöin talletuksen reaaliarvo tulee kasvamaan.

b) Saadaan yhtälö $0,99(1 + \frac{p}{100}) = 1,01$, jonka ratkaisuna $p = \frac{200}{99} \approx 2,02$, eli tarjotun nettovuosikorkokannan tulee olla (sadasosien tarkkuudella niin kuin ne yleensä ilmoitetaan) 2,02 %.

272.

a) Alhaisin onnistumisprosentti (eli onnistumisten suhde tehtävien kokonaismäärään), joka pyöristyy ykkösten tarkkuudella sataan prosenttiin on 99,5 %. Jos vääriä vastauksia on vain mainittu yksi ja kierrosten kokonaismäärää merkataan n :llä, saadaan yhtälö $\frac{n-1}{n} = 0,995$, josta $n = 200$. Onnistuneita kierroksia täytyy siis vielä pelata $200 - 13 = 187$.

b) Olkoon x kaikkien pelaajien määrä. Ratkaistaan yhtälö $0,83x = 2\,356\,504$, josta saadaan pyöristettynä kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen $x \approx 2\,800\,000$. Tarkempaa lukumäärää ei 83 prosentilla voida tietää.

273. Kun sekoitetaan suhteessa 1 : 5, mehussa on yhteensä kuusi ”osaa”. Näistä kuudesta osasta viisi on lisättyä vettä ja puolikas tiivisteen vettä. Vettä on siis viisi ja puoli osaa kuudesta. Veden osuus sekamehusta on siis $\frac{5+\frac{1}{2}}{6} = 5,5/6 \approx 91,7$ %.

274. Hän saa 999 prosenttia liian suuren annoksen. (Huomaa, että ”kuinka moninkertainen annos” on eri kysymys kuin ”kuinka monta kertaa enemmän/liikaa”).

275.

a) Suhteellisen hyvälläkin tarkkuudella vastaus pyöristyy 100 %:iin, mutta tämä ei tietenkään pidä kokeellisesti paikkaansa, koska valo ei pysähtynyt täysin. 17 m/s on luultavasti hyvin tarkka arvo, ja vastaukseksi sopii esimerkiksi 99,999994 %. (Prosentit voivat olla hyvin köykäisiä käyttää, kun muutokset ovat monen suuruusluokan kokoisia. Kätevämpää voisi olla ilmoittaa vastaus esimerkiksi miljoonasosina sadasosien sijaan.)

b) Noin $1,76 \cdot 10^9$ %

c) Noin $1,76 \cdot 10^9$ %, eli sama kuin b-kohdassa. Matkan pituudella ei ole merkitystä, vaan x supistuu muutosprosentin lausekkeesta pois:

$$\frac{\frac{x}{17} - \frac{x}{299\,792\,458}}{\frac{x}{299\,792\,458}} = \frac{299\,792\,458}{17} - 1 \approx 1,76 \cdot 10^7 = 1,76 \cdot 10^9 \text{ \%}.$$

276.

a) 95 : 1

b) 1,04 %

c) Olkoon a valtion X tai Y alkuperäinen populaatio (sama molemmissa), jolloin saaren alkuperäinen populaatio on $2a$. Uusi asukasmäärä on $0,01 \cdot a + 0,95 \cdot a$.

Laskemalla vanhan ja uuden saaripopulaation erotus verrattuna alkuperäiseen saadaan:

$$\frac{2a - (0,01 \cdot a + 0,95 \cdot a)}{2a} = \frac{2a - 0,01a - 0,95a}{2a} = \frac{1,04a}{2a} = \frac{1,04}{2} = 0,52 = 52 \text{ \%}. \text{ (Voi toki myös laskea vain uuden ja vanhan suhteen ja päätellä siitä tuloksen.)}$$

277.

a) 381 %

b) 29

278. Valmiista liuoksesta 10 % on DEPC:tä ja 90 % laimennettua etanolia, josta 94 % on etanolia ja 6 % vettä. Vettä on siis $0,06 \cdot 0,90 \cdot 500 \text{ ml} = 27 \text{ ml}$.

279. Kun $r = 2$ ja $a = 1$, saadaan kaavasta likiarvoksi tasan 1,75. Koska

$$\sqrt{3} = 1,732 \dots, \text{ likiarvo poikkeaa noin } 1,04 \text{ \%}.$$

280. 200 %

281. 5,6 %

282. Pitää paikkansa Tapa 1, ALV:n määritelmän ja prosenttikertoimen tulkinnan perusteella: Merkitään verotonta hintaa x :llä, jolloin myyntihinta saadaan arvonlisäveron määritelmän perusteella summasta $x + \frac{p}{100}x$. Tämä sievenee tuttuun muotoon $(1 + \frac{p}{100})x$, josta nähdään, että verollinen myyntihinta on p prosenttia suurempi kuin veroton hinta x . Koska myyntihinnan lauseke ja prosenttikertoimellinen

lauseke ovat täsmälleen samat (vain eri muodossa), pitää väite paikkansa. Huomaa, että väite pitäisi paikkansa myös toisin päin: jos ALV-kanta on p prosenttia, tuotteen myyntihinta on p prosenttia suurempi kuin veroton hinta.

Tapa 2, erotusprosentin avulla: Merkitään tuntematonta verotonta hintaa x :llä, tuntematonta verollista hintaa y :llä, ja kirjoitetaan erotusprosentin lauseke, jossa verrataan myyntihinnan ja verottoman hinnan erotusta verottomaan hintaan: $\frac{y-x}{x}$. Tästä pitäisi tulla väitteen mukaan $p\%$, eli saadaan yhtälö $\frac{y-x}{x} = \frac{p}{100}$. Ratkaistaan verollinen myyntihinta y : kertomalla yhtälö puolittain x :llä saadaan $y - x = \frac{p}{100}x$, ja lisäämällä puolittain x saadaan $y = x + \frac{p}{100}x$ eli $y = (1 + \frac{p}{100})x$. Prosenttikertoimesta nähdään, että x on kasvanut p prosentilla, eli verollinen myyntihinta on todellakin p prosenttia suurempi kuin veroton hinta x .

283. Pelkkä ”40 prosentin alennus” tarkoittaa, että hinnat on kerrottu prosenttikertoimella $1 - \frac{40}{100} = 0,6$. Jos kyseessä on negatiivinen alennus, prosenttikerroin on $1 - \frac{-40}{100} = 1 + \frac{40}{100} = 1,4$, eli hintoja on kasvatettu.

284. Luolassa asuu 33 aikuista.

285.

- a) $x = \pm 2$
- b) $x = 3$
- c) $x = -1$
- d) $x = \pm\sqrt{3}$
- e) $x = -5$
- f) $x = 3\sqrt[3]{3}$
- g) $x = \sqrt[5]{10}$
- h) $x = \pm 1$

286.

- a) $x = \pm\sqrt{5}$
- b) $x = 1$
- c) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
- d) $x = \pm 2$
- e) ei ratkaisua

287.

- a) $x = \pm \sqrt[4]{8}$
- b) $x = -\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$
- c) $x = \pm \sqrt{14}$
- d) $x = \pm \sqrt[4]{\frac{870}{151}}$

288.

- a) $x = \frac{23}{79}$
- b) $x = -\frac{\sqrt[3]{\pi}}{3}$
- c) Ei ratkaisua

289. $t = \frac{20}{7}$

290. 5,46 %

291. 7,1 %

292. Pienen kappan sivun pituus 12,6 cm, ison kappan 17,1 cm

293. 1,5 %

294. Noin vuonna 2020

295. 5,56 μm

296.

- a) Kuusi kertaa
- b) Jokaisen kuntoluokan pudotuksen jälkeen pyöristämällä kuolemia voikin olla kuuden sijaan seitsemän ennen kuin kunto on pudonnut alle 50 prosentin.

297.

- a) $10\sqrt[3]{5} \approx 17 \text{ m}$
- b) $961\,500\sqrt[3]{25} \approx 2\,800\,000 \text{ kg}$
- c) $2\,115\,300\sqrt[3]{25} \approx 6\,200\,000 \text{ kg}$

298. $k^{\frac{5}{3}} = 1/32$

299.

- a) 625 m^2
- b) 796 m^2

300.

- a) Santeri-soturille tasolla 3, Valtteri-velholle tasolla 4
- b) Santeri-soturille tasolla 5, Valtteri-velholle tasolla 5
- c) Santeri-soturille tasolla 7, Valtteri-velholle tasolla 6

301. 84 cm ja 47 cm

302. Näyttö on suorakulmion muotoinen, 1 920 pikseliä leveä ja 1 080 pikseliä korkea. Kuvasuhteeksi saadaan $16 : 9$ supistamalla pituuksien osamäärä. Näytön lävistäjän pituus on 50 tuumaa eli 127 senttimetriä. Lävistäjä toimii hypotenuusana suorakulmaiselle kolmiolle, jonka kateettien suhde on mainittu $16 : 9$. Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö $127^2 = (16a)^2 + (9a)^2$, missä a on näytön leveyden ja korkeuden pienin yhteinen tekijä (senttimetreissä). Yhtälö saadaan potenssit laskemalla muotoon $16\,129 = 256a^2 + 81a^2$, mistä edelleen $337a^2 = 16\,129$. Potenssiyhtälön positiivisena ratkaisuna (koska pituudet ovat positiivisia) saadaan $a = \sqrt{\frac{16\,129}{337}}$ cm.

Näytön kokonaispinta-ala on tällöin

$16a \cdot 9a = 144a^2 = 144 \cdot \left(\sqrt{\frac{16\,129}{337}} \text{ cm}\right)^2 = 144 \cdot \frac{16\,129}{337} \text{ cm}^2 \approx 6\,891,92 \text{ cm}^2$. Näytöllä on pikseleitä kokonaisuudessaan $1\,920 \cdot 1\,080 = 2\,073\,600$ (eli reilut kaksi megapikseliä). Neliösenttimetriä kohden pikseleitä on näytöllä $2\,073\,600 / 6\,891,92 \approx 301$. (Pikseli on perustavanlaatuinen kuva-alkio, ja niitä ei voi hajottaa osiin. Vain luonnollinen luku kelpaa vastaukseksi.)

303.

- a) $x = 3$
- b) $y = 4$ ($y \neq 0$)
- c) $z = \frac{7}{2}$ ($z \neq 0$)
- d) $t = \frac{3}{7}$

304.

- a) $\frac{32}{5}$
- b) 10

305.

- a) Suoraan verrannollisia
- b) Eivät ole kumpaakaan, sillä niiden tulo tai osamäärä ei ole vakio.
- c) Kääntäen verrannollisia

d) Kääntäen verrannollisia

306.

a) Suoraan verrannolliset

b) Kääntäen verrannolliset

c) Kääntäen verrannolliset

d) Suoraan verrannolliset

e) Eivät ole kumpaakaan.

307.

a) $\frac{x}{m} = c$ tai $x = km$

b) $xt = k$ tai $x = \frac{k}{t}$

c) $\frac{Fr^2}{m_1m_2} = k$ tai $F = k\frac{m_1m_2}{r^2}$

308. Hiukset kasvavat vuodessa noin 18 senttimetriä.

309. Viiden minuutin tarkkuudella 20 minuuttia

310. 30 min

311. Munia riittäisi viiteen, sokeria kuuteen ja jauhoja seitsemään kokonaiseen kakkuun. Kaikki aineksia tarvitaan, joten Timo voi leipoa vain viisi kakkua.

312.

a) 2 dl maitoa, 0,8 dl sokeria, 6 dl vehnäjauhoja

b) 24 pullaa

313. 40 tuntia

314. Puoli neljältä

315. Noin 643 minuuttia eli 10 h 43 min

316. Seitsemällä opiskelijalla työ valmistuu noin 14 tunnissa. Opiskelijoita tarvitaan 12, jolloin työ valmistuu 8 tunnissa ja 20 minuutissa.

317.

a) Noin 46 joulea

b) kilogramma

318.

- a) vähenee 23 % (nopeammalla veneellä aika on noin 58 min)
- b) vähenee 31 % (aikaa kuluu noin 52 min)

319.

- a) Kasvoi 45 %.
- b) Laski noin 6 %.

320. Lankakerä sisältää 125 000 km lankaa, joten kokonaisia kierroksia maapallon ympäri (isoympyrää pitkin) saadaan kolme.

321.

- a) 36
- b) 4

322.

- a) Yhdeksän neliökilometriä
- b) Viiden päivän päästä

323. Sadasta vieraasta 20 ei syönyt karkkeja.

324.

- a) Kolme tuntia
- b) 2 500 paria kenkiä

325. $\sqrt{\frac{100}{6}}^3 \approx 68$

326. Noin 10 sekuntia

327. Funktion f nollakohdat ovat x -koordinaatiston kohdissa -1 , 0 ja 1 . Funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

328. Funktion f nollakohdat ovat suunnilleen x :n pisteissä: $-1,5$, $-0,5$, $0,5$ ja $1,5$. Funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

329. $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(x) = 3$ kun $x = -2$ tai $x = 2$, ja $f(x) = 0$, kun $x = -1$ tai $x = 1$

331.

- a) $f(-2) = 3$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ ja $f(2) = 7$

- b) $f(-2) = 12$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 0$, $f(1)$ ja $f(2) = 12$
 c) $f(-2) = 6$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 5$ ja $f(2) = 14$

332. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$ eli reaalityyvat pois lukien rationaaliluku $\frac{5}{2}$

333. $x = 1$

334.

- a) pisteessä (0,4)
 b) pisteessä (3, - 2)
 c) pisteessä (-2,8)
 d) Funktiolla on nollakohta t :n arvolla 2, eli pisteessä (2,0).

335.

- a) 20 euroa ($f(0) = 20$)
 b) 7,5 euroa
 c) Kuuden viikon jälkeen. (Kun $f(x) = 5$, $x = 6$)
 d) Kahdeksan viikon jälkeen. (Kun $f(x) = 0$, $x = 8$)

336. $x = \frac{9}{8}$

337.

- a) $x \geq -6$
 b) $x > -1$ $x \geq \frac{1}{2}$

338.

- i) $\mathbb{R}$
 b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 c) $\mathbb{R}_+$ (tai $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tai $[0, \infty[$)
 d) $\mathbb{R}$

339. $p(v) = 7 - \frac{3v}{4}$. Kokelas voi antaa korkeintaan 9 väärää vastausta menemättä nolliille.

340. $A(x) = x(x + 2) = x^2 + 2x$

- a) 0 m
 b) 35 m

c) 440 m

d) $x \geq 0$

341.

a) $s = -\frac{3}{19}$

b) $s = \frac{1}{38}$

Jos $s = 1$, niin $f(6) = 3$ ja $g(3) = -\frac{11}{2}$

342.

a) $-2x - 6$

b) $-2x + 3$

c) $-6x$

d) $-6x$

343.

a) $\frac{11}{2}$

b) $\frac{11}{2}$

c) $\frac{11}{2}$

Vihje: Voit supistaa. $z(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2}x}{x} - x + 5$

$$= \frac{x(x + \frac{1}{2})}{x} - x + 5$$

$$= \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$$

344. $a = 68$

345.

a) $\frac{11}{3}$

b) ei määritelty

c) ei määritelty

d) $\frac{-1}{2}$

346.

a) $f(a) > f(a + 2)$

b) $f(-a) < f(a)$

347.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = -x$

d) $f(x) = |x|$

348.

a) Esimerkiksi funktio f , $f(x) = x$ (ns. *identiteettifunktio*) toteuttaa molemmat, koska jokainen luku on yhtä suuri itsensä kanssa.

b) Sopivia funktion lausekkeita (muuttajana x) ovat esimerkiksi $\frac{1}{x}$ tai $1 - x$.

349.

a) $x = 1$

b) kaikilla $x \in \mathbb{R}$

c) ei ratkaisuja

d) $x = -1$

350.

a) 1

b) 0

351.

a) $\frac{4}{25}$

b) 1

c) $-\frac{7}{5}$

d) $2x/5 - 3$

e) $2x/5 - 3/5$

352.

a) 1

b) 5

c) -1

d) -2

353.

- a) $-\frac{1}{8}$
- b) -32
- c) -32
- d) $-\frac{1}{8}$

354.

- a) 1
- b) $\frac{1}{8}$
- c) -27

355.

- a) Ei saa.
- b) Saa.
- c) Saa.
- d) Saa.
- e) Ei saa.

356. Eivät saa.

357.

- a) 3
- b) 2
- c) 7
- d) 5
- e) 1
- f) 4
- g) 6

358.

- a) 2
- b) 5
- c) 11

359. Ratkaisu on kokonaislukujen 3 ja 4 välissä.

360. Noin 4,5 sekunnin päästä

361.

a) $\frac{1}{2}x^2$

b) 50

c) 12

362. Kolmion pinta-ala on $25\sqrt{3} \approx 43,3$.

363.

a) Noin 25 minuuttia

b) Noin 6 tuntia ja 40 minuuttia

c) Noin 14 sekuntia

364. 16-kertaiseksi

365. Säteilyn intensiteetti Maan pinnalla vähenee noin 31 prosenttia.

366.

a) 1

b) 64

c) 2

367.

a) 1

b) $\frac{1}{256}$

c) $\frac{1}{2}$

368.

a) 3

b) -2

c) Ei ratkaisua.

369.

a) 8

b) 1 024

c) 1 048 576

- 370.** Seitsemän taitoksen jälkeen, jolloin kerroksia on 2 187
- 371.** Noin 1 300
- 372.** Ajanhetkellä $t = 3$
- 373.** muutetaan kerroin: $f(t) = 5 \cdot 2^t$
- 374.** $f(x) = 12 \cdot 4^x$
- 375.** Ratkaisu on lukujen 2 ja 3 välissä.
- 376.** Ei voi, sillä eksponenttifunktiot ovat joko kasvavia tai väheneviä.
- 377.** Kahdeksan tunnin kuluttua
- 378.** Funktio on $f(t) = 200 \cdot 1,5^t$, ja kymmenen vuoden kuluttua kokoelmassa on yhteensä noin 11 000 levyä.
- 379.** Ajanhetkellä $t = 8$
- 380.** Vähintään 4 kesää. (Voidaan muodostaa perunasadon määrää kuvaava lauseke $S(n) = 0,4 \cdot 6^n \cdot 10$, missä n kuvaa viljelyvuosien määrää. Halutaan selvittää, millä n :n arvolla $S(n) \geq 1\,000$. Koska $6 \geq 1$, perunasatoa kuvaava funktio on kasvava – riittää siis ratkaista n yhtälöstä $S(n) = 1\,000$. Saadaan $6^n = 250$ ja kokeilemalla nähdään, että $6^3 = 216$ ja $6^4 = 1\,296$. Kun $n \geq 4$, $S(n) \geq 1\,000$.)
- 381.** Esimerkiksi kohdassa $x = \frac{1}{2}$
- 382.** 17 päivän kuluttua
- 383.** $\frac{1}{6^{10}} \approx 0,000000017$
- 384.** Kääretorttua on jäljellä noin yksi kilogramma.
- 385.** Kohdassa $x = 0$
- 386.** Viisi merkkiä riittää. Tällöin erilaisia yhdistelmiä on 20 511 149.
- 387.** Luvulla on suuruus, ja niitä esitetään numeroiden eli numeromerkkien avulla. Kymmenjärjestelmässä käytetyt numeromerkit ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ja 9. (Huomaa myös vakiintuneet nimitykset kuten postinumero, puhelinnumero, ...)
- 388.** Kahden luvun a ja b vähennyslasku (erotus) $a - b$ määritellään summana $a + (-b)$, eli a :han on lisätty b :n vastaluku. Jakolasku (osamäärä) $\frac{a}{b}$ määritellään tulona $a \cdot \frac{1}{b}$, eli a on kerrottu b :n käänteisluvulla.

389. Kaikilla luvuilla x pätee $0 \cdot x = 0$, eli mikä tahansa luku kerrottuna nollalla on aina nolla. Kuitenkin, jos nollalla voisi jakaa (eli sille olisi määritelty käänteisluku $0^{-1} = \frac{1}{0}$), olisi voimassa $0 \cdot \frac{1}{0} = 1$, mikä ei kuitenkaan samanaikaisesti voi pitää paikkansa sen kanssa, että, kun mikä tahansa luku kerrotaan nollalla, saadaan tuloksi nolla.

390. Laventaminen muuttaa lausekkeen (tavallisesti rationaaliluvun) eri muotoon, mutta pitää sen suuruuden ennallaan. Kertominen on laskutoimitus, joka voi muuttaa luvun suuruutta. Esimerkiksi $\frac{3}{4}$ lavennettuna viidellä on $\frac{15}{20}$ mutta sama luku kerrottuna viidellä on $\frac{15}{4}$.

391. Alkuluku on luonnollinen luku, jota ei voi esittää kahden pienemmän luonnollisen tulona. Pienin alkuluku on 2.

392. Alkutekijäkehitemä on luvun esitys alkulukujen tulona, esimerkiksi $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ tai potenssien avulla kirjoitettuna $45 = 3^2 \cdot 5$.

393. Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla reaalityyppisillä x , eli ei ole olemassa reaalityypistä, joka kerrottuna itsellään tuottaisi negatiivisen luvun.

394. Kyseessä *ei* ole vaikea tapa ilmaista sana positiivinen. Reaalityypit voivat olla joko negatiivisia, positiivisia tai nolla (joka ei ole kumpaakaan), joten epänegatiivinen-ilmaisu sulkee pois ainoastaan negatiivisen – luku voi olla nolla tai positiivinen. Ilmaisun törmäys usein määrittelyehtojen yhteydessä. Esimerkiksi parillisia juuria voi ottaa reaalityypit käyttäessä vain epänegatiivisista luvuista.

395. Koska käyttämällä potenssisääntöjä saadaan: $x^0 = x^{1-1} = \frac{x^1}{x^1} = \frac{x}{x} = 1$, mikä pätee kaikille luvuille paitsi $x = 0$. Tämä on ainoa tapa määrittellä nollan potenssi niin, että se ei olisi ristiriidassa muiden potenssin ominaisuuksien (potenssisääntöjen) kanssa. (Toinen variantti: $x = x^1 = x^{0+1} = x^0 \cdot x^1 = x^0 \cdot x$, mistä tulos seuraa.)

396. Johdannais suure on suure, joka voidaan ilmaista (SI-järjestelmän) perussuureiden avulla niiden tuloina tai osamäärinä.

397. Jälkimmäisessä esityksessä on kolme merkitsevää numeroa – ensimmäisessä vain kaksi. Jos kyseessä on mittaustulos, jälkimmäistä lukua voidaan pitää tarkempaan.

398. Kyseessä on rationaaliluku, sillä kaikkien rationaalilukujen (ja ainoastaan rationaalilukujen) desimaaliesitys sisältää äärettömästi toistuvaan jaksoon.

399. Positiivisilla reaalityypisillä x pätee $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Tämä mahdollistaa potenssisääntöjen käyttämisen juurilausekkeille.

400. Muuttujan arvoa (tai muuttujien arvoja), jolla yhtälö on tosi

401. Kyse on absoluuttisista, ei suhteellisista muutoksista. Jos lisätään jokin luku ja sitten vähennetään sama luku, laskutoimitukset kumoavat aina toisensa. Sen sijaan jos mielivaltaista lukua kasvatetaan suhteellisella osuudella, kasvun suuruus riippuu alkuperäisestä luvusta. Kun kasvatetusta luvusta otetaan sama suhteellinen osa pois, kyseinen osa onkin nyt suurempi, joten päädytään alkuperäistä pienempään lukuun.

402. Määrittelyjoukko on, kuten nimikin sanoo, joukko. Se siis esittää kaikki mahdolliset luvut (tai muunlaiset syötteet), jotka funktion muuttuja voi saada arvokseen, niin että funktion arvon laskeminen on mielekästä. Määrittelyehto kertoo määrittelyjoukon epäsuorasti antamalla jonkinlaisen ehdon muuttujalle, yleensä epäyhtälön muodossa. Esimerkiksi, jos määrittelyjoukko olisi $\mathbb{R}_+$ (positiiviset reaalityluvut), niin sitä vastaava määrittelyehto olisi $x > 0$, missä x on kyseisen funktion muuttuja.

403. Maalijoukko voi olla laajempi kuin arvojoukko, mutta sisältää aina arvojoukon kokonaisuudessaan. Arvojoukko on niiden alkioiden (yleensä lukujen) joukko, jotka funktio voi arvokseen saada. Maalijoukko koostuu alkioista, jotka funktio *saattaa* saada arvokseen. Maalijoukkoa ei voi päätellä funktion mahdollisesta lausekkeesta, mutta arvojoukon voi. (Maalijoukon tärkeys ei tule kunnolla esille lukion matematiikassa – ei huolta, vaikkei sen merkitys kunnolla aukeaisikaan. Arvojoukko sen sijaan tulee ymmärtää, ja sitä käsitellään lisää tulevilla kursseilla.)

404. a) $21 \cdot 20 - 18 + 19$

405. e) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

406. d) $x^2 - 2x$

407. e) $4(p + 6r)$

408. b) $(b - 2a)(c + 3)$

409. b) 9

410. a) 0,7

411. d) $\frac{59}{8}$

412. c) Ei ehdottomasti kumpikaan edellisistä – riippuu tilanteesta. (Huomaa, että luvut voivat olla myös negatiivisia.)

413. f) 2^{2^2}
414. e) $\frac{9}{4}$
415. c) 12
416. b) $3,4 \cdot 10^{-10}$ m (standardimuodossa kymmenen potenssin kertoimena on luku itseisarvoltaan nollan ja kymmenen väliltä)
417. e) viisi
418. c) kolme
419. c) $-78,24$ (tuhannesosia pienempiä desimaaleja ei huomioida lainkaan; pyöristys nollaan päin)
420. d) 48 000
421. d) $2\,000\text{ cm}^3$
422. d) 2 kg
423. b) 17
424. b) $2\sqrt{2}$
425. c) Ei koskaan tosi
426. b) Joskus tosi
427. a) Aina tosi
428. b) Aina ja millä tahansa luvulla
429. a) Aina muttei nollalla (nollalla kertominen kadottaa informaatiota, eikä alkuperäistä yhtälöä enää saa ratkaistua)
430. e) Muuttuja y kasvaa myös – ja samassa suhteessa.
431. b) x ja z ovat kääntäen verrannolliset.
432. e) ei mikään mainituista vaihtoehtoista
433. a) ei yhtään
434. c) reaalityökalujen osittelu
435. c) 0,00046

436. b) $0,97a$

437. c) ”Kuinka monta prosenttia vanha hinta on uutta hintaa pienempi?”

438. d) $\frac{t_1 - t_2}{t_1}$

439. e) $(1 + \frac{p}{100})^n K$

440. e) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

441. d) $y \geq 0$

442. e) $\mathbb{R}_+$ (tilavuus ei voi olla negatiivinen)

443. c) $7\frac{2}{3}$

444. e) Funktio ei saa irrationaaliarvoja.

445. d) Funktio ei saa irrationaaliarvoja.

446.

a) Tosi

b) Tosi

c) Epätosi

d) Epätosi

447.

a) Tosi

b) Tosi

c) Tosi

d) Tosi

448.

a) Epätosi

b) Tosi

c) Epätosi

d) Tosi

449.

a) Tosi

b) Epätosi

- c) Epätosi
- d) Epätosi

450.

- a) Epätosi
- b) Epätosi
- c) Tosi
- d) Tosi

451.

- a) Tosi
- b) Tosi
- c) Tosi
- d) Tosi

452.

- a) Tosi
- b) Epätosi
- c) Tosi

453.

- a) Tosi
- b) Epätosi
- c) Epätosi

454.

- a) 48
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 6
- d) -9

455. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

456. $\frac{1}{12}$

457.

- a) $\frac{47}{50}$

- b) $-\frac{11}{3}$
- c) $\frac{3a}{2b}$
- d) $\frac{e}{b} - b$

458.

- a) 0,46
- b) 0,636363 ...

459.

- a) $\frac{3\ 651}{50}$
- b) $\frac{171\ 217}{9\ 999}$
- c) $\frac{64}{75}$
- d) $-\frac{3\ 526}{495}$

460.

- a) $\frac{11}{4}$
- b) $\frac{4}{13}$
- c) $-\frac{79}{11}$
- d) $-\frac{4}{1}$

461.

- a) ab^2
- b) $3a^2b$
- c) $a^6b^4c^2$
- d) $b^2 - c^2$
- e) 49

462.

- a) 75 min
- b) 155 cm
- c) 10 m

463.

- a) $2,00 \cdot 10^1$
- b) $3,13 \cdot 10^{-5}$
- c) $8,00 \cdot 10^{10}$

464.

- a) $6\sqrt{3}$
- b) -4
- c) $\sqrt{b}$
- d) $\sqrt{abc}$

465.

- a) 5
- b) 7
- c) 5

466.

- a) $3\sqrt{2}$
- b) $\sqrt{3}$
- c) 1
- d) a
- e) a^3

467.

- a) $a^{-\frac{5}{7}}$
- b) $2^{\frac{1}{4}}$

468.

- a) 7
- b) $\frac{29}{7}$
- c) $x = 8$
- d) $x = 6$
- e) $f = -2$
- f) Ei ratkaisua
- g) Kaikki muuttujan x arvot
- h) $\frac{20}{9}$

469. Yhtälöstä $x + (x + 32) = 117$ vastauksena 42,5 senttimetriä

470. $r = \sqrt{\pi}$

471.

- a) 200 % suurempi
- b) 80 % pienempi
- c) 75 %

472. 17 %

473. Jos verotonta hintaa merkataan x :llä, saadaan tuoteen verolliselle hinnalle yhtälö $x + 0,13x = 50,00$. Tästä saadaan $x = 44,2478$ €, joten vero on $0,13x \approx 5,75$ €

474. 6,4 metriä; 4. pompun jälkeen

475. 6 tunnin kuluttua

476.

- a) 5 300
- b) 28 000

477. Särmän pituus on 4.

478. 1,09 ja $-1,09$

479. 11

480. 21

481.

- a) $x = -6$
- b) $x = -\frac{5}{9}(x \neq -\frac{1}{2})$

482. 3,5 m

483.

- a) 4
- b) $3\sqrt[3]{2} + 12$
- c) Ei määritelty, koska nolalla jakaminen ei ole määritelty
- d) $\frac{-9}{2}$

484. $\mathbb{R}_+$ eli positiivisten reaalilukujen joukko. (Nolla ei kuulu kyseiseen määrittelyjoukkoon nyt siksi, että sillä tulisi jaettua.)

485. Kun rajoituksia on useita, määrittelyehdoksi muodostuu kaikkein rajoittavin
 $0 \leq x < 2$.

486. x :n arvolla 1

487.

a) $\frac{7}{2}$

b) $a + \frac{3}{a}$

c) $2a + \frac{3}{2}a$

d) $2x^2 + \frac{6}{x^2}$

e) $\frac{x^2+8}{x+1}$

488.

a) $-\frac{1}{2}$

b) Ei määritelty, koska nolllalla ei voi jakaa

c) 8

d) -4

e) $-\frac{1}{2}$

489. $g(x) = 0$, kun $x = -2\frac{3}{4}$ tai $x = \frac{3}{4}$; -3 ; $g(x) = -2$, kun $x = -2$ tai $x = 0$;
 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\frac{3}{4}$

490.

a) 157 360

b) 10

c) Saa!

491.

a) 371 g

b) 862 g

492.

a) Noin kahdeksan kilometrin päässä

b) Noin seitsemänkymmenen metrin päässä

493. 73 200 (pyöristämättä 73 237,5)

494. Kohdassa $x = 0$

495.

- a) Määritellään relaatio esimerkiksi ” x on y :n äiti” siten, että x ja y ovat mielivaltaisia ihmisiä. Kyseessä ei ole tällöin funktio monestakin syystä (yksi riittää): 1) muuttuja x voidaan yhdistää useaan arvoon (eli yhdellä äidillä voi olla monta lasta) – funktion arvojen sen sijaan pitäisi olla yksikäsitteisiä 2) jokainen funktion määrittelyjoukon alkio pitää voida liittää funktion arvoon – sen sijaan kaikki ihmiset eivät ole äitejä.
- b) Määrittelyjoukoksi sopii $0,1$. Tällöin $f(0) = 1$ ja toisaalta $f(1) = 0$, eli nolla ja yksi kuvautuvat toisikseen.

496.

- a) Luvun 341 pystyy kirjoittamaan kahden pienemmän luonnollisen luvun tulona, $341 = 11 \cdot 31$, joten kyseessä ei ole alkuluku. (Kyseinen alkulukukehitelmä selviää kokeilemalla rohkeasti jakaa 341 eri luvuilla.)
- b) Esim. $1 = 2$ tai $x = x + 1$
- c) Vastaukseksi käy mikä tahansa irrationaaliluku käy vastaukseksi, esim. π tai $\sqrt{2}$.
- d) Vastaukseksi käy jokin seuraavista:
- i) Nollalla jakaminen (esim. $3/0$ tai $0/0$) – nollalla ei ole olemassa käänteislukua. Käänteisluvun määritelmän perusteella olisi $0 \cdot 0^{-1} = 1$, mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että mikä tahansa luku kerrottuna nollalla pitäisi olla nolla.
- ii) Nollan korottaminen nollanteen potenssiin (esim. 0^0) – palautuu nollalla jakamisen ongelmaan, koska potenssikäytön mukaan pitäisi olla $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$.
- iii) Parillisen juuren ottaminen negatiivisesta luvusta – ei ole olemassa reaalilukua, joka kerrottuna itsellään parillista määrää kertoja (ts. korotettuna parilliseen potenssiin) tuottaisi tulona negatiivisen luvun. Nollan kokonaislukupotenssit ovat nollia, ja sekä negatiivinen että positiivinen luku kerrottuna itsellään tuottavat positiivisen luvun, ei milloinkaan negatiivista.
- iv) Nollan korottaminen negatiiviseen murtopotenssiin – aiheuttaa ongelmia, koska negatiivisesta eksponentista seuraa nollan potenssin siirtyminen nimittäjään, joka taas on ongelmallista nollalla jakamisen vuoksi.
- e) Kaksi ratkaisua

497.

- a) $9 \sqrt[12]{3}$

b) -2

c) 0

498.

a) $x = \frac{5}{3}$

b) $\frac{7}{18}$

499.

a) 19%

b) 20%

500.

a) Tarjouspaketti on kannattavampi kuin yksittäisten lounaiden osto, kun lounaita on kuukaudessa vähintään 22.

b) 16%

501. Maidosta riittää 2,5-kertaiseen annokseen (50 pullaa), eli myös sokeria tarvitaan 2,5-kertainen määrä: $2 \cdot 2,5 \text{ dl} = 5 \text{ dl}$. Tiheys $1,59 \text{ g cm}^{-3}$ ilmaistuna desilitrojen avulla on 159 g/dl . Tarvittava sokerin määrä on siis $5 \text{ dl} \cdot 159 \text{ g/dl} = 795 \text{ g}$. Kilogramman pakkauksesta jää siis jäljelle $1\,000 \text{ g} - 795 \text{ g} = 205 \text{ g}$.

502.

a) $x = 35$

b) Nollakohdat ovat $x = -0,5$ ja $x = 2$.

c) Funktio saa arvon 3, kun $x = -1$ tai $x = 2,5$.

d) Funktion pienin arvo on kuvaajan perusteella noin $-3,125$.

503. 81π

504. Noin 11 ja puoli minuuttia

505.

a) Esim. $x = 1$, joka on tosi vain, kun $x = 1$

b) Vastaukseksi käy mikä tahansa negatiivinen kokonaisluku, esimerkiksi -42 , ja nolla. (Opettaja kertokoon, käyttääkö hän nollaa luonnollisena lukuna vai ei.)

c) Vastaukseksi käyvät kaikki reaaliset ei-irrationaaliluvut, esimerkiksi -3 , 0 tai $\frac{99}{98}$. (Ei siis π , $\sqrt{2}$ jne.)

d) 61 on alkuluku, sillä se ei ole jaollinen millään sitä pienemmällä luonnollisella luvulla. (Tai: sitä ei voi kirjoittaa kahden luonnollisen luvun tulona, joista kumpikaan ei ole 1 tai 61.)

e) Koska (esimerkiksi) $2 - 3 = -1 \neq 1 = 3 - 2$, vähennyslasku ei ole vaihdannainen.

506.

a) $a^2 + 5$

b) x

c) -1

d) $\frac{1}{8a^2}$

507.

a) $\frac{2 \cdot 7,5 + 10}{3} \approx 8$ ($\frac{7,5 + 10}{2}$ on väärin!)

b)

FI1	FI2
8	7
9	6
10	5

c) 8, 9 tai 10

508.

a) $-5\frac{2}{9}$

b) $z = 1 + \sqrt{a}$, ja ehdon $a \geq 0$ täytyy päteä, koska reaalityyppisiä lukuja käytettäessä negatiivisesta luvusta ei voi ottaa neliöjuurta.

509. Noin 18 %

510. 306 metriä

511.

a) noin 50 700 asukasta vuodessa

b) 2,78 prosenttia

c) $1,52 \cdot 10^6 \cdot 1,0278^{n-2000}$

512. 2,3 senttimetriä

513.

a) $t = 2$

b) $t = \pm \frac{3}{2}$

514.

a) $124 = 2^2 \cdot 31$

b) Esimerkiksi $(8/4)/2 = 2/2 = 1$, mutta toisaalta $8/(4/2) = 8/2 = 4$, joten jakolasku ei ole liitännäinen. (Vastauksesta täytyy selvästi käydä ilmi, että opiskelija ymmärtää, mitä laskutoimituksen liitännäisyys tarkoittaa.)

c) Möllejä on 29 enemmän kuin tirboja.

515.

a) x

b) $x^2 + 2x + 1$

c) a

516.

a) Kaksikymmentä aittaa

b) 90 km/h

517.

a) 10 kertaa

b) Alennusprosentti voidaan laskea kaavalla $1 - \frac{46}{5n}$, missä n on parturikäyntien määrä vuodessa.

518.

a) $a = 0$; x :n suhteen ratkaistuna yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua.

b) Ei ratkaisua, koska nolalla jakamisen välttämiseksi t ei voi saada arvoa 1.

519.

a) 1,02 kg

b) 10,2 %

520. 330 ppb

521. $a \mid b$ tarkoittaa, että on olemassa kokonaisluku k siten, että $b = a \cdot k$. $a \mid c$ taas tarkoittaa, että on olemassa kokonaisluku l siten, että $c = a \cdot l$. Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $b + c = a \cdot k + a \cdot l$, josta osittelulla $b + c = a \cdot (k + l)$. Koska $k + l$ on myös kokonaisluku, jaollisuuden määritelmän mukaan a jakaa summan $b + c$, eli $a \mid b + c$.

522. Funktio on määritelty, kun lausekkeen nimittäjä on erisuuri kuin nolla. Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla nimittäjään tulee nolla: $4x^3 - 2 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Funktion määrittelyjoukko on siis $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\}$ eli reaalilukujen joukko, josta on poistettu $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Arvojoukon selvittäminen aloitetaan ratkaisemalla x yhtälöstä $\frac{3}{4x^3-2} = a$, missä a esittää mahdollisia arvoja, joita funktio voi saada: $\frac{3}{4x^3-2} = a \leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3+a}{4}}$. Lauseke on hyvin määritelty, kun nolllalla ei jaeta $-a$ ei siis voi olla nolla. (Kuutiojuuren sisällä voi olla mikä tahansa reaaliluku, joten se ei rajoita mitään.) Funktion arvojoukko koostuu siis kaikista nolllasta poikkeavista reaaliluvuista: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

523.

- a) Esimerkiksi $x = x$, $1 = 1$, $\sqrt{16} = 4$, ...
- b) $\frac{1}{7}$
- c) Kaikki reaaliluvut ovat joko negatiivisia, positiivisia tai nolla. Nollan potenssit ovat nolllia, ja mikä tahansa positiivinen tai negatiivinen luku korotettuna parilliseen potenssiin tuottaa positiivisen luvun. Koska mistään reaaliluvusta ei saada parilliseen potenssiin korottomalla negatiivista, ei myöskään parillinen juuri ole määritelty negatiivisille luvuille.
- d) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- e) $1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$
- f) $81 = 3^4$ (tai $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$)

524.

- a) $\frac{2}{7}$
- b) $t = \frac{2}{a-2}, t \neq 0, a \neq 2$

525.

- a) -2
- b) $10^{1\,001}$
- c) $4x$

526. 228 miljardia tonnia ($2,28 \cdot 10^{14}$ kg)

527.

- a) 100 %
- b) 0,96 %

528. Kuukausikortin hinnaksi tulee 84,00 euroa. Kuukausikortti on edullisempi, jos käy vähintään 13 kertaa viikossa (12 käynnillä hinta on sama.)

529.

- a) noin 16 kertaa suurempi
- b) noin 256 kertaa arvokkaampi

530.

- a) 1,00 g
- b) Seitsemän päivän kuluttua

531. Merkitään tuotteen alkuperäistä hintaa (esim.) a :lla. (Hinta on lisäksi erisuuri kuin nolla.) Ratkaistava yhtälö on prosentteina $(1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100})a = (1 - \frac{15}{100})a$ tai joidenkin mielestä helpommassa desimaalimuodossa (sijoituksella $p/100 = x$) $(1 - x)(1 + x)a = (1 - \frac{15}{100})a$. Tästä a katoaa jakolaskulla, ja oikean puolen vähennyslasku voidaan sieventää: $(1 - x)(1 + x) = \frac{85}{100}$. Yhtälön vasemman puolen tulon voi kirjoittaa uudelleen avaamalla sulut osittelulain avulla, jolloin päädytään potenssiyhtälöön $1 - x^2 = \frac{85}{100}$. Tästä edelleen $x^2 = \frac{15}{100}$, josta $x = \pm\sqrt{\frac{15}{100}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{10}$. Aiemmin tehdyn sijoituksen mukaan $\frac{p}{100} = x$, joten p voidaan ratkaista yhtälöstä $\frac{p}{100} = \pm\frac{\sqrt{15}}{10}$ kertomalla se puolittain nimittäjällä 100. Saadun yhtälön $p = \pm 10\sqrt{15}$ kahdesta ratkaisusta hyväksytään vain positiivinen vastaus, koska prosentuaalisen muutoksen ”suunta” on jo otettu huomioon tehtävänannossa yhteen- ja vähennyslaskujen avulla. Lopullinen vastaus on siis $p = 10\sqrt{15} \approx 38,73$.

532.

- a) $\frac{3}{2}$
- b) $x = -3$

533.

$$x = \sqrt[3]{12} \approx 2,289$$

534. Kuohuviiniä on lisättävä 2,0 litraa.

535. $x = 4$

536. $x + y$

537. $-\frac{1}{12}$

538. $x = 0$ tai $x = 2$

539. $\frac{13}{6}$

540. $-\frac{1}{4}$

541. $x = \frac{29}{11}$

542. $2 - \sqrt{2}$

543. $x = -4$

544. $0,8 \%$

545. $4ab$

546. $2\sqrt{2}$

547. $(5 - \sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2}$

548. $x = 7$

549. $\frac{2a^2}{9}$

550. $\frac{2}{x}$

551. $x = \frac{3}{2}$

A

absoluuttinen muutos, 164
alkuluku, 35
alkutekijä, 35
aritmetiikka, 25
arvo, 39
arvojoukko, 200, 205
aste, 215
aste (potenssiyhtälö), 182
asteluku, 215

B

bitti, 102

D

desimaalierotin, 16, 83
desimaaliosa, 83
diskreetti, 102

E

eksponentiaalinen malli, 225
eksponentti, 64
eksponenttifunktio, 223
eksponenttiyhtälö, 224
erotusprosentti, 165

F

funktio, 200

G

googol, 70

I

identtisesti tosi, 140
imaginääriyksikkö, 82
irrationaaliluku, 23

J

jakso, 84
jaksollinen desimaaliluku, 86
jaollisuus, 34
johdannaissuure, 97

K

käänteisluku, 55
kantaluksi, 64
kerrannaisyksikkö, 100
kokonaisluvut, 22
kokonaisosa, 83
kompleksiluvut, 24
korkoa korolle, 188
kuutio, 66
kuutiojuuri, 120
kuvaus, 200

L

laskutoimitus, 18
lauseke, 39
laventaminen, 51
luku, 15
lukusuora, 22
luonnolliset luvut, 20

M

maalijoukko, 200
määrittelyjoukko, 200, 204
merkitsevät numerot, 90
Mersennen alkuluku, 78
murtoluku, 50
murtopotenssi, 129
muutosprosentti, 164
muuttuja, 17, 141

N

n :s juuri, 121
neliö, 66
neliöjuuri, 119
nimittäjä, 50
nollakohta, 202
numero, 15

O

operaatio, 18
osoittaja, 50

P

päättävä desimaaliluku, 85
parillinen luku, 35
pariton luku, 35
peilaus, 21
perusarvo, 160
perussuure, 96
pilkun siirtäminen, 99
potenssiyhtälö, 182
pro centum, 157
pro mille, 157
promille, 157
prosentti, 157
prosenttikerroin, 162
prosenttiyksikkö, 168

R

rationaaliluku, 22
reaaliluku, 23
refleksiivisyys, 17
relaatio, 17

S

samannimisyys, 51
scientific notation, 99
sekamurtoluku, 50
sieventäminen, 41
sijoitus, 39
skalaarisuure, 94
suhteellinen muutos, 164
sulkeiden avaaminen, 42
supistaminen, 51
suure, 94
symmetrisyys, 17

T

täydellinen luku, 38
tavu, 102
tekijä, 34
termi, 40
tetraatio, 81
tilavuusprosentti, 181
transitiivisuus, 17
triviaali, 18
tuhaterotin, 16

V

vaihdannaisuus, 25
vakio, 17
vastaluku, 21
vektorisuure, 94
verrannollisuuskerroin, 192
verranto, 193

vertailuprosentti, 160

Y

yhtälö, 139

yhtälön päteminen, 139

yhteinen tekijä, 42

yksikkö, 94