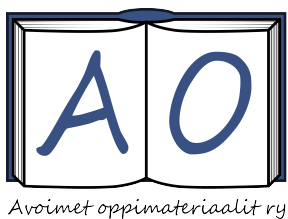


Vapaa matikka

MAA2



Teknologiateollisuuden
100-VUOTISSÄÄTIÖ



Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 4.0 -lisenssillä.

Avoimet oppimateriaalit ry

Yhdistys tuottaa ja julkaisee oppimateriaaleja ja kirjoja, jotka ovat kaikille ilmaisia ja vapaita käyttää, levittää ja muokata. Vapaa matikka -sarja on suunnattu lukion pitkän matematiikan kursseille ja täyttää valtakunnallisen opetussuunnitelman vaatimukset.

Jos olet kiinnostunut Vapaa matikka -sarjan kirjoittamisesta, voit tehdä pull requestin muutoksillesi GitHub-palvelussa tai osallistua yhdistyksen toimintaan.

Lisätietoja Vapaa matikka -kirjasarjasta työryhmältä,
vapaamatikka@avoimetoppimateriaalit.fi.

Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö on rahoittanut Vapaa matikka -kirjasarjan kirjoittamista 30 000 eurolla.

1. painos 2015

ISBN 978-952-7010-06-8 (painettu kirja, MAA1-2)

ISBN 978-952-7010-07-5 (sähköinen julkaisu, MAA1-2)

ISBN 978-952-7010-08-2 (sähköinen julkaisu, MAA1)

ISBN 978-952-7010-09-9 (sähköinen julkaisu, MAA2)

YKL 51

UDK 51

Painotalo C-4, Vaajakoski, 2015

LISENSSI

Tämän teoksen käyttöoikeutta koskee Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen (CC BY 4.0) -lisenssi. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) License.



Lisenssin suomenkielinen tiivistelmä

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>



Tarkat lisenssiehdot (englanniksi)

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>

Voit vapaasti:

Jakaa. Kopioda ja jatkolevittää materiaalia, missä tahansa välineessä ja muodossa, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Muuntaa. Remiksata, muuntaa ja jalostaa materiaalia, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Lisenssinantaja ei voi vetää näitä vapauksia pois niin kauan kun seuraat lisenssin ehtoja.

Seuraavilla ehdoilla:

Nimeä. Sinun on mainittava tekijät, näytettävä linkki lisenssiin sekä kerrottava, jos olet muuntanut materiaalia. Voit tehdä tämän millä tahansa kohtuullisella tavalla, mutta et niin, että lisenssin antaja näyttäisi tukevan sinua tai materiaalin käyttöäsi.

No additional restrictions. Et voi lisätä lakiehtoja tai teknisiä estoja, jotka estäisivät muita tekemästä mitään, minkä lisenssi sallii.

Huomautukset:

1. Sinun ei tarvitse seurata lisenssiehtoja niiden materiaalin osien kohdalla, jotka ovat public domainissa tai joiden käyttö on sallittua tilannekohtaisen tekijänoikeuspoikkeuksen tai -rajoituksen vuoksi.
2. Mitään takuita ei ole annettu. Lisenssi ei välttämättä anna sinulle kaikkia käyttötarkoituksesi edellyttämiä oikeuksia. Esimerkiksi julkisuus-, yksityisyys- tai moraalisäädökset voivat rajoittaa materiaalin käyttöäsi.

TEKIJÄT

Lauri Hellsten

Jokke Häsä

Niko Ilomäki

Olli-Pekka Kahilakoski

Tero Keinänen

Sanni Ketoluoto

Pauliina Kärkkäinen

Vesa Linja-aho

Edvard Majakari

Ossi Mauno

Joonas Mäkinen

Ilari Oras

Matti Pajunen

Pekka Peura

Johanna Rämö

Aaro Salosensaari

Aleksi Sipola

Topi Talvitie

Paula Thitz

Sampo Tiensuu

Ville Tilvis

KIITOKSET

Heikki Hakkarainen

Eveliina Heinonen

Katleena Kortesus

Hannu Köngäs

Viljami Lahtinen

Senja Larsen

Joni Mäkinen

Jussi Partanen

Arto Piironen

Antti Ruonala

Anni Saarelainen

Mira Salmela

Tiina Salola

Kaj Sotala

Juhapekka Tolvanen

Daniel Valtakari

AVOIMET OPPIMATERIAALIT RY

Kotisivu

<http://avoimetoppimateriaalit.fi>

Facebook

<https://facebook.com/avoimetoppimateriaalit>

<https://facebook.com/oppikirjamaraton>

GitHub

<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry>

Sähköposti

yhdistys@avoimetoppimateriaalit.fi

IRCnet

[#avoimetoppimateriaalit](#)

Sisältö

MAA2 – Polynomifunktiot	9
1 Polynomi	11
1.1 Polynomi	11
1.1.1 Polynomit	11
1.1.2 Polynomin yleinen muoto	15
1.1.3 Polynomifunktion arvo	16
1.2 Polynomeilla laskeminen	21
1.2.1 Polynomien yhteen- ja vähennyslasku	22
1.2.2 Polynomien kertolasku	24
1.3 Muistikaavat	30
1.4 Tulon nollasääntö & tulon merkkisääntö	38
1.5 Polynomin jakaminen tekijöihin	43
1.5.1 Polynomin jakaminen tekijöihin	43
1.5.2 Yhtälön ratkaisu tekijöihin jakamalla	45
1.6 Polynomifunktion kuvaaja	49
1.6.1 Kuvaajan piirtäminen	50
1.6.2 Kuvaajan tulkintaa	51
2 Ensimmäinen aste	56
2.1 Epäyhtälöiden teoriaa	56
2.1.1 Epäyhtälöiden muokkaaminen	57
2.1.2 Reaalilukuvälit	60
2.2 Kertausta: ensimmäisen asteen yhtälö	67
2.3 Ensimmäisen asteen epäyhtälö	71
3 Toinen aste	77
3.1 Toisen asteen polynomifunktio ja sen kuvaaja	77
3.2 Toisen asteen yhtälö	81
3.2.1 Vaillinaiset yhtälöt	83
3.2.2 Neliöksi täydentäminen	85

3.3	Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava	91
3.4	Diskriminantti	99
3.5	Toisen asteen epäyhtälö	104
3.6	Polynomien jakolause	111
4	Korkeampi aste	118
4.1	Korkeamman asteen polynomifunktio	118
4.2	Korkeamman asteen yhtälöt	121
4.2.1	Potenssiyhtälö	121
4.2.2	Tekijöihinjako	122
4.2.3	Sijoitukset	123
4.3	Korkeamman asteen epäyhtälöt	127
5	Kertausosio	132
	Testaa tietosi!	132
	Kertaustehtäviä	136
	Harjoituskokeita	142
	Ylioppilaskoetehtäviä	148
	Syventäviä aiheita	151
	Lukujärjestelmät	151
	Paraabeli	157
	Vastaukset ja hakemisto	161
	Vastaukset	161
	Hakemisto	212

MAA2 – Polynomifunktiot

Polynomit ovat hyvin keskeisiä sovelletussa matematiikassa. Niin fysiikan, kemian, tietotekniikan kuin myös taloustieteiden parissa varsin monet laskutoimitukset pelkistyvät lopulta polynomien käsittelyksi. Esimerkiksi sellaiset tietotekniset sovellukset kuten hahmon tunnistaminen kuvasta, äänen kompressointi (mp3) ja vaikkapa sikiön sydänäänien erottaminen perustuvat lopulta polynomien laskentaan. Itse asiassa polynomit ovat niin yleisiä matematiikassa, että riippumatta sovellusalueesta ne on hyvä tuntea perusteellisesti.

Pitkän matematiikan toisella kurssilla MAA2 Polynomifunktiot käsitellään polynomifunktioita, -yhtälöitä ja -epäyhtälöitä. Kurssilla syvennetään ensimmäisen kurssin asioita ja sovelletaan niitä polynomien maailmassa. Oppikirja on rakennettu siten, että aiheet esitellään lukujen alussa ja havainnollistetaan esimerkein. Tehtäviä on runsaasti ja niiden tarkoituksena on saada opiskelija sisäistämään opiskellut asiat ja siirtämään ne käytäntöön.

Tässä kirjassa käymme läpi opetussuunnitelman mukaiset keskeiset sisällöt, joita ovat

- polynomien tulo ja binomikaavat
- polynomifunktio
- toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöt
- toisen asteen yhtälön juurten lukumäärän tutkiminen
- polynomiepäyhtälön ratkaiseminen.

Opetussuunnitelman mukaiset kurssin keskeiset tavoitteet ovat, että opiskelija

- harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita
- oppii ratkaisemaan toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkimaan ratkaisujen lukumäärää

- oppii ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua
- oppii ratkaisemaan yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä

LUKU 1

Polynomi

1.1 Polynomi



Opetus.tv: *polynomien peruskäsitteet* (9.00)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomien-peruskasitteet/>

1.1.1 POLYNOMIT

Polynomit ovat matematiikassa ryhmä erittäin tärkeitä lausekkeita.

Polynomin määritelmä

- Lauseke, jossa esiintyy vain
 - muuttujien potensseja (eksponentti luonnollinen luku, mukaan lukien 0)
 - kerrottuna jollakin vakiolla sekä
 - näiden potenssien summia.

Polynomissa voi olla yksi tai useampia muuttujia, tai se voi olla muuttujaton vakio-polynomi. Vakio-polynomin tapauksessa muuttujan eksponentin ajatellaan olevan 0, sillä $x^0 = 1$, jolloin muuttuja – oli se mikä hyvänsä paitsi nolla – katoaa. (Muista, että 0^0 :n arvo ei ole hyvin määritelty.)

ESIMERKKI 1.1

Kaikki seuraavat lausekkeet ovat polynomeja:

4	ei muuttujia ($4 = 4 \cdot 1 = 4x^0$)
$2x + 1$	muuttujana x ($x = x^1$)
$5x^2 + x - 7$	muuttujana x
$-3t^{100}$	muuttujana t
y	muuttujana y
$y^2 + 1$	muuttujana y
$xy^2 + x^2y$	muuttujina x ja y

ESIMERKKI 1.2

Miksi muuttujan t lausekkeet

- a) $\frac{2}{t}$
- b) π^t
- c) $\sqrt{t} + 2$ ja
- d) t^π

eivät ole polynomeja?

Ratkaisu. a) $\frac{2}{t}$ ei ole polynomi, sillä muuttujan t eksponentti ei ole luonnollinen luku: $\frac{2}{t} = 2 \cdot \frac{1}{t} = 2t^{-1}$, ja $-1 \notin \mathbb{N}$.

b) π^t ei ole polynomi, sillä muuttuja on eksponentissa eikä potenssin kantalukuna.

c) $\sqrt{t} + 2$ ei ole polynomi, sillä neliöjuuri ei ole esitettävissä potenssina, jonka eksponentti olisi luonnollinen luku: $\sqrt{t} + 2 = t^{\frac{1}{2}} + 2$, ja $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

d) t^π ei ole polynomi, sillä muuttujan eksponentti ei ole luonnollinen luku: $\pi \notin \mathbb{N}$. (π on irrationaaliluku.)

Polynomi on summalauseke, joiden yhteenlaskettavia kutsutaan **termeiksi**. Puhumme vain yhteenlaskusta, vaikka polynomeissa esiintyykin miinusmerkkejä, sillä jokaisen erotuksen voi esittää summana vähennyslaskun määritelmän $x - y = x + (-y)$ mukaisesti (ks. Vapaa matikka 1).

Termien **kertoimet** on tapana kirjoittaa muuttujan potenssin vasemmalle puolelle. (Tietenkin esimerkiksi $2x$ tarkoittaa samaa kuin x^2 , koska reaalilukujen kertolasku on vaihdannainen.) Jos erillistä kerrointa ei näy, se on 1, sillä $1 \cdot x = x$. Miinusmerkkinen termi tulkitaan niin, että sen kerroin on -1 . Ensimmäisen eli vasemmanpuoleisimman

termin kertoimen positiivisuutta ei tarvitse erikseen näyttää plusmerkillä.

Termejä, jotka eivät sisällä muuttujaa, kutsutaan **vakiotermeiksi**. Vakiotermit voivat koostua mistä tahansa luvuista. Vakiotermin kerroin on kyseinen vakio itse, sillä mikä tahansa luku voidaan ajatella olevan muuttujan nollannen potenssin kerroin.

ESIMERKKI 1.3

Kirjoita polynomi $t^4 - t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 9\,001$ muodossa, missä ei esiinny vähennyslaskua. Mitkä ovat polynomin termit? Mitkä ovat näiden termien kertoimet?

Ratkaisu. Vähennyslaskun määritelmän perusteella

$$t^4 - t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 9\,001 = t^4 + (-t^3) + (-\frac{1}{2}t^2) + (-9\,001).$$

Tästä muodosta nähdään helposti, polynomin termit eli yhteenlaskettavat osat ovat t^4 , $-t^3$, $-\frac{1}{2}t^2$ ja $-9\,001$. Termin t^4 kerroin on 1, termin $-t^3$ kerroin on -1 , termin $-\frac{1}{2}t^2$ kerroin on $-\frac{1}{2}$, ja vakiotermin kerroin on vakio itse eli $-9\,001$.

ESIMERKKI 1.4

Polynomissa $-2x^3 - 5x^2 + x - \sqrt{2}$ on neljä termiä: $-2x^3$, $-5x^2$, x ja $-\sqrt{2}$.

Polynomi-sanana 'poly' on kreikkaa ja tarkoittaa montaa. Erityisesti yhden termin polynomeja kutsutaan **monomeiksi**, kahden termin polynomeja **binomeiksi**, kolmen termin polynomeja **trinomeiksi** ja niin edelleen kreikkalaisten lukusanojen mukaan.

ESIMERKKI 1.5

Esimerkkejä polynomeista, joissa on eri määrä termejä:

monomi	binomi	trinomi
$-3x^2$	$x^2 - 5$	$y^2 + 3y - x$
42	$x + y$	$1 - z - z^2$
y	$xz - 13$	$x^{53} - 27y - 3z$

Muuttujan eksponenttia kutsutaan termin **asteeksi** tai **asteluvuksi**. Vakiotermin aste on nolla. **Polynomin aste** on suurin sen sievennetyn muodon termien asteista.

ESIMERKKI 1.6

Mitkä ovat polynomin $x^4 - 2x^3 + 42$ termit ja niiden asteet? Mikä on polynomin aste?

Vastaus. Polynomin $x^4 - 2x^3 + 42$ termit ovat x^4 , $-2x^3$ ja 42 ja niiden asteet ovat neljä, kolme ja nolla. Polynomin aste on sama kuin sama kuin korkein termien asteista eli neljä.

Polynomin todellisen asteen saaminen selville voi vaatia polynomin sieventämistä.

ESIMERKKI 1.7

Trinomi $x^2 - x^2 + 1$ ei ole toisen, vaan nollannen asteen polynomi, sillä sievennettynä $x^2 - x^2 + 1 = 1 = 1x^0$. Sieventäminen muutti trinomin monomiksi.

Useamman muuttujan tapauksessa polynomin termien asteet lasketaan muuttujien potenssien summana.

ESIMERKKI 1.8

- a) Monomin x^3y^2z aste on 6, sillä muuttujien eksponenttien summa on $3 + 2 + 1 = 6$.
- b) Trinomin $x^6 + x^2y^5 - 1$ aste on 7, sillä korkea-asteisin termi on x^2y^5 , ja sen aste on $2 + 5 = 7$.

Koska yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen, polynomin termit voi kirjoittaa missä tahansa järjestyksessä. Esimerkiksi polynomi $y^4 + y^2 - 1$ voidaan kirjoittaa täysin yhtenevästi myös järjestyksessä $-1 + y^4 + y^2$. Yleensä polynomien termit kirjoitetaan niiden asteen perusteella laskevaan järjestykseen niin, että korkeimman asteen termi kirjoitetaan ensin. Termit on joskus tapana ryhmitellä – jos mahdollista – myös muuttujittain.

ESIMERKKI 1.9

Mikä on polynomin $3t^2 - 1 + t^3$ aste? Mikä on korkeimman asteen termin kerroin?

Ratkaisu. Aloitetaan järjestämällä polynomin termit asteluvun mukaiseen laskevaan järjestykseen:

$$3t^2 - 1 + t^3 = t^3 + 3t^2 - 1$$

Vastaus. Polynomi on kolmatta astetta. Korkeimman (eli kolmannen) asteen termin kerroin on 1.

ESIMERKKI 1.10

Kuinka monetta astetta on (kahden muuttujan) polynomi $x^2 + 2xy^2 + xy$?

Ratkaisu. Merkitään selkeyden vuoksi molempien muuttujien kaikki eksponentit näkyviin:

$$x^2 + 2x^1y^2 + x^1y^1$$

Kun termissä on kaksi eri muuttujaa, niin termin asteluku on näiden muuttujien eksponenttien summa. Näin ollen ensimmäisen termin aste on kaksi, toisen termin aste on $1 + 2 = 3$ ja kolmannen termin aste on $1 + 1 = 2$. Järjestetään termit vielä asteiden mukaiseen laskevaan järjestykseen:

$$x^2 + 2x^1y^2 + x^1y^1$$

$$2x^1y^2 + x^1y^1 + x^2$$

Vastaus. Polynomin asteluku on kolme.

1.1.2 POLYNOMIN YLEINEN MUOTO



Opetus.tv: *polynomin täsmällinen määritelmä* (6:10)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomin-tasmallinen-maaritelma/>

Formaalisti kirjoitettuna yhden muuttujan polynomin yleinen muoto on

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$. Muuttuja x kertoo polynomin asteen, ja kertoimet $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ovat reaali- tai kompleksilukuvakioita. Kertoimen symbolilla a on juoksevana alaindeksinä sama luku n siksi, että vakioita on yhtä monta kuin on polynomin aste. Jos jokin kertoimista on 0, kyseinen termi katoaa nollan kertolaskuominaisuuksien vuoksi.

ESIMERKKI 1.11

Polynomi $-3x^{13} - \frac{3}{4}x^2 - 17$ on polynomin yleistä muotoa siten, että $n = 13$, $a_{13} = -3$, $a_2 = -\frac{3}{4}$ ja $a_0 = -17$, ja kaikki muut kertoimet ovat nollija.

Jokainen lauseke, joka on esitettävissä polynomin yleisessä muodossa, on polynomi.

ESIMERKKI 1.12

Lauseke $\frac{2x^3+x^2}{x}$ ei ensi näkemältä näytä polynomilta murtolausekkeen nimittäjässä olevan x :n vuoksi. Lauseketta on kuitenkin mahdollista sieventää esimerkiksi jakamalla murtolauseke kahteen yksinkertaisempaan samannimiseen murtolausekkeeseen ja tämän jälkeen supistamalla termeittäin:

$$\frac{2x^3+x^2}{x} = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} = 2x^2 + x$$

Nyt nähdään selvästi, että kyseessä on toisen asteen kaksiterminen yhden muuttujan polynomi. (Huomataan kuitenkin, että alkuperäisen esitysmuodon vuoksi $x \neq 0$, koska nolllalla jakamista ei ole määritelty.)

1.1.3 POLYNOMIFUNKTION ARVO



Opetus.tv: *polynomiesimerkkejä* (6:59 ja 7:43)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomiesimerkkeja/>

Polynomi reaalilukujen laskutoimituksena määrittää funktion, jota kutsutaan **polynomifunktioksi**. Oletusarvoisesti kaikkien lukiomatematiikassa käsiteltävien polynomifunktioiden määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, ja tällöin myös funktion arvot reaalilukuja. (Numeeristen ja algebrallisten menetelmien syventäväällä kurssilla tarkastellaan polynomifunktioita myös reaalilukujoukkoa laajemmalla kompleksilukualueella $\mathbb{C}$.)

Polynomifunktioita nimetään tyypillisesti suuraakkosin kuten P , Q tai R . Niin kuin ensimmäisellä kurssilla opittiin, funktion arvoja lasketaan sijoittamalla funktion lausekkeessa muuttujan paikalle eri määrittelyjoukkoon kuuluvia lukuja.

ESIMERKKI 1.13

Polynomi $5x^2 - 3x + 2$ määrittää funktion $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka arvot voidaan laskea kaavalla $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$. Lasketaan funktion arvoja sijoittamalla joitakin (mielivaltaisia) lukuja muuttujan x paikalle:

$$P(2) = 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 20 - 6 + 2 = 16$$

$$P(-1) = 5(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 5 + 3 + 2 = 10$$

$$P(-3) = 5(-3)^2 - 3(-3) + 2 = 45 + 9 + 2 = 56.$$

ESIMERKKI 1.14

Polynomi $x^2 - x$ määrittää reaalfunktion Q , jonka arvot voidaan laskea yhtälöstä $Q(x) = x^2 - x$. Laske funktion arvo muuttujan arvolla $x = -1$.

Ratkaisu. Sijoitetaan funktion laskulakiin $x^2 - x$ muuttujan x paikalle haluttu uusi arvo -1 . Tällöin funktion arvoksi kohdassa $x = -1$ saadaan $Q(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$.

Vastaus. $Q(-1) = 2$

ESIMERKKI 1.15

★ Määritellään kahden muuttujan polynomifunktion R arvot kaavalla $R(x,y) = xy - y^2$. Lasketaan funktion arvot $R(0,0)$, $R(1, -1)$ ja $R(-1,1)$:

Merkintä $R(0,0)$ tarkoittaa, että molemmat muuttujat saavat arvon 0. Tällöin suoralla sijoituksella saadaan $R(0,0) = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$.

$R(1, -1)$ tarkoittaa, että funktion ensimmäinen muuttuja x saa arvon 1 ja jälkimmäinen muuttuja y saa sarvon -1 . Sijoituksella lasketaan

$$R(1, -1) = 1 \cdot (-1) - (-1)^2 = -1 - 1 = -2.$$

$$\text{Samoin } R(-1,1) = -1 \cdot 1 - 1^2 = -1 - 1 = -2.$$

Polynomeja ja polynomifunktioita käsitellään usein yhtäläisesti; voidaan esimerkiksi sanoa ”polynomi $P(x) = 2x + 1$ ”, vaikka tarkoitetaan vastaavaa polynomifunktiota. Usein on yksinkertaisesti kätevää nimenä käsiteltäviä polynomeja, vaikei alettaisi määrittellä tarkasti niiden ominaisuuksia funktioina (määrittelyjoukko, arvojoukko jne.; ks. Vapaa matikka 1).

Tehtäviä

Opi perusteet

1. Mitkä seuraavista ovat polynomeja?

a) $\frac{1}{x}$

b) $5x - 125$

c) $\sqrt{x} + 1$

d) $3x^4 + 6x^2 + 9$

e) $\sqrt{2}x - x$

f) $4^x + 5x + 6$

g) $y^4 + 2\pi$

h) $\frac{4y^2 - y}{2y}$

i) $\frac{6x+40}{x^3}$

2. Täydennä taulukko. Polynomeissa on vain yksi muuttuja, x .

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin asteluku	vakiotermi
$-2x^2 + 6x$	2	-2	2	0
$7x^3 - x - 15$				
	2	-9	2	5
	1	-5	99	

3. Mikä on/mitkä ovat polynomin $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$

- a) aste
- b) termit
- c) kolmannen asteen termi
- d) kolmannen termin aste
- e) vakiotermi?

4. Olkoot $P(x) = x^2 + 5$ ja $Q(x) = x^3 - 1$. Laske

- a) polynomin $P(x)$ arvo, kun $x = 2$
- b) polynomin $Q(x)$ arvo, kun $x = 1$
- c) $P(-7)$
- d) $Q(-1)$.

Hallitse kokonaisuus

5. Mitkä ovat seuraavien polynomien asteet?

- a) $x^2 + 3x - 5$
- b) $100 + x$
- c) $3x^3 + 90x^8 + 2x$
- d) $12x^1 + 34x^2 + 56x^3 + 78x^5 + 90x^5$

6. Olkoot $P(x) = x^2 + 3x + 4$ ja $Q(x) = x^3 - 10x + 1$. Laske

- a) $P(-1)$
- b) $Q(-2)$
- c) $P(3)$
- d) $Q(0)$
- e) $P(2x)$.

Lisää tehtäviä

7. Täydennä taulukko. Polynomeissa on kaksi muuttujaa, x ja y .

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin asteluku	2. asteen termin kerroin
$x + xy^2 + 6y^2 - 1$	4	1	3	1
$ax^6 + y^4 - 4by^2 + \sqrt{2}$				
$100x + x^3y^4 - 99y$				
$8y - \frac{\sqrt{15}}{2}x^3$				
$\sqrt{3}xy^6 + y^8 - 4x^2$				

8. ★ Määritellään kahden reaalimuuttujan polynomifunktio kaavalla $f(x,y) = xy^2 + x^2y$.

a) Laske funktion arvo $f(-1,2)$.

b) Onko $f(x,y) = f(y,x)$ kaikilla x ja y ?

9. ★ Kahden muuttujan (x ja y) binomista tiedetään, että sen asteluku on kaksi, vakiotermiä ei ole, ja kaikkien termien kertoimet ovat ykkösiä. Luettele kaikki mahdolliset polynomit, jotka toteuttavat nämä ehdot.

10. ★ Määritä kolmen muuttujan (x , y ja z) polynomifunktion $R(x,y,z) = ax^6 + 2y^8 - \sqrt{56}xy^2 + y^2z - 4z$ arvo, kun $x = 0$, $y = \sqrt{2}$ ja $z = \frac{\pi}{2}$.

1.2 Polynomeilla laskeminen

Polynomilausekkeiden käsittely on välttämätön taito matematiikassa, ja siksi tähän lukuun kannattaa paneutua huolella.

Polynomeja voidaan reaalilukujen osittelulain nojalla kertoa vakiolla kertomalla kukin termi erikseen.

ESIMERKKI 1.16

Olkoon $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Määritä lausekkeen $4P(3)$ arvo.

Ratkaisu. (TAPA 1.) Polynomi $P(x)$ kerrotaan vakiolla 4 kertomalla kukin termi erikseen.

$$\begin{aligned}4P(x) &= 4(x^3 - 2x^2 + 1) \\&= 4x^3 - 4 \cdot 2x^2 + 4 \cdot 1 \\&= 4x^3 - 8x^2 + 4.\end{aligned}$$

Määritetään polynomin $4P(x)$ arvo, kun $x = 3$

$$\begin{aligned}4P(3) &= 4 \cdot 3^3 - 8 \cdot 3^2 + 4 \\&= 4 \cdot 27 - 8 \cdot 9 + 4 \\&= 108 - 72 + 4 \\&= 40.\end{aligned}$$

(TAPA 2.) Ratkaistaan ensin $P(3)$, ja kerrotaan se vasta sen jälkeen vakiolla 4.

$$\begin{aligned}P(3) &= 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 1 \\&= 27 - 2 \cdot 9 + 1 \\&= 27 - 18 + 1 \\&= 10,\end{aligned}$$

jolloin $4P(3) = 4 \cdot 10 = 40$.

Vastaus. $4P(3) = 40$.

1.2.1 POLYNOMIEN YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU



Opetus.tv: *polynomien yhteen- ja vähennyslasku* (7:36)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomien-yhteen-ja-vahennyslasku/>

Kaikkien polynomien summat ja erotukset ovat aina polynomeja. Polynomeja voidaan laskea yhteen yhdistämällä samanasteiset termit. On kätevää aloittaa ryhmittelemällä samanasteiset termit vierekkäin. Polynomit sievennetään yleensä aina yleiseen muotoon asti, jossa on vain yksi termi kutakin astetta kohti.

Samanasteisten termien yhteen- ja vähennyslasku perustuu siihen, että soveltamalla reaalitylukujen osittelulakia $a(b \pm c) = ab \pm ac$ oikealta vasemmalle (ks. Vapaa matikka 1) samanasteiset potenssit voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi:

$$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$$

ESIMERKKI 1.17

- $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$
- $t - 5t = 1t - 5t = (1 - 5)t = -4t$
- $5,1k^2 + 3,04k^2 = (5,1 + 3,04)k^2 = 8,14k^2$
- $\frac{1}{2}y^{42} + \frac{1}{3}y^{42} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})y^{42} = (\frac{3}{6} + \frac{2}{6})y^{42} = \frac{3+2}{6}y^{42} = \frac{5}{6}y^{42}$

ESIMERKKI 1.18

Laske polynomien $5x^2 - x + 5$ ja $3x^2 - 1$ summa.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(5x^2 - x + 5) + (3x^2 - 1) &= 5x^2 - x + 5 + 3x^2 - 1 \\ &= 5x^2 + 3x^2 - x + 5 - 1 \\ &= 8x^2 - x + 4.\end{aligned}$$

Vastaus. Polynomien summa on $8x^2 - x + 4$.

Edellisessä esimerkissä molemmat yhteenlaskettavat polynomit laitettiin rakenteen selventämisen vuoksi kaarisulkeiden sisään, vaikka niillä ei ollutkaan laskujärjestyksen kannalta mitään merkitystä.

Polynomeja voidaan vastaavalla tavalla vähentää toisistaan. Vähennyslaskun tapauksessa on tärkeää laittaa vähennettävä polynomi sulkeisiin, sillä miinusmerkki vaikuttaa *koko* polynomiin, ei vain sen ensimmäiseen termiin. Sulkeet avattaessa pitää muistaa vaihtaa kaikkien termien merkki:

ESIMERKKI 1.19

Laske polynomien $4x^3 + 1$ ja $6x^3 - 2$ erotus.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(4x^3 + 1) - (6x^3 - 2) \\&= 4x^3 + 1 - 6x^3 - (-2) \\&= 4x^3 + 1 - 6x^3 + 2 \\&= 4x^3 - 6x^3 + 1 + 2 \\&= -2x^3 + 3\end{aligned}$$

Vastaus. Polynomien erotus on $-2x^3 + 3$.

ESIMERKKI 1.20

Laske polynomien $14x^3 + 69$ ja $3x^3 + 2x^2 + x$ erotus.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(14x^3 + 69) - (3x^3 + 2x^2 + x) &= 14x^3 + 69 - 3x^3 - 2x^2 - x \\&= 14x^3 - 3x^3 - 2x^2 - x + 69 \\&= 11x^3 - 2x^2 - x + 69\end{aligned}$$

Vastaus. Polynomien erotus on $11x^3 - 2x^2 - x + 69$.

ESIMERKKI 1.21

Olkoot polynomit $P(x) = 2x + 1$ ja $Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Määritä summa $R(x) = P(x) + Q(x)$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} R(x) &= P(x) + Q(x) = (2x + 1) + (3x^2 - 2x + 5) \\ &= 2x + 1 + 3x^2 - 2x + 5 \\ &= 3x^2 + 2x - 2x + 1 + 5 \\ &= 3x^2 + 6. \end{aligned}$$

Vastaus. $R(x) = 3x^2 + 6$.

ESIMERKKI 1.22

Laske polynomien P ja Q erotus R , kun $P(x) = -3x^4 + x^2 + 1$ ja $Q(x) = -3x^4 + 3x^3 - x$. Mikä on polynomin R aste?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} R(x) &= P(x) - Q(x) = (-3x^4 + x^2 + 1) - (-3x^4 + 3x^3 - x) \\ &= -3x^4 + x^2 + 1 + 3x^4 - 3x^3 + x \\ &= -3x^4 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= -3x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Vastaus. $R(x) = -3x^3 + x^2 + x + 1$. Polynomin R aste on kolme.

1.2.2 POLYNOMIEN KERTOLASKU



Opetus.tv: *polynomien kertolasku* (10:00)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomien-kertolasku/>

Monomien tulo

Kahden monomin tulo sievennetään kertomalla kertoimet keskenään ja kirjainosat keskenään. Muista potenssien laskusäännöt (ks. Vapaa matikka 1)!

ESIMERKKI 1.23

Laske a) $2x \cdot 3x$ b) $-3x^2 \cdot (-5x^4)$ c) $5x^2 \cdot (-2x)$

Ratkaisu. a) $2x \cdot 3x = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 6x^2$

b) $-3x^2 \cdot (-5x^4) = (-3) \cdot (-5) \cdot x^2 \cdot x^4 = 15x^6$

c) $5x^2 \cdot (-2x) = -10x^3$

Vastaus. a) $6x^2$ b) $15x^6$ c) $-10x^3$

Polynomin kertominen monomilla

Polynomeja voi kertoa keskenään reaalitylukujen tuttujen laskusääntöjen avulla. Yksinkertaisin erikoistapaus on polynomin kertominen monomilla, jolloin käytetään osittelulakia $a(b + c) = ab + ac$.

ESIMERKKI 1.24

Laske a) $5 \cdot (x + 3)$ b) $2x(x - 5)$ c) $3(a + b + c)$

a) $5 \cdot (x + 3) = 5 \cdot x + 5 \cdot 3 = 5x + 15$

b) $2x(x - 5) = 2x \cdot x - 2 \cdot x \cdot 5 = 2x^2 - 10x$

c) $3(a + b + c) = 3a + 3b + 3c$

Kahden binomin tulo

Kahden binomin tulon laskusääntö perustellaan soveltamalla osittelulakia kahdesti:

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d && \text{osittelulaki} \\ &= ac + bc + ad + bd && \text{osittelulaki}\end{aligned}$$

Kahden binomin tulossa siis kummallakin ensimmäisen binomin termillä kerrotaan toisen binomin termit. Saadut neljä tuloa lasketaan yhteen.

ESIMERKKI 1.25

Laske binomien $x + 2$ ja $x - 5$ tulo.

$$(x + 2)(x - 5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10.$$

ESIMERKKI 1.26

Laske binomien $x^2 - x$ ja $2x - 1$ tulo.

$$(x^2 - x)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x = 2x^3 - 3x^2 + x.$$

Yleinen kertolasku

Osittelulain nojalla kahden polynomin tulo saadaan laskemalla yhteen kaikki termit, jotka saadaan kertomalla termi ensimmäisestä ja toinen termi toisesta polynomista.

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

ESIMERKKI 1.27

Laske polynomien $x - 3$ ja $x^2 - 4x + 3$ tulo.

$$(x - 3)(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3x^2 + 12x - 9 = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

ESIMERKKI 1.28

Laske polynomien $x^4 - 3x^3 + 3$ ja $x^3 - 2x^2 + 1$ tulo.

$$\begin{aligned} & (x^4 - 3x^3 + 3)(x^3 - 2x^2 + 1) \\ &= x^4 \cdot x^3 + x^4 \cdot (-2x^2) + x^4 \cdot 1 - 3x^3 \cdot x^3 - 3x^3 \cdot (-2x^2) - 3x^3 \cdot 1 \\ & \quad + 3x^3 + 3 \cdot (-2x^2) + 3 \cdot 1 \\ &= x^7 - 2x^6 + x^4 - 3x^6 + 6x^5 - 3x^3 + 3x^3 - 6x^2 + 3 \\ &= x^7 - 5x^6 + 6x^5 + x^4 - 6x^2 + 3 \end{aligned}$$

Tehtäviä

Opi perusteet

11. Sievennä.

- a) $3x + 5x$
- b) $4x^2 + 7x^2$
- c) $-6y + 2y$
- d) $3x - (-2x)$

12. Sievennä.

- a) $5x - 2 + 2x + 7$
- b) $5x - 3y - y - 2x$
- c) $2x^2 + x + x^2 - 5x$
- d) $y^3 - 2y^2 + 4y^3 - y$

13. Sievennä.

- a) $(x^2 - 2x + 1) + (-x^2 + x)$
- b) $(3y^3 + 2y^2 + y) - (-y^2 + y)$
- c) $(z^{10} - z^6 + z^2 + 1) + (z^{10} + 2z^8 - 3z^6)$

14. Olkoot $P(x) = x^2 + 3x + 4$ ja $Q(x) = x^3 - 10x + 1$. Sievennä

- a) $P(x) + Q(x)$
- b) $P(x) - Q(x)$
- c) $Q(x) - P(x)$
- d) $2P(3) + Q(2)$.

15. Sievennä polynomifunktiot ja laske funktioiden arvot muuttujan arvoilla 1, -1 ja 3.

- a) $P(x) = (x^3 - 4x + 5) + (-x^3 + x^2 + 4x - 2)$
- b) $Q(x) = (2x^3 + x^2 - 10x) - (3x^3 - 4x^2 + 5x)$

16. Sievennä

- a) $(2x + 3) + x$
- b) $(3x - 1) + (-x + 1)$
- c) $(5x + 10) + (6x - 6) - (x + 3)$

17. Sievennä polynomifunktiot ja laske funktioiden arvot muuttujan arvoilla 1, -1 ja 3.

a) $R(x) = 4(2x - 4) + (-x^3 + 1)$

b) $S(x) = -(2x^2 - x + 8) + 6(x^5 - 3x^2 + 1) - 2(3x^5 - 10x^2)$

18. Sievennä.

a) $x \cdot x^2$

b) $5x \cdot 3x$

c) $-2(-5x^3)$

d) $3x^2 \cdot (-6x^4)$

19. Sievennä.

a) $2(x + 3)$

b) $x(x - 2)$

c) $3x(1 - 2x)$

d) $x^2(x + 5)$

20. Sievennä.

a) $3(x + 2y - 4)$

b) $(x + 2)(x + 3)$

c) $(3 - x)(2x - 1)$

21. Sievennä lauseke $(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$. Mikä on polynomin aste?

Hallitse kokonaisuus

22. Mitkä seuraavista polynomilausekkeista esittävät samaa polynomifunktiota kuin $x^3 + 2x + 1$?

a) $2x + x^3 + 1$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $x + 2x^3 + 1 - (x^3 + x)$

d) $15 + x^4 + 2x + x^3 - x^4 - 14$

23. Mitkä ovat seuraavien polynomifunktioiden asteet, ts. sievennettyjen muotojen asteet?

a) $x + 5 - x$

b) $x^2 + x - 2x^2$

c) $4x^5 + x^2 - 4 - x^2$

d) $x^4 - 2x^3 + x - 1 + x^3 - x^4 + x^3$

24. Pohdi ja määritä sulkuja avaamatta lausekkeen $(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$ m

a) aste

b) vakiotermi.

25. Sievennä.

a) $(-2x)(4x - 1) \cdot 3$

b) $(-x^3)(10x - 2)$

c) $5(-2x + 1)(-9x)$

d) $2x(x - 3) + 1$

26. Sievennä.

a) $(2y + 5)(y + 7)$

b) $(x - 1)(x + 4)x$

27. Ensimmäisen asteen polynomiausekkeen yleinen muoto on $ax + b$, missä x on muuttuja, ja a ja b ovat (reaalisia) vakioita. Osoita, että jos P ja Q ovat ensimmäisen asteen polynomifunktioita, niin tällöin $P(Q(x))$ ja $Q(P(x))$ ovat myös ensimmäistä astetta.

Lisää tehtäviä

28. Sievennä.

a) $(x - 3)(2x^3 - 3x + 4)$

b) $(x^2 + 1)(x^3 - 2x - 4)$

c) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

d) $(\frac{x}{5} - \frac{2}{3})(x^2 + x + 1)$

29. Sievennä $\sqrt{\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{a^2 + b^2}}$.

30. Olkoon $P(x) = -x^4 + 2x$ reaalifunktio. Sievennä lausekkeet.

a) $P(\sqrt{2})$

b) $P(x)^2$

c) $P(-x)$

d) $P(2t)$

31. Olkoot $P(x) = x^2$ ja $Q(x) = x + 1$ reaalifunktioita. Sievennä lausekkeet.

a) $P(x + 1)$

b) $Q(x - 1)$

c) $P(Q(x))$

d) $Q(P(x))$

1.3 Muistikaavat



Opetus.tv: *muistikaavat* (8.05, 6.38 ja 9.08)

<http://opetus.tv/maa/maa2/muistikaavat/>

Joitakin polynomien kertolaskuja tarvitaan niin usein, että niitä kutsutaan **muistikaavoiksi**.

Muistikaavat

Summan neliö	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Erotuksen neliö	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Summan ja erotuksen tulo	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Nämä kaavat voidaan todistaa helposti laskemalla.

Summan neliö

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) && \text{neliön määritelmä} \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 && \text{osittelulaki} \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 && \text{vaihdannaisuus (} ba = ab \text{)} \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Erotuksen neliö

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) && \text{neliön määritelmä} \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 && \text{osittelulaki} \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 && \text{vaihdannaisuus (} ba = ab \text{)} \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Edellä todistettuja kahta muistikaavaa kutsutaan yhdessä nimellä **binomin neliö**. Toisinaan ne kirjoitetaan yhtenä yhtälönä:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Kaavoissa useasti esiintyviä $\pm$ -merkkejä luetaan siten, että ylemmät ja alemmat täsmäävät keskenään. Ylempien merkkien (kaikki $+$:ia) valinta vastaa siis summan neliötä ja alempien merkkien (kaikki $-$:ia) valinta erotuksen neliötä.

Summan ja erotuksen tulo

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ba - b^2 && \text{osittelulaki} \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 && \text{vaihdannaisuus (} ba = ab \text{)} \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

ESIMERKKI 1.29

Sievennä $(x + 5)^2$.

Ratkaisu. Käytetään muistikaavaa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nyt $a = x$ ja $b = 5$. Saadaan

$$(x + 5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25.$$

ESIMERKKI 1.30

Sievennä $(3x - 2y)^2$.

Ratkaisu. Käytetään muistikaavaa $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Nyt $a = 3x$ ja $b = 2y$. Saadaan

$$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2.$$

ESIMERKKI 1.31

Laske ilman laskinta.

a) 995^2

b) $104 \cdot 96$

Ratkaisu. Käytetään ovelasti muistikaavoja $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ja $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

a) $995^2 = (1\,000 - 5)^2 = 1\,000^2 - 2 \cdot 1\,000 \cdot 5 + 5^2 =$
 $1\,000\,000 - 10\,000 + 25 = 990\,025$

b) $104 \cdot 96 = (100 + 4)(100 - 4) = 100^2 - 4^2 = 10\,000 - 16 = 9\,984$.

Huomaa, että kaikki polynomien kertolaskut voidaan sieventää käyttämällä osittelulakia. Muistikaavoja lukuun ottamatta ei ole tarkoitus opetella eri tapauksia erikseen (polynomin kertominen monomilla, polynomin kertominen polynomilla, ...), vaan oppia yleinen käytäntö.

Tehtäviä

Opi perusteet

32. Kerro sulut auki muistikaavan avulla.

a) $(x + y)^2$

b) $(x - y)^2$

c) $(x + y)(x - y)$

33. Kerro sulut auki muistikaavan avulla.

a) $(x + 3)^2$

b) $(y - 5)^2$

c) $(x - 4)(x + 4)$

d) $(3x + 2)^2$

34. Osoita, että seuraavat laskukaavat eivät päde etsimällä esimerkki reaaliluvuista a ja b , joilla yhtälö ei päde.

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

b) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

c) $\frac{3a}{3b + c} = \frac{a}{b + c}$

35. Esitä tulona eli käytä muistikaavaa toiseen suuntaan.

a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $y^2 - 4y + 4$

d) $a^2 - 25$

Hallitse kokonaisuus

36. Sievennä.

a) $(a + b)^3$

b) $(a + b)^4$

c) $(a - b)^3$

37. Osoita, että

a) $(t + v)^2 + (t - v)^2 = 2t^2 + 2v^2$

b) $(t + v)^2 - (t - v)^2 = 4tv$.

38. Tiedetään, että $(a + b)^2 = 12$ ja $(a - b)^2 = 4$. Ratkaise tulon ab suuruus.
39. Tutkitaan funtiota f , jonka arvot lasketaan kaavalla $f(n) = n^2 + 2n + 2$, missä n on mielivaltainen kokonaisluku.
- a) Osoita, että f kuvaa parillisen kokonaisluvun aina uudeksi parilliseksi luvuksi.
- b) Tutki, mitä vastaavasti parittomille kokonaisluvuille käy.
40. (YO 1888/1) Mikä on a/b :n arvo, jos $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) : (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{2}$?

Lisää tehtäviä

41. Sievennä muistikaavojen avulla.

- a) $(x + 6)^2$
 b) $(3y - 1)^2$
 c) $(-3 - x)(x - 3)$

42. Sievennä muistikaavojen avulla.

- a) $(5 - x)^2$
 b) $(7x + 4)^2$
 c) $(9 - 7x)(9 + 7x)$
 d) $(8x - 8)(8x + 8)$

43. Muistikaavat on opittava ulkoa ja niiden käytön tulee automatisoitua. Laske siis nämä käyttäen muistikaavoja. Tavoite on kirjoittaa vastaus suoraan ilman välivaiheita. Jos se ei vielä onnistu, yritä selvittää yhdellä välivaiheella.

- a) $(x + 2)^2$
 b) $(x - 5)^2$
 c) $(b + 4)(b - 4)$
 d) $(x - 1)^2$
 e) $(2x + 1)^2$
 f) $(1 - a)(1 + a)$
 g) $(x - 7)^2$
 h) $(y + 1)^2$
 i) $(x - 3y)^2$
 j) $(3x - 1)^2$

44. Muistikaavan mukaisen lausekkeen tunnistaminen on tärkeää. Tunnista edellisessä tehtävässä laskemasi muistikaavat ja esitä lausekkeet tulomuodossa.

- a) $1 - a^2$
- b) $x^2 + 6xy + 9y^2$
- c) $4x^2 + 4x + 1$
- d) $x^2 - 14x + 49$
- e) $y^2 + 2y + 1$
- f) $x^2 + 4x + 4$
- g) $b^2 - 16$
- h) $x^2 - 2x + 1$
- i) $x^2 - 10x + 25$
- j) $9x^2 - 6x + 1$

45. Muistikaavat vaativat paljon harjoitusta, joten laske vielä nämä.

- a) $(2x + 1)(2x - 1)$
- b) $(t - 2)^2$
- c) $(2x + 3)^2$
- d) $(2 - a)^2$
- e) $(5x + 2)(5x - 2)$
- f) $(3 - c)(3 + c)$
- g) $(10x - 1)^2$
- h) $(2a + b)^2$
- i) $(x + 6)^2$
- j) $(4x + 3)(4x - 3)$

46. Tunnista myös edellisessä tehtävässä laskemasi muistikaavat ja esitä nämäkin lausekkeet tulomuodossa.

a) $a^2 - 4a + 4$

b) $100x^2 - 20x + 1$

c) $4a^2 + 4ab + b^2$

d) $4x^2 - 1$

e) $t^2 - 4t + 4$

f) $25x^2 - 4$

g) $16x^2 - 9$

h) $9 - c^2$

i) $x^2 + 12x + 36$

j) $4x^2 + 12x + 9$

47. Esitä tulona, eli käytä muistikaavaa toiseen suuntaan.

a) $4b^2 - 4b + 1$

b) $16t^2 - 9$

c) $9x^2 + 12xy + 4y^2$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

e) $x^2 - 2$

48. Laske ovelasti muistikaavojen avulla:

a) 101^2

b) 99^2

c) $49 \cdot 51$

d) $35^2 - 25^2$

e) $170^2 - 30^2$

49. Sievennä. (Ohje: käytä summakaavoja.)

a) $63^2 + 37^2$

b) $101^2 + 99^2$

50. Sievennä lauseke $(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$ muistikaavojen avulla.

51. Luvun summa käänteislukunsa kanssa on kaksi. Määritä kyseinen luku.

52. Yllättäviä yhteyksiä:

a) Perustele, että $(2 + \sqrt{3})^{-1} = 2 - \sqrt{3}$.

b) Perustele, että $(4 + \sqrt{3})^{-1} \neq 4 - \sqrt{3}$.

c) ★ Etsi lisää a-kohdan kaltaisia lukuja. Mikä on niiden yleinen muoto?

53. ★ Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y , joille pätee $9x^2 - y^2 = 17$.

54. ★ Kahden luvun keskiarvo on 7. Kuinka suuri niiden tulo voi korkeintaan olla? Perustele. (Keksit vastauksen todennäköisesti helpommin kuin sen perustelun.)

1.4 Tulon nollasääntö & tulon merkkisääntö

TULON MERKKISÄÄNTÖ

Pitkän matematiikan 1. kurssilla on esitetty seuraava sääntö kahden reaaliluvun tulolle:

Tulon merkkisääntö kahdelle tulon tekijälle

- Jos tulon tekijät ovat samanmerkkisiä, tulo on positiivinen.
 - Kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen.
 - Kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen.
- Jos tulon tekijät ovat erimerkkisiä, tulo on negatiivinen.
 - Positiivisen ja negatiivisen luvun tulo on negatiivinen.

Tulon merkkisäännöstä seuraa, että reaaliluvun neliö ei voi olla negatiivinen, koska kahden samanmerkkisen luvun tulo aina on positiivinen. Lyhyemmin ilmaistuna $x^2 \geq 0$, eli reaaliluvun neliö on aina **epänegatiivinen** positiivinen tai nolla.

ESIMERKKI 1.32

Osoita, että funktio $P(x) = x^2 + 7$ saa vain positiivisia arvoja.

Ratkaisu. Koska $x^2 \geq 0$, lausekkeen $x^2 + 7$ arvo on vähintään 7. Funktio saa siis vain positiivisia arvoja.

Tulon merkkisääntö yleistyy mille tahansa määrälle tulontekijöitä. Mikäli tulossa on pariton $(1, 3, 5, \dots)$ määrä negatiivisia tekijöitä, tulo on negatiivinen. Muulloin tulo on positiivinen, eli esimerkiksi parillisesta potenssista ei voi tulla negatiivista vastausta.

ESIMERKKI 1.33

Mikä on funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = -t^4 + 3$ suurin arvo?

Ratkaisu. Koska muuttuja t on reaaliluku, ei sen parillinen potenssi voi olla merkkisäännön mukaan negatiivinen, vaan t^4 :n arvo on vähintään 0. Tämän perusteella $-t^4$:n arvo on epäpositiivinen eli korkeintaan nolla. Jos $-t^4$:n suurin arvo on nolla, niin lisäämällä tähän luvun 3, saadaan funktion $f(t) = -t^4 + 3$ suurimmaksi mahdolliseksi arvoksi 3.

TULON NOLLASÄÄNTÖ

Reaaliluku voi olla vain joko positiivinen, nolla tai negatiivinen. Tulon merkkisäännöstä seuraa, että positiivisten ja negatiivisten lukujen tulo on aina positiivinen tai negatiivinen, ei koskaan nolla. Jos siis tulo on 0, tulon tekijöistä ainakin yhden täytyy olla 0. Toisaalta jos jokin tulon tekijöistä on 0, myös tulo on automaattisesti 0.

Nämä tiedot yhdistämällä saadaan **tulon nollasääntö**:

Tulon nollasääntö

Ainakin yksi tulon tekijöistä on 0. $\iff$ Tulo on 0.

Tulon nollasäännössä on olennaista, että päättely toimii *molempiin suuntiin*.

ESIMERKKI 1.34

Sievennä lauseke $(x^5 - 7) \cdot y \cdot 0 \cdot (3a - 5b)^2$.

Ratkaisu. Koska tulossa on tekijänä 0, vastaus on 0.

ESIMERKKI 1.35

Ratkaistaan yhtälö $(x + 5) \cdot x = 0$.

$$\begin{aligned} (x + 5) \cdot x = 0 & \quad \parallel \quad \text{tulon nollasääntö} \\ x + 5 = 0 \text{ tai } x = 0 \\ x = -5 \text{ tai } x = 0. \end{aligned}$$

Ratkaisuja on siis kaksi: $x = -5$ tai $x = 0$.

ESIMERKKI 1.36

Ratkaistaan yhtälö $2(x + 5) = 0$. Tulon nollasäännön perusteella tiedetään, että $2 = 0$ tai $x + 5 = 0$. Koska selvästi $2 \neq 0$, jää ainoaksi ratkaisuksi $x + 5 = 0$ eli $x = -5$. (Yhtälön voi ratkaista myös avaamalla sulkeet ja ratkaisemalla saatu ensimmäisen asteen yhtälö tavallisin yhtälönmuokkaamiskeinoin.)

ESIMERKKI 1.37

Mitä voidaan yhtälön $xyz = 0$ perusteella päätellä tuntemattomista x , y ja z ?

Ratkaisu. Tulon nollasäännön perusteella $x = 0$, $y = 0$ tai $z = 0$. Nollia voi siis olla 1–3 kappaletta.

ESIMERKKI 1.38

Millä ehdolla $(ab^3)^0$ on määritelty?

Ratkaisu. Nollas potenssi on määritelty, kun kantalukuna ei ole nolla. Siis tulo ab^3 ei saa olla nolla. Tämä toteutuu, kun kumpikaan tekijä a tai b^3 ei ole nolla. Siis lauseke on määritelty, a ei ole nolla eikä b myöskään ole nolla.

★TULON NOLLASÄÄNNÖN TODISTUS

Todistus. Annettuna joukko nollasta poikkeavia lukuja $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ asetetaan

$$x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 0 \quad \parallel \quad : (x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1})$$

koska kaikille x_i pätee $x_i \neq 0$

$$\frac{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \frac{0}{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} \quad \parallel \quad \frac{0}{x_i} = 0 \text{ kaikilla } x_i, x_i \neq 0$$

$$x_n = 0,$$

mikä on ristiriidassa todistuksessa asetetun vaatimuksen kanssa, että kaikkien lukujen piti olla nollasta poikkeavia. Näin alkuperäsen väitteen täytyy olla tosi. $\square$

Tehtäviä

Opi perusteet

55. Laske.

- a) $2 \cdot 3$
- b) $2 \cdot (-3)$
- c) $-2 \cdot 3$
- d) $-2 \cdot (-3)$
- e) $17 \cdot 666 \cdot 0 \cdot (-31)$

56. Olkoon $a > 0$, $b < 0$, ja $c = 0$. Mitä voit päätellä tulon merkistä?

- a) $a \cdot a$
- b) $b \cdot a$
- c) $b \cdot b$
- d) $b \cdot c$

57. Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

- a) $x(3 + x) = 0$
- b) $(x - 4)(x + 3) = 0$
- c) $0 = x^2(x - 5)$

Hallitse kokonaisuus

58. Olkoon $a > 0$. Mitkä vaihtoehdoista $b > 0$, $b < 0$ ja $b = 0$ ovat mahdollisia, jos tiedetään, että

- a) $a \cdot b > 0$
- b) $a \cdot b \leq 0$
- c) $b \cdot b > 0$
- d) $b \cdot b < 0$?

59. Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

- a) $y(y + 4) = 0$
- b) $(x - 2)(x - 1)(x + 5) = 0$
- c) $(x + 1)(x^2 + 2) = 0$

60. Osoita, että funktio $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ saa vain positiivisia arvoja.

Lisää tehtäviä

61. Olkoon $a \geq 0$, $b \leq 0$, ja $c = 0$. Mitä voit päätellä tulon merkistä?

a) $a \cdot a$

b) $b \cdot a$

c) $b \cdot c$

62. Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

a) $(g - 2) \cdot (t + 1) = 0$

b) $x(x - 5) = 0$

c) $(2w + 2)^2 = 0$

63. Sievennä seuraava lauseke: $(a - x) \cdot (b - x) \cdot (c - x) \cdot \dots \cdot (\text{å} - x) \cdot (\text{ä} - x) \cdot (\text{ö} - x)$.

64. Onko olemassa reaalilukua, jonka neliö on yhtä suuri kuin sen summa itsensä kanssa?

65. ★ (YO 1971/3, lyhyt oppimäärä) Oletetaan, että $a > b > 0$. Osoita, että $a^3 - b^3 > (a - b)^3$.

1.5 Polynomin jakaminen tekijöihin

Luvun 12 **tekijät** luonnolisten lukujen joukossa ovat luvut 1, 2, 3, 4, 6 ja 12. Ne ovat lukuja, joista saadaan luku 12 kertomalla ne jollain luonnollisella luvulla. Toisin sanottuna luku 12 voidaan jakaa millä tahansa näistä luvuista ilman jakojäännöstä.

ESIMERKKI 1.39

Luku 12 voidaan kirjoittaa tekijöidensä tulona monella eri tavalla. Esimerkiksi

$$12 = 2 \cdot 6,$$

$$12 = 4 \cdot 3 \text{ tai}$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

1.5.1 POLYNOMIN JAKAMINEN TEKIJÖIHIN



Opetus.tv: *polynomin jakaminen tekijöihin* (9:50 ja 5:44)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomin-jakaminen-tekijoihin/>

Polynomeja voidaan jakaa tekijöihin kuten lukujakin. Polynomien tapauksessa tekijöihinjako tarkoittaa polynomin esittämistä saman- tai pienempiasteisten polynomien tulona, **tulomuodossa**. Aste on aina pienempi, ellei kyse ole pelkästä vakiokertoimen ottamisesta yhteiseksi tekijäksi.

Yhteinen tekijä

Kun polynomin jokaisessa termissä on sama tekijä, se voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi.

ESIMERKKI 1.40

Jaa tekijöihin polynomi $10x^3 - 20x^2$.

$$\begin{aligned} 10x^3 - 20x^2 & \quad ||\text{otetaan } 10 \text{ yhteiseksi tekijäksi} \\ = 10(x^3 - 2x^2) & \quad ||\text{otetaan } x^2 \text{ yhteiseksi tekijäksi} \\ = 10x^2(x - 2) \end{aligned}$$

ESIMERKKI 1.41

Jaa tekijöihin

a) $x^3 + x$

b) $3x^2 + 6x$.

a) $x^3 + x = x(x^2 + 1)$

b) $3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$.

Muistikaavat

ESIMERKKI 1.42

Jaa tekijöihin

a) $x^2 - 4$

b) $x^2 + 8x + 16$.

Ratkaisu. Jaetaan polynomit tekijöihin hyödyntämällä muistikaavoja

a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$

b) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x + 4)^2$

ESIMERKKI 1.43

Jaa tekijöihin polynomi $5x^3 - 20x^2 + 20x$.

$$\begin{aligned} 5x^3 - 20x^2 + 20x & \quad \text{otetaan } 5 \text{ yhteiseksi tekijäksi} \\ = 5(x^3 - 4x^2 + 4x) & \quad \text{otetaan } x \text{ yhteiseksi tekijäksi} \\ = 5x(x^2 - 4x + 4) & \quad \text{sovelletaan muistikaavaa} \\ = 5x(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) \\ = 5x(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Ryhmittely

Seuraavassa esimerkissä tekijöihin jako on toteutettu termien ryhmittelyn avulla. Se on joissain tapauksissa näppärä tapa jakaa polynomi tekijöihin, mutta oikean ryhmittelyn keksimiseen ei ole helppoa sääntöä.

ESIMERKKI 1.44

Jaa tekijöihin $x^3 + 3x^2 + x + 3$.

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 + x + 3 &= x^2(x + 3) + 1(x + 3) \\ &= (x^2 + 1)(x + 3)\end{aligned}$$

ESIMERKKI 1.45

Jaa tekijöihin $x^{11} + 2x^{10} + 3x + 6$.

$$\begin{aligned}x^{11} + 2x^{10} + 3x + 6 &= x^{10}(x + 2) + 3(x + 2) \\ &= (x^{10} + 3)(x + 2)\end{aligned}$$

1.5.2 YHTÄLÖN RATKAISU TEKIJÖIHIN JAKAMALLA

Tulon nollasääntö on yksi tärkeimmistä syistä siihen, miksi polynomien tekijöihinjako on hyödyllistä.

Jos vaikkapa haluamme ratkaista yhtälön $2x^3 - 14x^2 + 32x - 24 = 0$ ja satumme tietämään, että $2x^3 - 14x^2 + 32x - 24 = 2(x - 3)(x - 2)^2$, voimme helposti päätellä, että polynomi saa arvon 0 jos ja vain jos $x - 3 = 0$ tai $x - 2 = 0$. Yhtälön ainoat ratkaisut ovat siis $x = 3$ ja $x = 2$.

ESIMERKKI 1.46

Ratkaise yhtälö $x^3 - 2x^2 = 0$ tulon nollasäännön avulla.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll} x^3 - 2x^2 = 0 & \parallel \text{ otetaan } x^2 \text{ yhteiseksi tekijäksi} \\ x^2 \cdot (x - 2) = 0 & \parallel \text{ tulon nollasääntö} \\ x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0 & \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2 & \end{array}$$

Vastaus. $x = 0$ tai $x = 2$.

Myöhemmin tällä kurssilla esitellään polynomien jakolause, joka antaa syvällisemmän yhteyden polynomien nollakohtien ja tekijöiden välille.

Murtolausekkeiden sieventäminen

Kun murtolausekkeen osoittaja ja nimittäjä jaetaan tekijöihinsä, kummassakin esiintyvät tekijät voidaan supistaa pois.

ESIMERKKI 1.47

Sievennä.

a) $\frac{4x + 2y}{6}$

b) $\frac{x^2 + x}{2x + 2}$

c) $\frac{x^2 - 16}{x + 4}$

Ratkaisu. a) $\frac{4x + 2y}{6} = \frac{2(2x + y)}{2 \cdot 3} = \frac{2x + y}{3}$

b) $\frac{x^2 + x}{2x + 2} = \frac{x(x + 1)}{2(x + 1)} = \frac{x}{2}$

c) Käytetään muistikaavaa: $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x + 4} = x - 4$.

Vastaus. a) $\frac{2x + y}{3}$

b) $\frac{x}{2}$

c) $x - 4$

Tehtäviä

Opi perusteet

66. Esitä tulona ottamalla yhteinen tekijä.

a) $2x + 6$

b) $x^2 - 4x$

c) $3x^2 - 6x$

67. Jaa tekijöihin.

a) $10a + 5ab$

b) $x^4 - x^3$

c) $xy + x^2y$

68. Jaa tekijöihin muistikaavojen avulla.

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $y^2 - 2y + 1$

c) $x^2 - 25$

69. Sievennä.

a) $\frac{3x - 9}{3}$

b) $\frac{x^2 - 4x}{5x}$

c) $\frac{ab + a}{b^2 + b}$

70. Jaa tekijöihin ryhmittelemällä sopivasti.

a) $x^3 + x^2 + x + 1$

b) $a^3 + a^2b + 2a + 2b$

c) $8m^6 - 2m^4 + 4m^2 - 1$

71. Ratkaise yhtälö jakamalla tekijöihin.

a) $x^2 - 16 = 0$

b) $x^2 + 7x = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Hallitse kokonaisuus

72. Sievennä.

a) $\frac{x^3 - 2x^2}{2 - x}$

b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$

c) $\frac{4 - x^2}{x^2 - 2x}$

73. Jaa tekijöihin.

a) $x^3 - x$

b) $5ab + b + 10a + 2$

c) $16x^2y^2 + 8xy + 1$

74. Jaa tekijöihin $(3x^2 - 7y^2 + 5)^2 - (x^2 - 9y^2 - 5)^2$.

Lisää tehtäviä

75. Jaa tekijöihin.

a) $x^2 - 4$

b) $x^2 - 3$

c) $5x^2 - 3$

d) $16 - x^4$

76. Jaa tekijöihin.

a) $-15x^5 + 10y$

b) $x^3y^2 + x^2y^3$

c) $-4a^3 - 2a^2 + 2ab$

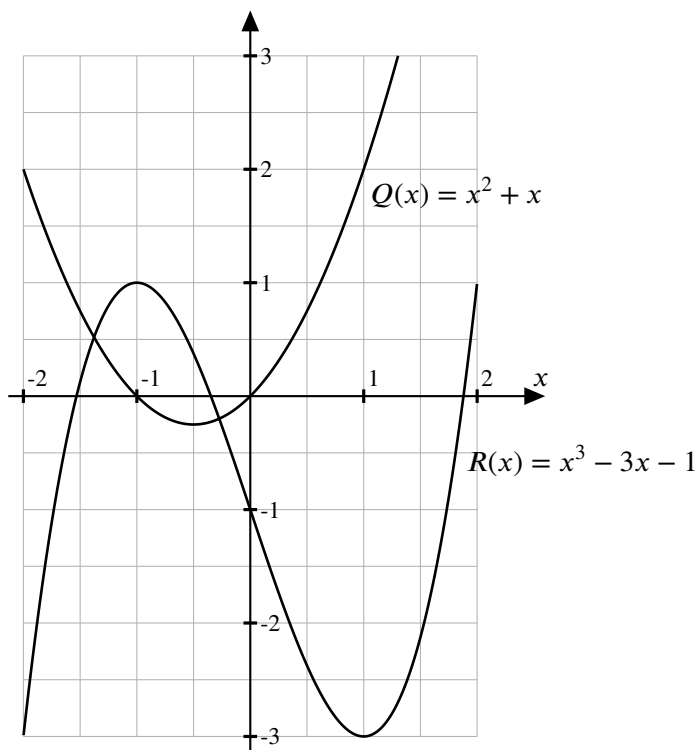
77. Ratkaise yhtälöt.

a) $-x^4 + 4x^2 = 0$

b) $x^5 - 16x^3 = 0$

1.6 Polynomifunktion kuvaaja

Polynomifunktion käyttäytymistä eri muuttujan arvoilla voi havainnollistaa koordinaatistoon piirretyn kuvaajan avulla:



1.6.1 KUVAAJAN PIIRTÄMINEN



Opetus.tv: *suoran piirtäminen* (5:47)

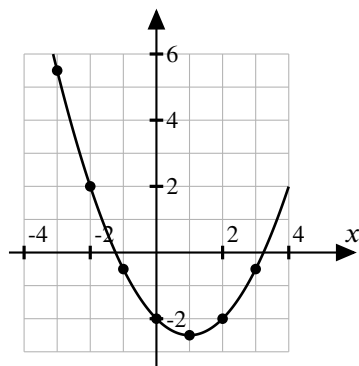
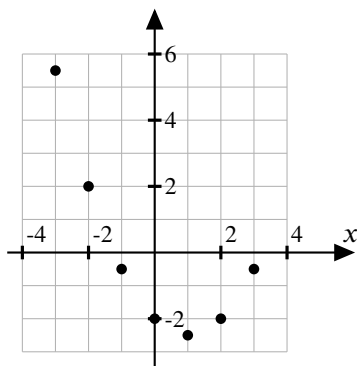
<http://opetus.tv/maa/maa2/suoran-piirtaminen/>

Funktioiden kuvaajia voi piirtää tietokoneella, graafisella laskimella tai käsin. Kussakin tapauksessa periaate on sama: valitaan joitakin muuttujan arvoja, lasketaan funktion arvot ja merkitään pisteet (x,y) -koordinaatistoon. Tietokoneet ja laskimet laskevat funktion arvoja niin tiheään, että näyttää syntyvän yhtenäinen kuvaaja. Käsin piirrettäessä tyydytään muutamaan pisteeseen ja hahmotellaan kuvaaja niiden avulla.

ESIMERKKI 1.48

Hahmotellaan polynomifunktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ kuvaaja. Lasketaan ensin joitakin funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ arvoja ja piirretään niitä vastaavat pisteet koordinaatistoon. Lopuksi hahmotellaan kuvaaja, joka kulkee pisteiden kautta.

x	$f(x)$
-3	5,5
-2	2,0
-1	-0,5
0	-2,0
1	-2,5
2	-2,0
3	-0,5

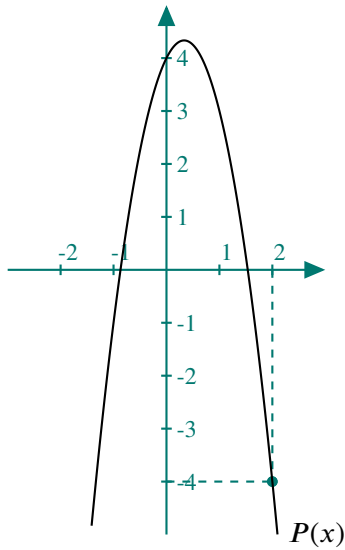


1.6.2 KUVAAJAN TULKINTAA

Kuvaajan avulla voidaan tehdä johtopäätöksiä funktion ominaisuuksista. Esimerkiksi funktion arvoja voidaan lukea kuvaajasta.

ESIMERKKI 1.49

Seuraavassa on esitetty polynomifunktion $P(x) = -3x^2 + 2x + 4$ kuvaaja.

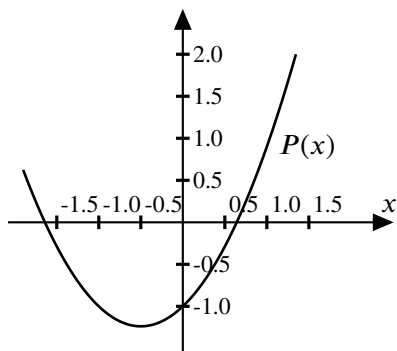


Kuvaajasta voi lukea funktion arvoja tai ainakin niiden likiarvoja. Kuvaajan perusteella näyttää siltä, että $P(2) = -4$. Näin todellakin on, sillä

$$P(1) = -3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 1.$$

ESIMERKKI 1.50

Kuvaajasta ei välttämättä näe tarkkoja arvoja. Seuraavassa on esitetty erään polynomifunktion $P(x)$ kuvaaja. Kuvaajan perusteella näyttäisi siltä, että $P(1) = 1$, mutta tarkkaa arvoa kuvaajasta ei voi päätellä.



Itse asiassa edellinen kuvaaja kuuluu funktiolle $P(x) = \frac{19}{20}x^2 + \frac{19}{20}x - 1$. Nyt tiedetään, että funktion $P(x)$ arvo kohdassa $x = 1$ on

$$\frac{19}{20} \cdot 1^2 + \frac{19}{20} \cdot 1 - 1 = \frac{9}{10}$$

eikä 1, kuten kuvaajan perusteella voisi luulla. Kuvaajasta ei siis voi lukea tarkkoja tietoja funktiosta.

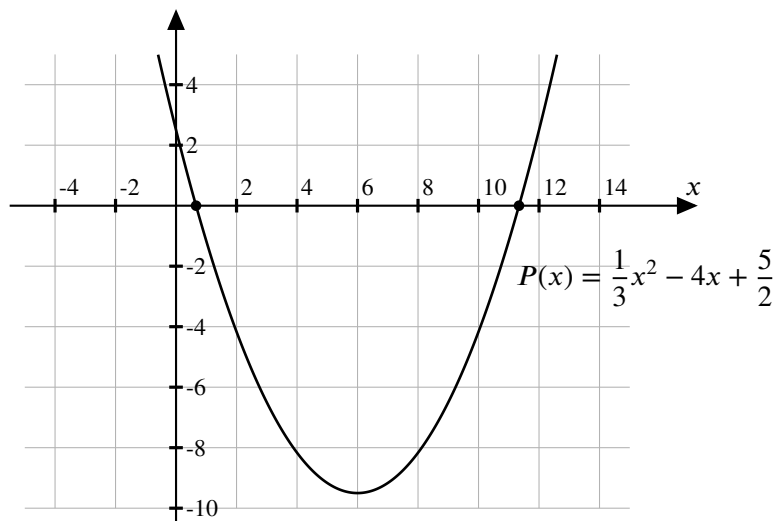
Funktion nollakohta

Funktion **nollakohta** on sellainen muuttujan arvo, jolla funktio saa arvon nolla. Esimerkiksi funktiolla $Q(x) = x^2 - 1$ on nollakohdat -1 ja 1 , sillä $Q(-1) = 0$ ja $Q(1) = 0$.

Funktion kuvaaja antaa tietoa nollakohdista. Niiden kohdalla kuvaaja leikkaa muuttujakselin. (Yleensä x -akselin.)

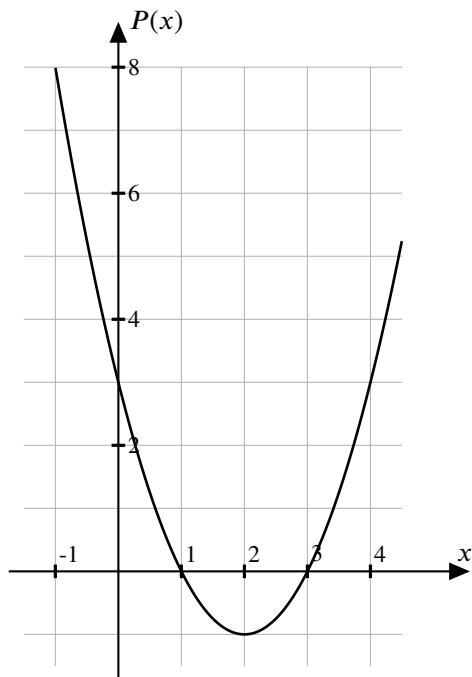
ESIMERKKI 1.51

Funktion $P(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + \frac{5}{2}$ kuvaajasta nähdään, että funktiolla on ainakin kaksi nollakohtaa. Toinen niistä on lähellä lukua 1 ja toinen lukua 11.



Tehtäviä

Opi perusteet



78. Kuvaaja. Määritä on kuvaajan perusteella

Kuvassa on polynomifunktion P

- a) $P(-1)$
- b) $P(1)$
- c) $P(2)$
- d) polynomien P nollakohdat
- e) millä x :n arvoilla $P(x) = 3$.

79. Hahmottele polynomien kuvaajat koordinaatistoon käsin. Laske testipisteitä tarpeen mukaan. Tarkista tietokoneella tai graafisella laskimella.

- a) $P(x) = x - 2$
- b) $Q(x) = 4 - x^2$
- c) $R(x) = \frac{1}{4}x^3$

Hallitse kokonaisuus

80. Piirrä polynomifunktion kuvaaja ja päätele sen avulla polynomien nollakohdat. Käytä graafista laskinta, tietokonetta tai piirrä käsin.

a) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

b) $Q(x) = x^2 - 6x + 2$

81. Piirrä funktion f kuvaaja, kun funktion arvot määritellään kaavalla $f(x) = 1 - x^2$, ja funktion määrittelyjoukko on

a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{R}$

d) $\{0, 1, 2\}$

Lisää tehtäviä

82. Piirrä polynomien kuvaajat käsin.

a) $x + 4$

b) $2x - 3$

c) 5

d) $x^2 + x - 2$

83. Piirrä polynomien kuvaajat tietokoneella tai laskimella.

a) $x^2 - 6x + 3$

b) $\frac{1}{5}x^3 - x^2 + 2$

c) $-0,5x^4 + 0,25x^3 + 2,5x^2 - 1$

84. ★ Monia funktioita voidaan esittää likimääräisesti polynomeina (ns. Taylorin polynomi). Esimerkiksi (kun $-1 < x < 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &\approx 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \\ \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \end{aligned}$$

Piirrä alkuperäinen funktio ja polynomi samaan kuvaajaan tietokoneella tai graafisella laskimella. Kokeile, kuinka polynomien viimeisten termien pois jättäminen vaikuttaa tarkkuuteen. Mitä havaitset? (Termejä voi laskea lisääkin, mutta siihen ei puututa tässä.)

LUKU 2

Ensimmäinen aste

2.1 Epäyhtälöiden teoriaa

Epäyhtälöllä tarkoitetaan väitettä, jossa esitetään kahden lausekkeen arvon välinen suuruusjärjestys lukuunottamatta tilannetta, että ne ovat yhtä suuret. Suuruusjärjestyksien esittämiseen käytetään muun muassa seuraavia merkintöjä:

<i>Merkintä</i>	<i>Merkitys</i>
$a < b$	a on pienempi kuin b
$a > b$	a on suurempi kuin b
$a \leq b$	a on pienempi tai yhtäsuuri kuin b
$a \geq b$	a on suurempi tai yhtäsuuri kuin b
$a \neq b$	a ei ole yhtä suuri kuin b

Kahden luvun välinen epäyhtälöriippuvuus eli -relaatio voidaan esittää myös kielteisesti: $a \not< b$. Epäyhtälöiden relaatio-ominaisuudet poikkeavat merkittävästi yhtäsuuruudesta. Yhtäsuuruus on sekä refleksiivinen, symmetrinen että transitiivinen (ks. MAA1), mutta $<$, $>$ ovat vain transitiivisia, ja $\leq$ ja $\geq$ ovat transitiivisia ja symmetrisiä.

ESIMERKKI 2.52

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin aivan varmasti $a > c$. (transitiivisuus) Koska $a \leq a$ kaikilla luvuilla, niin $\leq$ on symmetrinen relaatio.

Sama epäyhtälö voidaan ilmaista usealla tavalla.

ESIMERKKI 2.53

- a) $a < b$ tarkoittaa samaa kuin $b > a$
- b) $a \leq b$ tarkoittaa samaa kuin $b \geq a$.
- c) Epäyhtälö $a < b$ pätee täsmälleen silloin, kun epäyhtälö $a \geq b$ ei päde.

Epäyhtälön totuusarvo voi riippua epäyhtälön puolilla esiintyvien muuttujien arvoista. Tämän perusteella epäyhtälöt voidaan jakaa kolmeen tyyppiin:

Epäyhtälöiden tyypit

- *Aina tosi* – pätee kaikilla muuttujien arvoilla. Esimerkiksi epäyhtälöt $5 < 6$ tai $x + 1 \leq x + 3$ pätevät riippumatta muuttujan x arvosta.
- *Ehdollisesti tosi* – pätee vain joillain muuttujien arvoilla. Esimerkiksi epäyhtälö $x < 5$ pätee, kun $x = 4$, mutta ei päde, kun $x = 7$.
- *Aina epätosi* – ei päde millään muuttujien arvoilla. Esimerkiksi epäyhtälöt $3 < 1$ ja $x < x$ eivät päde koskaan.

ESIMERKKI 2.54

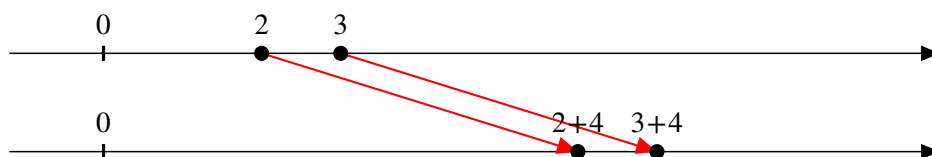
Kaverisi katsoo teini-ikäisiä mutanttinijakilpikonnia (ja tietenkin fanittaa Michelangeloa), ja sinua kiinnostaa, kuinka monta jaksoa sarjaa on jo julkaistu. Kaverisi vastaa tiedusteluusi epämääräisesti, että viimeisin julkaistu jakso oli toisen tuotantokauden 19. jakso. Mitä tästä voidaan päätellä, eli kuinka monta jaksoa (n) sarjaa on julkaistu enintään ja vähintään? Oletetaan, että jokaisessa tuotantokaudessa on yhtä monta jaksoa. Esitä vastaus epäyhtälönä.

Ratkaisu. Jos toisesta tuotantokaudesta on julkaistu jo 19 jaksoa ja oletamme, että tuotantokausissa on yhtä monta jaksoa, niin silloin jaksoja on kokonaisuudessaan julkaistu *vähintään* $2 \cdot 19 = 38$. Emme tiedä, kuinka paljon ensimmäisessä tuotantokaudessa on ollut jaksoja, joten toisen tuotantokauden jakso 19 saattaa olla niin alku- kuin loppupäästäkin. Ylärajaa näillä tiedoilla ei siis voi antaa, eli voimme vain sanoa $n \geq 38$. (Muita lisätietoja hankkimalla tai esimerkiksi arvioimalla, että jaksoja ei tuotantokaudessa voi olla enempää kuin vuodessa viikkoja, jonkinlainen yläraja toki saadaan.)

2.1.1 EPÄYHTÄLÖIDEN MUOKKAAMINEN

Kuten yhtälöiden ratkaisemisessa, epäyhtälön ratkaisemisessa selvitetään ne muuttujien arvot, joilla epäyhtälö on tosi. Kuten yhtälöitä, myös epäyhtälöitä voidaan ratkaista muokkaamalla niitä sellaisilla operaatioilla, joilla muokattu epäyhtälö on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa.

Kahden luvun kasvattaminen saman verran siirtää lukuja lukusuoralla, mutta säilyttää niiden keskinäisen järjestyksen:



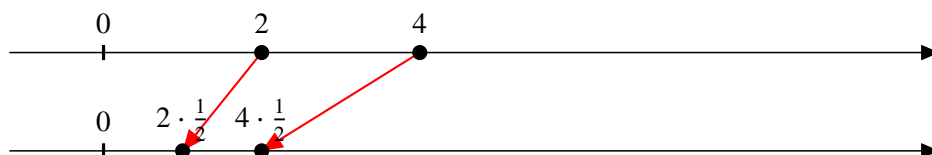
Tämän perusteella epäyhtälö, joka saadaan lisäämällä epäyhtälön molemmille puolille sama lauseke, on yhtäpitävä alkuperäisen epäyhtälön kanssa.

ESIMERKKI 2.55

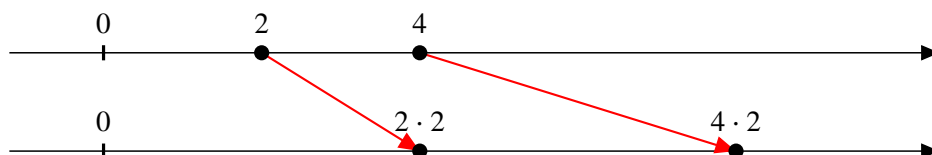
Luvun lisääminen epäyhtälöön.

$$\begin{array}{ll}
 3 - x < 5 - x & \parallel + x \\
 3 - x + x < 5 - x + x & \\
 3 < 5 & \text{tosi}
 \end{array}$$

Myös lukujen kertominen samalla positiivisella kertoimella säilyttää niiden keskinäisen järjestyksen. Jos kerroin on pienempi kuin yksi, luvut lähenevät toisiaan:



Jos kerroin on suurempi kuin yksi, luvut etääntyvät toisistaan:



Luvulla jakaminen on sama asia kuin jakajan käänteisluvulla kertominen, joten positiivisella luvulla jakaminen säilyttää järjestyksen kertolaskun tavoin. Näin ollen alkuperäisen epäyhtälön kanssa yhtäpitävä epäyhtälö saadaan kertomalla tai jakamalla molemmat puolet positiivisella luvulla.

ESIMERKKI 2.56

Epäyhtälön kertominen lukua yksi pienemmällä positiivisella luvulla.

$$\begin{array}{ll} 2 < 4 & \parallel \cdot \frac{1}{2} \\ 2 \cdot \frac{1}{2} < 4 \cdot \frac{1}{2} & \\ 1 < 2 & \text{tosi} \end{array}$$

ESIMERKKI 2.57

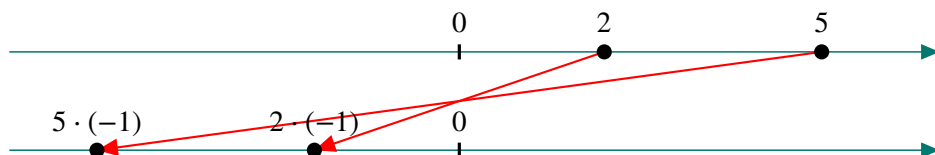
Epäyhtälön kertominen lukua yksi suuremmalla luvulla.

$$\begin{array}{ll} 2 < 4 & \parallel \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 < 4 \cdot 2 & \\ 4 < 8 & \text{tosi} \end{array}$$

Sen sijaan negatiivisella luvulla kertominen ei säilytä suuruusjärjestystä.

ESIMERKKI 2.58

Kun luvut 2 ja 5 kerrotaan luvulla -1 , niiden suuruusjärjestys kääntyy:



Jos epäyhtälöä kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta täytyy kääntää, jotta saataisiin yhtäpitävä epäyhtälö.

ESIMERKKI 2.59

Epäyhtälön kertominen negatiivisella luvulla.

$$\begin{array}{ll} 2 < 5 & \parallel \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) > 4 \cdot (-1) & \\ -2 > -5 & \text{tosi} \end{array}$$

Epäyhtälön muokkaaminen

- Yhtäpitävä epäyhtälö saadaan
 - lisäämällä molemmille puolille sama lauseke,
 - kertomalla tai jakamalla molemmat puolet samalla positiivisella luvulla tai
 - kertomalla tai jakamalla molemmat puolet samalla negatiivisella luvulla ja kääntämällä epäyhtälömerkin suunta.

Kuten yhtälöiden tapauksessa, epäyhtälön kertominen puolittain nolalla ei tuota yhtäpitävää epäyhtälöä.

ESIMERKKI 2.60

$a \leq b$ tulee $0 \leq 0$, joka on aina tosi, ja epäyhtälöstä $a < b$ tulee $0 < 0$, joka on aina epätosi.

ESIMERKKI 2.61

Muokataan epäyhtälöä $-2x + 4 < 6$ käyttämällä esitettyjä operaatioita.

$$\begin{array}{ll} -2x + 4 < 6 & \parallel -4 \\ -2x < 2 & \parallel : (-2) \\ x > -1 & \end{array}$$

Tehdyt operaatiot tuottavat yhtäpitäviä epäyhtälöitä, joten epäyhtälö $-2x + 4 < 6$ on yhtäpitävä epäyhtälön $x > -1$ kanssa. Voidaan päätellä, että lukua -1 suuremmat luvut ovat täsmälleen epäyhtälön ratkaisut.

2.1.2 REAALILUKUVÄLIT

Ratkaistaessa yhtälöitä ratkaisuksi saadaan yleensä pieni joukko lukuja. Epäyhtälöiden tapauksessa on tyypillistä, että ratkaisu on **väli**, eli kaikki kahden luvun väliset luvut. Reaalilukuvälejä merkitään usein laittamalla välin ala- ja ylärajat hakasulkujen sisään: merkintä $[a, b]$ tarkoittaa niiden kaikkien lukujen (esim. x) joukkoa, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $a \leq x \leq b$. Mikäli ala- tai yläraja ei kuulu väliin, vastaava hakasulku käännetään.

ESIMERKKI 2.62

■ $[2,5[$ tarkoittaa lukuja x , joille pätee $2 \leq x < 5$.

Huomaa, että pelkkä merkintä $[a,b]$ ja sen variaatiot tarkoittavat vain joukkoa reaali-lukuja. Jos tarkoitus on esittää väite, että jokin luku (esim. y) kuuluu tuolle välille, se kirjoitetaan $y \in [a,b]$, missä $\in$ luetaan ”kuuluu joukkoon” tai ”kuuluu välille”.

Väliä kutsutaan **suljetuksi väliksi**, mikäli ala- ja yläraja kuuluvat väliin, ja **avoimeksi väliksi**, mikäli ala- ja yläraja eivät kuulu väliin. Jos vain toinen rajoista kuuluu väliin, väli on **puoliavoin**.

Väli voidaan piirtää lukusuoralle kahden luvun välisenä janana. Päätepisteet merkitään täytetyllä ympyrällä, mikäli luku kuuluu väliin, ja muuten tyhjällä ympyrällä.

ESIMERKKI 2.63

■ Väli $[a, b[$ piirretään seuraavasti:

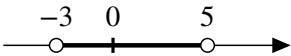
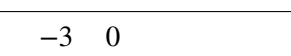
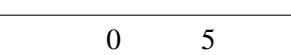
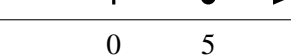


Jos halutaan, että väli ei ole alhaalta tai ylhäältä rajoitettu, merkitään välimerkintään rajaksi $-\infty$ tai ∞ . Koska ääretön ei ole reaaliluku eikä näin ollen kuulu väliin, on sitä vastaava hakasulku kirjoitettava ulospäin käännettynä.

ESIMERKKI 2.64

■ Väli $] -\infty, a[$ on avoin.

Seuraavaan taulukkoon on koottu reaalilukuvälien olennainen käsitteistö ja merkinnät.

Epäyhtälö- merkintä	Joukko- opillinen merkintä	Esitys lukusuoralla	Välin nimitys
$-3 < x < 5$	$x \in] - 3, 5[$		Avoim väli
$-3 < x \leq 5$	$x \in] - 3, 5]$		Puoliavoin väli
$-3 \leq x < 5$	$x \in [-3, 5[$		Puoliavoin väli
$-3 \leq x \leq 5$	$x \in [-3, 5]$		Suljettu väli
$-3 \leq x$	$x \in [-3, \infty[$		Puoliavoin väli
$-3 < x$	$x \in] - 3, \infty[$		Avoim väli
$x \leq 5$	$x \in]-\infty, 5]$		Puoliavoin väli
$x < 5$	$x \in]-\infty, 5[$		Avoim väli

ESIMERKKI 2.65

- Epäyhtälö $2 < x < 10$ vaatii, että x saa arvoja kahden ja kymmenen väliltä, mutta se ei koskaan saa täsmälleen näitä reuna-arvoja. Kyseessä on avoin väli kahdesta kymmeneen, $]2, 10[$. Annetulle epäyhtälölle yhtäpitävä ilmaisu on $x \in]2, 10[$.
- Epäyhtälö $0 \leq y \leq 2$ rajaa muuttujan y välille suljetulle välille $[0, 2]$. Väli on suljettu, koska y voi myös saada täsmälleen arvot 0 ja 2.
- Joskus kirjallisuudessa näkee äärettömyyssymbolin käyttöä myös kaksoisepäyhtälöissä, esimerkiksi $3 < x < \infty$, mutta ilmaistaan yleisemmin muodossa $x \in]3, \infty[$. Kyseessä on avoin väli.
- Epäyhtälöt $-100 < k \leq 0$ ja $u \leq 90$ ovat puoliavoimia välejä, koska ne rajaavat muuttujan yhtäsuuruuden avulla vain toiselta puolelta.
- Kaksoisepäyhtälö $\frac{1}{5} \geq x > -\sqrt{3}$ tarkoittaa samaa kuin kaksoisepäyhtälö $-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{5}$. Kaksoisepäyhtälö vaatii, että muuttujalle x pätee erikseen sekä epäyhtälö $-\sqrt{3} < x$ että $x \leq \frac{1}{5}$.

ESIMERKKI 2.66

Merkitse väli

a) $[-2,4]$

b) $[4,5[$

c) $]6,\infty[$

epäyhtälömerkintänä. Onko väli suljettu, avoin vai puoliavoin?

Ratkaisu. a) Kun $x \in [-2,4]$, pätee $-2 \leq x \leq 4$. Väli on suljettu, koska päätepisteet kuluvat väliin.

b) Kun $x \in [4,5[$, pätee $4 \leq x < 5$. Väli on puoliavoin.

c) Kun $x \in]6,\infty[$, pätee $6 < x$. Väli on avoin, koska kumpikaan päätepiste ei kuulu väliin.

Huomaa, että ei ole väliä, millä symbolilla mielivaltaista välille kuuluvaa lukua merkkää – tässä niin tehtiin x :llä.

Joskus – erityisesti englanninkielisissä matematiikan teksteissä – käytetään avoimen välin merkintänä käännetyn hakasulkeen sijasta tavallista kaarisuljetta. Merkintää ei suositella käytettävän, koska samaa merkintää käytetään kahdessa ulottuvuudessa sijaitsevan pisteen koordinaattien ilmaisuun.

ESIMERKKI 2.67

a) Avoin väli $]1,9[$ kirjoitetaan joskus $(1,9)$.

b) Puoliavoin väli $]3,4]$ kirjoitetaan joskus $(3,4]$.

Myös kaksoisepäyhtälöitä voi muokata laskutoimituksilla.

ESIMERKKI 2.68

$$a + 1 < b + 1 < c \qquad || - 1$$

$$a < b < c - 1 \qquad || \cdot (-1)$$

$$-a > -b > 1 - c$$

Tehtäviä

85. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia?

- a) $2 < 4$
- b) $4 > 2$
- c) $-1 \leq 10$
- d) $3 \geq 3$
- e) $0,666 \cdot 6 > 4$

86. Ovatko seuraavat väitteet tosia, epätosia vai ehdollisesti tosia?

- a) $10^4 < 10^3$
- b) $3^{-1} > 3^{-2}$
- c) $2^{10} \leq 10^3$
- d) $x \leq y$
- e) $x \geq x$
- f) $x \geq x + 1$

87. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

- a) $\pi = 3,14$
- b) $\pi \approx 3,14$
- c) $\pi \neq 3,14$
- d) $\pi > 3,14$
- e) $\pi < 3,14$
- f) $\pi \leq 3,14$
- g) $\pi \geq 3,14$

88. Esitä joukko-opillisilla merkinnöillä ja lukusuoralla.

- a) $-10 < x < 10$
- b) $-9 < x \leq 7$
- c) $5 \leq c$
- d) $5 \leq s \leq 7\frac{1}{2}$
- e) $5 \geq x > 1$

89. Kuuluvatko luvut välille $[0,1; 0,92]$?

- a) 0
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) 1
- e) 0,1
- f) 0,92
- g) 0,09
- h) 0,9199
- i) 0,10

90. Monissa arkisissa ilmauksissa esitetään jonkinlaisia rajoja. Tarkoittavatko kyseiset ilmaisut aidon epäyhtälön tilannetta ($<$ tai $>$) vai sitä, että myös reuna-arvot ovat sallittuja ($\leq$ tai $\geq$)?

- a) ”Lasten ateriat 12-vuotiaaksi asti”
- b) ”Kauppa on auki jälleen kuun ensimmäisestä päivästä lähtien.”
- c) ”Loton kierros on auki klo 20:een asti.”
- d) ”Nuorisojärjestön jäseniksi käyvät korkeintaan 29-vuotiaat”
- e) ”Luekaa ensi tunnille kirjaa Potenssi-lukuun asti.”
- f) ”Seminaari pidetään 5.11.–8.11.”
- g) ”Arvonnassa voi voittaa jopa satatuhatta euroa!”

Hallitse kokonaisuus

91. Säilyykö epäyhtälö totena, kun se korotetaan puolittain toiseen potenssiin?

- a) $0 \leq 2$
- b) $-2 < 2$
- c) $3 > -1$
- d) $5 \geq -10$
- e) $1 \neq 2$

92. Säilyykö epäyhtälö totena, kun siitä otetaan puolittain neliöjuuri?

- a) $0 \leq 2$
- b) $1 < 2$
- c) $999 < 1\,000$
- d) $50 \geq 25$
- e) $1 \neq 2$

93. Säilyykö epäyhtälö totena, kun epäyhtälön molemmille puolille käytetään 10-kantaista eksponenttifunktiota? (Eli epäyhtälön puolet sijoitetaan eksponenttifunktion lausekkeeseen muuttujan paikalle.)

- a) $0 \leq 2$
- b) $-2 < 2$
- c) $3 > -1$
- d) $5 \geq -10$
- e) $1 \neq 2$

94. Piirrä funktion P kuvaaja, kun funktion arvot määritellään kaavalla $P(x) = x^3 - x$, ja funktion määrittelyjoukko on

- a) $\{1\}$
- b) $[0,2]$
- c) $[-2,2]$
- d) $] -\infty, 0]$
- e) $[-3, -2] \cup [2,3]$

95. Osoita, että $m^2 + n^2 \geq mn$ kaikilla kokonaisluvuilla m ja n . Vihje: (binomin neliö).

Lisää tehtäviä

96. Etsi jokin epätosi epäyhtälö, jonka totuusarvo muuttuu todeksi, kun puolittain suoritetaan jokin laskutoimitus.

97. Tilapäivitys sosiaalisessa mediassa sanoo: ”Vaimollani, alle 30 vuotta, oli naurussa pitelemistä, kun hänelle valkeni, että täytän tänä vuonna 35. Nauran takaisin, kun hän täyttää 35 ja itse olen... yli neljäkymmentä.” Pitääkö päättely välttämättä paikkansa?

98. ★ Osoita, että $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, kun $x \neq 0$.

99. ★ Osoita, että kun $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, pätee $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

100. ★ Esitä suuruusjärjestys luvuille 10_9 ja 9_{10} .

101. ★ Onko $\approx$ relaationa symmetrinen, transitiivinen tai refleksiivinen?

2.2 Kertausta: ensimmäisen asteen yhtälö



Opetus.tv: *ensimmäisen asteen polynomi yhtälöt* (8.18, 6.54, 3.21, 4.07 ja 5.15)

<http://opetus.tv/maa/maa1/ensimmaisen-asteen-polynomi yhtalo/>

Yhtälöistä yksinkertaisin on ensimmäisen asteen yhtälö. Käydään se lyhyesti läpi kertauksen vuoksi.

Ensimmäisen asteen yhtälössä ratkaistavana on vain mahdollisesti vakiolla kerrottu muuttuja. Yhtälön ratkaisemiseksi riittää neljää peruslaskutoimitusta: yhteen-, vähennys-, kerto ja jakolasku. Yhtälöä muokataan tekemällä yhtälön kummallekin puolelle sama laskutoimitus.

ESIMERKKI 2.69

Ratkaise yhtälö $4x + 5 = 2 + 2x$.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll} 4x + 5 = 2 + 2x & || - 2x \\ 2x + 5 = 2 & || - 5 \\ 2x = -3 & || : 2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Vastaus. $x = -\frac{3}{2}$

ESIMERKKI 2.70

Ratkaise yhtälö $3x - 6 = 0$.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll}
 3x - 6 = 0 & \parallel + 6 \\
 3x = 6 & \parallel : 3 \\
 x = \frac{6}{3} = 2 &
 \end{array}$$

Vastaus. $x = 2$

ESIMERKKI 2.71

Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{2} = 3$.**Ratkaisu.**

$$\begin{array}{ll}
 \frac{x}{2} - \frac{x+10}{2} = 5 & \parallel \cdot 2 \\
 x - (x+10) = 10 & \\
 x - x - 10 = 10 & \\
 -10 = 10 & \text{ristiriita, ei ratkaisua.}
 \end{array}$$

Vastaus. ei ratkaisua

Yleisesti ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa $ax + b = 0$. Kaikki 1. asteen yhtälöt voidaan muokata tähän yleiseen muotoon siirtämällä kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle ja sieventämällä.

Yleisen yhtälön $ax + b = 0$ ratkaisu on

$$\begin{array}{ll}
 ax + b = 0 & \parallel - b \\
 ax = -b & \parallel : a (\neq 0) \\
 x = -\frac{b}{a} &
 \end{array}$$

Tehtäviä

Opi perusteet

102. Ratkaise yhtälöt.

a) $x + 5 = 47$

b) $2x = 64$

c) $3x - 5 = 16$

103. Ratkaise yhtälöt.

a) $x + 8 = 2x - 1$

b) $2x + 4 = 60$

c) $3x - 5 = -x + 11$

104. Antero pitää hauskaa keksimällä luvun mielikuvituksessaan. Hän kirjoittaa luvun mielikuvituspaperille vaaleanpunaisella mielikuvituskynällä. Tämän jälkeen hän kertoo luvun silmiensä lukumäärällä ja vähentää siitä varpaidensa lukumäärän. Antero on innoissaan, sillä hän saa tulokseksi luvun 8, joka on hänen ikänsä vuosina. Selvitä yhtälönratkaisulla Anteron keksimä luku, kun oletetaan, että hänellä on yhtä monta silmää ja varvasta kuin hänen ikätovereillaan yleensä on.

105. Kun eräs luku kerrotaan kolmella, ja siihen sen jälkeen lisätään viisi, saadaan tulokseksi puolet alkuperäisestä luvusta. Kirjoita yhtälö ja selvitä kyseinen luku.

106. Muodosta tilannetta kuvaavat lausekkeet.

a) Kuinka paljon maksaa hilavitkuttimen vuokraus x tunniksi, kun vuokra on 42 €/tunti. Vuokraajan tulee myös ottaa pakollinen 25 euron laitteistovakuutus.

b) Kuinka monta euroa saa x dollarilla, kun 1 EUR vastaa 1,23 USD:a, ja halutaan vaihtaa dollareita euroiksi. Valuutanvaihtaja veloittaa lisäksi palvelumaksun 0,50 euroa.

Hallitse kokonaisuus

107. Ratkaise yhtälöt.

a) $3(x + 7) = 7x$

b) $2(3x - 1) = -7x$

c) $3 - 2x - (4 - x) = 2$

108. Ratkaise yhtälöt.

a) $-2 \cdot \frac{x-5}{3} - \frac{5}{7}(1-x) = 5x + 3$

b) $\frac{4x-5}{3} - \frac{3}{2}(x-8) = -\frac{x+5}{6}$

c) $3(x-3) + x = 4x - 9$

Lisää tehtäviä

109. ★ Suorakulmaisen kolmion sivujen pituuden kateettien pituudet ovat $x + 1$ ja 4. Hypotenuusan pituus $x + 3$. Mikä x on?

110. ★ Määritä sekunnin tarkkuudella se ajanhetki, kun kellotaulun minuutti- ja tuntiviisarit ovat päällekkäin ensimmäisen kerran klo 12.00:n jälkeen.

2.3 Ensimmäisen asteen epäyhtälö



Opetus.tv: *ensimmäisen asteen epäyhtälö* (14.55 ja 8.21)

<http://opetus.tv/maa/maa2/ensimmaisen-asteen-epayhtalo/>

Samoin kuin yhtälöiden kohdalla, epäyhtälö pyritään muuttamaan niin yksinkertaiseen muotoon kuin mahdollista, jotta yksinkertaisesta tilanteesta nähdään välittömästi, mitkä luvut kuuluvat ratkaisuun ja mitkä eivät. Tuntemattomat pyritään yhdistämään, ja epäyhtälöä muokataan niin, että tuntematon saadaan yksin omalle puolelleen yhtälöä.

ESIMERKKI 2.72

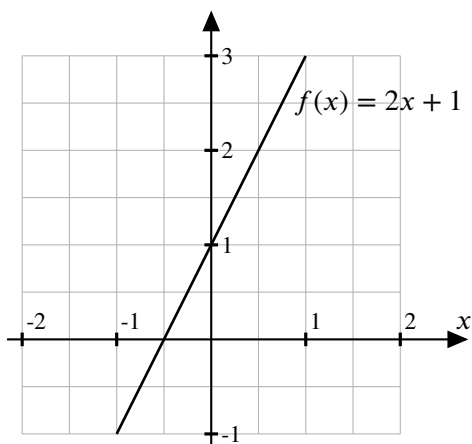
Ratkaise epäyhtälö $2x + 1 < 0$.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll} 2x + 1 < 0 & \parallel - 1 \\ 2x < -1 & \parallel : 2 \\ x < -\frac{1}{2} & \end{array}$$

Vastaus. $x < -\frac{1}{2}$. Ratkaisu voidaan esittää myös muodossa $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$.

Ratkaisua voidaan tulkita graafisesti tutkimalla lausekkeeseen $2x + 1$ liittyvää kuvaajaa:



Alkuperäinen epäyhtälö $2x + 1 < 0$ vaatii, että lausekkeen $2x + 1$ arvo on negatiivinen. Yhtälön ratkaisu on mahdollista nähdä katsomalla kuvasta, millä kaikilla x :n arvoilla funktion $2x + 1$ kuvaaja laskee vaaka-akselin alapuolelle. Tällöin funktio, siis toisaalta lauseke $2x + 1$, saa negatiivisia arvoja.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan muuten kuin yhtälö, mutta kun kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkki kääntyy.

ESIMERKKI 2.73

Ratkaise epäyhtälö $x < 5x - 8$.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll} x < 5x - 8 & \parallel -5x \\ -4x < -8 & \parallel : (-4), \text{ merkki kääntyy, } -4 < 0 \\ x > 2 & \end{array}$$

Vastaus. $x > 2$.

Merkki kääntyy yleisemmin aina, kun yhtälön molemmille puolille sovelletaan jotain vähenevää funktiota – tästä lisää myöhemmillä kursseilla.

ESIMERKKI 2.74

Millä w :n arvoilla pätee $-8w - (8 - w) \geq \frac{1}{2}w + 5$?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
-8w - (8 - w) &\geq \frac{1}{2}w + 5 \\
-8w - 8 + w &\geq \frac{1}{2}w + 5 \\
-7w - 8 &\geq \frac{1}{2}w + 5 & \| -\frac{1}{2}w \\
-\frac{15}{2}w - 8 &\geq 5 & \| +8 \\
-\frac{15}{2}w &\geq 13 & \| : (-\frac{15}{2}) \\
w &\leq 13 : (-\frac{15}{2}) \\
w &\leq -13 \cdot \frac{2}{15} \\
w &\leq -\frac{26}{15}
\end{aligned}$$

Vastaus. $w \leq -\frac{26}{15}$ **ESIMERKKI 2.75**Ratkaise kaksoisepäyhtälö $1 \leq q + 7 < -5q - 2$.

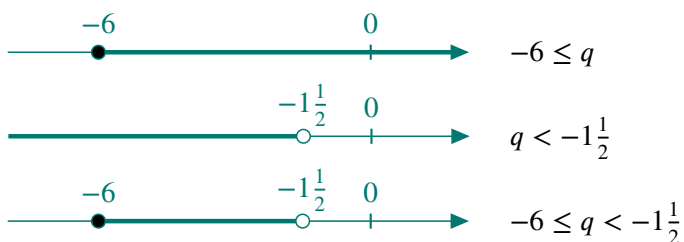
Ratkaisu. Ratkaistavana on itse asiassa kaksi epäyhtälöä: $1 \leq q + 7$ ja $q + 7 < -5q - 2$. Halutaan siis löytää ne q :n arvot, joilla molemmat epäyhtälöt pätevät.

$$\begin{aligned}
1 &\leq q + 7 & \| -7 \\
-6 &\leq q
\end{aligned}$$

Vastaavasti toiselle yhtälölle:

$$\begin{array}{rcl} q + 7 < -5q - 2 & \parallel & + 5q \\ 6q + 7 < -2 & \parallel & - 7 \\ 6q < -9 & \parallel & : 6 \\ q < -\frac{9}{6} = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

Saatiin siis ehdot $-6 \leq q$ ja $q < -1\frac{1}{2}$, jotka täytyy yhdistää.



Ehdot ovat yhtä aikaa voimassa, kun $-6 \leq q < -1\frac{1}{2}$.

Vastaus. $-6 \leq q < -1\frac{1}{2}$.

Tehtäviä

Opi perusteet

111. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $3x + 6 < 4x$
- b) $3x - 6 < 2x + 57$
- c) $5y - 2 < 12$
- d) $3 \leq y + 9$
- e) $z - 5 \geq -888$
- f) $2z + 5 \leq 42z - 995$

112. Maalipurkki sisältää 10 litraa maalia. Maalin riittoisuus on noin $6 \text{ m}^2/\text{l}$. Talon ulkoseinän korkeus on 4,5 m. Ulkoseinälle tulevat laudat on maalattava kahteen kertaan. Riittääkö maali, jos maalattavan seinän pituus on

- a) 5 m
- b) 10 m
- c) Kuinka pitkälle seinälle yhden purkillisen sisältämä maali riittää?

113. Ratkaise epäyhtälöt.

- a) $3x + 6 < 2x \leq 9 - x$
- b) $3x + 6 < 2x \leq 1 + 3x$

Hallitse kokonaisuus

114. Millä x :n arvoilla luvut $2x-5$, $-x$ ja $x+4$ ovat erisuuria ja $2x-5$ on luvuista

- a) suurin
- b) toiseksi suurin
- c) pienin?

115. Tietyn auton käyttövoimavero on 450 €/vuosi, ja keskimääräinen kulutus dieselöljyä käytettäessä on 5 litraa/100 km. Saman valmistajan vastaava bensiinikäyttöinen auto kuluttaa 8 litraa/100 km. Diesel maksaa 1,55 €/litra, ja bensiini maksaa 1,65 €/litra. Kun vain annetut tiedot huomioidaan, niin kuinka paljon esimerkin dieselajoneuvolla tulee vähintään ajaa vuodessa, jotta se on edullisempi? Autojen ostohintoja ei huomioida.

Lisää tehtäviä

116. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

a) $33x + 2 \geq 27x + 6$

b) $3x - 6 \geq 4x - 6$

c) $5y + 5 \geq 15$

d) $3y + 2 \geq 2y - 1$

e) $z \geq 2z + 1\,000$

f) $z - 1 \geq z + 1$

117. Lukion päättötodistuksessa aineen arvosana määräytyy aineen pakollisten ja syventävien kurssien keskiarvosta pyöristettynä kokonaisluvuksi tavallisten sääntöjen mukaan. Opiskelija haluaa filosofian päättöarvosanakseen 7 tai paremman. Opiskelija aikoo osallistua kolmelle filosofian kurssille. Kahden kurssin jälkeen hänen arvosanojensa keskiarvo on 6. Mikä arvosana on opiskelijan vähintään saatava kolmannelta kurssista? Kurssit arvioidaan asteikolla 4–10.

LUKU 3

Toinen aste

3.1 Toisen asteen polynomifunktio ja sen kuvaaja



Opetus.tv: *toisen asteen polynomifunktio* (7.59)

<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-polynomifunktio/>

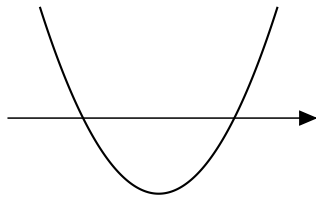
Toisen asteen polynomifunktio on muotoa

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

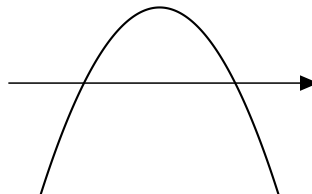
missä vakiot b ja c voivat olla mitä tahansa reaalilukuja ($b, c \in \mathbb{R}$) ja a voi olla mikä tahansa reaaliluku, paitsi luku nolla ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

Toisen asteen polynomifunktion kuvaajaa nimitetään **paraabeliksi**.

Funktion $P(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on joka ylös- tai alaspäin aukeava paraabeli. Paraabelin suuntaan vaikuttaa ainoastaan toisen asteen termin kerroin a : kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin, ja kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

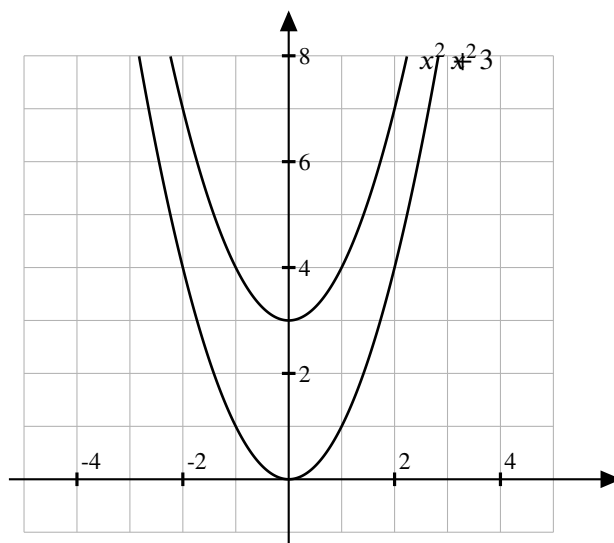


ylöspäin aukeava paraabeli,
 $a > 0$

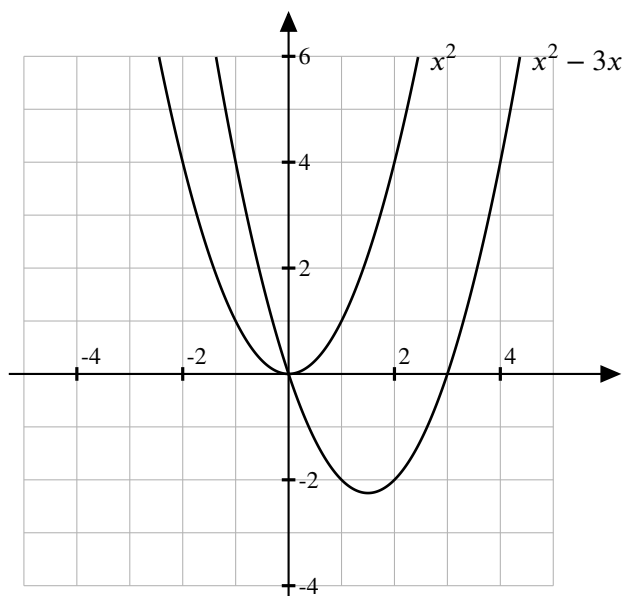


alaspäin aukeava paraabeli,
 $a < 0$

Vakiotermi c vaikuttaa kuvaajan korkeuteen.



Ensimmäisen asteen termin kerroin b vaikuttaa huipun sijaintiin sekä pysty- että vaakasuunnassa.



Tarkempi perustelu edellä esitetyille seikoille löytyy lisämateriaalista, sivulta 157.

Tehtäviä

Opi perusteet

118. Aukeavatko seuraavat paraabelit ylös- vai alaspäin?

a) $4x^2 + 100x - 3$

b) $-x^2 + 1337$

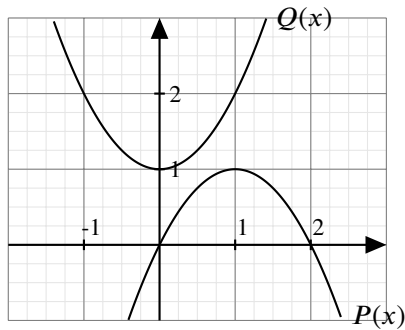
c) $5x^2 - 7x + 5$

d) $-6(-3x^2 + 5)$

e) $-13x(9 - 17x)$

f) $100(1 - x^2)$

119. Funktiot $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat toisen asteen polynomeja.



Päättele kuvaajan perusteella

a) mihin suuntaan paraabelit aukeavat

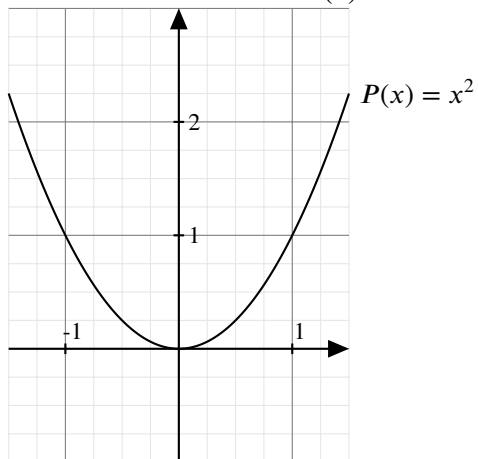
b) funktion P nollakohdat

c) yhtälön $Q(x) = 2$ ratkaisu

d) polynomin $Q(x)$ vakiotermi

Hallitse kokonaisuus

120. Kuvassa on funktion $P(x) = x^2$ kuvaaja.



Hahmottele kuvaajan avulla funktioiden

- a) $x^2 - 1$
- b) $2 - x^2$
- c) $\frac{1}{2}x^2$
- d) $(x - 2)^2$

kuvaajat.

3.2 Toisen asteen yhtälö



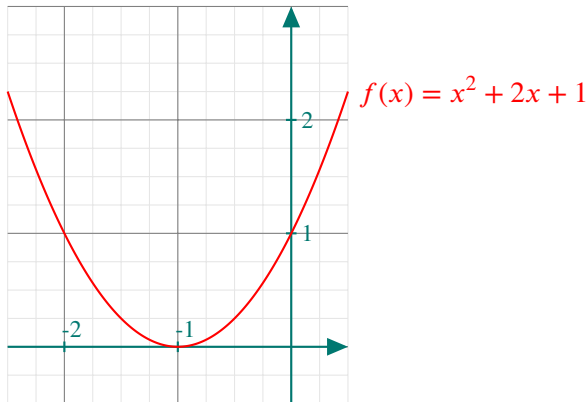
Opetus.tv: *toisen asteen yhtälö* (9.02, 11.09 ja 9.30)

<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-yhtalo/>

ESIMERKKI 3.76

Funktion f arvot määritellään kaavalla $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Selvitetään, milloin funktion f kuvaaja leikkaa x -akselin.

Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin, kun $f(x) = 0$. Tätä muuttujan x arvoa kutsutaan funktion f **nollakohdaksi**. Piirretään funktion f kuvaaja ja etsitään ne kohdat, joissa funktio leikkaa x -akselin.



Kuvaajasta havaitaan, että funktion f nollakohta on $x \approx -1$. Tätä funktion nollakohdan ratkaisumenetelmää kutsutaan graafiseksi ratkaisemiseksi. Graafinen ratkaisu on aina likimääräinen eli arvio oikeasta ratkaisusta.

Määritettäessä toisen asteen polynomifunktion nollakohtia päädytään **toisen asteen yhtälöön**, joka on aina saatettavissa yleiseen muotoon

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

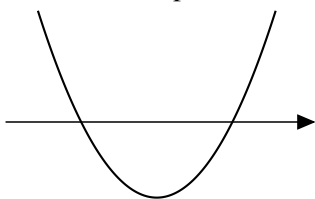
Toisen asteen yhtälöllä

$$ax^2 + bx + c = 0$$

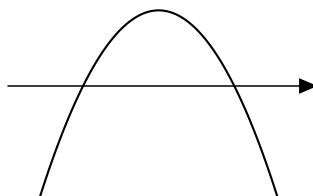
on reaalityyppisiä ratkaisuja joko 0, 1 tai 2 kappaletta.

Seuraavassa kuvat eri tapauksista:

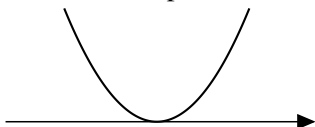
2 ratkaisua, a positiivinen



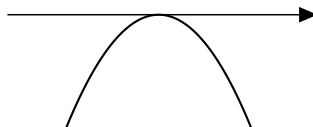
2 ratkaisua, a negatiivinen



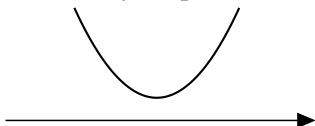
1 ratkaisu, a positiivinen



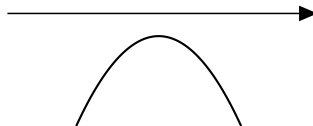
1 ratkaisu, a negatiivinen



ei ratkaisuja, a positiivinen



ei ratkaisuja, a negatiivinen



Graafisen ratkaisemisen sijasta toisen asteen yhtälö ratkaistaan yleensä laskemalla, mihin tutustutaan seuraavaksi.

3.2.1 VAILLINAISET YHTÄLÖT

Jos toisen asteen yhtälöstä $ax^2 + bx + c = 0$ puuttuu joko termi bx tai c , kyseessä on niin sanottu *vaillinainen toisen asteen yhtälö*. Se on muotoa

$$ax^2 + c = 0 \quad \text{tai} \quad ax^2 + bx = 0.$$

Vaillinaisten yhtälöiden ratkaiseminen on paljon yleistä tapausta yksinkertaisempaa.

Toisen asteen yhtälö $ax^2 + c = 0$

Muotoa $ax^2 + c = 0$ oleva toisen asteen yhtälö saadaan helposti ratkaistua neliöjuuren avulla.

ESIMERKKI 3.77

Ratkaise yhtälö $5x^2 - 45 = 0$.

$$\begin{array}{ll} 5x^2 - 45 = 0 & \parallel + 45 \\ 5x^2 = 45 & \parallel : 5 \\ x^2 = 9 & \text{ratkaistaan käyttäen neliöjuurta (9 > 0)} \\ x = \pm\sqrt{9} = \pm 3. & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.78

Ratkaise yhtälö $13x^2 - 42 = -3$:

$$\begin{array}{ll} 13x^2 - 42 = -3 & \parallel + 42 \\ 13x^2 = 39 & \parallel : 13 \\ x^2 = 3 & \text{ratkaistaan käyttäen neliöjuurta (3 > 0)} \\ x = \pm\sqrt{3}. & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.79

Ratkaise yhtälö $x^2 + 4 = 3$:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 4 = 3 & \parallel -4 \\ x^2 = -1 & \end{array}$$

Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla x , yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx = 0$

Jos yhtälöstä $ax^2 + bx + c = 0$ puuttuu vakiotermi c , yhtälö saa muodon

$$ax^2 + bx = 0.$$

Tällainen yhtälö ratkeaa jakamalla tekijöihin ja käyttämällä tulon nollasääntöä:

$$\begin{array}{ll} ax^2 + bx = 0 & \parallel \text{ otetaan yhteinen tekijä} \\ x(ax + b) = 0 & \parallel \text{ tulon nollasääntö} \\ x = 0 \text{ tai } ax + b = 0 & \\ x = 0 \text{ tai } ax = -b & \\ x = 0 \text{ tai } x = -\frac{b}{a}. & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.80

Ratkaise yhtälö $x^2 - 11x = 0$.

$$\begin{array}{ll} x^2 - 11x = 0 & \parallel \text{ otetaan yhteinen tekijä } x \\ x(x - 11) = 0 & \parallel \text{ tulon nollasääntö} \\ x = 0 \text{ tai } x - 11 = 0 & \\ x = 0 \text{ tai } x = 11 & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.81

Ratkaise yhtälö $55x^2 + 8x = 0$.

$$55x^2 + 8x = 0$$

|| otetaan yhteinen tekijä

$$x(55x + 8) = 0$$

|| tulon nollasääntö

$$x = 0 \text{ tai } 55x + 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 55x = -8$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -\frac{8}{55}$$

3.2.2 NELIÖKSI TÄYDENTÄMINEN

Toisen asteen yhtälöä $ax^2 + bx + c = 0$, jossa $a, b, c \neq 0$, kutsutaan täydelliseksi toisen asteen yhtälöksi. Tällaiset yhtälöt voidaan ratkaista muistikaavojen avulla täydentämällä ne neliöiksi. Tarkastellaan vaikkapa yhtälöä

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Yhtälön vasen puoli on melkein sama kuin binomin $x + 1$ neliö, sillä $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Vain vakiotermissä on eroa. Korjataan asia ja ratkaistaan yhtälö:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

|| + 4

$$x^2 + 2x + 1 = 4$$

|| muistikaava: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

$$(x + 1)^2 = 4$$

|| neliöjuuri ($4 > 0$)

$$x + 1 = \pm 2$$

$$x = \pm 2 - 1$$

$$x = 2 - 1 \text{ tai } x = -2 - 1$$

$$x = 1 \text{ tai } x = -3.$$

Miksi edellä osattiin ajatella juuri oikeaa muistikaavaa $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$? Syynä on se, että yhtälön vasemmalla puolella olevan polynomin alkuosaa $x^2 + 2x$ ei saada minkään muun binomin neliöstä. Neliöksi täydentäminen vaatii siis muistikaavojen hyvää hallintaa.

Kaikki toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista neliöksi täydentämällä. Yleensä sen sijasta tosin käytetään *toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa*, joka esitellään seuraavassa luvussa. Ratkaisukaava perustellaan neliöksi täydentämällä, minkä vuoksi neliöksi täydentäminen opetellaan ensin.

ESIMERKKI 3.82

Ratkaise yhtälö $x^2 + 4x - 16 = 0$.

Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 16 = 0$ ja verrataan kahta ensimmäistä termiä muistikaavaan, jotta nähdään, minkä binomin neliöksi lauseke voidaan muokata.

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 &= (\quad + \quad)^2 \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= (a + b)^2 \end{aligned}$$

Lausekkeita vertaamalla nähdään vastaavuus $a = x$, $b = 2$. Neliöstä puuttuva termi b^2 on siis $2^2 = 4$. Täydennetään nyt neliöksi:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 4x - 16 = 0 & \parallel + 16 \\ x^2 + 4x = 16 & \parallel + 4 \\ x^2 + 4x + 4 = 20 & \text{muistikaava: } x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \\ (x + 2)^2 = 20 & \text{neliöjuuri (} 20 > 0 \text{)} \\ x + 2 = \pm \sqrt{20} & \parallel - 2 \\ x = -2 \pm \sqrt{20} & \parallel \text{ sievennetään vastaus} \\ x = -2 \pm 2\sqrt{5}. & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.83

Ratkaise yhtälö $4x^2 - 4x - 5 = 0$.

Toisen ja ensimmäisen asteen termit saadaan neliöstä $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

Rakennetaan se yhtälön vasemmalle puolelle:

$$4x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \parallel + 6$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 6 \quad \text{muistikaava: } 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$(2x - 1)^2 = 6$$

$$2x - 1 = \pm\sqrt{6} \quad \parallel + 1$$

$$2x = 1 \pm \sqrt{6} \quad \parallel : 2$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Tehtäviä

Opi perusteet

121. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 = 16$

b) $x^2 = -16$

c) $x^2 - 13 = 0$

d) $3x^2 - 12 = 0$

122. Ratkaise yhtälöt.

a) $x(x - 3) = 0$

b) $x^2 + 4x = 0$

c) $7x^2 - 3x = 0$

123. Kirjoita neliöksi tunnistamalla muistikaava

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 + 6x + 9$

c) $x^2 - 4x + 4$

124. Ratkaise yhtälö täydentämällä neliöksi

a) $x^2 - 2x + 1 = 4$

b) $x^2 + 4x = 5$

c) $x^2 - 3x + 10 = 0$

Hallitse kokonaisuus

125. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 - 100 = 0$

b) $x^2 + 100 = 0$

c) $x^2 - 10 = 0$

d) $-x^2 - 25 = 0$

e) $2x^2 - 98 = 0$

126. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 - 72x = 0$

b) $x^2 + 56x = 0$

c) $-x^2 - 13x = 0$

d) $2x^2 + 43x = 0$

127. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - 85x = 0$

c) $x^2 + 11x = -6x$

d) $x^2 + 10x = -4x^2$

128. Ratkaise yhtälö täydentämällä neliöksi.

a) $x^2 - 6x + 9 = 1$

b) $x^2 + 2x + 4 = 0$

c) $x^2 - 4x - 7 = 0$

d) $x^2 + x = \frac{3}{4}$

e) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

129. Ollessaan leirikoulussa Lapissa lukiolaisryhmä saapuu järvelle ja havaitsee, että järven halkaisijan suuntainen maiseman poikkileikkaus on likimain paraabelin $\frac{1}{2500}x^2 - \frac{1}{5}x$ muotoinen, jos x-akseli on on vedenpinnan taso ja yksikkönä on metri. Kuinka pitkä matka vastarannalle on?

Lisää tehtäviä

130. Ratkaise yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

a) $(x^2 - 1)(x - 7) = 0$

b) $(x^2 - 9)(x^2 - 16) = 0$

c) $(x - 4) = x(x - 4)$

131. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $2x^2 + 8 = 0$

c) $-x^2 + 11 = -5$

d) $3 - x^2 = -1 + 3x^2$

132. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2(4x^2 - 1)^2 = 0$

b) $-x^4(3x - 1)^2 = 0$

133. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $10x + 2x^2 = 0$

c) $2x^2 - x^3 = 0$

d) $-3x^2 + 8x = -2x$

134. Elokuvasssa *Dredd* pudotetaan ihmisiä kuolemaan noin 1 kilometrin korkeudesta. Ennen pudotusta heille annetaan huumausainetta, joka hidastaa aikakäsityksen 1 prosenttiin normaalista. Vapaassa pudotuksessa pudottu matka ajanhetkellä t on $\frac{1}{2}gt^2$, jossa g on putoamiskihtiyytenä tunnettu vakio, jolle voimme tässä hyvin käyttää arviota $g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Olettaen, että huumausaineen vaikutus kestää koko putoamisen ajan, kuinka pitkältä aika pudotuksesta kuolemaan **uhrista** tuntuu? (Oleta annetut arvot tarkoiksi ja muodosta relevantti toisen asteen yhtälö.)

b) ★ Mikä menee fataalisti pieleen, jos a-kohdan laskee suoraan kuvatulla tavalla?

135. ★ Toisen asteen yhtälön vakiotermi on 4 ja sen ratkaisut ovat 2 ja 3. Mikä yhtälö on kyseessä?

136. ★ Ratkaise x ja y yhtälöstä $y^2 + 2xy + x^4 - 3x^2 + 4 = 0$.

137. ★ Ratkaise x ja y yhtälöstä $2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1$.

3.3 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava



Opetus.tv: *toisen asteen ratkaisukaava* (9.03, 11.06 ja 10.09)

<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-yhtalon-ratkaisukaava/>

Edellisessä kappaleessa opittiin, että toisen asteen yhtälö voidaan aina ratkaista täydentämällä se neliöksi. Neliöksi täydentämistä käytetään kuitenkin harvoin, sillä saman ajatuksen voi ilmaista valmiina kaavana. Johdetaan seuraavassa toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.

Lähdetään liikkeelle täydellisestä toisen asteen yhtälöstä $ax^2 + bx + c = 0$. Kuten edellisen kappaleen esimerkeissä, haluamme muokata sen muotoon, josta se on helppo täydentää binomin neliöksi. Huomataan binomin neliön muistikaavan sovelluksena, että $(\alpha x + \beta)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$; verrataan tätä toisen asteen yhtälöön:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 &= ? \end{aligned}$$

(Tässä käytetään kreikkalaisia kirjaimia sekaannuksen välttämiseksi, sillä a muistikaavassa $(a + b)^2$ ei välttämättä ole sama kuin toisen asteen yhtälön kerroin a .)

Nähdään että yhtälöt muistuttavat hieman toisiaan. Haluamme kuitenkin toisen asteen yhtälön vasemman puolen samanlaiseen muotoon kuin alemman:

$$\begin{array}{ll} ax^2 + bx + c = 0 & \text{vähennetään puolittain } c \\ ax^2 + bx = -c & \text{kerrotaan puolittain termillä } 4a \\ 4a^2 x^2 + 4abx = -4ac & \\ (2a)^2 x^2 + 4abx = -4ac & \end{array}$$

Nyt voidaan täydentää vasen puoli neliöksi, mistä saadaan esimerkkien tapaan rat-

kaisu x :n suhteen.

$$\begin{aligned}(2a)^2 x^2 + 4abx &= -4ac && \text{lisätään puolittain termi } b^2 \\(2a)^2 x^2 + 2 \cdot 2a \cdot bx + b^2 &= b^2 - 4ac && \text{neliö: } (2a)^2 x^2 + 2 \cdot 2a \cdot bx + b^2 = (2ax + b)^2 \\(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac && \text{otetaan puolittain neliöjuuri, jos } b^2 - 4ac \geq 0 \\2ax + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} && \text{vähennetään puolittain termi } b \\2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} && \text{jaetaan puolittain termillä } 2a \neq 0 \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava on siis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oletuksella, että $b^2 - 4ac \geq 0$. Oletus tarvitaan, koska negatiivisille luvuille ei ole reaaliluvuilla määriteltyä neliöjuurta.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$ ja $b^2 - 4ac \geq 0$, ratkaisut ovat muotoa

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ESIMERKKI 3.84

Ratkaise yhtälö $x^2 - 8x + 16 = 0$.

Ratkaisu. Yhtälö on muodossa $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\underbrace{1}_{=a} x^2 + \underbrace{(-8)}_{=b} x + \underbrace{16}_{=c} = 0$$

Sijoitetaan vakioiden $a = 1$, $b = -8$ ja $c = 16$ arvot toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 0}{2}$$

$$x = 4$$

Vastaus. $x = 4$

ESIMERKKI 3.85

Ratkaise yhtälö $15x^2 + 24x = -10$.

Ratkaisu. Siirretään kaikki termit samalle puolelle yhtälöä:

$$\underbrace{15}_{=a} x^2 + \underbrace{24}_{=b} x + \underbrace{10}_{=c} = 0$$

Sijoitetaan $a = 15$, $b = 24$ ja $c = 10$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 15 \cdot 10}}{2 \cdot 15}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 600}}{30}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{-24}}{30}$$

Koska juurettava on negatiivinen ($-24 < 0$), niin yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisuja.

Vastaus. Ei ratkaisua.

ESIMERKKI 3.86

Ratkaise yhtälö $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $a = 1$, $b = 2$ ja $c = -3$ ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = -1 \pm 2$$

$$x = -1 + 2 \text{ tai } x = -1 - 2$$

$$x = 1 \text{ tai } x = -3$$

Vastaus. $x = 1$ tai $x = -3$.

ESIMERKKI 3.87

Kahden luvun erotus on 7 ja tulo 330. Mitkä luvut ovat kyseessä?

Ratkaisu. Olkoon pienempi luvuista x , jolloin suurempi on $x + 7$. Saadaan yhtälö

$$x(x + 7) = 330$$

$$\parallel - 330$$

$$x^2 + 7x - 330 = 0$$

$$\parallel 2. \text{ asteen yhtälön ratkaisukaava}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-330)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1\,369}}{2}$$

$$\parallel \sqrt{1\,369} = 37$$

$$x = \frac{-7 \pm 37}{2}$$

$$x = \frac{-7 + 37}{2} \text{ tai } x = \frac{-7 - 37}{2}$$

$$x = 15 \text{ tai } x = -21$$

Koska x oli pienempi alkuperäisistä luvuista, suurempi on $15 + 7 = 22$ tai


$$-21 + 7 = -14.$$

Vastaus. Luvut ovat 15 ja 22 tai -21 ja -14 .

Tehtäviä

Opi perusteet

138. Ratkaise yhtälöistä reaaliluku x .

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

b) $x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $2x^2 + 3x + 5 = 0$

d) $9x^2 - 15x + 6 = 0$

e) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

139. Ratkaise

a) $2x + x^2 = -4$

b) $x^2 + 3x = 5$

c) $3x^2 - 13x + 50 = -2x^2 + 17x + 5$

d) $6x^2 + 1 = -18x$.

140. Ratkaise.

a) $-\frac{5}{7}x^2 + \frac{4}{11}x - \frac{1}{2} = 0$

b) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{3}{10} = 0$

141. Muokkaa yhtälöt normaalimuotoisiksi toisen asteen yhtälöiksi ja merkitse tarvittaessa määrittelyehto.

a) $x = \frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x+1} = x$

c) $\frac{y+1}{y^2} = 2$

d) $\frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{t+1}$.

142. Ratkaise c yhtälöstä $c^2/(0,01 - c) = 1,8 \cdot 10^{-5}$ sadastuhannesosien tarkkuudella, kun tiedetään, että c on positiivinen.

Hallitse kokonaisuus

143. Kahden luvun summa on 8 ja tulo 15. Määritä luvut.

144. Suorakulmion muotoisen talon mitat ovat $6,0 \text{ m} \times 10,0 \text{ m}$. Talon kivijalan ympärille halutaan levittää tasalevyinen sorakerros. Kuinka leveä kerros saadaan, kun soraa riittää 20 m^2 alalle?

145. Määritellään reaalifunktio f kaavalla $f(t) = \frac{1}{600}t^2 - \frac{1}{100}t + \frac{3}{200}$. Määritä funktion f ainut nollakohta. Kuinka monen prosentin suhteellinen virhe vastaukseen tulee, jos kuitataan toisen asteen termin kerroin $\frac{1}{600}$ merkityksettömän pienenä ja unohdetaan toisen asteen termi kokonaan?

146. Jalkapallo potkaistiin ilmaan tasaiselta kentältä. Sivusta katsottuna pallon lentorata oli paraabeli, jonka yhtälö oli muotoa

$$y = -x^2 + 15x - 36,$$

missä x on etäisyys metreinä kenttää pitkin mitattuna ja y korkeus kentän pinnasta. Kuinka pitkän matkan pallon lensi?

147. Ratkaise yhtälö $(4t+1)x^2 - 8tx + (4t-1) = 0$ vakion t kaikilla reaaliarvoilla.

148. Viljami sijoittaa 1 000 € korkorahastoon, jossa korko lisätään pääomaan vuosittain. Rahasto perii aina koronmaksun yhteydessä 20 euron vuosittaisen hoitomaksun, joka vähennetään summasta koronlisäyksen jälkeen. Viljami laskee, että hän saisi yhteensä 2,4 % lisäyksen pääomaansa kahden vuoden aikana.

a) Mikä on rahaston korkoprosentti? Ilmoita tarkka arvo ja likiarvo mielekkäällä tarkkuudella.

b) Paljonko rahaa Viljamin pitäisi sijoittaa, että hänen sijoituksensa kasvaisi yhteensä 5,0 % kahden vuoden aikana?

149. Kun kappaleen kiihtyvyys a on vakio, pätee $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ ja $v = v_0 + at$, missä x on kuljettu matka, v_0 alkunopeus, v loppunopeus ja t aika.

a) Kivi heitetään suoraan alas Olympiastadionin tornista (korkeus 72 metriä) nopeudella 3,0 m/s. Kuinka monen sekunnin kuluttua kivi osuu maahan? Putoamiskiihtyvyys on noin 10 m/s^2

b) Bussin nopeus on 20 m/s. Bussi pysähtyy jarruttamalla tasaisesti. Se pysähtyy 10 sekunnissa. Laske jarrutusmatka.

150. Johda neliöksi täydentämällä ratkaisukaava yhtälölle

$$x^2 + px + q = 0.$$

Tarkista sijoittamalla tavanomaiseen ratkaisukaavaan.

151. On olemassa viisi peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joista kolmen ensimmäisen neliöiden summa on yhtä suuri kuin kahden jälkimmäisen neliöiden summa. Mitkä luvut ovat kyseessä?

152. Kulmaisessa leikkauksessa jana on jaettu siten, että pidemmän osan suhde lyhyempään on sama kuin koko janan suhde pidempään osaan. Tämä suhde ei riipu koko janan pituudesta ja sitä merkitään yleensä kreikkalaisella aakkosella φ eli φ . Kulmaista leikkausta on taiteessa kautta aikojen pidetty ”jumalallisena suhteena”.

a) Laske kultaiseen leikkauksen suhteen φ tarkka arvo ja likiarvo.

b) Napa jakaa ihmisvartalon pituussuunnassa suunnilleen kultaisten leikkauksen suhteessa. Millä korkeudella napa on 170 cm pitkällä ihmisellä?

Lisää tehtäviä

153. Ratkaise oheiset *vaillinaiset* toiseen asteen yhtälöt ratkaisukaavan avulla.

a) $x^2 + 23x = 0$

b) $4x^2 - 64 = 0$

154. Ratkaise

a) $-x^2 + 4x + 7 = 0$

b) $x^2 - 13x + 1 = 0$

c) $4x^2 - 3x - 5 = 0$

d) $\frac{5}{6}x^2 + \frac{4}{7}x - 1 = 0$.

155. ★ Ratkaise yhtälö $(x^3 - 2)^2 + x^3 - 2 = 2$.

156. ★ Ratkaise yhtälö $(x^2 - 2)^6 = (x^2 + 4x + 4)^3$.

3.4 Diskriminantti



Opetus.tv: *diskriminantti 2. asteen yhtälölle* (7.56 ja 8.30)

<http://opetus.tv/maa/maa2/diskriminantti/>

ESIMERKKI 3.88

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö $3x^2 - 5x + 10 = 0$.

Sijoitetaan $a = 3$, $b = -5$ ja $c = 10$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{2 \cdot 3}$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{25 - 120}}{6}$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{-95}}{6}$$

Koska juurettava on negatiivinen, yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Edellisen esimerkin tulokseen päästäisiin nopeamminkin. Koska ratkaisukaavassa esiintyvä lauseke $b^2 - 4ac$ on negatiivinen, ratkaisua ei ole.

Lauseketta $b^2 - 4ac$ kutsutaan **diskriminantiksi**. Sen arvo kertoo yhtälön ratkaisujen lukumäärän. Jos $D < 0$, ratkaisuja ei ole, sillä negatiivisella luvulla ei ole neliöjuurta. Jos $D = 0$, neliöjuuren arvoksikin tulee 0 ja ratkaisuja saadaan vain yksi ($\pm 0 = 0$). Jos $D > 0$, neliöjuuri saa positiivisen arvon ja ratkaisuja on kaksi.

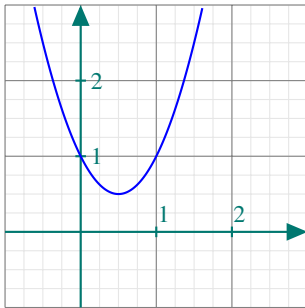
Diskriminantin avulla voidaan siis tutkia yhtälön ratkaisujen lukumäärää ilman että yhtälöä tarvitsee ratkaista.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisujen lukumäärä

- Diskriminantti: $D = b^2 - 4ac$
- Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.
- Jos $D = 0$, yhtälöllä on tasan yksi reaalinen ratkaisu.
- Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi erisuurta reaaliratkaisua.

Tapauksessa $D = 0$ yhtälön ainoa ratkaisu kutsutaan sen **kaksoisjuureksi**.

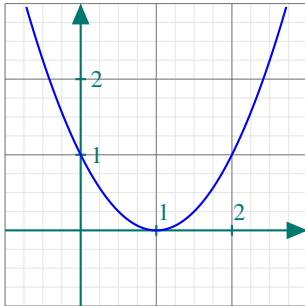
ESIMERKKI 3.89



$$2x^2 - 2x + 1 = 0:$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4, \text{ eli}$$

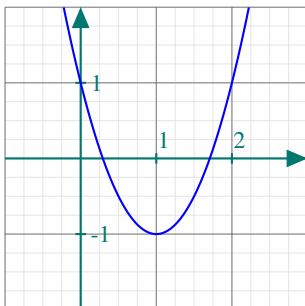
$D < 0$. Ei reaalisia ratkaisuja.



$$x^2 - 2x + 1 = 0:$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0, \text{ eli}$$

$D = 0$. Yksi reaaliratkaisu.



$$2x^2 - 4x + 1 = 0:$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 8 = 8, \text{ eli}$$

$D > 0$. Kaksi eri reaaliratkaisua.

ESIMERKKI 3.90

Selvitä, onko yhtälöllä $x^2 + x + 2 = 0$ ratkaisuja.

Tutkitaan diskriminanttia.

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

Koska $D < 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Jos yhtälön ratkaisemista yrittäisi ratkaisukaavan avulla, tulisi neliöjuuren alle negatiivinen luku.

ESIMERKKI 3.91

Millä k :n arvolla yhtälöllä $9x^2 + kx + 1$ on tasan yksi ratkaisu?

Jotta ratkaisuja olisi tasan yksi, on diskriminantin oltava 0.

$$D = 0$$

$$k^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$$

$$k^2 - 36 = 0$$

$$k^2 = 36$$

$$k = \pm 6$$

Yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun $k = -6$ tai $k = 6$.

Tehtäviä

Opi perusteet

157. Laske diskriminanttien arvot. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

a) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

b) $x^2 + 2x + 5 = 0$

c) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

d) $x^2 - 7x - 40 = 0$

158. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

a) $12x^2 + 12x - 4 = 0$

b) $12x^2 + 12x + 4 = 0$

159. Tulkitse polynomifunktion lauseketta: Onko kyseessä ylös- vai alaspäin aukeava paraabeli? Kuinka monta nollakohtaa funktiolla on?

a) $P(x) = -3x^2 + 9x - 5$

b) $Q(y) = 5y^2 - 2y + 1$

c) $R(z) = z^2 - 7z - 40$

d) $S(w) = 3w^2 - 6w + 3$

160. Millä luvuilla c yhtälöllä $x^2 + 5x + c = 0$ ei ole ratkaisua?

Hallitse kokonaisuus

161. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

a) $10x^2 - 8x - 35 = 14x - 10$

b) $-6x^2 + 15x - 59 = 5x + 17$

c) $3x^2 + 7x = 2x^2 + x - 9$

162. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $(2a - 1)x^2 + (a + 1)x + 3 = 0$ on täsmälleen yksi juuri?

163. Osoita, että polynomi $-2x^2 + 6x - 6$ saa vain negatiivisia arvoja.

164. Mitä voit sanoa ratkaisujen lukumäärästä vaillinaisten yhtälöiden $ax^2 + c = 0$ ja $ax^2 + bx = 0$ tapauksessa? Oletetaan, että $a, b, c \neq 0$.

Lisää tehtäviä

165. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

- a) $9x^2 + 12x - 4 = 0$
- b) $5x^2 + 4x - 10 = 0$
- c) $3x^2 - 12x + 12 = 0$
- d) $5x^2 + 10x - 30 = 0$

166. Millä vakion k arvoilla yhtälöllä $-x^2 - x - k = 0$ on ratkaisuja?

167. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 + x = ax - 5$ on täsmälleen yksi ratkaisu?

168. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on vakion a eri arvoilla?

- a) $x^2 + 6x + a + 1 = 0$
- b) $ax^2 + 4x - 1 = 0$

169. ★ Osoita, että diskriminantti on 0, jos ja vain jos yhtälö voidaan esittää muodossa

$(c_1x + c_2)^2 = 0$, missä c_1 ja c_2 ovat reaalilukuja.

3.5 Toisen asteen epäyhtälö



Opetus.tv: *toisen asteen epäyhtälö* (9.20 ja 10.19)

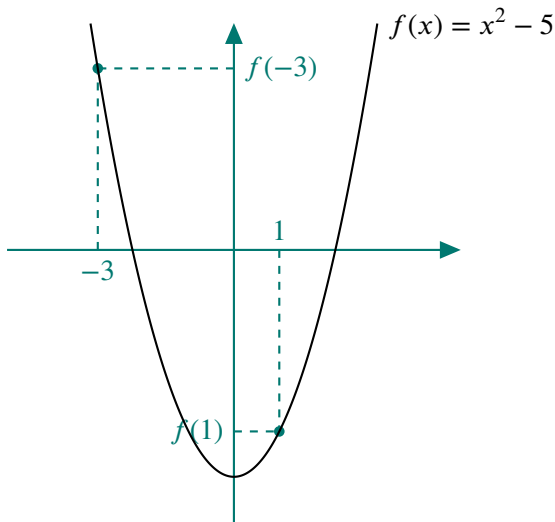
<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-epayhtalo/>

Toisen asteen epäyhtälön voi ratkaista tutkimalla toisen asteen polynomien kulkua.

ESIMERKKI 3.92

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 5 > 0$.

Ratkaisu: Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^2 - 5$. Tehtävänanto voidaan nyt muotoilla uudelleen. On selvitettävä, millä muuttujan x arvoilla polynomifunktion $f(x) = x^2 - 5$ arvot ovat positiivisia.



- Funktion arvot ovat positiivisia, kun funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella.
- Funktion arvot ovat negatiivisia, kun funktion kuvaaja on x -akselin alapuolella.

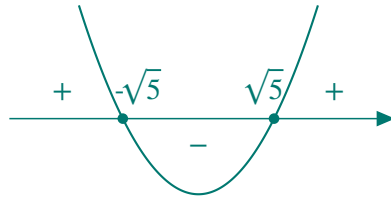
Kahden vierekkäisen nollakohdan välissä funktion kuvaaja on joko kokonaan

x -akselin alapuolella tai kokonaan x -akselin yläpuolella. Tällöin funktion arvot ovat aina joko pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia.

Funktion käyttäytymisestä saadaan siis paljon tietoa etsimällä sen nollakohdat:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\x^2 - 5 &= 0 \\x^2 &= 5 \\x &= \pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että funktio leikkaa x -akselin kohdissa $x = -\sqrt{5}$ ja $x = \sqrt{5}$. Kuvasta nähdään, että funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella, kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$. Siten funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$.



Vastaus: $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$.

Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain funktion nollakohdissa. Jos halutaan tietää, milloin toisen asteen polynomifunktion arvot ovat positiivisia tai negatiivisia, niin

1. Ratkaistaan funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ nollakohdat eli etsitään ne muuttujan x arvot, joilla $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Hahmotellaan funktion kuvaajan aukeamissuunta ja merkitään kuvaajaan funktion nollakohdat.
3. Päättellään hahmotelmasta milloin funktion arvot ovat positiivisia ja milloin negatiivisia.

Toisen asteen epäyhtälöitä voi toki ratkaista myös ilman paraabelien ominaisuuksiin vetoamista, mutta se ei ole sen helpompaa. Tästä lisää myöhemmin.

ESIMERKKI 3.93

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 6 < -5x$.

Ratkaisu: Muutetaan ensin epäyhtälö muotoon $x^2 + 5x - 6 < 0$ lisäämällä molemmille puolille termi $5x$. Nyt tehtävä voidaan ratkaista tutkimalla, millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 5x - 6$ arvot ovat negatiivisia.

1. Ratkaistaan polynomifunktion $f(x) = x^2 + 5x - 6$ nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

|| 2. asteen yhtälön ratkaisukaava

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

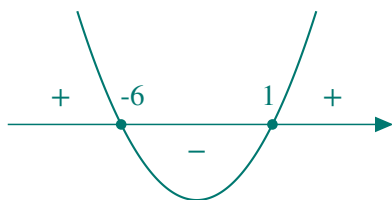
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x = -6 \text{ tai } x = 1$$

2. Hahmotellaan polynomifunktion kuvaaja. Se aukeaa ylöspäin, koska toisen asteen termin x^2 kerroin on positiivinen.



3. Kuvaajasta voidaan päätellä, että $f(x) < 0$, kun $-6 < x < 1$.

Vastaus. Alkuperäinen epäyhtälö toteutuu, kun $-6 < x < 1$.

ESIMERKKI 3.94

Ratkaise epäyhtälö $5x^2 + 13x + 3 < 0$.

Ratkaisu:

Tutkitaan funktiota $f(x) = 5x^2 + 13x + 3$. Nyt on selvittävää, millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia.

1. Ratkaistaan funktion nollakohdat, jotta tiedetään, missä kohdissa kuvaaja leikkaa x -akselin.

$$f(x) = 0$$

$$5x^2 + 13x + 3 = 0$$

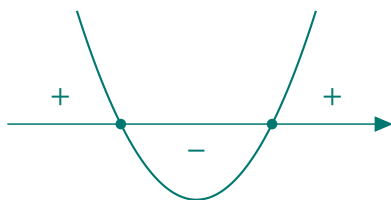
|| 2. asteen yhtälön ratkaisukaava

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 60}}{10}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{109}}{10}$$

2. Hahmotellaan funktion kuvaaja. Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin 5 on positiivinen.



3. Kuvaajasta voidaan päätellä, että $f(x) < 0$, kun $\frac{-13-\sqrt{109}}{10} < x < \frac{-13+\sqrt{109}}{10}$.

Vastaus: $\frac{-13-\sqrt{109}}{10} < x < \frac{-13+\sqrt{109}}{10}$

ESIMERKKI 3.95

Mikko rakentaa suorakulmion muotoista kaniaitausta lemmikkikanilleen. Aitaus rajoittuu yhdeltä sivulta Mikon taloon. Hänellä on yhteensä 14 metriä kaniverkkoa. Miten Mikon pitää valita aitauksensa mitat, jotta kaniaitauksen koko on vähintään 12 neliömetriä?

Ratkaisu

Olkoon talon suuntaisen sivun pituus y ja kahden päätysivun pituus x . Koska tiedämme, että $x + x + y = 14$, saadaan tästä ratkaistua talon suuntaisen sivun pituudeksi $y = 14 - 2x$. Aitauksen pinta-alaa kuvaa funktio

$A(x) = x(14 - 2x) = 14x - 2x^2 = -2x^2 - 14x$. Halutaan, että $A(x) > 12$, josta saadaan epäyhtälö $-2x^2 + 14x > 12$. Tämä epäyhtälö saadaan vielä muotoon $-2x^2 + 14x - 12 > 0$.

Nyt ratkaistavana on epäyhtälö $-2x^2 + 14x - 12 > 0$. Tutkitaan funktiota $f(x) = -2x^2 + 14x - 12$ ja selvitetään, milloin sen arvot ovat positiivisia.

Selvitetään ensin funktion nollakohdat:

$$-2x^2 + 14x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{-4}$$

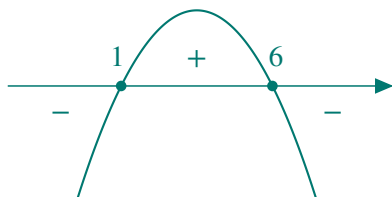
$$x = \frac{-14 \pm 10}{-4}$$

$$x = \frac{-24}{-4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4}{-4}$$

$$x = 6 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Hahmotellaan sitten funktion $f(x) = -2x^2 + 14x - 12$ kuvaaja. Koska 2. asteen termin kerroin -2 on negatiivinen, on kyseessä alaspäin aukeava paraabeli.

Hahmotellaan sen kuvaaja:



Kuvasta nähdään, että funktion arvot ovat positiivisia, kun $1 < x < 6$. Siten epäyhtälö $-2x^2 + 14x - 12 > 0$ toteutuu, kun $1 < x < 6$. Tämä tarkoittaa, että aitauksen ala on suurempi kuin 12 neliometriä, kun $1 < x < 6$.

Vastaus: Olkoon y aitauksen talonsuuntainen sivun ja x päätysivun pituus. Tällöin $1 < x < 6$ ja $y = 14 - 2x$. Toisin sanottuna, Mikko valitsee päätysivun pituudeksi (x) jotakin väliltä 1-6 m, jolloin talonsuuntaisen sivun pituus (y) metreinä saadaan sijoittamalla x lausekkeeseen $y = 14 - 2x$.

Tehtäviä

Opi perusteet

170. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $x^2 - 4 < 0$
- b) $x^2 + x \geq 0$
- c) $x^2 + 1 < 0$
- d) $x^2 + 5x + 6 > 0$

171. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $-x^2 + 5x + 8 > 0$
- b) $-2x^2 + 6x + 9 > 0$
- c) $4x^2 - 8x - 72 < 0$

172. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $4x^2 + 13x \geq 0$
- b) $4x^2 - 776 \geq 0$
- c) $7x^2 - 8x \leq 0$
- d) $11x^2 - 12 \leq 0$

Hallitse kokonaisuus

173. Tutki, millä muuttujan x arvoilla seuraavat funktiot saavat positiivisia arvoja.

- a) $f(x) = x^2 - 4$
- b) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$
- c) $h(x) = x^2 + 2x + 5$
- d) $i(x) = -x^2 - 1$

174. (K93/T3b) Autoilijan työmatkan kesto t riippuu liikennevirrasta m kaavan $t = 0,01m^2 + 0,03m + 18$ mukaisesti, missä t on ajoaika minuutteina ja m liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia?

175. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 - 6x + 10$ saa vain positiivisia arvoja.

176. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $6x^2 + 2tx + 2t = 0$ on kaksi juurta?

177. Jäätelökioskin päivittäiset kiinteät kulut ovat 400 euroa. Jokainen jäätelö maksaa kauppiaalle 0,50 euroa. Kun jäätelön myyntihinta on x euroa, sitä myydään $1\,000 - 200x$ kappaletta.

- a) Millä myyntihinnoilla jäätelön myynti on kannattavaa?
- b) Millä myyntihinnalla saadaan suurin tuotto? Kuinka suuri?

178. Ratkaise epäyhtälö $ax^2 + (a + 1)x + 1 > 0$ vapaan parametrin a funktiona.

179. Ratkaise seuraava epäyhtälö:

$$p + (3 - (2p - 6))^2 < \frac{2 + 9p}{3}(22 + 2)$$

Lisää tehtäviä

180. Ilmaan heitetyn pallon korkeus metreinä on $h = 20t - 5t^2$, missä t on aika sekunteina. Kuinka kauan pallo on yli 10 metrin korkeudella maasta?

181. Millä vakion r arvoilla yhtälöllä $rx^2 - rx - 1 = 0$ ei ole ratkaisua?

182. Ratkaise epäyhtälö $a^2x^2 + ax - 2 \geq 0$ vapaan parametrin a funktiona.

3.6 Polynomien jakolause



Opetus.tv: *polynomin jakaminen tekijöihin nollakohtiensa avulla* (6.48)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomi-tekijoihin-nollakohtien-avulla/>

Polynomin $P(x) = (x - 2)(x - 3)$ nollakohdat ovat tulon nollasäännön nojalla $x = 2$ ja $x = 3$. Nollakohdat voi siis nähdä tekijöihin jaetusta polynomista suoraan. Tämä yhteys toimii myös toisin päin: nollakohtien avulla voi selvittää polynomin tekijät.

Yleisesti on voimassa polynomien jakolause:

Polynomien jakolause

Jos $x = b$ on polynomin nollakohta, $x - b$ on polynomin tekijä.

Polynomien jakolauseen todistus jätetään kurssiin 12.

ESIMERKKI 3.96

Jaa tekijöihin polynomi $P(x) = x^2 - 3x + 2$.

Ratkaisu. Ratkaistaan ensin polynomin nollakohdat.

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 2 &= 0 \\x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\x &= \frac{3 \pm 1}{2} \\x &= 1 \text{ tai } x = 2.\end{aligned}$$

Nollakohtien perusteella $(x - 1)$ ja $(x - 2)$ ovat polynomin $P(x)$ tekijöitä.

Tarkistetaan: $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$.

Vastaus. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Ensimmäisen asteen tekijöiden lisäksi saatetaan tarvita vakiokerroin:

ESIMERKKI 3.97

Jaa polynomi $-2x^2 - x + 1$ tekijöihinsä.

Ratkaisu. Ratkaistaan nollakohdat:

$$-2x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{-4}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = \frac{1}{2}.$$

Jakolauseen mukaan $(x - \frac{1}{2})$ ja $(x - (-1))$ eli $(x + 1)$ ovat kyseisen polynomin tekijöitä. Ne keskenään kertomalla ei kuitenkaan saada oikeaa tulosta:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Puuttuu vielä korkeimman asteen termin kerroin -2 . Sillä kertomalla saadaan alkuperäinen polynomi: $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = -2x^2 - x + 1$.

Vastaus. $-2x^2 - x + 1 = -2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$.

Toisen asteen polynomin tekijät

Polynomien jakolauseen mukaan:

Jos toisen asteen polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat ovat x_1 ja x_2 ,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Huomaa, että kerroin a on edellisessä yhtälössä kummallakin puolella sama. (Muuten korkeimman asteen termit eivät täsmää.)

ESIMERKKI 3.98

Jaetaan tekijöihin $P(x) = 2x^2 + 4x - 30$.

Ratkaisu. Ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä

$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$

toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Nollakohdat ovat $x_1 = 3$ ja $x_2 = -5$.

Saadaan siis

$$P(x) = 2(x - 3)(x - (-5)) = 2(x - 3)(x + 5).$$

ESIMERKKI 3.99

Toisen asteen polynomin P nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 3$. Lisäksi $P(2) = 3$. Määritä $P(x)$.

Ratkaisu. Koska polynomin nollakohdat ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = 3$, polynomi on muotoa

$$P(x) = a(x - 1)(x - 3).$$

Lisäksi tiedetään $P(2) = 3$, joten saadaan

$$P(2) = a(2 - 1)(2 - 3) = 3$$

$$a \cdot 1 \cdot (-1) = 3 \quad \parallel : (-1)$$

$$a = -3.$$

Vastaus. $P(x) = -3(x - 1)(x - 3)$.

Jos toisen asteen polynomilla on vain yksi nollakohta, kyseessä on niin sanottu kaksinkertainen juuri. Voidaan tulkita, että nollakohdat x_1 ja x_2 ovat yhtäsuuret. Tällöin tekijöiksi saadaan $a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$.

ESIMERKKI 3.100

Jaa tekijöihin $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

Ratkaisu. Ratkaistaan nollakohdat:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{4} = 1.$$

Yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, joten se on kaksoisjuuri. Polynomi voidaan siis jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$P(x) = 2(x - 1)(x - 1) = 2(x - 1)^2.$$

Vastaus. $P(x) = 2(x - 1)^2$.

Jos toisen asteen polynomilla ei ole reaalisia nollakohtia, sitä ei voi jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin, joissa on vain reaalilukuja. (Sillä ensimmäisen asteen tekijällä on aina nollakohta.)

ESIMERKKI 3.101

Polynomia $x^2 + 4$ ei voi jakaa reaalisiin ensimmäisen asteen tekijöihin.

(Algebrallisten ja numeeristen menetelmien jatkokurssin kompleksiluvuilla tämä kyllä onnistuu).

Tehtäviä

Opi perusteet

183. Ratkaise yhtälöt, ja jaa vastaavat polynomifunktiot (joiden nollakohdat olet juuri laskenut) tekijöihinsä.

a) $x^2 + 6x - 6 = 0$

b) $-8x^2 + 10x - 2 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

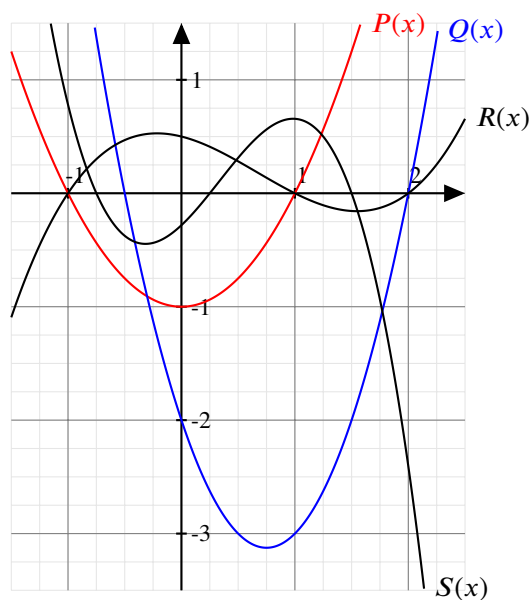
184. Jaa tekijöihin

a) $x^2 - 2x - 15$

b) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

c) $4x^2 + 2x + 2$

185. Millä seuraavista polynomeista on yhteisiä tekijöitä?



Hallitse kokonaisuus

186. Jaa tekijöihin helpoimmalla tavalla

a) $x^2 - 9$

b) $4x^2 - 4x + 1$

c) $4x^2 - 4x - 8$

187. Toisen asteen polynomille P pätee $P(-3) = P(4) = 0$ ja $P(1) = 12$. Ratkaise $P(x)$.

188. Osoita, että jos toisen asteen polynomin toisen asteen termin kerroin on 1, niin sen vakiotermi on yhtä suuri kuin sen nollakohtien tulo.

189. Toisen asteen polynomille P pätee $P(0) = P(5) = 3$ ja $P(3) = -27$. Ratkaise $P(x)$.

190. Paraabelin kuvaajia katsomalla voidaan huomata, että paraabelin huippu löytyy aina nollakohtien puolivälistä. (Tarkempi perustelu saadaan esimerkiksi kurssilla MAA4.) Symmetrian nojalla huipun x -koordinaatti on siis nollakohtien x -koordinaattien keskiarvo.

a) Etsi paraabelin $-10x^2 + 5x + 5$ huipun x - ja y -koordinaatit.

b) Johda lauseke yleisen paraabelin $ax^2 + bx + c$ huipun x -koordinaatille.

Lisää tehtäviä

191. Jaa tekijöihin.

a) $4x^2 + 4x + 1$

b) $4x^2 + 4x + 4$

c) $9 - x^2$

192. Jaa tekijöihin.

a) $x^2 - x - 6$

b) $(x - 4)^2 - 9$

193. Jaa tekijöihin.

a) $5x^2 + 10x - 15$

b) $12x^2 - 10x + 2$

c) $-8x^2 + 8x + 6$

194. Jaa tekijöihin.

a) $-10x^2 + 5x + 5$

b) $8x^3 - 12x^2 + 4x$

195. Kolmannen asteen polynomille P pätee $P(-1) = P(2) = P(3) = 0$ ja $P(1) = -8$. Ratkaise $P(x)$.

196. Määritä toisen asteen yhtälö jonka juuret ovat yhtälön $x^2 + 7x + 49 = 0$

a) juurien käänteisluvut

b) juurien neliöiden käänteisluvut.

197. ★ Tutki, onko seuraava väite totta vai ei: Jos polynomilla on nollakohta $x = 1$, sen kerrointen summa on 0.

198. ★ P on toisen asteen polynomi, jonka vakiotermi on 1. Polynomi Q määritellään lausekkeella $Q(x) = P(x + 1) - P(x)$ ja siitä tiedetään, että $Q(0) = 7$ ja $Q(1) = 13$. Määritä polynomin P lauseke.

LUKU 4

Korkeampi aste

4.1 Korkeamman asteen polynomifunktio



Opetus.tv: *N-asteinen polynomifunktio* (10.40)

<http://opetus.tv/maa/maa2/n-asteinen-polynomifunktio/>

Kaikki toisen asteen polynomien kuvaajat ovat paraabeleja, mutta korkeamman asteen polynomien kuvaajissa on enemmän vaihtelua. Yleisesti pätee kuitenkin seuraava tulos:

Polynomien ominaisuuksia

- Asteen n polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa.
- Jos polynomien aste on pariton, sillä on vähintään yksi nollakohta.

Todistetaan näistä ensimmäinen tulos:

Todistus. Jos n asteen polynomilla P olisi yli n eri nollakohtaa, sillä olisi yli n ensimmäisen asteen tekijää. Polynomien P aste olisi siis yli n , mikä on ristiriita. Nollakohtia on siis korkeintaan n . $\square$

Toista tulosta ei todisteta tässä täsmällisesti, mutta valoitetaan asiaa esimerkin kautta. Tutkitaan esimerkiksi polynomia

$$P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d.$$

Polynomia on kätevintä tarkastella muodossa, jossa x^3 on otettu yhteiseksi tekijäksi:

$$P(x) = x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right)$$

Kun x on hyvin suuri positiivinen tai hyvin pieni negatiivinen luku, termit $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x^2}$ ja $\frac{d}{x^3}$ ovat hyvin pieniä, eli

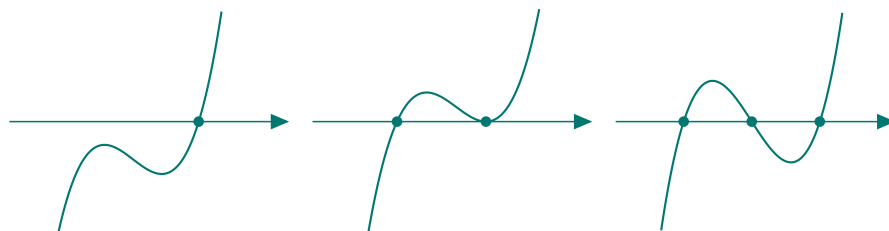
$$P(x) = x^3 \left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right) \approx x^3 (1 + 0 + 0 + 0) = x^3$$

Voidaan siis päätellä, että riippumatta kertoimista b , c , d , polynomin $P(x)$ merkki on sama kuin muuttujan x merkki, kun x on itseisarvoltaan suuri.

Koska P saa sekä positiivisia että negatiivia arvoja, sillä on jossakin niiden välissä nollakohta. (Tämän takaa jatkuvuus, josta lisää kurssilla 7.) Esimerkin mukaisilla kolmannen asteen polynomeilla on siis aina nollakohta. Yleisesti pätee, että kaikilla paritonasteisille polynomeilla on ainakin yksi nollakohta.

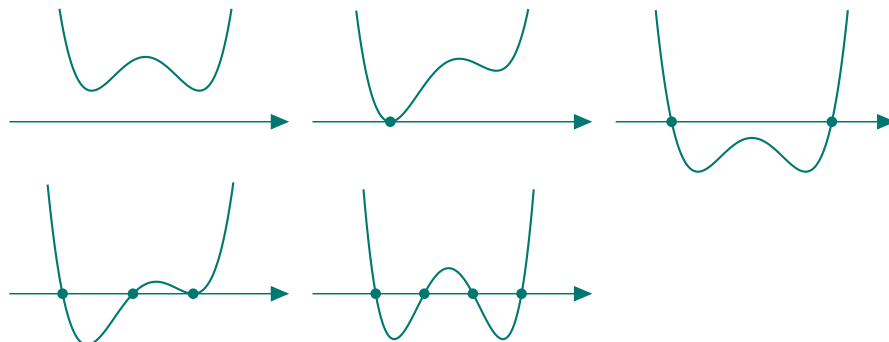
ESIMERKKI 4.102

Kolmannen asteen polynomilla on 1–3 nollakohtaa.



ESIMERKKI 4.103

Neljännän asteen polynomilla on 0–4 nollakohtaa.



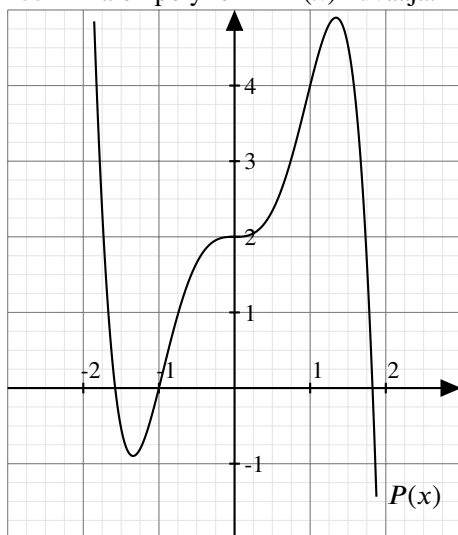
Tehtäviä

Opi perusteet

199. Anna esimerkki

- a) neljännen asteen polynomista, jolla on neljä nollakohtaa
- b) kolmannen asteen polynomista, jolla on kaksi nollakohtaa
- c) neljännen asteen polynomista, jolla on yksi nollakohta
- d) neljännen asteen polynomista, jolla ei ole nollakohtia

200. Alla on polynomin $P(x)$ kuvaaja.



Kaikki polynomin nollakohdat näkyvät kuvaajassa.

- a) Mitä voidaan sanoa polynomin P asteesta?
- b) Mikä on polynomin P vakiotermi?

Hallitse kokonaisuus

201. Mikä on se kolmannen asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat $x = 2$, $x = -1$ ja $x = 3$, ja jonka vakiotermi on 3?

202. Kolmannen asteen polynomille P pätee $P(1) = P(2) = P(3) = -2$ ja $P(0) = 16$. Ratkaise $P(x)$.

Lisää tehtäviä

203. ★ Osoita, että jos n asteen polynomeilla $P(x)$ ja $Q(x)$ on $n+1$ yhteistä pistettä, ne ovat sama polynomi.

4.2 Korkeamman asteen yhtälöt



Opetus.tv: *N-asteinen polynomi yhtälö* (8.38, 6.20 ja 15.53)

<http://opetus.tv/maa/maa2/n-asteinen-polynomi yhtalo/>

Jos toisen asteen polynomi yhtälöllä on reaalilukuratkaisuja, ne löytyvät ratkaisukaavalla. Myös kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille on olemassa ratkaisukaavat. Ne ovat kuitenkin niin monimutkaisia, että ne eivät juuri sovellu käsin laskettaviksi, eikä niitä siksi esitellä tässä. Korkeamman kuin neljännen asteen yhtälöille sen sijaan ei edes ole olemassa yleistä ratkaisukaavaa. Tämän osoitti norjalainen matemaatikko Niels Henrik Abel vuonna 1823.

Korkeamman kuin toisen asteen yhtälöt ratkaistaan käytännössä yleensä tietokoneen avulla. Niille yhtälöille, joille ei ole ratkaisukaavaa, ratkaiseminen onnistuu vain numeerisesti eli likiarvoja käyttäen. Joissain erikoistapauksissa korkeamman asteen yhtälön ratkaiseminen onnistuu nopeasti myös käsin. Seuraavassa tarkastellaan tällaisia yksinkertaisia erikoistapauksia.

4.2.1 POTENSSIYHTÄLÖ

Jos yhtälössä esiintyy vain yhtä muuttujan x potenssia, yhtälö ratkeaa lopulta potenssin astetta vastaavan juuren avulla.

ESIMERKKI 4.104

Ratkaise yhtälö $x^5 + 7 = 0$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} x^5 + 7 &= 0 & \parallel & -7 \\ x^5 &= -7 & \parallel & \sqrt[5]{} \\ x &= \sqrt[5]{-7} \\ x &= -\sqrt[5]{7} \end{aligned}$$

Vastaus. $x = -\sqrt[5]{7}$.

4.2.2 TEKIJÖIHINJAKO

Polynomi yhtälöitä voidaan toisinaan ratkaista jakamalla polynomi tekijöihin.

ESIMERKKI 4.105

Ratkaise yhtälö $x^3 - 3x^2 + x = 0$.

Ratkaisu. Polynomissa $x^3 - 3x^2 + x$ ei ole vakiotermiä. Voidaan siis ottaa yhteiseksi tekijäksi x , jolloin polynomi tulee muotoon $x(x^2 - 3x + 1)$. Nyt yhtälön ratkaiseminen voidaan aloittaa soveltamalla tulon nollasääntöä:

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2 + x &= 0 \\x(x^2 - 3x + 1) &= 0 \\x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Jäljelle jäävään toisen asteen yhtälöön $x^2 - 3x + 1 = 0$ voidaan käyttää ratkaisukaavaa:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vastaus. $x = 0$ tai $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Jos polynomi siis osataan jakaa tekijöihin, yhtälön voi ratkaista tulon nollasäännön avulla. Sopiva tekijöihinjako voi kuitenkin olla vaikea löytää. Tarkastellaan vielä toista esimerkkiä.

ESIMERKKI 4.106

Ratkaise yhtälö $x^3 - 17x^2 - x + 17 = 0$.

Ratkaisu. Yhtälön vasemmalla puolella olevan polynomin voi jakaa tekijöihin ryhmittelemällä:

$$x^3 - 17x^2 - x + 17 = x^2(x - 17) + (-1)(x - 17) = (x^2 - 1)(x - 17).$$

Nyt yhtälö ratkeaa tulon nollasäännöllä:

$$\begin{aligned} x^3 - 17x^2 - x + 17 &= 0 \\ (x^2 - 1)(x - 17) &= 0 \\ x^2 - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 17 &= 0 \\ x^2 = 1 \quad \text{tai} \quad x &= 17 \\ x = \pm 1 \quad \text{tai} \quad x &= 17 \end{aligned}$$

Vastaus. $x = 17$, $x = 1$ tai $x = -1$

4.2.3 SIJOITUKSET

Joskus yhtälöt ratkeavat, kun niihin sijoitetaan jokin apumuuttuja. Tällöin puhutaan muuttujanvaihdesta.

ESIMERKKI 4.107

Ratkaise yhtälö $2x^4 + 14x^2 - 36 = 0$.

Ratkaisu. Koska $x^4 = (x^2)^2$, ratkaistava yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa $2(x^2)^2 + 14x^2 - 36 = 0$. Kun nyt sijoitetaan lausekkeen x^2 paikalle y , eli merkitään $y = x^2$, saadaankin muuttujan y yhtälö

$$2y^2 + 14y - 36 = 0.$$

Tämä on toisen asteen yhtälö, joka osataan ratkaista esimerkiksi ratkaisukaavalla. Tällä tavoin saadaan

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2} = \frac{-14 \pm 22}{4}.$$

Ratkaisut ovat siis $y = 2$ ja $y = -9$.

On kuitenkin vielä selvitettävä alkuperäisen muuttujan x arvot. Koska $x^2 = y$,

saadaan y :lle löydettyistä arvoista yhtälöt $x^2 = 2$ ja $x^2 = -9$. Reaaliluvun neliö ei kuitenkaan voi olla negatiivinen, joten ainoat ratkaisut ovat yhtälön $x^2 = 2$ ratkaisut. Ne ovat $x = \pm\sqrt{2}$.

Vastaus. $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$

Muotoa $ax^4 + bx^2 + c = 0$ oleva yhtälö (eli ns. **bikvadraattinen yhtälö**) voidaan aina ratkaista sijoittamalla $y = x^2$. Yleisemmin muotoa $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ olevat yhtälöt voidaan ratkaista sijoituksella $y = x^n$.

ESIMERKKI 4.108

Ratkaise yhtälö $x^{10} + x^5 = 2$.

Ratkaisu. Muutetaan yhtälö muotoon $(x^5)^2 + x^5 - 2 = 0$ ja tehdään sijoitus $y = x^5$. Nyt yhtälö saa muodon $y^2 + y - 2 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan yhtälön ratkaisuiksi $y = -2$ ja $y = 1$.

Nyt alkuperäisen yhtälön ratkaisut saadaan yhtälöistä $x^5 = -2$ ja $x^5 = 1$. Siten ratkaisut ovat $x = \sqrt[5]{-2}$ ja $x = 1$.

Vastaus. $x = \sqrt[5]{-2}$ tai $x = 1$

Tehtäviä

Opi perusteet

204. Ratkaise yhtälöt.

a) $x(x + 2)(x + 17) = 0$

b) $x^9 = -512$

c) $x^6 - 7x^7 = 0$

205. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^6 - x^4 = 0$

206. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

b) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

Hallitse kokonaisuus

207. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$

b) $x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x = 0$

c) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

208. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^8 - 1 = 0$

b) $x^8 - x^4 = 0$

c) $x^8 - x^4 - 1 = 0$

209. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^4 - 16 = 0$

b) $2x^4 = 8x^2$

c) $x^6 - 2x^3 = 3$

d) $x^{100} - 2x^{50} + 1 = 0$

210. Kun kolme peräkkäistä kokonaislukua kerrotaan keskenään, ja tuloon lisätään keskimäinen luku, tulos on 15 kertaa keskimäisen luvun neliö. Mitkä luvut ovat kyseessä?

211. Ratkaise yhtälö $x^{627} - 6x^{514} + 5x^{401} = 0$.

212. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$

b) $x^8 + 4x^4 = 5x^6$

213. Ratkaise yhtälö $5^{x^3+4x^2+x} = 1$.

Lisää tehtäviä

214. Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = x^5$ saa saman arvon kuin funktio $g(x) = x^4$?

215. ★ (K94/T2a) Polynomin $P(x) = ax^3 - 31x^2 + 1$ eräs nollakohta on $x = 1$. Määritä a ja ratkaise tämän jälkeen yhtälö $P(x) = 0$.

216. ★ Ratkaise yhtälö $(x + \frac{1}{x})^2 - x - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

217. ★ Ratkaise yhtälö $2^x - 1 = \frac{12}{2^x}$

4.3 Korkeamman asteen epäyhtälöt



Opetus.tv: *N-asteinen polynomiepäyhtälö* (16.19 ja 12.00)

<http://opetus.tv/maa/maa2/n-asteinen-polynomiepayahtalo/>

Korkeamman asteen epäyhtälö, kuten epäyhtälö

$$x^3 - 6x \leq x^2$$

voiaan ratkaista siirtämällä kaikki termit epäyhtälön toiselle puolelle ja tutkimalla syntyvän polynomin merkkiä:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x &\leq x^2 && \parallel -x^2 \\ \underbrace{x^3 - x^2 - 6x}_{P(x)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Polynomin $P(x)$ merkin selvittämiseksi ratkaistaan sen nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 6x &= 0 && \parallel x \text{ yhteiseksi tekijäksi} \\ x(x^2 - x - 6) &= 0 && \parallel \text{tulon nollasääntö} \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 6 &= 0 && \parallel \text{ratkaisukaava} \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ x = -2 \quad \text{tai} \quad x &= 3. \end{aligned}$$

Polynomin P nollakohdat ovat siis 0, -2 ja 3. Tästä voidaan jatkaa kahdella eri tavalla.

Tapa 1: Tekijöihin jako.

Jaetaan polynomi tekijöihin nollakohtien avulla:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x + 2)(x - 3).$$

Tutkitaan kunkin tulon tekijän merkkiä:

$$x + 2 > 0 \quad \text{kun} \quad x > -2$$

$$x - 3 > 0 \quad \text{kun} \quad x > 3$$

$$x > 0 \quad \text{kun} \quad x > 0.$$

Kootaan tulokset **merkkikaavioon**. Merkitään ensin lukusuoralle polynomin P nollakohdat. Nämä kolme nollakohtaa jakavat lukusuoran neljään osaan. Taulukoidaan lukusuoran alle kunkin tekijän merkki kullakin välillä.

	-2	0	3	
$x + 2$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
x	-	-	+	+
$x(x + 2)(x - 3)$	-	+	-	+

Merkkikaavion alin rivi saadaan tulon merkkisäännöstä: kolmen negatiivisen luvun tulo on negatiivinen, yhden positiivisen ja kahden negatiivisen tulo positiivinen ja niin edelleen. Kaavion viimeiseltä riviltä voidaan nyt lukea vastaus alkuperäiseen kysymykseen: $x^3 - x^2 - 6 \leq 0$, kun $x \leq -2$ tai $0 \leq x \leq 3$.

Tapa 2: Testipisteet.

Polynomit ovat jatkuvia funktioita. (Jatkuvuutta käsitellään tarkemmin vasta kurssilla 7.) Intuitiivisesti jatkuvuudessa on kyse siitä, että funktion kuvaaja on yhtenäinen viiva. Jatkuvuudesta seuraa, että polynomi ei voi vaihtaa merkkiä kulkematta nollakohdan kautta. Polynomin merkin nollakohtien välillä saa selville laskemalla funktion arvon jossakin väliltä otetussa testipisteessä.

Esimerkissä nollakohdat olivat -2 , 0 ja 3 . Valitaan niiden välistä ja ympäriltä testipisteiksi vaikkapa $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 4$. Tarkistetaan funktion merkki kussakin pisteessä:

Väli	Testipiste	$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$	Funktion merkki
$x < -2$	$x = -3$	$(-3)^3 - (-3)^2 - 6(-3) = -18$	-
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$(-1)^3 - (-1)^2 - 6(-1) = 4$	+
$0 < x < 3$	$x = 1$	$1^3 - 1^2 - 6 \cdot 1 = -6$	-
$3 < x$	$x = 4$	$4^3 - 4^2 - 6 \cdot 4 = 24$	+

Vastaukseksi saadaan sama kuin edellä: $x^3 - x^2 - 6 \leq 0$, kun $x \leq -2$ tai $0 \leq x \leq 3$.

ESIMERKKI 4.109

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - x^4 \leq 0$.

Ratkaisu. Jaetaan ensin tekijöihin ja ratkaistaan nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2 + x^4 &= x^2(1 - x^2) & \parallel & \text{muistikaava} \\ &= x^2(1 - x)(1 + x) \end{aligned}$$

Nollakohdat ovat $x = 0$, $x = 1$ ja $x = -1$. Tehdään merkkikaavio:

		-1	0	1	
					$\rightarrow x$
x^2		+	+	+	+
$1 - x$		+	+	+	-
$1 + x$		-	+	+	+
$x^2(1 - x)(1 + x)$		-	+	+	-

Merkkikaaviosta voidaan lukea, että $x^2(1 - x)(1 + x) < 0$, kun $x < -1$ tai $x > 1$. Lisäksi $x^2(1 - x)(1 + x) = 0$, kun $x = -1$, $x = 0$ tai $x = 1$.

Vastaus. $x \leq -1$, $x = 0$ tai $x \geq 1$.

Tehtäviä

Opi perusteet

218. Ratkaise

a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \leq 0$

b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$

c) $-3(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$.

219. Ratkaise $x^3 - x^2 < 0$.

220. Ratkaise $x^4 \leq 1$.

Hallitse kokonaisuus

221. Ratkaise $(2x^3 + 4x^2 - 5x + 7)^2 < 0$.

222. Ratkaise $x^4 - 3x^2 - 18 \leq 0$.

223. Olkoon $a > 0$. Millä muuttujan x arvoilla funktion $P(x) = x^3 - ax$ arvot ovat positiivisia?

224. Koska tulolla ja osamäärällä on sama merkkisääntö, merkkikaavioita voidaan käyttää myös osamääriin. Ratkaise epäyhtälöt

a) $\frac{(x+3)(x-2)}{x-5} \leq 0$

b) $x \geq \frac{1}{x}$

225. Ratkaise $4x^5 + 9x^3 \leq 12x^4$.

226. Ratkaise $(x^5 - 2)(x^8 - 1) > 0$

227. Epäyhtälöiden ratkaisut/todistukset perustuvat usein tietoon, että epänegatiivisten lukujen summa on epänegatiivinen ja nolla jos, ja vain jos kaikki yhteenlaskettavat ovat nollia.

a) Ratkaise $x^6 + x^2 + 1 > 0$

b) Ratkaise $x^{10} + (x - 1)^{10} < 0$

c) Todista, että kaikilla reaalityyppisillä x ja y pätee

$$(xy - 1)^2 + (x^2 - y^2)^4 + (xy - x - y + 1)^6 \geq 0$$

ja että epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos, ja vain jos $x = y = 1$

Lisää tehtäviä

228. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x^3 + 2x^2 - 15x > 0$

b) $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$

229. Ratkaise $x + 2x^6 + x^{11} < 0$.

LUKU 5

Kertausosio

Testaa tietosi!

OSAATKO SELITTÄÄ?

230. Miksi polynomin vakiotermi (tai vakiopolynomin) asteluku on nolla?
231. Miksi puhutaan vain termien summasta, vaikka polynomeissa voi esiintyä miinusmerkkejä?
232. Miten usean muuttujan polynomin asteluku lasketaan?
233. Mitä tarkoitetaan tulon nollasäännöllä?
234. Kun polynomi jaetaan tekijöihin (jotka eivät ole vakioita), mitä voit varmasti sanoa tekijäpolynomien asteista verrattuna alkuperäiseen polynomiin?
235. Miten selvität polynomin $(x^3 - 2x)^{15}$ asteen purkamatta sulkuja?
236. Miksi epäyhtälön ”suunta muuttuu”, kun se kerrotaan puolittain negatiivisella luvulla?

MONIVALINTA

Valitse kussakin monivalintatehtävässä yksi paras vastaus.

237. Mitkä ovat polynomin $x^4 - x^2 + \sqrt{2}x - 1$ 337 termien kertoimet neljännessä asteesta pienempään luetellen?

- a) 1, -1, $\sqrt{2}$ ja -1 337
b) 1, 0, -1, $\sqrt{2}$ ja -1 337
c) 1, 0, -1, $\sqrt{2}$ ja 1 337
d) 1, 1, $\sqrt{2}$ ja 1 337

238. Tulosta ab tiedetään, että $a = 0$. Mikä seuraavista väitteistä pitää välttämättä paikkansa?

- a) $b \geq a$
- b) $b = 0$
- c) $|b| \geq a$
- d) $ab = 0$

239. Mikä seuraavista epäyhtälöistä pitää paikkansa?

- a) $5,2 \cdot 10 < 52$
- b) $52 > 520 : 100$
- c) $52 > 5\,200$
- d) $520 < 52$
- e) $52 \cdot 10 < 52$

240. Mitkä ovat funktion $f(x) = (x + 3)(x - 50)$ nollakohdat?

- a) 3 ja -50
- b) -3 ja -50
- c) -3 ja 50
- d) 3 ja 50

241. Monettako astetta on kahden muuttujan polynomi $x^5y - x^4y^3 - 715\,517y$?

- a) 1.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 7.

242. Mikä on polynomin $P(x) = -x^3 - x^2 - x - 1$ arvo kohdassa $x = -1$?

- a) -4
- b) -2
- c) 0
- d) 1
- e) 2

243. Mikä polynomi saadaan, kun avataan sulut lausekkeesta $(2x - 1)^2$ ja sievennetään?

- a) $2x^2 + 1$
- b) $4x^2 + 1$
- c) $2x^2 - 1$
- d) $4x^2 - 1$
- e) $4x^2 - 4x + 1$
- f) $4x^2 + 4x + 1$
- g) $4x^2 - 4x - 1$

244. Määritellään kahden funktion arvot kaavoilla $f(x) = x^2 + 1$ ja $g(x) = x^2 - x$. Mikä väitteistä ei pidä paikkaansa?

- a) $f(x) + g(x) = 2x^2 - x + 1$
- b) $f(x) \cdot g(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$
- c) $f(0) = g(0)$
- d) $f(-1) = g(-1)$

245. Eräs reaaliuuttujan polynomi saa kahdella erillisellä, suljetulla reaalilukuvälillä negatiivia arvoja ja kaikkialla muualla epänegatiivisia arvoja. Kuinka monta nollakohtaa polynomilla on?

- a) nolla
- b) yksi
- c) kaksi
- d) kolme
- e) neljä

TOSI VAI EPÄTOSI?

Pitävätkö väitteet paikkansa?

246. a) Potenssifunktiot ovat polynomifunktioita.

b) Lauseke $(x + 1)(x - 1)$ on yhtäpitävä lausekkeen $(1 + x)(1 - x)$ kanssa.

c) Jos epäyhtälön molemmat puolet korotetaan kolmanteen potenssiin, epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä.

d) $5 \leq x$ esittää, että x kuuluu puoliavoimelle välille.

e) Jos $a > 0$, niin $\frac{b}{a} < \frac{c}{a}$ täsmälleen silloin kun $b < c$.

247. a) Jos trinomin kertoo trinomilla, sulkeet avaamalla saadaan kuusi termiä (ennen mahdollista sieventämistä eli samanasteisten termien yhdistämistä).

b) Jos kolmannen asteen polynomi korotetaan kokonaisuudessaan kolmanteen potenssiin, saadaan tulomuotoinen yhdeksannen asteen polynomi.

c) Kaikki lukua 100 suuremmat reaalityluvut muodostavat avoimen välin.

Kertaustehtäviä

Polynomi

248. Laske.

a) $x + x + x$

b) $x \cdot x \cdot x$

c) $-5x^2 - 5x^2$

d) $2x \cdot 7x$

e) $\frac{1}{2}x^2 \cdot (-6x^3)$

249. Laske.

a) $-2x^3 + 4x - x^2 - x + 5x^3$

b) $x - 3 - (5 - x)$

c) $(x^2 + 5x + 2) - (-x^2 + 3x - 5)$

d) $3x(x - 7)$

e) $-2x^2(3x^5 - 12x^2 + 1)$

250. Kerro sulut auki.

a) $(x - 2)(x + 4)$

b) $(3a + b)(a - b)$

c) $(a + 3)^2$

d) $(x - 1)^2$

e) $(4x + 1)(4x - 1)$

251. Jaa tekijöihin.

a) $4x^2 + x$

b) $5x^3y + 10xy^2$

c) $y^2 - 9$

d) $x^2 - 4x + 4$

e) $x^4 - 5x^3 + 10x - 50$

252. Jaa tekijöihin.

a) $x^3 - x$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

c) $9 - x^4$

253. Sievennä muistikaavan avulla

a) $(x^2 - 1)^2$

b) $(a^6 + 3b^3)^2$

c) $(-12 - 3x)(12 - 3x)$

d) $(x + \frac{1}{x})^2$

254. Jaa tekijöihin muistikaavojen avulla.

a) $x^2 - 4x + 4$

b) $9y^2 + 6y + 1$

c) $49 - 4x^2$

255. Sievennä.

a) $(x - 3)(2x^3 - 3x + 4)$

b) $(x^2 + 1)(x^3 - 2x - 4)$

c) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

d) $(\frac{x}{5} - \frac{2}{3})(x^2 + x + 1)$

256. Ratkaise yhtälö jakamalla tekijöihin.

a) $x^3 - x^2 = 0$

b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 4$

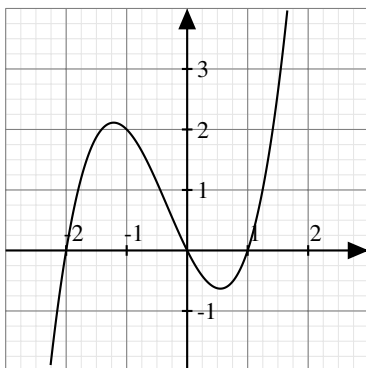
257. Ratkaise yhtälö $(x - 3)(x + 2)(x - 1) = 0$.

258. Miksi polynomi $x^6 + 3x^2 + 5$ ei voi saada negatiivisia arvoja?

259. a) Osoita oikeaksi kaavat $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ja $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

b) Jaa $x^6 - y^6$ neljään tekijään.

260. Kuvassa on polynomin $P(x)$ kuvaaja.



- a) Mitkä ovat polynomin nollakohdat?
- b) Millä muuttujan x arvoilla $P(x) > 0$?
- c) Kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $P(x) = 1$ on?

261. Jaa tekijöihin $(a + b)^2 - 16$.

262. Sievennä:

- a) $(a^2 - 1)^2 + (a^2 + 1)^2 - 2(a^4 + 1)$
- b) $(x + y)^2 - 4xy$

Ensimmäinen aste

263. Ratkaise yhtälöt.

- a) $3x - 5(x - 2) = 3 - (-x)$
- b) $x(x - 6) = x^2 + 5$
- c) $\frac{2x}{3} - \frac{x-3}{4} = 7$

264. Kirjoita joukko-opilliset ehdot (kaksois)epäyhtälöinä.

- a) $x \in [2, 7]$
- b) $y \in] - 3, 0]$
- c) $z \in] - \infty, 5[$

265. Ratkaise epäyhtälöt.

- a) $-3x < 6$
- b) $5x - 2 > 7x + 3$
- c) $-2(x + 3) \leq x - (5 - x)$

266. Ratkaise seuraavat yhtälöt tai epäyhtälöt.

a) $-2r + 6 = 0$

b) $-2r + 6 \leq 0$

c) $5y - 2 < y + 6$

d) $8(x + 2) \geq -5(5 - x) + 3$

e) $\frac{x+3}{2} + \frac{-2x+1}{3} > \frac{x-9}{4}$

267. Ratkaise kaksoisepäyhtälö $2x - 1 < x \leq 3 + 5x$.

268. Polkupyörävuokraamo A laskuttaa pyörän vuokrasta 5 € ja lisäksi 2,5 € jokaisesta täydestä tunnista. Vuokraamo B laskuttaa 11,50 € ja lisäksi 1,5 € jokaisesta täydestä tunnista. Kuinka monen tunnin vuokrassa vuokraamo B on edullisempi?

269. Kirahvi kantaa suussaan karahvia ja kävelee vaa'alle, jonka toisella puolella on 7 karahvia ja sattuu niin, että vaaka on tasapainossa. Mikä on karahvin paino kirahveina?

270. Ratkaise epäyhtälö $ax \geq a - 2x$ parametrin a kaikilla arvoilla.

Toinen aste

271. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 - 13 = 0$

b) $5x^2 + 2x = 0$

c) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

272. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 5x - 12 = 0$

c) $3x^2 - 7x - 20 = 0$

d) $x^2 + 3x - 5 = 0$

e) $x^2 + 5x - 24 = 0$

273. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 + 3x - 5 = 4x + 8$

b) $8x^2 - 5x + 1 = -36$

c) $-3x^2 - 4x + 2 = -5x^2 + 3$

d) $-3x^2 + 4x + 13 = -5x^2 + 10x + 9$

274. Ratkaise yhtälö $x - 3 = \frac{1}{x}$.

275. Ratkaise epäyhtälöt.

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $x^2 \geq 5x$

276. Maijan ja Veeran ikien summa on 30. Ikien tulo on yli 186. Minkä ikäisiä tytöt voivat olla?

277. Millä vakion k arvolla yhtälöllä $kx^2 + kx = x - 3$ on tasan yksi ratkaisu?

278. Polynomilla $P(x) = x^2 - 3x + c$ on tekijä $x + 5$. Mikä on c ?

279. Suorakulmion A sivut ovat 9 ja $x^2 + 1$, suorakulmion B sivut $5x + 5$ ja $5 - x$. Millä luvun x arvoilla suorakulmion A ala on suurempi?

280. Neliön muotoisen taulun sivu on 36 cm. Taululle tehdään tasalevyinen kehys, jonka nurkat on pyöristetty neljännesympyrän muotoisiksi. Kuinka leveä kehys on, kun sen pinta-ala on puolet taulun pinta-alasta? Ympyrän pinta-ala on πr^2 .

Korkeampi aste

281. Ratkaise yhtälö $2x^7 = 5x^2$.

282. Anna esimerkki (jos mahdollista)

a) 4. asteen yhtälöstä, jolla ei ole ratkaisua

b) 5. asteen yhtälöstä, jolla on tasan kaksi ratkaisua

c) 3. asteen yhtälöstä, jolla on tasan neljä ratkaisua

283. Ratkaise yhtälö $x^4 = x^2 + 6$.

284. Ratkaise yhtälö $x^7 = 5x^5 - x^6$.

285. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^4 + 7x^3 = 0$

b) $2x^3 - 16x^2 + 32x = 0$

c) $x^6 + 6x^5 = -9x^4$

d) $x^3 - 2x^5 = 0$

286. Mitkä luvut ovat kuutiotaan suurempia?

287. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x^4 < 5x$

b) $2x^3 \leq 3x - 5x^2$

288. Kuution tilavuus (kuutiometreinä) on sama kuin sen särmien pituuksien summa (metreinä). Kuinka pitkä on kuution särmä?

289. Ratkaise yhtälö $2x^5 - (x + 6)^5 = 0$.

290. Etsi yhtälön $x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 1 = 0$ kaikkien kolmen ratkaisun likiarvot laskimella tai tietokoneen avulla. Anna vastaukset kahden desimaalin tarkkuudella.

Harjoituskokeita

Seuraavissa harjoituskokeissa on kussakin kahdeksan tehtävää, jotka on suunniteltu niin, että jokaisesta (alakohtineen) saa korkeintaan kuusi pistettä.

HARJOITUSKOE 1

291. a) Perustele, onko $t^x + 1$ polynomi. (1 p.)

b) Trinomi kerrotaan toisella trinomilla. Kuinka monta termiä syntyneeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista sieventämistä)? (0,5 p.)

c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $(x^2 + 1)^{10}(1 - x)^2$ aste? (0,5 p.)

d) Mainitse jokin luku, joka kuuluu välille]1,966; 1,967[. (0,5 p.)

e) Mikä on korkeimman asteen termin kerroin polynomiyhtälössä $9\,001k^2 - \frac{1}{4}k - \sqrt{2}k^3 = -k^2 + k^3$? (0,5 p.)

f) Polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(x - 2)x(x + 3)$. Mikä on kyseisen polynomin suurin nollakohta? (1 p.)

g) Minkälainen (muoto & mahdollinen suunta) kuvaaja on polynomifunktiolla P , jonka arvot lasketaan yhtälöllä $P(t) = -100 - \frac{1}{2}t$? (1 p.)

h) Jaa tekijöihin polynomi $x^2 + 2x + 1$. (1 p.)

292. a) Näytä, että polynomiyhtälöt $(t + 1)^2 = t + 1$ ja $t^2 = -t$ ovat samat.

b) Osoita, että $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.

293. Ratkaise epäyhtälöistä x .

a) $\frac{2x}{3} - 1 \geq \frac{3}{2}x$

b) $(\frac{1}{2}x - 1)^2 < 1 - (x - 1)^2$

294. Ratkaise yhtälöistä tuntematon reaalityö z .

a) $(2 + \frac{\sqrt{2}}{2})z^2 - z = \sqrt{2}z^3$

b) $z^4 - 2z^2 + 1 = 0$

295. Millä parametrin k arvoilla yhtälöllä $kx^2 - (k + 1)x + 1 = 0$ on kaksi erisuurta reaalityö?

296. Sofie tallettaa 1 000 euroa uudelle pankkitilille vuoden alussa ja uudelleen saman verran vuoden kuluttua. Pankki maksaa talletukselle vuosikorkoa siten, että kahden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksen tilillä on rahaa 2 100 euroa. Kuinka suuri on pankin tarjoama korkokanta prosentin kymmenesosan tarkkuudella? Inflaatiota ja korkotuotoista maksettavaa lähdeveroa ei oteta huomioon. Muita tilitapahtumia ei ole.

297. Mikä on funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pienin arvo, kun funktion arvot määritellään kaavalla $f(x) = 3x^2 - 12x + 6$?

298. a) Osoita, että kolmannen asteen polynomi $x^3 \pm y^3$ voidaan esittää tulomuodossa $(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$. (2 p.)

b) Ratkaise epäyhtälö $z^3 - 8 \geq z - 2$. (4 p.)

HARJOITUSKOE 2

299. a) Perustele, onko $\frac{1}{t^2} + \pi$ polynomi. (1 p.)

b) Binomi kerrotaan trinomilla. Kuinka monta termiä syntyneeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista sieventämistä)? (0,5 p.)

c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $(x^3 + 1)^5(1 - x)^3$ aste? (0,5 p.)

d) Esitä ehto $x \in] - \pi, 42]$ kaksoisepäyhtälönä. (0,5 p.)

e) Jaa polynomi $y^2 - 2y + 1$ tekijöihin. (1 p.)

f) Sievennä $\frac{x^2 - 10^{102}}{x - 10^{51}}$ (1 p.)

g) Minkälainen (muoto & mahdollinen suunta) kuvaaja on polynomifunktiolla P , jonka arvot lasketaan yhtälöllä $P(t) = 12,34^{56} - 789t^2$? (0,5 p.)

h) Polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(x - 32)x(x + 23)$. Mikä on kyseisen polynomin pienin nollakohta? (0,5 p.)

i) Kuinka monta nollakohtaa voi korkeintaan olla kuudennen asteen polynomilla? (0,5 p.)

300. Ratkaise yhtälöistä reaalinen tuntematon t .

a) $(9 - t^2)(t - 1)t = 0$

b) $(2t^2 - 1)(t - 1) = 1$

301. Millä parametrin a arvoilla yhtälöllä $x^2 - 4ax - a = 0$ on täsmälleen yksi reaaliratkaisu?

302. Reaaliluvuista a ja b tiedetään, että $a < b$. Osoita kyseistä epäyhtälöä muokkaamalla, että lukujen a ja b aritmeettinen keskiarvo on todellakin lukujen a ja b välissä.

303. Määritä pienin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön $\frac{1}{4}n^4 < 240 + n^2$.

304. Muodosta muuttujan a funktio f , joka antaa toisen asteen polynomin $P(x) = ax^2 + 2x + 2a$ nollakohtien etäisyyden. Määritä funktion f laajin reaalinen määrittelyjoukko ja arvojoukko.

305. a) Avaa sulut lausekkeesta $(a - b)^3$ ja sievennä tulos. (2 p.)

b) Ratkaise reaaliluku x yhtälöstä $x^3 - 3x^2 + 3x = 9$. (4 p.)

306. Karkkikauppias ostaa joka kuukausi irtokarkkeja tukusta hintaan 10 €/kg ja myy niitä tavallisesti asiakkailleen hintaan 12,9 €/kg. Makeisten ostamisen lisäksi kauppialla menee joka kuukausi 500 euroa niin sanottuihin kiinteisiin kustannuksiin. Kiinteät kustannukset ovat aina samat riippumatta myynnin määrästä. Kysynnän hän osaa arvioida niin hyvin, että mitään makeisia ei jää myymättä.

a) Merkitään myynnin kuukausittaista määrää kilogrammoina q :lla. Muodosta lausekelle niin sanotulle voittofunktiolle P eli kuvaukselle myynnin määrästä tuottoon (euroina), josta on vähennetty kaikki myyntitoiminnan kustannukset. Funktion arvot määräävään lausekkeeseen ei tarvitse erikseen merkitä yksiköitä.

b) Kauppias on pitkän myyntikokemuksen perusteella huomannut, että kilogrammahinnan kasvattaminen eurolla vähentää aina kuukausittaista myyntiä 50 kilogrammaa ja toisaalta kilogrammahinnan vähentäminen eurolla lisää aina kuukausittaista myyntiä samat 50 kilogrammaa. Mikä tulisi asettaa kilohinnaksi, jotta 180 kilogramman kuukausimyynnillä kauppias ei jäisi liiketoiminnassaan tappiolle?

HARJOITUSKOE 3

307. a) Perustele, onko $\sqrt{k} + \sqrt{2}$ polynomi. (1 p.)
- b) Binomi kerrotaan trinomilla. Kuinka monta termiä syntyneeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista termien yhdistämistä)? (1 p.)
- c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $(x^3 + 1)^5(1 - x)^3$ aste? (1 p.)
- d) Selitä, miksi kerrottaessa epäyhtälöä negatiivisella luvulla epäyhtälön merkki kääntyy. (1 p.)
- e) Esitä muuttujaa x koskeva kaksoisepäyhtälönä esitetty ehto $-\frac{2}{3} < x \leq 100$ joukko-opillisesti. (1 p.)
- f) Muuttujan x arvot ovat suoraan verrannollisia y :n arvoihin. Perustele, voiko x :n ja y :n välinen yhteys olla polynomiaalinen. (1 p.)

308. Olkoot a, b, c, d ja n lukuja. Osoita, että

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2.$$

309. Tykin ammuksen lentokorkeus h ajanhetkellä t (sekunteina) laukaisun jälkeen noudattaa likimain yhtälöä $h(t) = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$, missä h_0 on laukaisukorkeus metreinä, v_0 ylöspäin suuntautuva pystysuora lähtönopeus yksikössä m/s, ja g on putoamiskiihtyvyys $9,81 \text{ m s}^{-2}$. Ammus poistuu laukaisussa tykin piipusta metrin korkeudelta ylöspäin suuntautuvalla nopeudella $15,5 \text{ m/s}$. Kuinka kauan kestää ennen kuin tykinkuula osuu maahan? Piirrä tilanteesta kuva.

310. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $tx^2 + tx - 6 = 0$ ei ole lainkaan reaalisia ratkaisuja?

311. Tutkitaan polynomifunktiota P , jonka arvot määritellään kaavalla $P(x) = x^3 - 2x^2 - x$. Millä x :n arvoilla polynomi saa positiivisia arvoja?

312. Ratkaise yhtälö $t^5 - t^4 = t^2 - t^3$.

313. Ratkaise yhtälöstä $y^{2n} = y^n$ molemmat reaali- ja kompleksimuuttujat y ja n .

314. Polynomin Q muuttuja on x , ja polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(ax - b)(\frac{2ab}{a^2 + b^2}x - 1)(bx - a)$, missä a ja b ovat reaalisia vakioita, joille pätee $0 < a < b$. Perustele, mikä on funktion nollakohtien suuruusjärjestys.

HARJOITUSKOE 4

315. a) Perustele, onko $\frac{2t^0+5t}{3}$ polynomi. (1 p.)

b) Trinomi kerrotaan toisella trinomilla. Kuinka monta termiä syntyneeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista sieventämistä)? (0,5 p.)

c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $2(1 - 2y)^2(y^2 + 2)^2$ aste? (0,5 p.)

d) Esitä muuttujaa t koskeva ehto $t \leq \pi$ joukko-opillisesti. (0,5 p.)

e) Polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(x - 2)x(x + 3)$. Mikä on kyseisen polynomin suurin nollakohta? (0,5 p.)

f) Sievennä lauseke $\frac{x^3-4x^2-4x}{x^2-2x}$. (3 p.)

316. Polynomifunktion P arvot määritellään kaavalla $P(x) = (k^2 + 2k)x + 2k$. Määritä vakio k siten, että ehto $P(2) = 0$ pätee. Piirrä ehdon täyttävän polynomifunktion kuvaaja.

317. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^2 + ax - a = 0$ on kaksoisjuuri? Mikä tämä kaksoisjuuri tällöin on?

318. Erääseen ulkomaalaiseen matkapuhelinliittymään on saatavilla kaksi maksusuunnitelmaa mobiilidatan käyttöön. Tarjouksen A mukaan maksat kuukaudessa vakiohinnan 40 euroa riippumatta siitä, kuinka paljon dataa kulkee. Tarjouksen B mukaan kuukauden ensimmäiset 100 megatavua maksaa 25 euroa, minkä jälkeen ylimenevästä osasta maksetaan 0,12 euroa megatavua kohden. Millä kuukausittaisilla datamäärillä tarjous A on tarjousta B edullisempi? Hinnoittelussa ei tehdä eroa vastaanotetun ja lähetetyn datan välillä.

319. Ratkaise y yhtälöstä $\frac{1}{2}n^n y^2 - n^{2n}y - n^{3n+1} = 0$, kun $n = 50$. Esitä vastaus kymmenpotenssimuodossa kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

320. Ratkaise yhtälö $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 2x = 0$.

321. Funktion y arvot määritellään kaavalla $y(t) = \frac{t^2 + \left(\frac{1}{3} + \pi\right)t - \frac{\pi}{3}}{t^2 + \left(\frac{1}{3} - \pi\right)t - \frac{\pi}{3}}$.

a) Mikä on funktion määrittelyjoukko?

b) Määritä ne ty -koordinaatiston pisteet, joissa funktion kuvaaja leikkaa jomman kumman koordinaattiakselin.

322. Johda toisen asteen yhtälön ratkaisukaava lähtien yhtälön normaalimuodosta $ax^2 + bx + c = 0$, missä a, b ja c ovat reaalisia vakioita, ja $a \neq 0$.

Ylioppilaskoetehtäviä

Lyhyen oppimäärän tehtäviä

323. (s2013/1a) Ratkaise yhtälö $(x - 2)^2 = 4$.

324. (k2013/2)

a) Millä muuttujan x arvoilla $4x + 17$ on suurempi kuin $2 - x$?

b) Ratkaise yhtälö $x^2 + 14x = -49$.

325. (s2012/1a) Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x = 0$.

326. (k2012/1a) Ratkaise yhtälö $7x + 3 = 31$.

327. (s2011/1c)

Ratkaise yhtälö $x^2 - 3(x + 3) = 3x - 18$.

328. (k2011/1b) Sievennä lauseke $x^2 + x - (x^2 - x)$.

329. (k2011/2b)

Sievennä lauseke $(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x}$.

Pitkän oppimäärän tehtäviä

330. (K2013/1b)

Ratkaise epäyhtälö $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x$.

331. (K2013/3a)

Laske lausekkeen $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ tarkka arvo, kun positiiviset luvut a ja b ovat toisensa käänteislukuja ja lukujen a ja b keskiarvo on 2.

332. (K2013/*14a)

a) Jaa $P(x) = x^2 + x - 2$ ensimmäisen asteen tekijöihin. (2 p.)

b) Olkoon $P(x) = x^2 + x - 2$. Määritä sellaiset vakiot A ja B , että $\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ kaikilla $x \geq 2$. (2 p.)

333. (S2013/1a)

a) Ratkaise yhtälö $x^2 + 6x = 2x^2 + 9$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

c) Esitä polynomi $x^2 - 9x + 14$ ensimmäisen asteen polynomien tulona.

334. (S2012/1a) Ratkaise yhtälö $2(1 - 3x + 3x^2) = 3(1 + 2x + 2x^2)$.

335. (S2011/3b) Ratkaise epäyhtälö $\frac{2x+1}{x-1} \geq 3$.

336. (K2011/1b) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2 \leq x$.

337. (S2010/1a) Sievennä lauseke $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

338. (S2010/2a) Ratkaise epäyhtälö $x\sqrt{7} - 3 \leq 4x$.

339. (S2010/2c) Ratkaise yhtälö $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

340. (K2010/1a) Ratkaise yhtälö $7x^7 + 6x^6 = 0$.

341. (K2010/1b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$.

342. (K2010/1c) Millä x :n arvoilla pätee $\frac{3}{3-2x} < 0$?

343. (K2010/3b) Määritä toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimet p ja q , kun yhtälön juuret ovat $-2 - \sqrt{6}$ ja $-2 + \sqrt{6}$.

344. (S2009/1a) Ratkaise yhtälö $(x - 2)(x - 3) = 6$.

345. (S2009/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x} = 1$.

346. (S2009/2a) Ratkaise epäyhtälö $6(x - 1) + 4 \geq 3(7x + 1)$.

347. (K2009/1b) Ratkaise epäyhtälö $(x - 3)^2 > (x - 1)(x + 1)$.

348. (S2008/1a) Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{2} - \frac{x}{3} > \frac{3}{4}$.

349. (S2008/3b) Ratkaise yhtälö $4x^3 - 5x^2 = 2x - 3x^3$.

350. (K2008/1a) Ratkaise yhtälö $2x^2 = x + 1$.

351. (S2007/1a) Ratkaise epäyhtälö $2 - 3x > 4x$.

352. (K2007/1a) Ratkaise yhtälö $7x^2 - 6x = 0$.

353. (S2006/1a) Sievennä lauseke $(1 + x)^3 - (1 - x)^3$.

354. (S2006/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1}$.

355. (S2005/1b) Ratkaise reaaliilukualueella yhtälö $x + 2 = \frac{1}{x-2}$.

356. (S2005/4) Millä a :n arvoilla funktio $f(x) = -x^2 + ax + a - 3$ saa vain negatiivisia arvoja?
357. (K2005/1a) Sievennä lauseke $\frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x}$.
358. (K2005/1b) Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - ax - a^2 = 0$.
359. (S2004/1a) Ratkaise epäyhtälö $2x - 3 < 3 - 2x$.
360. (S2004/1b) Ratkaise epäyhtälö $(x + 1)^2 \leq 1$.
361. (S2004/1c) Ratkaise epäyhtälö $x^3 < x^2$.
362. (K2004/1c) Olkoon $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ja $g(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$. Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.
363. (K93/5) Ratkaise yhtälö $\frac{2x+a^2-3a}{x-1} = a$ vakion a kaikilla reaaliarvoilla.
364. (K96/2b) Yhtälössä $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ korvataan luku a luvulla $a + 1$. Miten muuttuvat yhtälön juuret?
365. (K1988/3) Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0$ juuret ovat reaaliset?

Syventäviä aiheita

Lukujärjestelmät

PAIKKAJÄRJESTELMÄT

Merkitsemme lukuja yleensä **kymmenjärjestelmässä** eli **lukujärjestelmässä**, jossa on kymmenen **numeromerkkiä**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. (Käyttämämme numeromerkit ovat nimeltään hindu-arabialaiset numerot.) Kymmenjärjestelmää kutsutaan myös **desimaalijärjestelmäksi**. Tunnetaan kulttuureja, joissa on käytetty pääasiallisesti jotakin muuta lukujärjestelmää.

Kymmenjärjestelmä on **paikkajärjestelmä**, eli merkin paikka määrittää sen merkityksen.

ESIMERKKI 5.110

Numeron 8 merkitys riippuu sen paikasta. Luvussa 80 merkin 8 merkitys on $8 \cdot 10^1$, mutta luvussa 820 sen merkitys on $8 \cdot 10^2$.

ESIMERKKI 5.111

Esitä luku 2 080,7 kymmenen potenssien summana.

Ratkaisu. $2\,090,7 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1}$

Nykyään yleisimmät desimaalijärjestelmästä poikkeavat lukujärjestelmät ovat **binääri-**, **oktaali-** ja **heksadesimaalijärjestelmät**, joissa on vastaavasti 2, 8 ja 16 numeromerkkiä. Tietokoneet käsittelevät lukuja sisäisesti binäärijärjestelmässä, kun taas oktaali- ja heksadesimaalijärjestelmät ovat muutoin käteviä tietojenkäsittelytieteessä.

Yleisesti pätee, että kun käytettävissä olevien merkkien määrää lisää, suuria lukuja voi kirjoittaa lyhyempään muotoon. Näin ollen sama luku esitettynä kolmekantaisessa lukujärjestelmässä voi olla paljon pidempi kuin kymmenkantaisessa esitettynä.

Tilanne on verrattavissa vaikkapa kiinan kieleen, jossa on käytössä tuhansia erilaisia kirjoitusmerkkejä. Merkeissä on paljon muistettavaa, mutta toisaalta kokonaisen lauseen voi kirjoittaa vain parilla kirjoitusmerkillä.

Binäärijärjestelmässä luvun muodostavia numeromerkkejä kutsutaan **biteiksi**. Bitti voi olla joko päällä (1) tai pois päältä (0), ja toteutus tietokoneessa vastaa esimerkiksi sitä, että johtimessa kulkee virta (1) tai ei (0). Kuusitoistajärjestelmässä tarvitaan numeroiden 0 ... 9 lisäksi kuusi uutta numeromerkkiä. Tavaksi on vakiintunut käyttää kirjainmerkkejä A, B, C, D, E, F. Ne vastaavat desimaalilukuja 10 ... 15.

Useampaa järjestelmää käytettäessä, erityisesti muunnettaessa lukuja järjestelmästä toiseen, merkitään kantaluku luvun jälkeen alaindeksinä. Voimme esimerkiksi merkitä (desimaalijärjestelmän) lukua yhdeksäntoista 10011_2 , 23_8 , 19_{10} tai 13_{16} . Huomaa, että binäärijärjestelmän luvuissa ei ole mielekästä käyttää tuhaterotinta, koska sana tuhat itsessään viittaa kymmenjärjestelmälle ominaiseen kolmanteen kymmenen potenssiin. Binääriluvuille ei ole vakiintunut vastaavia ilmaisuja kuten sata tai miljoona, vaan luvut luetaan numero kerrallaan.

ESIMERKKI 5.112

■ Luku 11001_2 luetaan ”yksi yksi nolla nolla yksi”.

Luvut eri kannoissa voidaan muuttaa desimaaliluvuiksi esittämällä luku potenssien summina kymmenjärestelmässä.

ESIMERKKI 5.113

■ $10,01_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 2,25_{10}$

Lukujärjestelmiä voidaan vaihtoehtoisesti merkitä kirjoittamalla niiden tunnus (Bin, Oct, Dec, Hex) luvun jälkeen. Klassinen vitsi ”Miksi tietojenkäsittelytieteilijä sekoittaa halloweenin ja joulun? Koska $31 \text{ Oct} = 25 \text{ Dec}$!” perustuu siihen, että

$$\begin{aligned} \text{halloween} &= 31. \text{lokakuuta} = 31 \text{ Oct} = 31_8 = 3_{10} \cdot 8_{10} + 1_{10} \cdot 1_{10} \\ &= 25_{10} = 25 \text{ Dec} = 25. \text{joulukuuta} = \text{joulupäivä}. \end{aligned}$$

MUUT LUKUJÄRJESTELMÄT

Yleisesti tunnetaan myös joitakin lukujärjestelmiä, jotka eivät ole paikkajärjestelmiä.

Tukkimiehen kirjanpidossa toistetaan yhtä ainoaa merkkiä. Se on tavallaan 1-järjestelmä, mutta tällainen määrittely ei ole ongelmaton.

$$\text{|||} = 3 \quad \text{||||} = 4 \quad \text{||||/} = 5$$

Hienostuneempi versio tukkimiehen kirjanpidosta ovat **roomalaiset luvut**, jotka nimensä mukaisesti olivat yleisin lukujärjestelmä antiikin Roomassa. Roomalaisia lukuja käytetään yhä nykyäänkin erityisesti järjestyksen merkitsemisessä. Roomalaisten lukujen numeromerkit ovat I, V, X, L, C, D ja M. Ne vastaavat desimaalijärjestelmän lukuja seuraavalla tavalla:

$$I = 1 \quad V = 5 \quad X = 10 \quad L = 50 \quad C = 100 \quad D = 500 \quad M = 1\,000$$

Roomalaiset luvut merkitään kirjoittamalla merkkejä laskevassa järjestyksessä, poikkeuksena vähennyssääntö. Merkkien kokonaisarvo määrää luvun. Vähennyssääntö tarkoittaa kuutta kaksimerkkistä ilmaisua:

$$IV = 4 \quad IX = 9 \quad XL = 40 \quad XC = 90 \quad CD = 400 \quad CM = 900$$

Joissain vanhoissa teksteissä (ja jopa kellotauluissa) luku 4 on merkitty myös IIII.

Luvussa voi olla vain kerran IV tai IX, vain kerran XL tai XC ja vain kerran CD tai CM. Kaksimerkkisiin ilmaisuihin pätevät samat säännöt kuin numeromerkkeihin: I= 1 ei voi edeltää numeroa IV= 4, eikä IV= 4 numeroa V= 5. Lisäksi merkinnät IXV, XCL ja CMD eivät ole sallittuja. Oikea roomalainen luku minimoi käytettyjen merkkien määrän. Esimerkiksi VIV ei ole roomalainen luku, sillä IX on esityksenä lyhyempi.

Nollaa roomalaisissa numeroissa ei ole; nolla nykyisessä merkityksessään kehitettiin vasta Intiassa 800-luvulla jaa.

ESIMERKKI 5.114

Roomalaisia lukuja:

a) III = $1 + 1 + 1 = 3$

b) IX = $10 - 1 = 9$

c) XII = $10 + 1 + 1 = 12$

d) XIV = $10 + (5 - 1) = 14$

e) CDX = $500 - 100 + 10 = 410$

f) MDC = $1\,000 + 500 + 100 = 1\,600$

Tehtäviä

366. Muunna seuraavat binääriluvut kymmenjärjestelmään.

- a) $101,0_2$
- b) $1,00101_2$
- c) $100101,1101_2$

367. Muunna seuraavat luvut binäärijärjestelmään.

- a) $7,0_{10}$
- b) $2,5_{10}$
- c) $11,1875_{10}$

368. Muuta seuraavat kymmenjärjestelmän luvut heksadesimaaliluvuiksi.

- a) 175
- b) 384

369. Laske

- a) $1101_2 \cdot 100_2$
- b) $1101001_2 \cdot 100000_2$
- c) $10110_2 \cdot 0,01_2$.

370. Mitkä seuraavista ovat oikeita roomalaisia lukuja? Mitä ne ovat kymmenjärjestelmässä?

- a) CLI
- b) IVX
- c) VIZI
- d) CCLI
- e) CCCLXXXVI
- f) CMVCI
- g) MMDCXLIII
- h) CDXCIII
- i) DCXLIX

371. Muuta seuraavat kymmenjärjestelmän luvut roomalaisiksi luvuiksi. Kuinka monta merkkiä tarvitaan luvun kirjoittamiseen?

- a) 278
- b) 712
- c) 1 478
- d) 3 999

372. Tunnetusti $10 \cdot 10 = 100$. Samannäköiseen tuloon päädytään myös, vaikka luku tulkittaisiin kaksikantaisena: $10_2 \cdot 10_2 = 2_{10} \cdot 2_{10} = 4_{10} = 100_2$. Tutki, päteekö tulo yleisesti, eli onko $10_n \cdot 10_n = 100_n$ myös kaikilla $n > 2$.

373. Muodosta kertotaulu binääriluvuille 1–100.

374. ★ Mikä on suuruusjärestyksessä 148. positiivinen kokonaisluku, jonka kymmenjärjestelmäesityksessä on vain nollia ja ykkösiä?

TOISEN ASTEEN POLYNOMIN KUVAAJA

Tässä liitteessä perustellaan, miksi kaikkien toisen asteen polynomifunktioiden kuvaajat näyttävät samalta. Lisäksi tarkastellaan, mitkä tekijät vaikuttavat kuvaajien muotoon.

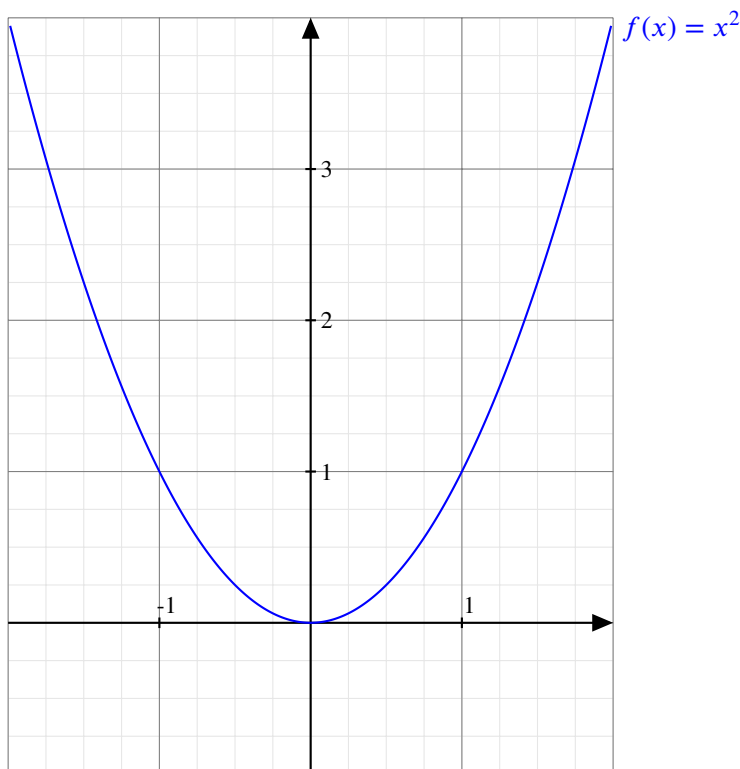
Funktio $P(x) = x^2$

Aloitetaan funktiosta $P(x) = x^2$. Mitä tiedämme siitä piirtämättä kuvaajaa?

- Algebrallisen päättelyn avulla voimme todeta, että funktion pienin arvo on $P(0) = 0$, sillä tulon merkkisäännön perusteella lauseke x^2 ei voi saada negatiivisia arvoja – ei ole olemassa sellaista reaalilukua x , jonka neliö olisi negatiivinen. (Kompleksiluvuilla tällaista rajoitusta ei ole, tästä lisää liitteessä.) Kuvaajan alin kohta sijoittuu siis origoon ja kuvaajan kaikki muut pisteet sen yläpuolelle.
- Kun $x > 0$, lauseke x^2 on sitä suurempi, mitä suurempi x on. Tästä tiedämme, että nolasta oikealle siirryttäessä funktion kuvaaja nousee.
- Koska $(-x)^2 = x^2$, kuvaaja on symmetrinen y -akselin suhteen.

Näiden tietojen avulla voimme päätellä, että funktion kuvaaja koostuu kahdesta identtisestä haarasta, jotka kohtaavat, kun $x = 0$. Mitä kauempana x on nolasta, sitä suurempia ovat funktion arvot. Tämän kaiken voi päätellä jo ennen kuvaajan piirtämistä.

Merkitsemällä koordinaatistoon yhtälön $y = x^2$ toteuttavia pisteitä, muodostuu lopulta funktion kuvaaja:



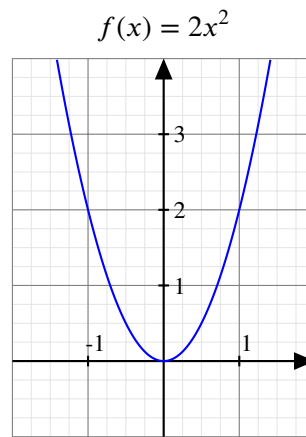
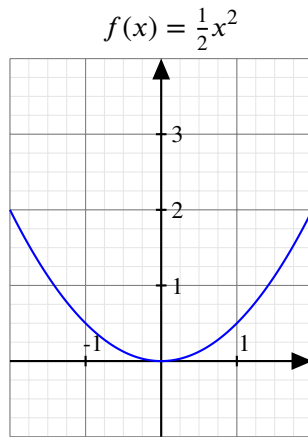
Kuvaajan muoto on geometriselta nimeltään *paraabeli*. Paraabeleja esiintyy monessa yhteydessä: esimerkiksi polttopöylin ja radioteleskoopin pinta kaareutuu paraabelin muotoisena. Samoin ilmaan heitetyn kappaleen rata on likimain alaspäin aukeava paraabeli, kun ilmanvastus on pieni.

Funktio $P(x) = ax^2$, $a \neq 0$

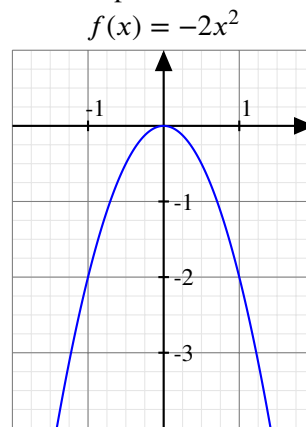
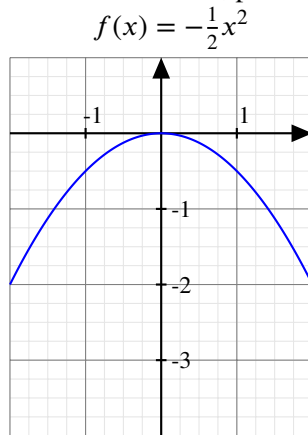
Polynomien $P(x) = ax^2$ arvot ovat lausekkeeseen x^2 nähden a -kertaisia. Muuten paraabelin symmetrisyys ja muut keskeiset ominaisuudet säilyvät.

- Kun $a > 0$, myös $ax^2 \geq 0$, joten pienin arvo on yhä 0.
Paraabeli on **ylöspäin aukeava**.
- Kun $a < 0$, tulon merkkisäännön nojalla $ax^2 \leq 0$.
Nyt $P(0) = 0$ onkin suurin arvo, ja funktion arvot ovat sitä pienempiä, mitä enemmän x poikkeaa nolasta.
Paraabeli on **alaspäin aukeava**.
- Mitä enemmän a poikkeaa nolasta, sitä nopeammin funktion arvot muuttuvat x :n muuttuessa ja sitä kapeampi paraabeli on.

$a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin:



$a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin:



Funktio $P(x) = ax^2 + c$

Lisäämällä vakiotermi c saadaan $P(x) = ax^2 + c$. Vakion lisääminen nostaa tai laskee funktion kuvaajaa (riippuen siitä, onko $c > 0$ tai $c < 0$), joten kuvaajan muoto ei muutu.

Funktio $P(x) = ax^2 + bx + c$

Miksi sitten täydellisen toisen asteen polynomin $P(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on

myös paraabeli? Muokataan lauseketta, aloitetaan ottamalla yhteinen tekijä:

$$\begin{aligned}P(x) &= ax^2 + bx + c \\&= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\&= a \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} \right) + c \\&= a \left(\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\&= a \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\text{neliö}} - \underbrace{\frac{b^2}{4a}}_{\text{vakio}} + c\end{aligned}$$

Tästä neliöksi täydennetyksi muodosta nähdään, että $P(x)$ on muotoa a -neliö + vakio. Kuvaaja on siis samanlainen kuin tapauksessa $ax^2 + c$, huippu on vain siirtynyt. Koska neliö ≥ 0 , saadaan

- Kun $a > 0$, kyseinen vakio on polynomin pienin arvo ja kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
- Kun $a < 0$, kyseinen vakio on suurin arvo ja kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Paraabelin **huippu** (eli kuvaajan piste, jossa suurin tai pienin arvo saavutetaan) on aina kohdassa $x = -\frac{b}{2a}$, koska silloin neliö on nolla.

Koottuna:

Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja

- Ylöspäin aukeava paraabeli, kun $a > 0$.
- Alaspäin aukeava paraabeli, kun $a < 0$.
- Sitä kapeampi, mitä suurempi $|a|$ on.

Vastaukset ja hakemisto

Vastaukset

1.

- a) Ei ole.
- b) On.
- c) Ei ole.
- d) On.
- e) On.
- f) Ei ole.
- g) On.
- h) On. (Sieventämällä saadaan $2y - \frac{1}{2}$, vaikkakin $y \neq 0$.)
- i) Ei ole.

2.

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin aste luku	vakiotermi
$-2x^2 + 6x$	2	-2	2	0
$7x^3 - x - 15$	3	7	3	-15
$-9x^2 + 5$	2	-9	2	5
$-5x^{99}$	1	-5	99	0

3.

- a) 5

b) $x^5, -3x^3, 2x, -1$

c) $-3x^3$

d) 1

e) -1

4.

a) 9

b) 0

c) 54

d) -2

5.

a) 2

b) 1

c) 8

d) 5

6.

a) 2

b) 13

c) 22

d) 1

e) $4x^2 + 6x + 4$

7.

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin asteluku	2. asteen termin kerroin
$x + xy^2 + 6y^2 - 1$	4	1	3	1
$ax^6 + y^4 - 4by^2 + \sqrt{2}$	4	a	6	4b
$100x + ix^3y^4 - 99y$	3	i	7	0
$8y - \frac{\sqrt{15}}{2}x^3$	2	$-\frac{\sqrt{15}}{2}$	3	0
$\sqrt{3}xy^6 + y^8 - 4x^2$	3	1	8	-4

8.

a) $f(-1,2) = (-1) \cdot 2^2 + (-1)^2 \cdot 2 = -4 + 2 = -2$

b) Kyllä; termit muuttuvat toisikseen, jos muuttujat vaihtavat paikkaa, ja lauseke pysyy samana.

9. $x^2 + y, x^2 + xy, y^2 + x, y^2 + xy, x^2 + y^2$

10. $R(0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$

$= 0 + 2 \cdot 2^4 - 0 + \pi - 2\pi = 32 - \pi$

11.

a) $8x$

b) $11x^2$

c) $-4y$

d) $5x$

12.

a) $7x + 5$

b) $3x - 4y$

c) $3x^2 - 4x$

d) $5y^3 - 2y^2 - y$

13.

a) $-x + 1$

b) $3y^3 + 3y^2$

c) $2z^{10} + 2z^8 - 4z^6 + z^2 + 1$

14.

a) $x^3 + x^2 - 7x + 5$

b) $-x^3 + x^2 + 13x + 3$

c) $x^3 - x^2 - 13x - 3$

d) 33

15.

a) $P(x) = x^2 + 3, P(1) = 4, P(-1) = 4$ ja $P(3) = 12$

b) $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 15x, Q(1) = 21, Q(-1) = -9$ ja $R(3) = -27$

16.

- a) $3x + 3$
- b) $2x$
- c) $10x + 1$

17.

- a) $R(x) = -x^3 + 8x - 15$, $R(1) = -8$, $R(-1) = -22$ ja $R(3) = -18$
- b) $S(x) = -2$, $S(1) = -1$, $S(-1) = -3$ ja $S(3) = 1$

18.

- a) x^3
- b) $15x^2$
- c) $10x^3$
- d) $-18x^6$

19.

- a) $2x + 6$
- b) $x^2 - 2x$
- c) $3x - 6x^2$
- d) $x^3 + 5x^2$

20.

- a) $3x + 6y - 12$
- b) $x^2 + 5x + 6$
- c) $-2x^2 + 7x - 3$

21. Lauseke sievenee muotoon $x^5 - x^3 - 2x$. Polynomin aste on 5.

22. a) ja d)

23.

- a) 0
- b) 2
- c) 5
- d) 1

24.

- a) Polynomin aste on kunkin tekijän korkeimpien asteiden summa, tässä siis $2 + 3 = 5$.
b) Polynomin vakiotermi on kunkin tekijän vakiotermien tulo, tässä siis $1 \cdot 0 = 0$.

25.

- a) $-24x^2 + 6x$
b) $-10x^4 + 2x^3$
c) $90x^2 - 45x$
d) $2x^2 - 6x + 1$

26.

- a) $2y^2 + 19y + 35$
b) $x^3 + 3x^2 - 4x$

27. Voidaan merkitään $P(x) = ax + b$ ja $Q(x) = cx + d$, koska molemmat funktiot ovat ensimmäisen asteen polynomifunktioita. (Käytämme kertoimien merkitsemiseen eri kirjaimia, sillä lausekkeiden vakiot saattavat olla keskenään erisuuret.)

Sievennetään $P(Q(x))$: $P(Q(x)) = P(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$.

Todetaan, että jos a ja c ovat reaalityyppisiä vakioita, niin myös niiden tulo on reaalityyppinen vakio. Sama pätee vakioille a ja d , joiden tulo ja myös kyseisen tulon ja b :n summa on vakio. Merkitään havainnollistamisen vuoksi $ac = e$, ja $ad + b = f$. Nyt lauseke $acx + ad + b$ voidaan kirjoittaa uudelleen muodossa $ex + f$, josta nähdään selvästi kyseessä olevan ensimmäisen asteen polynomi.

Väite osoitetaan järjestykselle $Q(P(x))$ samalla tavalla, minkä jälkeen väite on todistettu.

28.

- a) $2x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 13x - 12$
b) $x^5 - x^3 - 4x^2 - 2x - 4$
c) $x^5 - 1$
d) $\frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{15}x^2 - \frac{7}{15}x - \frac{2}{3}$

29. $\sqrt{2}$

30.

- a) $-4 + 2\sqrt{2}$

b) $x^8 - 4x^5 + 4x^2$

c) $-x^4 - 2x$

d) $-16t^4 + 4t$

31.

a) $P(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $Q(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$

c) $P(Q(x)) = P(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

d) $Q(P(x)) = Q(x^2) = x^2 + 1$

32.

a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $x^2 - 2xy + y^2$

c) $x^2 - y^2$

33.

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $y^2 - 10y + 25$

c) $x^2 - 16$

d) $9x^2 + 12x + 4$

34.

a) Kaava ei päde, sillä esimerkiksi $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$, mutta $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$.

b) Kaava ei päde, sillä esimerkiksi $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, mutta $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$.

c) Kaava ei päde, sillä esimerkiksi $\frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{6}{5}$, mutta $\frac{2}{1 + 1} = 1$.

35.

a) $(a + b)^2$

b) $(x + 1)^2$

c) $(y - 2)^2$

d) $(a + 5)(a - 5)$

36.

a) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

c) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

37. Sievennetään yhtälöiden vasempia puolia:

a) $(t + v)^2 + (t - v)^2 = t^2 + 2tv + v^2 + t^2 - 2tv + v^2 = 2t^2 + 2v^2.$

b) $(t + v)^2 - (t - v)^2 = t^2 + 2tv + v^2 - t^2 + 2tv - v^2 = 4tv.$

38. $ab = 2$

39.

a) Parilliset luvut voidaan aina kirjoittaa muodossa $2k$, missä k on jokin kokonaisluku. Sijoitetaan lauseke muuttujan paikalle, niin funktion arvoksi saadaan

$$f(2k) = (2k)^2 + 2 \cdot 2k + 2$$

$$= 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1). \text{ Koska } k\text{:n neliö on kokonaisluku, } k \text{ kerrottuna}$$

toisella kokonaisluvulla on kokonaisluku, ja kokonaislukujen summat ovat

kokonaislukuja, on $2k^2 + 2k + 1$ myös kokonaisluku. Funktion arvo saatiin siis

kirjoitettua muodossa ”kaksi kertaa kokonaisluku”, joten mielivaltaisesta parillisesta luvusta tuli funktion arvoksi myös parillinen luku.

b) Mielivaltaisen parittoman luvun voi kirjoittaa muodossa $2k + 1$, missä k on

kokonaisluku. Nyt funktion arvoksi saadaan $f(2k + 1) = (2k + 1)^2 + 2(2k + 1) + 2$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 2 = 4k^2 + 8k + 5$$

$$= 2(2k^2 + 4k + 2) + 1. \text{ Sulkeissa oleva lauseke on a-kohdan päättelyllä aina}$$

kokonaisluku, joten funktion arvo on muotoa ”kaksi kertaa kokonaisluku plus yksi”,

eli aina pariton luku. Parittomasta luvusta tulee siis funktion arvona aina pariton luku.

40. $(3 - 2\sqrt{2}) : (3 + 2\sqrt{2})$

41.

a) $x^2 + 12x + 36$

b) $9y^2 - 6y + 1$

c) $9 - x^2$

42.

a) $x^2 - 10x + 25$

b) $49x^2 + 56x + 16$

c) $-49x^2 + 81$

d) $64x^2 - 64$

43.

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $x^2 - 10x + 25$

c) $b^2 - 16$

d) $x^2 - 2x + 1$

e) $4x^2 + 4x + 1$

f) $1 - a^2$

g) $x^2 - 14x + 49$

h) $y^2 + 2y + 1$

i) $x^2 + 6xy + 9y^2$

j) $9x^2 - 6x + 1$

44.

a) $(1 - a)(1 + a)$

b) $(x - 3y)^2$

c) $(2x + 1)^2$

d) $(x - 7)^2$

e) $(y + 1)^2$

f) $(x + 2)^2$

g) $(b + 4)(b - 4)$

h) $(x - 1)^2$

i) $(x - 5)^2$

j) $(3x - 1)^2$

45.

a) $4x^2 - 1$

b) $t^2 - 4t + 4$

c) $4x^2 + 12x + 9$

d) $a^2 - 4a + 4$

e) $25x^2 - 4$

f) $9 - c^2$

g) $100x^2 - 20x + 1$

h) $4a^2 + 4ab + b^2$

i) $x^2 + 12x + 36$

j) $16x^2 - 9$

46.

a) $(2 - a)^2$

b) $(10x - 1)^2$

c) $(2a + b)^2$

d) $(2x + 1)(2x - 1)$

e) $(t - 2)^2$

f) $(5x + 2)(5x - 2)$

g) $(4x + 3)(4x - 3)$

h) $(3 - c)(3 + c)$

i) $(x + 6)^2$

j) $(2x + 3)^2$

47.

a) $(2b - 1)^2$

b) $(4t + 3)(4t - 3)$

c) $(3x + 2y)^2$

d) $(x - \frac{1}{2})^2$

e) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

48.

a) $(100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,201$

b) $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 9\,801$

c) $49 \cdot 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2\,500 - 1 = 2\,499$

d) $35^2 - 25^2 = (35 + 25)(35 - 25) = 60 \cdot 10 = 600$

e) $170^2 - 30^2 = (170 + 30) \cdot (170 - 30) = 200 \cdot 140 = 28\,000$

49.

a) $63^2 + 37^2 = (50 + 13)^2 + (50 - 13)^2 = 2 \cdot 50^2 + 2 \cdot 13^2 = 2 \cdot 2\,500 + 2 \cdot 169 = 5\,000 + 338 = 5\,338$

b) $101^2 + 99^2 = (100 + 1)^2 + (100 - 1)^2 = 2 \cdot 100^2 + 2 \cdot 1^2 = 2 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1 = 20\,000 + 2 = 20\,002$

50.

$$\begin{aligned}& (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \\&= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\&= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\&= x^4 + 4y^4\end{aligned}$$

(Yhtälöä $(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = x^4 + 4y^4$ kutsutaan *Sophie Germainen* identiteetiksi.)

51. Jos tuntematonta lukua merkataan a :lla, saadaan yhtälöksi $a + \frac{1}{a} = 2$. Tästä voidaan päätellä, että a ei voilla ainakaan nolla (määrittelyehto). Kertomalla yhtälö puolittain a :lla, saadaan muoto $a^2 + 1 = 2a$ ja termejä järjestelemällä $a^2 - 2a + 1 = 0$. Huomataan vasemman puolen lausekkeen vastaavan binomin neliötä $(a - 1)^2$.

Ratkaistaan siis potenssiyhtälö $(a - 1)^2 = 0$:

$$\begin{array}{ll}(a - 1)^2 = 0 & \sqrt{} \\ a - 1 = 0 & + 1 \\ a = 1 & \end{array}$$

Ainut ehdon toteuttava luku on siis 1.

52.

a) Tutki lukujen $2 + \sqrt{3}$ ja $2 - \sqrt{3}$ tuloa.

b) Lukujen $4 + \sqrt{3}$ ja $4 - \sqrt{3}$ tulo on 13, joten ne eivät ole käänteislukuja.

c) Yleisesti $\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^{-1} = a - \sqrt{a^2 - 1}$

53. Ainoa ratkaisu on $x = 3$, $y = 8$. Opastus: jaa yhtälön vasen puoli tekijöihin muistikaavalla.

54. 49. Perustelu muistikaavoilla: Jos lukujen keskiarvo on 7, ne ovat muotoa $7 + a$ ja $7 - a$. Lasketaan tulo: $(7 + a)(7 - a) = 7^2 - a^2 = 49 - a^2 \geq 49$. Siis 49 on suurin mahdollinen.

55.

a) 6

b) -6

- c) -6
- d) 6
- e) 0

56.

- a) tulo > 0
- b) tulo < 0
- c) tulo > 0
- d) tulo on 0

57.

- a) $x = 0$ tai $x = -3$
- b) $x = 4$ tai $x = -3$
- c) $x = 0$ tai $x = 5$

58.

- a) $b > 0$
- b) $b < 0$ ja $b = 0$
- c) $b > 0$ ja $b < 0$
- d) Mikään vaihtoehto ei kelpaa.

59.

- a) $y = 0$ tai $y = -4$
- b) $x = 2$, $x = 1$ tai $x = -5$
- c) $x = -1$

60. $x^4 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$, joten $f(x) \geq 1$.

61.

- a) tulo ≥ 0
- b) tulo ≤ 0
- c) tulo on 0

62.

a) $g = 2$ tai $t = -1$. Tehtävässä ei ole selvää, minkä muuttujan suhteen yhtälö pitäisi ratkaista, joten se on ratkaistu molempien muuttujien suhteen.

b) $x = 0$ tai $x = 5$

c) $w = -1$

63. Tulossa esiintyy tekijänä $(x - x) = 0$. Niinpä tulon nollasäännön mukaan

$$\begin{aligned} & (a - x) \cdot (b - x) \cdot (c - x) \cdot \dots \cdot (x - x) \cdot \dots \cdot (\ddot{a} - x) \cdot (\ddot{o} - x) \\ &= (a - x) \cdot (b - x) \cdot (c - x) \cdot \dots \cdot 0 \cdot \dots \cdot (\ddot{a} - x) \cdot (\ddot{o} - x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

64. On, esimerkiksi luku 2. (Saadaan yhtälön $x^2 = 2x$ eräänä ratkaisuna.)

65. Binomin kuutio $(a - b)^3$ kehitettynä polynomiksi on $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, joka järjesteltynä uudelleen on $a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$. Nyt riittää osoittaa, että vertailukohteesta $a^3 - b^3$ poikkeava osa $-3a^2b + 3ab^2$ on negatiivinen. Jaetaan tekijöihin: $-3a^2b + 3ab^2 = 3ab(-a + b) = 3ab(b - a)$, mistä tulos seuraa, koska lähtöoletuksen perusteella $3ab$ on positiivinen ja $b - a$ negatiivinen, jolloin koko lausekekin on.

66.

a) $2(x + 3)$

b) $x(x - 4)$

c) $3x(x - 2)$

67.

a) $5a(2 + b)$

b) $x^3(x - 1)$

c) $xy(1 + x)$

68.

a) $(x + 3)^2$

b) $(y - 1)^2$

c) $(x - 5)(x + 5)$

69.

a) $x - 3$

b) $\frac{x-4}{3}$

c) $\frac{a}{b}$

70.

a) $(x^2 + 1)(x + 1)$

b) $(a^2 + 2)(a + b)$

c) $(2m^4 + 1)(4m^2 - 1) = (2m^4 + 1)(2m + 1)(2m - 1)$

71.

a) $x = 4$ tai $x = -4$

b) $x = 0$ tai $x = -7$

c) $x = 3$

72.

a) $-x^2$

b) $\frac{x+3}{x}$

c) $-\frac{x+2}{x}$

73.

a) $x(x + 1)(x - 1)$

b) $(5a + 1)(b + 2)$

c) $(4xy + 1)^2$

74. $8(x - 2y)(x + 2y)(x^2 + y^2 + 7)$. (Opastus: Älä kerro aluksi sulkuja auki vaan käytä heti muistikaavaa.)

75.

a) $(x + 2)(x - 2)$

b) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

c) $(\sqrt{5}x + \sqrt{3})(\sqrt{5}x - \sqrt{3})$

d) $(4 + x^2)(4 - x^2) = (4 + x^2)(2 - x)(2 + x)$

76.

a) joko $5(-3x^5 + 2y)$ tai $-5(3x^5 - 2y)$

b) $x^2y^2(x + y)$

c) joko $2a(-2a^2 - a + b)$ tai $-2a(2a^2 + a - b)$

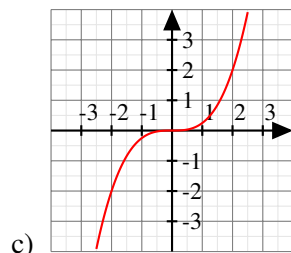
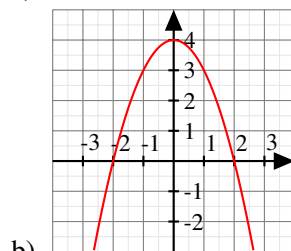
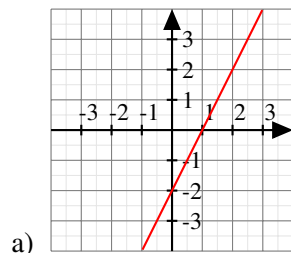
77.

- a) $x = -2$, $x = 0$ tai $x = 2$ (Tekijöihin jakamalla yhtälö sievenee muotoon $x^2(2 + x)(2 - x) = 0$.)
- b) $x = -4$, $x = 0$ tai $x = 4$ (Tekijöihin jakamalla yhtälö sievenee muotoon $x^3(x + 4)(x - 4) = 0$.)

78.

- a) 8
- b) 0
- c) -1
- d) $x = 1$ ja $x = 3$
- e) $x = 0$ tai $x = 4$

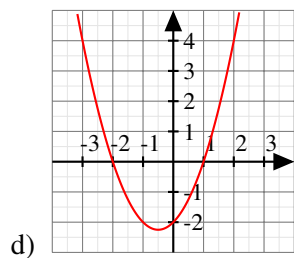
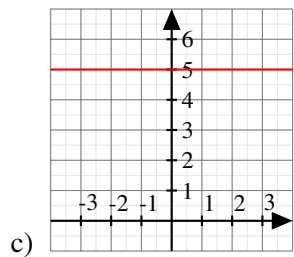
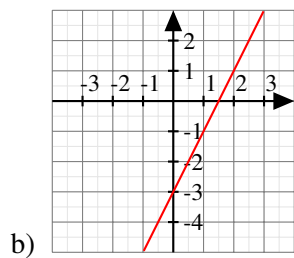
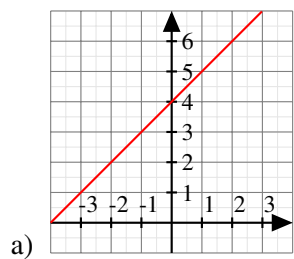
79.



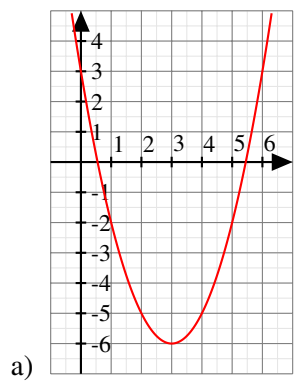
80.

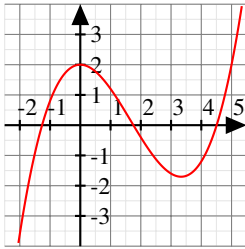
- a) $x = -1$
- b) $x \approx 0,35$ ja $x \approx 5,65$

82.

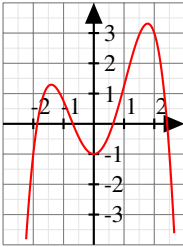


83.





b)



c)

84. Mitä enemmän termejä, sitä parempi vastaavuus.

85.

- a) tosi
- b) tosi
- c) tosi
- d) tosi
- e) epätosi

86.

- a) epätosi
- b) tosi
- c) epätosi
- d) ehdollisesti tosi
- e) tosi
- f) epätosi; mikään luku ei voi olla suurempi kuin luku+1.

87.

- a) epätosi
- b) tosi (mutta pyöristystarkkuus on subjektiivista)
- c) tosi
- d) tosi
- e) epätosi

f) epätosi

g) tosi

88.

a) $x \in]-10,10[$

b) $x \in]-9,7]$

c) $c \in [5,\infty[$

d) $s \in [5,7\frac{1}{2}]$

e) $x \in]1,5]$

89.

a) ei kuulu

b) kuuluu

c) kuuluu

d) ei kuulu

e) kuuluu

f) kuuluu

g) ei kuuluu

h) kuuluu

i) kuuluu

90.

a) Yhtäsuuruus on mukana, eli 12-vuotiaatkin saavat lasten aterian.

b) Kauppa on auki myös kuun ensimmäisenä päivänä, eli yhtäsuuruus on mukana.

c) Pelata voi vielä, kun kello on 19.59. Klo 20.00 on jo myöhäistä, joten ilmaisun ei käsitettä sisältävän reuna-arvoaan.

d) Yhtäsuuruus on mukana, myös 29-vuotiaat kelpaavat jäseniksi.

e) Epäselvää. Se, pitääkö kotitehtävänä lukea myös Potenssi-luku, riippuu opettajasta.

f) Kyseessä on suljettu väli, seminaaria pidetään varmasti vielä sekä viides että kahdeksas päivä.

g) Suljettu väli ainakin päävoiton suuntaan (pienintä voittoa ei tunneta), sillä päävoitto tuskin on esimerkiksi 99 999,99 euroa.

91.

a) kyllä

- b) ei
- c) kyllä
- d) ei
- e) kyllä

92.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) kyllä
- d) kyllä
- e) kyllä

93.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) kyllä
- d) kyllä
- e) kyllä

95. Käsitellään erilaiset tilanteet kolmessa eri osassa: Jos joko m tai n on nolla, niin $0^2 + n^2 \geq 0 \cdot n$ eli $n^2 \geq 0$, mikä pitää paikkansa kaikilla kokonaisluvuille n .

Symmetrian vuoksi sama pätee myös tapaukselle $m = 0$. Jos sekä m että n ovat nollia, saadaan $0 \geq 0$, mikä on myös tosi epäyhtälö.

Jos m ja n ovat erimerkkiset, niin epäyhtälön vasenpuoli on edelleen neliöönkorotuksien vuoksi positiivinen. Epäyhtälön oikea puoli on kertolaskun merkkisäännön perusteella varmasti negatiivinen. Koska kaikki negatiiviset luvut ovat kaikkia positiivisia lukuja pienempiä, epäyhtälö pätee tässä tapauksessa.

Viimeinen tapaus: m ja n on samanmerkkiset. Epäyhtälön $m^2 + n^2 \geq mn$ vasen puoli muistuttaa binomin neliötä. Täydennetään se vähentämällä molemmilta puolilta epäyhtälöä lauseke $2mn$, jolloin saadaan: $m^2 + n^2 - 2mn \geq mn - 2mn$ eli $m^2 - 2mn + n^2 \geq -mn$, minkä voi kirjoittaa binomin neliön kaavalla muodossa $(m - n)^2 \geq -mn$. Neliöönkorotus varmistaa, että epäyhtälön vasen puoli on aina epänegatiivinen. Koska oletuksen mukaan m ja n ovat samanmerkkiset, tulo $-mn$ on negatiivinen. Jälleen epäyhtälö pitää paikkansa, ja kaikki mahdolliset $m:n$ ja $n:n$ yhdistelmät on käsitelty.

96. Esimerkiksi väite $-2 > 1$ on epätosi. Jos kuitenkin epäyhtälön molemmat puolet korotetaan parilliseen potenssiin, esimerkiksi toiseen, saadaankin tosi väite:

$$(-2)^2 > 1^2 \Rightarrow 4 > 2$$

97. Merkataan vaimon ikää v :llä ja puolisonsa ikää p :llä. Näiden avulla voimme kirjoittaa kaksoisepäyhtälön $v < 30 < p$. Huomataan myös, että $p = 34$. Alle kolmekymppinen täyttää 35 vuotta aikaisintaan kuuden vuoden kuluttua. Lisätään kaksoisepäyhtälöön puolittain 6, jolloin saadaan $v + 6 < 36 < p + 6$. Koska $p = 34$, niin $v + 6 < 36 < 40$, eli puolisonsa on välttämättäkin täyttänyt 40 vuotta.

98. Aloita tiedosta

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

ja sievennä.

99. Opastus: Aloita tiedosta

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

ja sievennä. Yhtäsuuruus pätee, kun $a = b$.

100. $10_9 = 9_{10}$

101. Symmetrisyys pätee, koska jos $x \approx y$, niin aina myös $y \approx x$. Transitiivisuus ei välttämättä päde, sillä ”likimain yhtäsuuruus” on subjektiivista ja tilanteesta riippuvaista (joissain tilanteissa esimerkiksi $9,3 \approx 10$, mutta joskus $9,3 \approx 0$). Refleksiivisyys pätee, sillä jokainen luku on varmasti ainakin suunnilleen yhtäsuuri kuin luku itse.

102.

a) $x = 42$

b) $x = 32$

c) $x = 7$

103.

a) $x = 9$

b) $x = 28$

c) $x = 4$

104. $2x - 10 = 8 \Leftrightarrow 2x = 18$

$\Leftrightarrow x = 9$. Vastaus: Antero keksi luvun 9.

105. $3x + 5 = \frac{1}{2}x, x = -2$

106.

a) $42x + 25$

b) $\frac{1}{1,23}x + 0,5$

107.

a) $x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

b) $x = \frac{2}{13}$

c) $x = -3$

108.

a) $x = -\frac{1}{13}$

b) ei ratkaisuja

c) yhtälö on toteutuu kaikilla reaaliluvuilla

109. $x = 2$

110. kello 13.05.27

111.

a) $x > 6$

b) $x < 63$

c) $y < 2,8$

d) $y \geq -6$

e) $z \geq -883$

f) $z \geq 25$

112.

a) riittää ($22,5 \text{ m}^2 < 30 \text{ m}^2$)

b) ei riitä ($45 \text{ m}^2 > 30 \text{ m}^2$)

c) noin 6,7 m seinälle

113.

- a) $x < -6$
- b) ei ratkaisua

114.

- a) $x > 9$
- b) $\frac{5}{3} < x < 9$
- c) $x < \frac{5}{3}$

115. 8 257 km

116.

- a) $x \geq \frac{2}{3}$
- b) $x \leq 0$
- c) $y \geq 2$
- d) $y \geq -3$
- e) $z \leq -1000$
- f) ei ratkaisuja

117. Muodostettava epäyhtälö on muotoa $\frac{2 \cdot 6 + n}{3} \geq 6,5$, missä $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, josta ratkaisuna saadaan $n \geq 7,5$. Opiskelija tarvitsee siis vähintään arvosanan 8.

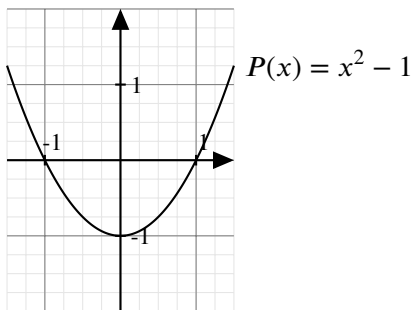
118.

- a) Ylös
- b) Alas
- c) Ylös
- d) Ylös
- e) Ylös
- f) Alas

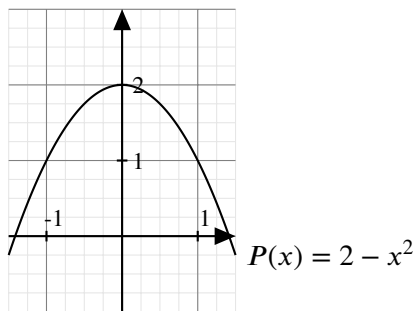
119.

- a) P alaspäin, Q ylöspäin.
- b) nollakohdat: $x = 0$ ja $x = 2$
- c) $x = -1$ tai $x = 1$
- d) 1, sillä kun $x = 0$, $Q(x) = 1$.

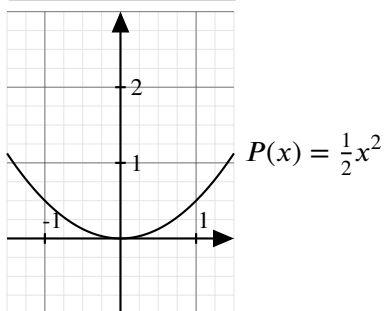
120.



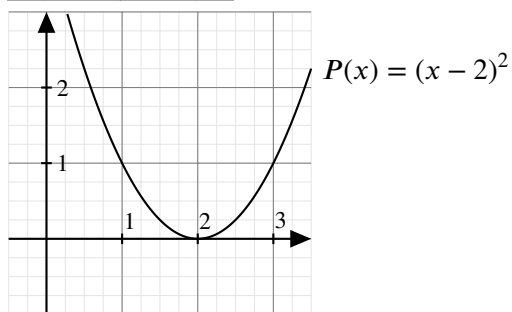
a)



b)



c)



d)

121.

- a) $x = \pm 4$
- b) Ei reaaliaratkaisuja
- c) $x = \pm \sqrt{13}$
- d) $x = \pm 2$

122.

- a) $x = 0$ tai $x = 3$
- b) $x = 0$ tai $x = -4$
- c) $x = 0$ tai $x = \frac{3}{7}$

123.

- a) $(x + 1)^2$
- b) $(x + 3)^2$
- c) $(x - 2)^2$

124.

- a) $x = 3$ tai $x = -1$. Neliöksi täydennettynä $(x - 1)^2 = 4$
- b) $x = -5$ tai $x = 1$. Neliöksi täydennettynä $(x + 2)^2 = 9$
- c) Ei ratkaisua. Neliöksi täydennettynä $(x - 3)^2 = -1$

125.

- a) $x = \pm 10$
- b) Ei ratkaisuja.
- c) $x = \pm \sqrt{10}$
- d) Ei ratkaisuja.
- e) $x = \pm 7$

126.

- a) $x = 0$ tai $x = 72$
- b) $x = -56$ tai $x = 0$
- c) $x = -13$ tai $x = 0$
- d) $x = -21,5$ tai $x = 0$

127.

- a) $x = \pm 6$
- b) $x = 0$ tai $x = 85$
- c) $x = 0$ tai $x = -17$
- d) $x = 0$ tai $x = -2$

128.

- a) $x = 4$ tai $x = 2$. Neliöksi täydennettynä $(x - 3)^2 = 1$.
- b) Ei ratkaisua. Neliöksi täydennettynä $(x + 1)^2 = -3$
- c) $x = 2 \pm \sqrt{11}$ Neliöksi täydennettynä $(x - 2)^2 = 11$.
- d) $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -1\frac{1}{2}$ Neliöksi täydennettynä $(x + \frac{1}{2})^2 = 1$.
- e) $x = -2$ tai $x = \frac{1}{2}$. Neliöksi täydennettynä $(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{25}{16}$

129. 500 metriä

130.

- a) $x = -1$, $x = 1$ tai $x = 7$
- b) $x = -4$, $x = -3$, $x = 3$ tai $x = 4$
- c) $x = 1$ tai $x = 4$

131.

- a) $x = \pm 3$
- b) Ei ratkaisuja
- c) $x = \pm 4$
- d) $x = \pm 1$

132.

- a) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -\frac{1}{2}$
- b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{3}$

133.

- a) $x = 0$ tai $x = 3$
- b) $x = 0$ tai $x = -5$
- c) $x = 0$ tai $x = 2$
- d) $x = 0$ tai $x = \frac{10}{3}$

134.

- a) Vastaukseksi saadaan $1\,414\text{ s} = 23\text{ min }34\text{ s}$. Käytännössä hyvä vastaustarkkuus voisi olla esimerkiksi 25 min.
- b) Tehtävä ei huomioi ilmanvastusta. Ihminen saavuttaa korkeimmillaan rajanopeuden $v_{\text{raja}} \approx 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Tehtävän mallissa putoavan ihmisen nopeus nousee $v_{\text{max}} \approx 141 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ asti. Todellisuudessa putoaminen siis kestää vieläkin kauemmin.

135. Olkoon yhtälö muotoa $ax^2 + bx + 4 = 0$.

Muodostetaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4 = 0 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 4 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuna saadaan $a = \frac{2}{3}$ ja $b = -3\frac{1}{3}$. Yhtälö on siis $\frac{2}{3}x^2 - 3\frac{1}{3}x + 4 = 0$.

Vastauksen voi saada myös ilmaisemalla polynomiyhtälön tekijämuodossa

$a(x-2)(x-3) = 0$. Tässä tarvitaan kuitenkin juurten ja tekijöiden välistä yhteyttä, joka opetetaan vasta myöhemmin tässä kirjassa.

136. $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$

137. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tai $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

138.

a) $x = -5$ tai $x = -1$

b) $x = 3$ tai $x = -1$

c) Ei reaaliratkaisuja

d) $x = 1$ tai $x = \frac{2}{3}$

e) $x = \frac{2}{3}$

139.

a) Ei reaalijuuria

b) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$

c) $x = 3$

d) $x = \frac{-9 \pm 5\sqrt{3}}{6}$

140.

a) Ei ratkaisuja.

b) $\frac{27 \pm \sqrt{684}}{10} = \frac{27 \pm 6\sqrt{19}}{10}$

141.

a) $x^2 - 1 = 0, x \neq 0$

b) $x^2 + x - 1 = 0, x \neq -1$

c) $2y^2 - y - 1 = 0, y \neq 0$

d) $t^2 - t - 1 = 0, t \neq 0, -1$

142. $c \approx 0,00042$ ($c \approx -0,00043$ ei käy)

143. Luvut ovat 3 ja 5.

144. 58 cm:n levyinen

145. Funktiolla f on nollakohta täsmälleen kohdassa $t = 3$. Jos toisen asteen termi kuitataan merkityksettömänä, voidaan käsitellä uutta funktiota g , jonka arvot määritellään kaavalla $g(t) = -\frac{1}{100}t + \frac{3}{200}$. Tämän funktion ainut nollakohta on $t = \frac{3}{2}$. Absoluuttinen virhe on tällöin $3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ja suhteellinen $\frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$.

146. Paraabelin nollakohdat ovat $x = 3$ ja $x = 12$, joten pallo lensi $12 - 3 = 9$ metriä.

147. Kun $t = -\frac{1}{4}$, toisen asteen termin kerroin on 0, ja ainoa ratkaisu on $x = 1$. Kun $t \neq -\frac{1}{4}$ kyseessä on toisen asteen yhtälö ja ratkaisu on $x = 1$ tai $x = \frac{4t-1}{4t+1}$.

148.

a) Merkitään korkokerrointa x :llä.

$$(1\,000x - 20)x - 20 = 1,024 \cdot 1\,000$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{10\,441}}{100} \\ \approx 1,03181211580212$$

Vastaus: 3,2 %

b) Merkitään Viljamin sijoittamaa summaa a :lla.

$$(ax - 20)x - 20 = 1,050a \\ a(x^2 - 1,050) = 20x + 20 \\ a = \frac{20x + 20}{x^2 - 1,050} \\ \approx 2\,776,41224$$

Vastaus: 2 800 €

149.

a) Jarrutusmatka on 100 metriä.

b) Noin 3,5 sekunnin kuluttua. (Todellisuudessa putoamisessa kestää kauemmin, sillä lasku ei huomioi ilmanvastusta.)

150. $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$

151. $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. (Jos negatiivisetkin luvut sallittaisiin, $(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2$ kävisi myös.) Löytyykö vastaava 4 + 3 luvun sarja? Entä pidempi?

152.

a) $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618$

b) Noin 105 cm:n korkeudella.

153.

a) $x = 0$ tai $x = -23$

b) $x = 4$ tai $x = -4$

154.

a) $x = 2 \pm \sqrt{11}$

b) $x = \frac{13 \pm \sqrt{165}}{2}$

c) $x = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{8}$

d) $x = \frac{-12 \pm \sqrt{1614}}{35}$

155. Kirjoitetaan yhtälö muotoon $(x^3 - 2)^2 + (x^3 - 2) - 2 = 0$ ja sovelletaan ratkaisukaavaa niin, että ratkaistaan pelkän x sijaan yhtälöstä lauseke $x^3 - 2$. Näin saadaan $x^3 - 2 = 1$ tai $x^3 - 2 = -2$, joista voidaan edelleen ratkaista $x = \sqrt[3]{3}$ tai $x = 0$.

156. $x = -1$, $x = 0$ tai $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

157.

a) $D = 4$, eli kaksi ratkaisua.

b) $D = -1$, eli ei ratkaisuja.

c) $D = 0$, eli 1 ratkaisu

d) $D = 209$, kaksi ratkaisua

158.

a) Kaksi. $D = 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-4) = 336 > 0$

b) Ei yhtään. $D = 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4 = -48 < 0$

159. Nollakohtien määrä voidaan päätellä diskriminantin arvosta.

- a) alaspäin, 2 nollakohtaa
- b) ylöspäin, ei yhtään nollakohtaa
- c) ylöspäin, 2 nollakohtaa
- d) ylöspäin, 1 nollakohta

160. $c > \frac{25}{4} = 6,25$. (Halutaan $D < 0$, eli $5^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0$.)

161.

- a) Kaksi. $D = (-22)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-25) = 1484 > 0$
- b) Nolla. $D = 10^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-76) = -1724 < 0$
- c) Yksi. $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

162. Sopivat a :n arvot ovat $\frac{1}{2}$, $11 + 6\sqrt{3}$ ja $11 - 6\sqrt{3}$.

163. Tutkitaan nollakohtia diskriminantin avulla:

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6) = 36 - 48 = -12 < 0, \text{ joten polynomilla ei ole nollakohtia.}$$

Se ei siis voi vaihtaa merkkiä missään. Korkeimman asteen termin kerroin on negatiivinen, joten polynomin kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli. Koska nollakohta ei diskriminantin perusteella ole, on paraabelin huippu x -akselin alapuolella, ja siten kaikki polynomin arvot negatiivisia.

164.

$$ax^2 + c = 0 \text{ Joko kaksi ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. } (D \neq 0)$$

$$ax^2 + bx = 0 \text{ Aina kaksi ratkaisua. } (D > 0)$$

165.

- a) Kaksi. $D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4) = 288 > 0$
- b) Kaksi. $D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-10) = 216 > 0$
- c) Yksi. $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$
- d) Kaksi. $D = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-30) = 700 > 0$

166. Pitää olla $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-k) \geq 0$. Siis $k \leq \frac{1}{4}$.

167. $a = 11 \pm 2\sqrt{30}$.

168.

- a) Kaksi, kun $a < 8$, yksi, kun $a = 8$, ja nolla, kun $a > 8$.
- b) Kaksi, kun $-4 < a$ ja $a \neq 0$; yksi, kun $a = -4$ tai $a = 0$, ja nolla, kun $a < -4$.

169. Suunta ” $\Rightarrow$ ”:

$$(c_1x + c_2)^2 = 0 \Leftrightarrow c_1^2x^2 + 2c_1c_2x + c_2^2 = 0 \Rightarrow D = (2c_1c_2)^2 - 4c_1^2c_2^2 = 4c_1^2c_2^2 - 4c_1^2c_2^2 = 0$$

Suunta ” $\Leftarrow$ ”: $D = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac \Leftrightarrow c = \frac{b^2}{4a} \Rightarrow ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = 0$

170.

- a) $-2 < x < 2$
- b) $x \geq 0$ tai $x \leq -1$
- c) ei ratkaisuja
- d) $x > -2$ tai $x < -3$

171.

- a) $\frac{5-\sqrt{57}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{57}}{2}$
- b) $\frac{3-3\sqrt{3}}{2} < x < \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$
- c) $1 - \sqrt{19} < x < 1 + \sqrt{19}$

172.

- a) $x \geq 0$ tai $x \leq -3,25$
- b) $x \geq \sqrt{194}$ tai $x \leq -\sqrt{194}$
- c) $0,875 \geq x \geq 0$
- d) $2\sqrt{\frac{3}{11}} \geq x \geq -2\sqrt{\frac{3}{11}}$

173.

- a) $x \leq -2$ tai $x \geq 2$
- b) $-3 \geq x \leq 1$
- c) Kaikilla x :n arvoilla.
- d) Ei millään x :n arvoilla.

174. 33 autoa/minuutti

175. Funktiolla ei ole nollakohtia ($D < 0$) ja sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Helpompi tapa: $f(x) = (x - 3)^2 + 1 > 0$.

176. Juuria on kaksi, kun $D = 4t^2 - 48t > 0$. Tämä toteutuu, kun $t < 0$ tai $t > 12$.

177.

- a) $1,00 \text{ €} < \text{myyntihinta} < 4,5 \text{ €}$.
- b) $2,75 \text{ €}$, jolloin voitto on $612,50 \text{ €}$.

178. $a < 0$: $-\frac{1}{a} > x > -1$

$a = 0$: $x > -1$

$1 > a > 0$: $x > -1$ tai $x < -\frac{1}{a}$

$a = 1$: $x \neq -1$

$a > 1$: $x \in \mathbb{R}$

179. $p < \frac{-167 - \sqrt{205\,705}}{372}$ tai $p > \frac{-167 + \sqrt{205\,705}}{372}$

180. 2,8 s

181. Pitää olla $D = (-r)^2 - 4 \cdot r \cdot (-1) = r^2 + 4r < 0$. Siis $-4 < r < 0$.

182. $a < 0$: $x \geq -\frac{2}{a}$ tai $x \leq \frac{1}{a}$

$a = 0$: ei ratkaisuja

$a > 0$: $x \geq \frac{1}{a}$ tai $x \leq -\frac{2}{a}$

183.

a) nollakohdat $x = 1$ ja $x = -6$, $P(x) = (x - 1)(x + 6)$

b) nollakohdat $x = \frac{1}{4}$ ja $x = 1$, $P(x) = -2(4x - 1)(x - 1)$

c) nollakohta $x = 2$, $P(x) = (x - 2)^2$

184.

a) $(x - 5)(x + 3)$

b) $\frac{1}{3}(x - 3)^2$

c) $2(2x^2 + x + 1)$, ei jakaudu 1. asteen tekijöihin.

185. $P(x)$:llä ja $R(x)$:llä on kaksi yhteistä tekijää, koska on kaksi kohtaa, jossa molemmat saavat arvon nolla. Vastaavasti $Q(x)$:llä ja $R(x)$:llä on yksi yhteinen tekijä. $S(x)$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä minkään muun polynomin kanssa.

186.

a) $(x + 3)(x - 3)$ (muistikaava)

b) $(2x - 1)^2$ (muistikaava)

c) $4(x - 2)(x + 1)$

187. $P(x) = -(x + 3)(x - 4) = -x^2 + x + 12$

188. Kirjoitetaan polynomi tekijämuodossa ja kerrotaan auki:

$(x - a)(x - b) = x^2 - 2(a + b)x + ab$. Nyt syntyneen polynomin vakiotermi on ab .

189. $P(x) = 5x(x - 5) + 3 = 5x^2 - 25x + 3$

190.

a) $x = \frac{1}{4}$ ja $y = 5\frac{5}{8}$.

b) $x = -\frac{b}{2a}$

191.

a) $(2x + 1)^2$

b) $4(x^2 + x + 1)$

c) $(3 + x)(3 - x)$

192.

a) $(x - 3)(x + 2)$

b) $(x - 1)(x - 7)$

193.

a) $5(x + 3)(x - 1)$

b) $2(2x - 1)(3x - 1)$

c) $-2(2x - 3)(2x + 1)$

194.

a) $-5(2x + 1)(x - 1)$

b) $(4x)(2x - 1)(x - 1)$

195. $P(x) = -2(x + 1)(x - 2)(x - 3) = -2x^3 + 8x^2 - 2x - 2$

196.

a) $k(49x^2 + 7x + 1) = 0$

b) $k(7x^2 \pm x\sqrt{7} + 1) = 0$

197. Totta, sillä polynomin $P(x)$ kerrointen summa on $P(1)$. (Koska $1^n = 1$.)

198. $P(x) = 3x^2 + 4x + 1$

199. Esimerkiksi

a) $P(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ (nollakohdat $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ja $x = 3$)

b) $P(x) = x^2(x - 1)$ (nollakohdat $x = 0$ ja $x = 1$)

c) $Q(x) = x^4$ (nollakohta $x = 0$)

d) $R(x) = x^4 + 1$

200.

a) Nollakohtia on kolme, joten polynomin aste on vähintään 3. (Itse asiassa todellinen aste on 5, mutta sitä on vaikea päätellä silmämääräisesti kuvaajasta.)

b) Vakiotermi on 2, koska $P(0) = 2$

201. $P(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+1)(x-3)$

202. $P(x) = -3(x-1)(x-2)(x-3) - 2 = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 18$

203. Tarkastele polynomien erotuksen nollakohtia.

204.

a) $x = 0$ tai $x = -2$ tai $x = 17$

b) $x = -2$

c) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{7}$

205.

a) $x = 0$ tai $x = 2$ tai $x = 3$

b) $x = \pm 2$

c) $x = 0$ tai $x = \pm 1$

206.

a) $x = \pm\sqrt{6}$

b) $x = \pm\sqrt{5}$

c) $x = \pm\sqrt{3}$ tai $\pm\sqrt{5}$

207.

a) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = 2$

b) $x = 0$ tai $x = -5$ tai $x = \pm 1$

c) $x = 4$ tai $x = \pm 2$

208.

a) $x = \pm\sqrt{1}$

b) $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{1}$

c) $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (= \pm\sqrt[4]{\varphi})$ (luku φ on kultaisena leikkauksena tunnettu vakio)

209.

a) $x = \pm 2$

b) $x = 0$ tai $x = \pm 2$

c) $x = \sqrt[3]{3}$ tai $x = -1$

d) $x = \pm 1$

210. Luvut ovat $-1, 0$ ja 1 tai $14, 15$ ja 16 .

211. $x = 0$, $x = 1$ tai $x = \sqrt[113]{5}$

212.

a) $x = 0$ tai $x = \pm 1$

b) $x = 0$ tai $x = \pm 1$ tai $x = \pm 2$

213. $x = 0$ tai $x = -2 + \sqrt{3}$ tai $x = -2 - \sqrt{3}$

214. Muuttujan arvoilla 0 ja 1

215. $a = 30$. Yhtälön ratkaisut ovat $1, \frac{1}{5}$ ja $-\frac{1}{6}$. (Vihje: kirjoita kolmannen asteen polynomi mielivaltaisen, tuntemattoman toisen asteen polynomin ja binomin $x - 1$ tulona ja avaa tulosta sulkeet. Vertaa kolmannen asteen polynomin kertoimiin.)

216. $x = -1$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

217. $x = 2$

218.

a) $x \leq 1$ tai $2 \leq x \leq 3$

b) $1 < x < 2$ tai $x > 3$

c) $x < 1$ tai $2 < x < 3$

219. $x < 0$ tai $0 < x < 1$

220. $-1 \leq x \leq 1$

221. Ei ratkaisuja.

222. $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$

223. $P(x) > 0$ kun $x > \sqrt{a}$ tai $-\sqrt{a} < x < 0$.

224.

a) $x \leq -3$ tai $2 \leq x < 5$

b) $-1 \leq x < 0$ tai $x \geq 1$

225. $x \leq 0$ tai $x = \frac{3}{2}$

226. $x > \sqrt[5]{2}$ tai $-1 < x < 1$

227.

a) $x \in \mathbb{R}$

b) Epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja

c) Vinkki: Käytä tehtävänannon havaintoa ja tutki, millä x :n ja y :n arvoilla summattavat saavat arvon 0

228.

a) $-5 < x < 0$ tai $3 < x$

b) $x < 0$ tai $x = 1$

229. $x < -1$ tai $-1 < x < 0$

230. Koska mielivaltaisen vakion a voidaan aina tulkita olevan kerroin muuttujan potenssille x^0 .

231. Vähennyslasku määritellään $a - b = a + (-b)$, eli vastaluvun avulla kaikki vähennyslaskut voidaan tulkita yhteenlaskuina.

232. Niin kuin yhdenkin muuttujan polynomin tapauksessa, korkein termin aste eli muuttujan potenssin eksponentti määrää koko polynomin asteen. Jos termissä on kerrottuna eri muuttujia keskenään, termin asteluku on näiden muuttujien potenssien eksponenttien summa.

233. *Kahta* asiaa: toisaalta mikä tahansa tulo, jossa tekijänä on nolla, on arvoltaan nolla. Toisaalta, jos tulo on nolla, niin tiedetään, että varmasti ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla.

234. Tekijät ovat alhaisempaa astetta kuin alkuperäinen polynomi, kunhan tekijänä ei ole vakiopolynomi.

235. Potenssiinkorotettava lausekkeen suurin aste määrää koko polynomin termin. Koska sulkeita avattaessa x^3 lopulta korotettaisiin potenssin 15, sinne tulisi korkeimmaksi termiksi $x^{3 \cdot 15} = x^{45}$. Asteen saa siis selville kertomalla korkeimman asteen termin eksponentti potenssilla, johon sulkeisiin laitettu polynomi korotetaan.

236. Epäyhtälö (muu kuin $\neq$) kuvaa järjestystä, ja kahden toisistaan poikkeavan reaali-luvun keskinäinen järjestys muuttuu aina, jos molemmat muutetaan vastaluvuikseen (eli on kerrottu negatiivisella luvulla) – aiemmin pienemmästä luvusta on tullutkin nyt suurempi. Totuusarvon säilyttämiseksi tulee sen vuoksi kääntää epäyhtälömerkin suunta.

237. b) $1, 0, -1, \sqrt{2}$ ja $-1\ 337$

238. d) $ab = 0$

239. b) $52 > 520 : 100$

240. c) -3 ja 50

241. e) 7 .

242. c) 0

243. e) $4x^2 - 4x + 1$

244. c) $f(0) = g(0)$

245. e) neljä

246.

- a) Tosi
- b) Epätosi
- c) Tosi
- d) Tosi
- e) Tosi

247.

- a) Epätosi
- b) Tosi
- c) Tosi

248.

- a) $3x$
- b) x^3
- c) $-10x^2$
- d) $14x^2$
- e) $-3x^5$

249.

a) $3x^3 - x^2 + 3x$

b) $2x - 8$

c) $2x^2 + 2x + 7$

d) $3x^2 - 21x$

e) $-6x^7 + 24x^4 - 2x^2$

250.

a) $x^2 + 2x - 8$

b) $3a^2 - 2ab - b^2$

c) $a^2 + 6a + 9$

d) $x^2 - 2x + 1$

e) $16x^2 - 1$

251.

a) $x(4x + 1)$

b) $5xy(x^2 + 2y)$

c) $(y + 3)(y - 3)$

d) $(x - 2)^2$

e) $(x^3 + 10)(x - 5)$

252.

a) $x(x - 1)^2$

b) $(x - \frac{1}{2})^2$

c) $(3 + x^2)(3 - x^2)$

253.

a) $x^4 - 2x^2 + 1$

b) $a^{12} + 6a^6b^3 + 9b^6$

c) $-(144 - 9x^2) = 9x^2 - 144$

d) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

254.

a) $(x - 2)^2$

b) $(3y + 1)^2$

c) $(7 - 2x)(7 + 2x)$

255.

a) $2x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 13x - 12$

b) $x^5 - x^3 - 4x^2 - 2x - 4$

c) $x^5 - 1$

d) $\frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{15}x^2 - \frac{7}{15}x - \frac{2}{3}$

256.

a) $x = 0$ tai $x = 1$

b) $x = -3$, $x = 2$ tai $x = -2$

c) $x = 0$ tai $x = 4$

257. $x = 3$, $x = -2$ tai $x = 1$

258. Koska $x^6 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$. (Parilliset potenssit.)

259.

a) Opastus: Kerro sulut auki.

b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

260.

a) $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 1$

b) $-2 < x < 0$ tai $1 < x$

c) Vähintään 3. (Kuvaajassa näkyvän alueen ulkopuolella voisi olla lisää.)

261. $(a + b + 4)(a + b - 4)$. (Opastus: Älä kerro aluksi sulkuja auki. $16 = 4^2$)

262.

a) 0

b) $(x - y)^2$

263.

a) $x = \frac{7}{3}$

b) $x = -\frac{5}{6}$

c) 15

264.

a) $2 \leq x \leq 7$

b) $-3 < y \leq 0$

c) $z < 5$

265.

a) $x > -2$

b) $x < -\frac{5}{2}$

c) $x \geq -\frac{1}{4}$

266.

a) $r = 3$

b) $r \geq 3$

c) $y < 2$

d) $x = -12\frac{2}{3}$

e) $x < 9\frac{4}{5}$

267. $-\frac{3}{4} \leq x < 1$

268. 7 h:n tai sitä pidemmissä vuokrissa

269. Yksi karahvi painaa yhden kuudesosakirahvin.

270. $x \geq \frac{a}{a+2}$, kun $a > -2$

$x \leq \frac{a}{a+2}$, kun $a < -2$

$x \in \mathbb{R}$, kun $a = -2$

271.

a) $x = \pm\sqrt{13}$

b) $x = 0$ tai $x = -\frac{2}{5}$

c) $x = -3$ tai $x = \frac{1}{2}$

272.

a) $x = -2$ tai $x = -1$

b) $x = 3/2$ tai $x = -4$

c) $x = 4$ tai $x = -5/3$

d) $x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$

e) $x = 3$ tai $x = -8$

273.

a) $\frac{1 \pm \sqrt{53}}{2}$

b) Ei ratkaisua reaalilukujen joukossa.

c) $1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $x = 1$ tai $x = 2$

274. $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

275.

a) $-2 < x < 3$

b) $x \leq 0$ tai $x \geq 5$

276. Vähintään 9, korkeintaan 21. Ratkeaa epäyhtälöstä $x(30 - x) > 186$.

277. $k = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Diskriminantti on $D = (k - 1)^2 - 4 \cdot k \cdot 3$.

278. $c = -40$

279. $-1 < x < -\frac{4}{7}$ tai $2 < x < 5$. Huomioi, että suorakulmion B sivut ovat positiiviset vain, kun $-1 < x < 5$.

280. 7,7 cm

281. $x = 0$ tai $x = \sqrt[5]{\frac{5}{2}}$

282.

a) esimerkiksi $x^4 = -1$

b) esimerkiksi $x^4(x + 1) = 0$

c) mahdotonta

283. $x = \pm\sqrt{3}$

284. $x = 0$ tai $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

285.

a) $x = 0$ tai $x = -7$

b) $x = 0$ tai $x = 4$

c) $x = 0$ tai $x = -3$

d) $x = 0$ tai $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

286. Luvut, jotka ovat pienempiä kuin -1 ja luvut välillä $]0,1[$.

287.

a) $0 < x < \sqrt[3]{5}$

b) $x < -3$ tai $0 < x < \frac{1}{2}$

288. $\sqrt{12} \text{ m} \approx 3,46 \text{ m}$

289. $x = \frac{6}{\sqrt[5]{2}-1}$

290. $x \approx 0,69$, $x \approx 1,86$ tai $x \approx 3,03$.

291.

a) Ei ole polynomi, sillä muuttujan t eksponentti ei ole luonnollinen luku.

b) Yhdeksän

c) 22

d) Esimerkiksi 1,9665 (reuna-arvot eivät kuulu välille!)

e) $1 + \sqrt{2}$

f) $x = 2$

g) laskeva suora

h) Suoraan muistikaavalla saadaan $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

292.

a) Avaa ensimmäisestä yhtälöstä sulut, kumoa ykköset ja yhdistä ensimmäisen asteen termit oikealle – totea yhtäläisyys

b) Korottamalla $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ neliöön ja käyttämällä muistikaavoja saadaan $11 + 4\sqrt{6}$.

293.

a) $x \leq -\frac{6}{5}$

b) $\frac{2}{5} < x < 2$

294.

a) $z = 0$ tai $z = \frac{1}{2}$ tai $z = \sqrt{2}$

b) $z = -1$ tai $z = 1$

295. Kaikilla paitsi $k = 0$

296. Jos pankin korkokerroin on $x = (1 + \frac{p}{100})$, niin vuoden kuluttua tilillä on rahaa $1\,000x$. Kahden vuoden kuluttua tilillä on rahaa $((1\,000x) + 1\,000)x$, mikä sisältää molemmat talletukset ja kaksi vuosikorkoa. Saadaan yhtälö $((1\,000x) + 1\,000)x = 2\,100$ eli sievennettynä ja uudelleen järjesteltynä $1\,000x^2 + 1\,000x - 2\,100 = 0$. Ratkaisukaavalla tai laskimella saadaan kaksi ratkaisua, joista hyväksytään vain positiivinen: $x = \frac{1}{10}(\sqrt{235} - 5) \approx 1,033$. Pankin tarjoama vuosikorkokanta on siten 3,3 %.

297. -6 (vetoaminen paraabelin symmetrisyyteen, että pohja on nollakohtien puolivälissä, tai vastaus nähdään neliöön täydennetystä lausekkeesta perustellen, että reaaliluvun neliö voi olla vähintään nolla)

298.

a) Purkamalla sulkeet lausekkeesta $(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$ saadaan vaadittu $x^3 \pm y^3$. (Huomaa, toisiaan vastaavat etumerkit!)

b) Kirjoitetaan epäyhtälö $z^3 - 8 \geq z - 2$ a-kohdan kaavan avulla muodossa $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) \geq z - 2$. Epäyhtälöstä voidaan jakaa tekijä $z - 2$ pois, mutta sitä varten tutkitaan erikseen tilanteet $z = 2$, $z < 2$, ja $z > 2$.

Jos $z = 2$, niin alkuperäinen epäyhtälö yksinkertaistuu muotoon $0 \geq 0$, mikä pitää paikkansa.

Jos $z > 2$, niin $z - 2 > 0$, eli lauseke $z - 2$ on positiivinen. Jakamalla epäyhtälö puolittain kyseisellä lausekkeella säilyttää suuruusjärjestyksen, eli epäyhtälömerkkiä ei tarvitse kääntää. Siis epäyhtälöstä $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) \geq z - 2$ on yhtäpitävä epäyhtälön $z^2 + 2z + 4 \geq 1$ kanssa. Tästä saadaan edelleen toisen asteen polynomiepäyhtälö $z^2 + 2z + 3 \geq 0$. Vasemman puolen polynomin diskriminanttia tutkimalla selviää, että kyseisellä polynomilla ei ole nollakohtia. Koska lisäksi kyseisen polynomin kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, voidaan päätellä, että polynomi $z^2 + 2z + 3$ saa vain positiivisia arvoja. Epäyhtälö $z^2 + 2z + 3 \geq 0$ pitää siis paikkansa kaikilla kahta suuremmilla muuttujan z arvoilla.

Jos $z < 2$, epäyhtälö $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) \geq z - 2$ muuttuu muotoon $z^2 + 2z + 4 \leq 1$ eli $z^2 + 2z + 3 \leq 0$. Aiemmin jo todettiin, että vasemman puolen polynomi on aina positiivinen, joten epäyhtälö ei pidä paikkaansa millään kahta pienemmällä z :n arvoilla.

Yhdistämällä osatulokset päädytään päätelmään, että alkuperäisen epäyhtälön $z^3 - 8 \geq z - 2$ ratkaisu on $z \geq 2$.

299.

- a) Ei ole, sillä muuttujan t eksponentti (-2) ei ole luonnollinen luku.
- b) kuusi
- c) 18
- d) $\pi < x \leq 42$
- e) Suoraan muistikaavalla saadaan $y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$.
- f) $x + 10^{51}$
- g) alaspäin avautuva paraabeli
- h) $x = -23$
- i) kuusi

300.

- a) $t = \pm 3, t = 0$ tai $t = 1$
- b) $t = 0$ tai $t = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ tai $xt\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$

301. Diskriminantin lauseke on $16a^2 + 4a$, ja yhtälöllä on yksi reaalijuuri (kaksoisjuuri) jos ja vain jos diskriminantin arvo on nolla. Ratkaistaan siis yhtälö $16a^2 + 4a = 0$.

$$16a^2 + 4a = 0$$

$$4a(4a + 1) = 0$$

Eli $4a = 0$ tai $4a + 1 = 0$. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan ratkaistua $a = 0$, ja toisesta $a = -\frac{1}{4}$.

302. Osoitetaan ensin, että keskiarvo $\frac{a+b}{2}$ on suurempi kuin a :

$$a < b \qquad || + a$$

$$2a < a + b \qquad || : 2$$

$$a < \frac{a+b}{2}$$

Osoitetaan sitten, että keskiarvo on pienempi kuin b :

$$\begin{aligned} a &< b & || + b \\ a + b &< 2b & || : 2 \\ \frac{a + b}{2} &< b \end{aligned}$$

Koska keskiarvo on suurempi kuin a mutta pienempi kuin b , on se a :n ja b :n välissä. (Todistuksen kannalta ei ole väliä, minkä merkkisiä a ja b ovat.)

303. $n = -5$

304. Nollakohtien erotusfunktion määrittelee yhtälö $f(a) = \frac{\sqrt{4-8a^2}}{a}$.

Määrittelyjoukkoa rajoittavia tekijöitä ovat neliöjuuri ja jakolasku. Nimittäjän perusteella vaaditaan $a \neq 0$, neliöjuuren perusteella $4 - 8a^2 \geq 0$. Epäyhtälöstä saadaan ratkaisuksi $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Yhdistämällä tiedot saadaan määrittelyjoukoksi kaksiosainen reaalilukuväli, jonka osat erottaa luku nolla: $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \setminus \{0\}$.

Arvojoukon voi päätellä asettamalla funktion arvoksi tuntematon t ja ratkaisemalla yhtälöstä muuttuja x :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4-8x^2}}{x} &= t \\ \sqrt{4-8x^2} &= tx \\ 4-8x^2 &= (tx)^2 = t^2x^2 \\ t^2x^2 + 8x^2 &= 4 \\ (t^2 + 8)x^2 &= 4 \\ x^2 &= \frac{4}{t^2 + 8} \\ x &= \pm \frac{2}{\sqrt{t^2 + 8}} \end{aligned}$$

Huomataan, että saadun lausekkeen perusteella ei ole mitään syytä rajoittaa t :n arvoja. Funktion arvojoukko on siis koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

305.

a) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

b) Binomin kuutioksi täydentämällä saadaan yhtälö potenssiyhtälö $(x - 1)^3 = 8$, jonka reaalityhtälönä $x = 3$

306.

a) $P(q) = 12,9q - 10q - 500 = 2,9q - 500$

b) Merkataan kilogrammahinnan euromääräistä lisäystä x :llä. Nyt voittofunktion määrittelevä yhtälö on $P(q, x) = (12,9 + x)(q - 50x) - 10(q - 50x) - 500$, eli uusi kilogrammahinta on $12,9 + x$ ja myynnin määrä $q - 50x$. Sijoitetaan tehtävänannossa annettu $q = 180$, niin saadaan

$P(180, x) = (12,9 + x)(180 - 50x) - 10(180 - 50x) - 500$. Ottamalla tästä tai jo aiemmasta muodosta yhteinen tekijä saadaan lyhyempi muoto

$$P(180, x) = (12,9 + x - 10)(180 - 50x) - 500 \text{ eli}$$

$$P(180, x) = (2,9 + x)(180 - 50x) - 500 \text{ (vrt. a-kohdan sievennetty lauseke).}$$

Liiketoiminta on tappiotonta, kun $P(x) \geq 0$, missä $P(x) = 0$ tarkoittaisi tilannetta, että kauppiaan tulot kattavat täsmälleen kaikki kustannukset. Ratkaisemme siis epäyhtälön $(2,9 + x)(180 - 50x) - 500 \geq 0$, joka sievennettynä on $-50x^2 + 35x + 22 \geq 0$.

Polynomin $-50x^2 + 35x + 22$ nollakohdat ovat ratkaisukaavan tai laskimen ratkaisuohjelman perusteella $x = -0,4$ ja $x = 1,1$. Koska polynomin korkeimman asteen termin kerroin on negatiivinen, olisi polynomin kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli, ja siten kuvaajan perusteella voidaan päätellä, että funktio P saa positiiviset arvonsa nollakohtiensa välissä. Nollakohtia $x = -0,4$ ja $x = 1,1$ vastaavat kilohinnat ovat $12,9 - (-0,4) = 13,3$ ja $12,9 - 1,1 = 11,8$, molemmat yksikössä €/kg.

Jotta myyntitappiolta vältyttäisiin, kauppiaan tulee asettaa kilohinnaksi vähintään 11,8 €/kg ja korkeintaan 13,3 €/kg. (Näiden rajojen välillä tulee voittoa., rajojen ulkopuolella tappiota.)

307.

a) Ei ole, sillä muuttujan k eksponentti $\frac{1}{2}$ ei ole luonnollinen luku.

b) kuusi

c) 18

d) $\pi < x \leq 42$

e) $x \in [\frac{2}{3}, 100]$

f) Jos $x \propto y$, niin voidaan kirjoittaa $x = ky$, missä k on vakio. Yksiterminen lauseke ky on polynomi.

308. Puretaan sulkeet auki ja täydennetään binomien neliöiksi.

$$\begin{aligned}(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) &= a^2c^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 + n^2b^2d^2 \\&= a^2c^2 + n^2b^2d^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 \\&= a^2c^2 + n^2b^2d^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 \\&\quad + 2nabcd - 2nabcd \\&= a^2c^2 + 2nabcd + n^2b^2d^2 + na^2d^2 \\&\quad - 2nabcd + nb^2c^2 \\&= (ac + nbd)^2 + na^2d^2 - 2nabcd + nb^2c^2 \\&= (ac + nbd)^2 + n(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) \\&= (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2\end{aligned}$$

Huom.! Voi myös ”lähteä lopusta”, eli purkaa lauseke $(ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2$ ja sitten ryhmitellä vastaus tulomuotoon $(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2)$. Kumpikin käy.

309. Ammus osuu maahan noin 3,22 sekunnin päästä.

310. Ei millään t :n reaalityöarvoilla.

311. Kun $1 - \sqrt{2} < x < 0$ tai $x > 1 + \sqrt{2}$

312. $t^5 - t^4 = t^2 - t^3$ vastaa yhtälöä $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 = 0$, jonka taasen saa yhteisen tekijän (useaan kertaan) ottamalla muotoon $t^2(t - 1)(t^2 + 1) = 0$, eli reaaliset nollakohdat ovat $t = 0$ ja $t = 1$.

313. Alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $y^{2n} - y^n = 0$ kanssa. Jaetaan tekijöihin ja sovelletaan tulon nollasääntöä:

$$\begin{aligned}y^{2n} - y^n &= 0 \\(y^n)^2 - y^n &= 0 \\y^n \cdot y^n - y^n &= 0 \\y^n(y^n - 1) &= 0\end{aligned}$$

Eli joko $y^n = 0$ tai $y^n - 1 = 0$. Ensimmäinen yhtälö voi päteä vain, jos $y = 0$. (Jos käsitellään n :n eri arvoja, niin eksponenttifunktio ei voi saada milloinkaan arvoa 0.)

Tällöin vaaditaan yksikäsitteisyyden vuoksi $n \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty.

Toisesta yhtälöstä saadaan $y^n = 1$, joka voi olla tosi vain, jos joko $n = 0$ ja $y \neq 0$ (minkä tahansa nollasta poikeavan luvun nollas potenssi on arvoltaan yksi) tai sitten $y = 1$ ja n on mielivaltainen.

Yhtälön ratkaisut ovat siis:

$$y = 0 \text{ ja } n \neq 0$$

$$n = 0 \text{ ja } y \neq 0$$

$$y = 1 \text{ ja mikä tahansa } n$$

314. Lausekkeen perusteella nollakohdat ovat $\frac{b}{a}$, $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ ja $\frac{a}{b}$. Koska $0 < a < b$, niin a on positiivinen, ja kaksoisepäyhtälö voidaan jakaa sillä niin, että järjestys säilyy ("merkkien suuntaa ei tarvitse kääntää"): $0 < 1 < \frac{b}{a}$. Samoin voidaan tehdä b :llä: $0 < \frac{a}{b} < 1$. Vertailemalla nähdään, että selvästi $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$. Kolmas nollakohta on kahden muun aritmeettinen keskiarvo, joten se on varmasti niiden välissä.

315.

a) On, sillä sievennetyssä muodossa $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}t$ on selvästi ensimmäisen asteen polynomi.

b) Yhdeksän

c) 6

d) $t \in]\infty, \pi]$

e) $x = 2$

f) $x = 2$

316. $P(2) = 0 \Rightarrow (k^2 + 2k) \cdot 2 + 2k = 0$

$$k^2 \cdot 2 + 2k \cdot 2 + 2k = 0$$

$$2k^2 + 4k + 2k = 0$$

$$k^2 + 2k + k = 0$$

$$(k + 1)^2 = 0$$

$$k + 1 = 0$$

$$k = -1$$

Tällöin siis $P(x) = (1 - 2)x - 2 = -x - 2$, jonka kuvaaja on laskeva suora.

317. Diskriminantista $a^2 + 4a = 0$, josta kaksi juurta: $a = 0$ tai $a = -4$.

Tapaus $a = 0$:

$$x^2 + 0x - 0 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Tapaus $a = -4$:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

318. Merkataan x :llä kulkeneen datan määrää megatavuissa. Tällöin tarjouksen A hinta on $A(x) = 40$ (hinta aina 40 euroa, vakiofunktio) ja tarjouksen B hinta määritellään paloittain:

$$B(x) = \begin{cases} 25, & \text{kun } x \leq 100 \\ 0,12(x - 100) + 25, & \text{kun } x > 100 \end{cases}$$

Yhtäsuuruuden voi merkitä vaihtoehtoisesti myös jälkimmäisen lausekkeen ehtoon: $x \geq 100$. Jälkimmäisessä ehdossa on pelkän x :n sijaan $x - 100$, jotta datamäärän lasku alkaisi nolasta, eikä heti sadan megatavun rajan ylitettyä tulisi $0,12 \cdot 100 = 12$ euron lisälaskua.

Alle sadan megatavun käytössä tarjous A ei voi olla halvempi, koska $40 > 25$. Sitä suuremmalla käytöllä sen sijaan tämä on mahdollista. Ratkaistaan siis epäyhtälö $40 < 0,12(x - 100) + 25$, josta selviää, millä x :n arvoilla tarjous A on halvempi.

$$40 < 0,12(x - 100) + 25$$

$$15 < 0,12(x - 100)$$

$$125 < x - 100$$

$$225 < x$$

Tarjous A on siis halvempi, kun dataa siirretään kuukaudessa yli 225 megatavua.

319. Sieventämällä saadaan, että ratkaisut ovat muotoa $y = n^n(1 \pm \sqrt{1 + 2n})$.

Sijoittamalla $n = 50$ saadaan laskimesta kymmenpotenssimuodoiksi $-8,04 \cdot 10^{85}$ ja $9,81 \cdot 10^{85}$.

320. $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 2x = x(x - \frac{1}{2})(x^2 - 4)$, eli $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \pm 2$.

321.

a) Reaalilukujen joukko poislukien $t = -\frac{1}{3}$ ja $t = \pi$ eli $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, \pi\}$

b) y -akseli leikkautuu, kun $t = 0$, eli pisteessä $(0, \frac{\pi}{3})$. t -akseli leikkautuu vain yhdessä pisteessä: $(-\pi, 0)$, koska määrittejoukko ei sisällä funktion lausekkeen osoittajan toista nollakohtaa $-\frac{1}{3}$.

322. Katso luku Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava. (Johdosta on olemassa erilaisia variantteja: olennaisin vaihe on neliöksi täydentäminen.)

323. $x = 0$ tai $x = 4$

324.

a) $x > -3$

b) $x = -7$

325. $x = 0$ tai $x = 2$

326. $x = 4$

327. $x = 3$

328. $2x$

329. $x + 1$

330. $x < \frac{21}{22}$

331. 6

332.

a) $(x + 2)(x - 1)$

b) $A = \frac{1}{3}$ ja $B = -\frac{1}{3}$

333.

a) $x = 3$

b) $x = 0$ tai $x = -1$

c) $(x - 2)(x - 7)$

334. $x = -\frac{1}{12}$

335. $1 < x \leq 4$

336. $-1 \leq x \leq 2$

337. $4ab$

338. $x \geq \frac{3}{\sqrt{7}-4}$

339. $x = 2$ tai $x = -2$

340. $x = 0$ tai $x = -\frac{6}{7}$

341. $2\sqrt{a}$

342. $x > \frac{3}{2}$

343. $p = 4, q = -2$

344. $x = 0$ tai $x = 5$

345. $x = -\frac{3}{2}$

346. $x \leq -\frac{1}{3}$

347. $x < \frac{5}{3}$

348. $x < -\frac{3}{4}$

349. $x = -\frac{2}{7}$ tai $x = 0$ tai $x = 1$

350. $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{2}$

351. $x < \frac{2}{7}$

352. $x = 0$ tai $x = \frac{6}{7}$

353. $2x^3 + 6x$

354. $x = -\frac{1}{2}$

355. $x = \pm\sqrt{5}$

356. $-6 < a < 2$

357. $\frac{2x}{1-x^2}$

358. $x = \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{5})$ tai $x = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{5})$

359. $x < \frac{3}{2}$

360. $-2 \leq x \leq 0$

361. $x < 1, x \neq 0$

362. $x = -2$ tai $x = \frac{1}{2}$

363.

a) $x = a$, jos $a \neq 2$ ja $a \neq 1$

b) $x \neq 1$, jos $a = 2$

c) ei ratkaisua, jos $a = 1$

364. Toinen kasvaa kahdella ja toinen ei muutu.

365. $a \leq -\frac{19}{3}$ tai $a \geq \frac{17}{3}$

366.

a) $5,0_{10}$

b) $1,15625_{10}$

c) $37,8125_{10}$

367.

a) $111,0_2$

b) $10,1_2$

c) $1011,0011_2$

369.

a) 110100_2

b) 110100100000_2

c) $101,1_2$

370.

a) 151

b) Ei ole oikea roomalainen luku.

c) Ei ole oikea roomalainen luku.

d) 251

- e) 386
 f) Ei ole oikea roomalainen luku.
 g) Ei ole oikea roomalainen luku.
 h) 493
 i) 649

371.

- a) CCLXXVIII, 9 merkkiä
 b) DCCXII, 6 merkkiä
 c) MCDLXXVIII, 10 merkkiä
 d) MMMCMXCIX, 9 merkkiä

372. $10_n = 1 \cdot n^1 + 0 \cdot n^0 = n$, eli $10_n \cdot 10_n = n \cdot n = n^2 = 1 \cdot n^2 + 0 \cdot n^1 + 0 \cdot n^0 = 100_n$.

Väite siis pätee kaikilla kantaluvuilla. (Huomaa, että välivaiheiden eksponentit ja kertoimet ovat kymmenjärjestelmän lukuja.)

	.	1	10	11	100
	1	1	10	11	100
373.	10	10	100	110	1000
	11	11	110	1001	1010
	100	100	1000	1010	10000

374. 10 010 100

Hakemisto

A

alaspäin aukeava, 158
aste, 13
asteluku, 13
avoin väli, 61

B

bikvadraattinen yhtälö, 124
binäärijärjestelmä, 151
binomi, 13
binomin neliö, 31
bitti, 152

D

desimaalijärjestelmä, 151
diskriminantti, 99

E

epänegatiivinen, 38

H

heksadesimaalijärjestelmä, 151
huippu, 160

K

kaksoisjuuri, 100
kerroin, 12
kymmenjärjestelmä, 151

L

lukujärjestelmä, 151

M

merkkikaavio, 128
monomi, 13
muistikaavat, 30

N

nolla, 153
nollakohta, 52
numeromerkki, 151

O

oktaalijärjestelmä, 151

P

paikkajärjestelmä, 151
paraabeli, 77
polynomi, 11
polynomifunktio, 16
polynomin aste, 13
puoliavoin väli, 61

R

roomalaiset luvut, 153

S

suljettu väli, 61

T

tekijä, 43
termi, 12
trinomi, 13
tukkimiehen kirjanpito, 153

tulomuoto, 43

tulon nollasääntö, 39

V

väli, 60

vakiotermi, 13

Y

ylöspäin aukeava, 158